



**APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL PADA  
MASALAH KONSENTRASI ZAT GULA DALAM  
PRODUKSI SIRUP**

**(Studi Kasus: Produk Nalla Semarang)**

skripsi

disajikan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains Matematika

oleh

Siti Lita Fauziyah

4150405014

PERPUSTAKAAN  
**UNNES**

JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2009

## **PERNYATAAN**

Saya menyatakan bahwa yang tertulis di dalam skripsi ini benar-benar hasil karya saya sendiri, bukan jiplakan dari karya tulis orang lain, baik sebagian atau seluruhnya. Pendapat atau temuan orang lain yang terdapat dalam skripsi ini dikutip atau dirujuk berdasarkan kode etik ilmiah.

Semarang, September 2009

Siti Lita Fauziah  
NIM. 4150405014



## PENGESAHAN

Skripsi ini telah dipertahankan didepan sidang panitia ujian skripsi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang pada:

Hari :  
Tanggal : September 2009



Panitia Skripsi

Ketua	Sekretaris
Dr. Kasmadi Imam S., MS. NIP.19511115 197903 1 001	Drs. Edy Soedjoko, M.Pd. NIP 19560419 198703 1 001
	Penguji Utama
	Isnaeni Rosyida S.Si, M. Si. NIP 131993875
Penguji/Pembimbing I	Penguji/Pembimbing II
Dr. St. Budi Waluya NIP.132046848	Drs. Supriyono, M. Si. NIP 130815345

## MOTTO DAN PERSEMBAHAN

### Motto :

*“When you have taken a decision, put then trust in Allah”.*

*“Wahai masa depan, engkau masih dalam kegaiban. Maka aku tidak akan pernah bermain dengan khayalan dan menjual diri hanya untuk sebuah dugaan. Akupun tak bakal memburu sesuatu yang belum tentu ada, karena mungkin esok hari tidak ada sesuatu. Esok hari adalah sesuatu yang belum diciptakan dan tidak ada satupun darinya yang dapat disebutkan, HARI INI MILIK KITA”.*

### Persembahan :

1. *Suamiku tersayang, Riagus Ibnu Zainuri al Izzani yang selalu sabar mendampingiiku, I'm very proud of you.*
2. *Abii (Soleh) dan Umii (Solikhiah) yang selalu mendukung dan mendoakan perjuanganku dalam menuntut ilmu. Terimakasih untuk segala yang kalian berikan untukku, semoga Allah merahmati dan membalas segala kebaikan kalian dengan yang lebih baik dan lebih banyak di dunia dan akhirat.*
3. *Adikku (Fuad, Imah, Farid dan Haimin) yang kusayang selalu, terimakasih telah memberiku semangat. Jadilah insan yang berahlak qur'ani.*
4. *Mba Tabah, Mba Weni, Umi Eka dan Umi Uji, my spiritual teacher.*
5. *My best friend Mba Tania, Lina, Nana, Nunung, Evi, Silmy dan Umi, terimakasih telah menerima aku apa adanya.*
6. *Teman –teman Matematika angkatan 2005.*
7. *Teman-teman “Calissta cost” dan Rumah prestasi “shafiyya binti abdil Muthalib” Pesantren Basmala Indonesia.*

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum. Wr. Wb.*

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “ *Aplikasi Persamaan Diferensial Pada Masalah Konsentrasi Zat Gula Dalam Produksi Sirup (Studi Kasus: Produk Nalla Semarang)*”. Skripsi ini disusun guna melengkapi persyaratan penyelesaian studi Strata 1 untuk mencapai gelar Sarjana Sains pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.

Pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Sudijono Sastroatmodjo, M.Si, Rektor UNNES yang telah memberi ijin penulisan skripsi ini.
2. Dr. Kasmadi Imam S., M.S, Dekan FMIPA UNNES.
3. Drs. Edy Soedjoko, M.Pd, Ketua Jurusan Matematika.
4. Dr. St. Budi Waluya, Pembimbing Utama yang telah banyak memberikan bimbingan, dorongan, dan saran dalam penyusunan skripsi ini.
5. Drs. Supriyono, M.Si, Pembimbing Pendamping yang telah banyak memberikan bimbingan, dorongan, dan saran dalam penyusunan skripsi ini.
6. Dra. Asiah Arofah, Pimpinan Perusahaan Nalla Semarang yang telah memberikan ijin kepada penulis untuk melaksanakan penelitian skripsi ini.
7. Berbagai pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari sepenuhnya atas segala keterbatasan kemampuan dan pengetahuan yang penulis miliki bahwa skripsi ini jauh dari sempurna. Oleh karena itu, saran dan kritik yang sifatnya membangun sangat penulis harapkan

untuk perbaikan pada kesempatan lain. Semoga skripsi ini memberikan manfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca pada umumnya.

*Wassalamu'alaikum. Wr. Wb*

Semarang, September 2009

Siti Lita Fauziyah



## ABSTRAK

**Siti Lita Fauziyah. 2009** *Aplikasi Persamaan Diferensial Pada Masalah Konsentrasi Zat Gula Dalam Produksi Sirup (Studi Kasus: Produk Nalla Semarang)*. Skripsi Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Pembimbing I: Dr. St. Budi Waluya; Pembimbing II: Drs. Supriyono, M.Si.

Permasalahan dalam penelitian ini adalah “Bagaimanakah formula (model persamaan diferensial) yang menyatakan jumlah zat gula dalam campuran *base* sirup Nalla sebagai suatu fungsi dari waktu  $t$ , yang jumlahnya akan berubah secara teratur pada pergeseran jumlah zat gula yang terjadi dalam percampuran *base* sirup Nalla?, bagaimanakah solusi dari formula pada masalah konsentrasi zat gula dalam campuran? Dan bagaimanakah aplikasi program *maple* dalam menyelesaikan dan menggambarkan formula pada masalah konsentrasi gula dalam campuran?”.

Hasil yang diperoleh bahwa produk Nalla tidak pernah mengalami pergeseran kadar gula dalam proses produksi *base* sirupnya, karena penjagaan proses produksi yang ketat dan penggunaan ukuran tunggal. Sehingga dalam penelitian ini digunakan metode wawancara dan observasi untuk menggambarkan apabila terjadi pergeseran kadar gula dalam proses percampuran *base* sirup dengan menggunakan data simulasi, yang dirumuskan melalui pembuatan asumsi dengan melakukan penghampiran dan pengidealan yang didasarkan pada pengamatan. Kesimpulan bahwa dari lima kasus yang diambil, diperoleh model matematika diferensialnya adalah persamaan diferensial orde satu linear. Yaitu

$$\frac{dy}{dt} = 36.610,2 - \frac{5y}{57,35 + 4t}, \quad \frac{dx}{dt} = 0,206[240,9 - 0,258x][576 - 0,742x],$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3y}{60+t}, \quad \frac{dy}{dt} = 5400 - \frac{2y(t)}{50}, \quad \text{dan} \quad \frac{dy}{dt} = 1.166,67 - \frac{5y}{5+3t}.$$

Solusi formula untuk masing-masing kasus 1 dan 5 dapat diselesaikan dengan faktor integral dan bentuk homogen, sedangkan untuk kasus 2, 3 dan 4 dapat diselesaikan dengan metode peubah terpisah, dan membutuhkan teknik pengintegralan khusus untuk

bentuk  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ . Masing-masing kasus memanfaatkan masalah nilai awal

(MNA). Aplikasi program *maple* untuk kasus pertama adalah diperoleh plot solusi laju jumlah zat gula naik menuju tak hingga untuk nilai  $t$  yang semakin besar, untuk kasus kedua diperoleh plot solusi jumlah campuran *base* sirup naik menuju angka 776,28, untuk kasus ketiga diperoleh plot solusi jumlah zat gula semakin menurun menuju nol (habis) untuk nilai  $t$  yang semakin besar, kasus keempat diperoleh plot solusi jumlah gula naik menuju 135.000 gram untuk nilai  $t$  yang semakin besar, dan untuk kasus kelima diperoleh plot solusi jumlah gula semakin naik menuju tak hingga untuk nilai  $t$  yang semakin besar. **Kata Kunci:** zat gula, percampuran, konsentrasi.

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	<b>i</b>
<b>PERNYATAAN</b> .....	<b>ii</b>
<b>PENGESAHAN</b> .....	<b>iii</b>
<b>MOTTO DAN PERSEMBAHAN</b> .....	<b>iv</b>
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	<b>v</b>
<b>ABSTRAK</b> .....	<b>vii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>viii</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	<b>xi</b>
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>xiii</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Rumusan Masalah .....	5
1.3. Tujuan Penelitian .....	6
1.4. Manfaat Penelitian .....	6
1.6. Sistematika Skripsi .....	7
<b>BAB II LANDASAN TEORI</b> .....	<b>9</b>
2.1. Larutan.....	9
2.1.1. Pengertian Larutan .....	9
2.1.2. Hukum Aksi Massa.....	10
2.1.3. Konsentrasi Larutan.....	10
2.1.4. Pelarutan.....	11
2.1.5. Senyawa .....	12
2.2. Sirup.....	12
2.2.1 Pengertian Sirup.....	12
2.2.2 Syarat Mutu Sirup .....	13
2.2.3 Kekentalan/Konsentrasi Sirup .....	14
2.3. Persamaan Diferensial .....	16
2.3.1 Pemodelan Matematika.....	16

2.3.2	Pengertian Persamaan Diferensial.....	17
2.3.3	Klasifikasi Persamaan Diferensial .....	17
2.3.4	Orde Persamaan Diferensial .....	18
2.3.5	Solusi Persamaan Diferensial .....	18
2.3.6	Persamaan Diferensial Orde Satu .....	19
2.3.7	Persamaan diferensial Linear .....	19
2.3.8	Penyelesaian Dengan Faktor Integral .....	22
2.3.9	Persamaan Diferensial Peubah Terpisah.....	23
2.3.10	Pengintegralan Fungsi Bentuk $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ .....	25
2.3.11	Masalah Nilai Awal .....	27
2.3.12	Persamaan Diferensial Homogen .....	29
2.3.13	Masalah Percampuran .....	32
2.4	Program <i>Maple</i> .....	34
<b>BAB III METODE PENELITIAN .....</b>		<b>37</b>
3.1	Ruang Lingkup Penelitian .....	37
3.2	Prosedur Penelitian .....	37
3.3	Teknik Analisis Masalah .....	40
<b>BAB IV HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN .....</b>		<b>48</b>
4.1.	Hasil Penelitian .....	48
4.2.	Pembahasan .....	50
<b>BAB V PENUTUP .....</b>		<b>89</b>
5.1.	Simpulan .....	89
5.2.	Saran .....	94
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>		<b>96</b>
<b>LAMPIRAN-LAMPIRAN</b>		

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
1. Print out <i>maple</i> untuk menentukan solusi persamaan diferensial pada data ukuran kadar gula dalam proses percampuran <i>base</i> sirup Nalla .....	98
2. Print out <i>maple</i> untuk menentukan solusi persamaan diferensial pada data ukuran bahan-bahan dalam proses percampuran <i>base</i> dalam satu minggu .....	99
3. Print out <i>maple</i> untuk menentukan solusi kelebihan kadar gula dalam proses percampuran <i>base</i> sirup.....	100
4. Print out <i>maple</i> untuk menentukan solusi kekurangan kadar gula dalam proses percampuran <i>base</i> sirup.....	101
5. Print out <i>maple</i> untuk menentukan solusi percampuran dua senyawa yang berbeda konsentrasi gulanya.....	102
6. Daftar pertanyaan wawancara dengan pimpinan perusahaan Nalla Semarang .....	104
7. Daftar jawaban wawancara dengan pimpinan perusahaan Nalla Semarang .....	106
8. Daftar tabel konversi kekentalan dan berat jenis larutan gula .....	109
9. Usulan Pembimbing.....	111
10. Permohonan Ijin Penelitian.....	112
11. Surat Keterangan Penelitian.....	112
12. Gambar label sirup Nalla.....	113

## DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
1 Syarat Mutu Sirup .....	13
2 Konversi Nilai Kandungan Gula .....	15
3 Ukuran Bahan Base Sirup.....	48
4 Data Persediaan bahan Untuk <i>Base</i> Sirup Dalam Satu Minggu ....	50



## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 1. Proses percampuran zat gula .....	66
Gambar 2. Gambar grafik konsentrasi zat gula .....	82
Gambar 3. Gambar grafik laju jumlah <i>base</i> sirup.....	83
Gambar 4. Gambar grafik penurunan konsentrasi gula .....	84
Gambar 5. Gambar grafik kenaikan konsentrasi gula.....	85
Gambar 6. Gambar grafik konsentrasi gula.....	87



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial seringkali muncul dalam model matematika yang mencoba menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Banyak hukum-hukum alam dan hipotesa-hipotesa dapat diterjemahkan kedalam persamaan yang mengandung turunan melalui bahasa matematika.

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak fenomena yang dalam menyelesaikannya menggunakan persamaan diferensial orde satu. Salah satu contoh persamaan diferensial orde satu sering dijumpai dalam masalah percampuran atau pemekatan suatu larutan.

Kepekatan atau konsentrasi larutan menyatakan secara kuantitatif komposisi zat terlarut dan pelarut di dalam larutan. Konsentrasi umumnya dinyatakan dalam perbandingan jumlah zat terlarut dengan jumlah total zat dalam larutan, atau dalam perbandingan jumlah zat terlarut dengan jumlah pelarut. Sebagai contoh konsentrasi larutan gula dalam sirup menyatakan jumlah zat gula dalam larutan atau dalam perbandingan jumlah zat gula dengan jumlah total pelarutnya.

Sirup merupakan salah satu bentuk pengolahan buah untuk memperpanjang masa penyimpanannya yang berupa minuman. Sirup merupakan cairan yang diproduksi dari pengepresan daging buah dan dilanjutkan dengan

proses pemekatan, baik dengan cara pendidihan biasa maupun dengan cara lain seperti penguapan dengan hampa udara, dan lain-lain. Produk sirup ini tidak dapat langsung diminum, tetapi harus diencerkan dulu dengan air, karena sirup adalah cairan berkadar gula tinggi.

Nalla merupakan produk sirup dari sebuah industri yang terletak di jalan Parangkusumo I no 16, Tlogosari, Semarang. Produk Nalla telah ada sejak tahun 2003. Dalam proses produksinya, produk Nalla sangat memprioritaskan kualitas unggulannya yakni tidak mengandung alkohol, mengandung rumput laut dan mempertahankan kadar pemanis dengan dominasi gula pasir 86,8%, glukosa 13% dan 0,173% Na siklamat. Untuk memproduksi sirup dengan beberapa jenis rasa buah, terlebih dahulu diproduksi campuran *base sirup* sebagai bahan dasar.

Dalam proses pembuatan campuran *base* agar kualitasnya lebih terjaga, ukuran konsentrasi campuran diusahakan sesuai dengan standarnya, sehingga ukuran bahan-bahan yang digunakan dalam proses percampuran *base* sirup selalu tetap.

Mutu terukur suatu produk yang dihasilkan selalu beragam sebagai akibat dari faktor acak. Beberapa ‘sebab sistem acak’ yang stabil adalah bawaan dalam suatu skema produksi dan pemeriksaan tertentu. Keragaman dalam pola yang stabil ini tidak dapat dihindari. Alasan keragaman yang terjadi di luar pola yang stabil ini dapat ditemukan dan dikoreksi (Grant, 1998:3).

Begitu juga dalam proses produksi sirup, misalnya dalam proses pemekatan gula atau percampuran pada *base* sirup terjadi pergeseran proses yang berupa kelebihan atau kekurangan kadar zat gula sehingga konsentrasi zat gula

dalam campuran menjadi berubah atau tidak sesuai dengan standar mutunya. Dalam kasus ini, tidak memungkinkan untuk membuang campuran yang telah terbentuk, karena hal itu jelas akan membuang biaya dan merugikan perusahaan. Sehingga dibutuhkan solusi yang tepat sebagai suatu tindakan pembetulan, baik dari segi efisiensi waktu, biaya dan tenaga.

Pada kasus kesalahan dalam konsentrasi/kepekatan pada kadar zat gula dalam campuran, dengan menambahkan dan mengurangi campuran dengan zat gula atau komponen lainnya sehingga jumlah gula berubah secara teratur sampai pada ukuran yang diinginkan, dapat dicari laju perubahan zat gula dalam campuran dalam bentuk persamaan diferensial yang kemudian dapat dicari solusinya. Dari bentuk persamaan diferensial tersebut juga dapat diperkirakan waktu yang dibutuhkan untuk memperbaiki campuran.

Sebagai variabel bebas adalah waktu percampuran, dimisalkan dengan simbol  $t$ , sedangkan variabel tak bebas adalah jumlah zat gula dalam campuran *base* sirup, dimisalkan  $x$ . Maka laju perubahan rata-rata jumlah zat gula didalam campuran dalam selang waktu  $\Delta t$  adalah  $\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ . Dalam hal ini laju

perubahan jumlah gula didalam campuran pada setiap saat adalah  $\frac{dx}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ , yang berarti  $\frac{dx}{dt} =$  laju jumlah zat gula masuk – laju

jumlah zat gula keluar. Dengan

Laju jumlah zat gula masuk =

konsentrasi gula pada senyawa masuk  $\times$  laju senyawa masuk

Laju jumlah zat gula keluar =

konsentrasi gula pada senyawa keluar  $\times$  laju senyawa keluar

(Dawkins,2007: 77).

Dengan memisalkan  $v(t)$  adalah volume campuran pada sat  $t$ , maka

$$\text{Laju jumlah zat gula keluar} = \frac{x(t)}{v(t)} \times \text{laju senyawa keluar}$$

$$\text{Jadi } \frac{dx}{dt} = \text{laju jumlah zat gula masuk} - \frac{x(t)}{v(t)} \times \text{laju senyawa keluar} \quad (1.1).$$

Apabila  $x(t)$ ,  $v(t)$  dan  $t$  diukur masing-masing dalam gram, liter, dan menit, maka satuan dalam persamaan (1.1) adalah

$$\frac{\text{gram}}{\text{menit}} = \frac{\text{gram}}{\text{menit}} - \frac{\text{gram}}{\text{liter}} \times \frac{\text{liter}}{\text{menit}} \quad (\text{Neswan, 2009: 18}).$$

Persamaan diferensial yang terbentuk dapat diselesaikan sesuai dengan bentuknya, misalnya apabila bentuk persamaannya termasuk persamaan diferensial yang terpisahkan variabelnya, maka dengan mengintegalkan kedua ruas setelah variabelnya dipisahkan, dapat diperoleh bentuk solusi umumnya. Untuk mendapatkan solusi khususnya, dapat diperoleh dari solusi umum dengan mengambil nilai jumlah zat gula yang diketahui pada saat  $t$  satuan waktu, yaitu  $x(t)$  yang memenuhi syarat yang diberikan, misalnya syarat awal. Selain itu, dapat digunakan program *maple* sebagai bentuk simulasi dari solusi yang diperoleh, sehingga lebih mudah untuk diterjemahkan kedalam kehidupan nyata.

Dari uraian diatas, maka penulis mengambil judul **"APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL PADA MASALAH KONSENTRASI ZAT GULA DALAM PRODUKSI SIRUP (Studi Kasus : Produk Nalla Semarang)"**.

## 1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang tersebut di atas, maka dapat dirumuskan masalah sebagai berikut:

- 1) Bagaimanakah formula (model persamaan diferensial) yang menyatakan jumlah zat gula dalam campuran *base* sirup Nalla sebagai suatu fungsi dari waktu  $t$ , yang jumlahnya akan berubah secara teratur pada pergeseran jumlah zat gula yang terjadi dalam percampuran *base* sirup Nalla?
- 2) Bagaimanakah solusi dari formula pada masalah konsentrasi zat gula dalam campuran?
- 3) Bagaimanakah aplikasi program *maple* dalam menyelesaikan dan menggambarkan formula pada masalah konsentrasi gula dalam campuran?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Dari rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

- 1) Menentukan model persamaan diferensial yang menyatakan jumlah gula dalam campuran *base* sirup Nalla sebagai fungsi dari waktu  $t$ , dimana jumlah ini akan berubah secara teratur pada pergeseran kadar gula yang terjadi dalam percampuran *base* sirup Nalla.
- 2) Menentukan solusi dari persamaan diferensial dari formula pada masalah konsentrasi gula dalam campuran.

- 3) Mengetahui bagaimana aplikasi program *maple* dalam menyelesaikan dan menggambarkan formula pada masalah konsentrasi gula dalam campuran.

#### 1.4 Manfaat Penelitian

Dalam penelitian ini, penulis berharap banyak dapat diambil manfaatnya.

- 1) Dapat menerapkan persamaan diferensial dalam mencari solusi dari masalah konsentrasi suatu zat dalam percampuran.
- 2) Sebagai bahan pertimbangan bagi perusahaan sirup Nalla dalam pengambilan keputusan tentang langkah tepat yang harus diambil apabila terjadi pergeseran kadar gula dalam campuran *base* sirup Nalla.
- 3) Dapat menjaga mutu produk sirup Nalla yang selanjutnya dapat menjaga eksistensi perusahaan di dunia pemasaran.

#### 1.5 Sistematika Skripsi

Susunan skripsi ini terdiri dari tiga bagian, yaitu bagian pendahuluan, bagian isi dan bagian akhir skripsi,

- a) Bagian pendahuluan

Pendahuluan skripsi ini berisi halaman judul, abstraksi, pengesahan, motto dan persembahan, kata pengantar, daftar isi, daftar gambar, daftar lampiran, dan daftar tabel.

- b) Bagian isi

Bagian isi terdiri dari lima bab, yaitu sebagai berikut:

Bab I : Pendahuluan

Berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika skripsi.

Bab II : Landasan teori

Berisi tentang pengertian larutan, sirup, persamaan diferensial, dan program *maple*.

Bab III : Metode penelitian

Berisi tentang ruang lingkup, prosedur penelitian yang meliputi identifikasi masalah, merumuskan masalah, observasi, wawancara, memformulasikan model matematis dari persoalan yang dihadapi, analisis dan pemecahan masalah, dan mengimplementasikan hasil studi, serta teknik analisis masalah.

Bab IV : Hasil penelitian dan pembahasan

Berisi hasil-hasil penelitian dan pembahasan.

Bab V : Penutup

Berisi simpulan dan saran

c) Bagian akhir skripsi

Berisi daftar pustaka dan lampiran

## BAB II

### LANDASAN TEORI

#### 2.1 LARUTAN

##### 2.1.1 Pengertian Larutan

Larutan merupakan salah satu bentuk dari campuran. Suatu campuran terbentuk dari dua atau lebih zat yang masih mempunyai sifat zat asalnya. Campuran dapat berupa larutan, suspensi, atau koloid.

Larutan adalah campuran homogen. Suatu campuran dikatakan homogen jika antar komponennya tidak terdapat bidang batas sehingga tidak terbedakan lagi walaupun menggunakan mikroskop ultra. Selain itu, campuran homogen mempunyai komposisi yang sama pada setiap bagiannya. Proses pelarutan dipengaruhi oleh suhu, pengadukan, dan ukuran partikel zat terlarut (Purba, 2000: 20).

Dalam [kimia](#), larutan adalah [campuran](#) homogen yang terdiri dari dua atau lebih zat. Zat yang jumlahnya lebih sedikit di dalam larutan disebut (zat) terlarut atau solut, sedangkan zat yang jumlahnya lebih banyak daripada zat-zat lain dalam larutan disebut pelarut atau solven. Komposisi zat terlarut dan pelarut dalam larutan dinyatakan dalam konsentrasi larutan, sedangkan proses pencampuran zat terlarut dan pelarut membentuk larutan disebut pelarutan atau solvasi.

Contoh larutan yang umum dijumpai adalah [padatan](#) yang dilarutkan

dalam [cairan](#), seperti [garam](#) atau [gula](#) dilarutkan dalam [air](#). [Gas](#) dapat pula dilarutkan dalam cairan, misalnya [karbon dioksida](#) atau [oksigen](#) dalam air. Selain itu, cairan dapat pula larut dalam cairan lain, sementara gas larut dalam gas lain. Terdapat pula larutan padat, misalnya [aloi](#) (campuran logam) dan [mineral](#) tertentu (Wikipedia, 2008: 1).

### 2.1.2 Hukum Aksi Massa

Dalam kimia, berlaku hukum aksi massa, yaitu bila suatu larutan zat A bereaksi dengan larutan zat B untuk membentuk larutan zat C, maka laju perubahan jumlah larutan zat C pada setiap saat berbanding lurus dengan hasil kali antara sisa larutan zat A dan sisa larutan zat B pada saat itu (Santosa, 1997:40). Apabila tersedia zat A dan zat B dalam jumlah tertentu, dengan memisalkan variabel tak bebas  $x$  yang menyatakan banyaknya jumlah zat C dalam campuran setiap saat, sedangkan variabel bebas adalah waktu, misalkan  $t$ , dan  $x'(t)$  adalah laju rata-rata perubahan zat C pada saat  $t$ . Maka laju rata-rata berubahnya zat C dalam selang waktu  $\Delta t$  adalah  $\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ . Laju bertambahnya zat C pada setiap

saat adalah  $\frac{dx}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ .  $\Leftrightarrow$

$$\frac{dx}{dt} = k \left[ \text{persediaan zat A} - \frac{\text{ukuran zat A}}{\text{ukuran zat C}} x \right] \left[ \text{persediaan zat B} - \frac{\text{ukuran zat B}}{\text{ukuran zat C}} x \right]$$

### 2.1.3 Konsentrasi Larutan

Larutan yang pekat mengandung zat terlarut banyak, sedangkan larutan yang encer mengandung sedikit zat terlarut. Komposisi suatu

campuran biasanya dinyatakan dalam persen. Dalam ilmu kimia hal ini sering diartikan sebagai persen massa, kecuali jika dinyatakan lain. Sebagai contoh campuran 5% gula berarti 5 gram gula dalam 100 gram campuran, atau 5 ton gula dalam 100 ton campuran (Anshory, 2000:23).

Konsentrasi larutan menyatakan secara kuantitatif komposisi zat terlarut dan pelarut di dalam larutan. Konsentrasi umumnya dinyatakan dalam perbandingan jumlah zat terlarut dengan jumlah total zat dalam larutan, atau dalam perbandingan jumlah zat terlarut dengan jumlah pelarut. Contoh beberapa satuan konsentrasi adalah molar, molal, dan bagian per juta (part per million, ppm). Sementara itu, secara kualitatif, komposisi larutan dapat dinyatakan sebagai *encer* (berkonsentrasi rendah) atau *pekat* (berkonsentrasi tinggi) (Wikipedia, 2008: 1).

#### **2.1.4 Pelarutan**

Molekul komponen-komponen larutan berinteraksi langsung dalam keadaan tercampur. Pada proses pelarutan, tarikan antarpartikel komponen murni terpecah dan tergantikan dengan tarikan antara pelarut dengan zat terlarut. Terutama jika pelarut dan zat terlarutnya sama-sama polar, akan terbentuk suatu struktur zat pelarut mengelilingi zat terlarut; hal ini memungkinkan interaksi antara zat terlarut dan pelarut tetap stabil.

Bila komponen zat terlarut ditambahkan terus-menerus ke dalam pelarut, pada suatu titik komponen yang ditambahkan tidak akan dapat larut lagi. Misalnya, jika zat terlarutnya berupa padatan dan pelarutnya berupa cairan, pada suatu titik padatan tersebut tidak dapat larut lagi dan

terbentuklah endapan. Jumlah zat terlarut dalam larutan tersebut adalah maksimal, dan larutannya disebut sebagai larutan jenuh. Titik tercapainya keadaan jenuh larutan sangat dipengaruhi oleh berbagai faktor lingkungan, seperti [suhu](#), [tekanan](#), dan kontaminasi. Secara umum, kelarutan suatu zat (yaitu jumlah suatu zat yang dapat terlarut dalam pelarut tertentu) sebanding terhadap suhu. Hal ini terutama berlaku pada zat padat, walaupun ada perkecualian. Kelarutan zat cair dalam zat cair lainnya secara umum kurang peka terhadap suhu daripada kelarutan padatan atau gas dalam zat cair. Kelarutan gas dalam air umumnya berbanding terbalik terhadap suhu (Wikipedia, 2008: 1).

### **2.1.5 Senyawa**

Senyawa adalah zat tunggal yang dapat diuraikan menjadi zat yang lebih sederhana. Beberapa contoh senyawa yaitu air, sukrosa (gula tebu), natrium klorida (garam dapur), karbondioksida dan urea. Senyawa terbentuk oleh perikatan kimia dari dua atau lebih jenis unsur. Namun demikian senyawa mempunyai sifat tertentu yang berbeda dari sifat penyusunnya (Purba, 2000:18).

## **2.2 SIRUP**

### **2.2.1 Pengertian Sirup**

Sirup adalah campuran berkadar gula tinggi. Untuk rasa dan flavor, gula sirup dilarutkan dengan sari buah, atau larutan gula ditambah dengan sari buah. Sirup dapat disimpan lama tanpa penambahan bahan pengawet

dan tanpa proses sterilisasi dalam pengemasannya karena tingginya kadar gula (67,5%) dan rendahnya PH (di bawah 4,0) (Anonim:2009: 1).

### 2.2.2 Syarat Mutu Sirup

Sebagai salah satu produk industri pangan, sirup memiliki standar mutu yang ditetapkan oleh departemen. Kriteria mutu sirup yang ditetapkan pemerintah dapat dilihat pada Tabel 1.1 berikut ini.

Tabel 1.1 Syarat mutu sirup

No	Uraian	Persyaratan
1	Kadar gula minimum	Mutu I 65%, Mutu II 55%
2	Zat warna	Yang diperbolehkan untuk dimakan
3	Pemanis buatan	Negatif
4	Bahan pengawet (asam benzoat)	Maksimum 250 mg/kg
5	Asam salisilat	Negatif
6	Logam berbahaya (C., Hg, Pb, As)	Negatif
7	Zat pengental	Yang diperbolehkan untuk minuman
8	Jamur ragi	Negatif
9	Bakteri bentuk coli	negatif

Sumber: SII. 0153-77 (Sumber: Haryoto, 1998:14).

Untuk dapat memenuhi syarat sebagai produk sirup, jumlah kadar gula harus sesuai dengan standar yang telah ditentukan. Untuk mengetahui tingkat/jumlah kadar gula dalam cairan, dapat digunakan alat yang disebut boumemeter atau refractometer serta tabel konversi sebagai “penerjemahnya”.

Dalam penggunaannya, sirup sebagai bahan minuman tidak secara langsung dikonsumsi, namun perlu diencerkan terlebih dahulu dengan penambahan air matang 4-5 kali volume sirup (Suprapti, 2005: 36).

### 2.2.3 Kekentalan/Konsentrasi Sirup

Untuk mengetahui tingkat kekentalan sirup dapat dilakukan pemeriksaan dengan menggunakan salah satu alat pemeriksa, Bourometer ( $^{\circ}\text{Be}$ ), Hydrometer (BJ), atau Refractometer ( $^{\circ}\text{Brix}$ ) dengan disertai tabel konversi, yang masing-masing dilakukan dengan cara sebagai berikut.

#### 1) Hand Refractometer

Dengan meneteskan sirup pada kaca display, akan dapat langsung ditunjukkan tingkat kekentalan sirup tersebut kedalam ukuran derajat brix ( $^{\circ}\text{Brix}$ ).

#### 2) Hydrometer dan Boumemeter

Kedua alat ini memiliki bentuk dan penampilan yang mirip, demikian pula dengan cara penggunaannya. Adapun perbedaannya hanyalah pada angka yang ditunjukkannya, yaitu:

a) Hydrometer: angka berdasarkan berat jenis (BJ) larutan.

b) Boumemeter: angka dalam derajat boume ( $^{\circ}\text{Be}$ ).

Dengan catatan keduanya juga tercantum dalam tabel konversi, sehingga dengan mengetahui berat jenis atau derajat boume-nya, maka kadar gula dalam sirup akan dapat diketahui. Adapun caranya sebagai berikut.

a). Isikan gelas ukur bervolume 1 liter dengan sirup

b). Masukkan salah satu alat ukur yang akan digunakan (hidrometer atau boumemeter).

c). Amati dan catat angka yang bersinggungan dengan garis permukaan sirup.

Angka yang menunjukkan tingkat kekentalan berdasarkan hasil pemeriksaan dapat menunjukkan satuan dalam derajat brix ( $^{\circ}\text{Brix}$ ), derajat boume ( $^{\circ}\text{Be}$ ), ataupun berat jenis (BJ). Angka tersebut dapat digunakan untuk mencari kadar gula per liter air dengan menggunakan tabel konversi 1.2 berikut.

Tabel 1.2 Konversi nilai kandungan gula

No	Derajat brix ( $^{\circ}\text{Brix}$ )	Berat Jenis (BJ)	Derajat boume ( $^{\circ}\text{Be}$ )	Kandungan gula (gram) dalam 1 liter air bersih
1	2	3	4	5
1	1	1,0038	0,6	10,3
35	35	1,1541	19,6	571,1
55	55	1,2608	30,4	1.279,1
	Dst.	Dst.	Dst.	Dst.

(Sumber: Suprapti, 2005)

Bila diketahui derajat brix, maka yang digunakan sebagai dasar perhitungan adalah angka yang sama pada kolom kedua dan mencari solusinya pada kolom kelima yang sejaris dengan angka dasar pada kolom kedua. demikian pula halnya apabila yang diketahui adalah derajat boume, maka yang digunakan sebagai dasar perhitungan adalah angka yang sama pada kolom 4, sedangkan solusinya ada pada kolom 5 yang sejaris (Suprapti, 2005: 92).

## 2.3 PERSAMAAN DIFERENSIAL

### 2.3.1 Pemodelan Matematika

Untuk memahami cara timbulnya persamaan diferensial pada penanganan masalah nyata, serta liku-liku proses penerapan matematika pada umumnya, lebih dulu dibahas proses penerapan matematika pada bidang lain, dengan mengkhususkan kepada contoh yang menghasilkan persamaan diferensial. Proses ini yang juga dapat disebut pemodelan matematika, yang pada dasarnya terdiri dari tiga tahap berikut.

#### 1. Perumusan model matematika

Masalah dirumuskan melalui pembuatan asumsi dengan melakukan penghampiran dan pengidealan yang didasarkan pada eksperimen dan pengamatan, serta hukum-hukum alam. Rumusan yang diperoleh dinyatakan dalam istilah pengertian-pengertian matematika. Model yang diperoleh harus dapat ditanggulangi (*tractable*). Kalau tidak demikian, perlu dilakukan penyederhanaan pada model itu.

#### 2. Penyelesaian model matematika

Untuk mendapatkan informasi, dicari selesaian model itu atau dilakukan penganalisaan pada model itu.

#### 3. Penerjemahan hasil kedalam situasi nyata

Hasil pada tahap dua, diterjemahkan kedalam pengertian dalam situasi nyata, agar dapat diuji dengan eksperimen dan pengamatan. Apabila hasil pengujian kurang memuaskan, model matematika yang diperoleh diperbaiki lagi, bila perlu dengan mendapatkan informasi dari eksperimen

dan pengamatan baru (Santosa, 1997:1-2).

### 2.3.2 Pengertian Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau beberapa fungsi yang tak diketahui (Finizio, 1982: 1). Klasifikasi persamaan diferensial dapat ditinjau dari jenis variabelnya, dari tingkat orde yang dimiliki, ataupun dari bentuk persamaannya, linier atau non linier (Kusumah, 1989:2).

### 2.3.3 Klasifikasi Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial atau sebagian didasarkan pada apakah fungsi yang diketahui tergantung pada satu atau beberapa variabel bebas (Waluya, 2006: 2). Suatu persamaan diferensial yang mengandung turunan biasa dengan satu peubah bebas dinamakan persamaan diferensial biasa. Sedangkan suatu persamaan yang mengandung turunan parsial dengan lebih dari satu peubah bebas dinamakan persamaan diferensial parsial. (Waluya, 2006: 2-3).

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 3x \sin y \text{ merupakan sebuah persamaan diferensial biasa}$$

karena tidak memuat turunan parsial.  $\frac{\partial y}{\partial x} + x \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x+t}{x-t}$  merupakan

persamaan diferensial parsial karena  $y$  merupakan sebuah fungsi dari dua variabel  $x$  dan  $t$  dan mengandung turunan parsial. (Green, 2002: 1).

### 2.3.4 Orde Persamaan Diferensial

Dasar klasifikasi lain persamaan diferensial adalah orde. Orde dari

persamaan diferensial adalah derajat atau pangkat tertinggi dari turunan

yang muncul dalam persamaan. Persamaan  $\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t)$  adalah

persamaan orde satu, sedang persamaan  $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$ ,

$\alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t}$ ,  $\alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t}$  merupakan persamaan-

persamaan diferensial berorde dua. Secara umum persamaan diferensial

berorde n dapat dituliskan sebagai  $F[t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t)] = 0$  yang

menyatakan relasi antara variabel bebas t dan nilai-nilai dari fungsi u, u',

..., u<sup>(n)</sup> (Waluya, 2006: 4).

### 2.3.5 Solusi Persamaan Diferensial

Solusi umum persamaan diferensial adalah fungsi yang memuat

konstanta C dan memenuhi persamaan diferensial tersebut. Solusi khusus

adalah solusi yang diperoleh dari solusi umum dengan mengambil nilai C

suatu bilangan tertentu atau solusi yang memenuhi syarat yang diberikan,

misalnya syarat awal (Supriyono, 2007: 2).

### 2.3.6 Persamaan Diferensial Orde Satu

Bentuk umum persamaan diferensial orde satu adalah:  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$

dimana f adalah fungsi dua variabel yang diberikan sebarang fungsi

turunan  $y=f(t)$  yang memenuhi persamaan ini untuk semua t dalam suatu

interval disebut solusi (Waluya, 2006 : 11). Suatu fungsi  $y=y(t)$  dikatakan

suatu solusi persamaan diferensial orde satu apabila  $y=y(t)$  atau turunan y'

memenuhi persamaan diferensial  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$  (Supriyono, 2007: 1).

Sebuah persamaan diferensial orde satu adalah sebuah pengulangan (*recursively*) yang didefinisikan dalam bentuk  $y_{n+1} = f(n, y_n)$   $n=0,1,2,\dots$  yang membentuk orde satu adalah bahwa hanya dibutuhkan nilai sebelumnya untuk memperoleh nilai berikutnya. (Green, 2002: 1).

### 2.3.7 Persamaan Diferensial Linear

Sebuah persamaan aljabar  $F(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = C$  disebut linear jika dapat dinatakan dalam bentuk  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = C$  (Pardon, 2005: 2).

Sebuah persamaan diferensial  $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = C$  adalah linear jika dapat dinyatakan dalam bentuk  $a_n(t)y^{(n)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$ , dimana semua fungsi  $f$  diasumsikan didefinisikan dalam interval  $I$ . Jika  $f(t) = 0$  maka persamaan diferensial disebut homogen. Secara umum persamaan diferensial linear orde satu dapat dituliskan sebagai  $y' + p(t)y = g(t)$  (Pardon, 2005:7).

$$\text{Apabila fungsi } f \text{ dalam persamaan } \frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (2.1)$$

bergantung linear pada variabel bebas  $y$ , maka persamaan (2.1) dapat dituliskan dalam bentuk  $\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$  dan disebut persamaan linear

orde satu (Waluya, 2006: 12). Untuk dapat mengetahui contoh bentuk persamaan diferensial linear orde satu, dapat ditunjukkan melalui contoh 2.1 berikut.

**Contoh 2.1.**

Dalam sebuah wadah besar berisi 2000 galon campuran sirup yang semula mengandung 10 kg zat gula larut didalamnya. Untuk memenuhi standar mutu kadar gula dalam sirup, campuran sirup yang mengandung 20 gram gula per galon, dialirkan ke wadah dengan debit 40 galon tiap menit dan langsung tercampur dengan sempurna. Hasil campuran ini dikeluarkan keluar dengan laju 45 galon tiap menit. Tentukan banyaknya zat gula 20 menit setelah percampuran berlangsung.

**Penyelesaian:**

Untuk memperoleh model persamaan diferensial pada masalah ini, sebagai langkah awal adalah mengidentifikasi semua besaran yang terlibat dalam masalah konsentrasi, memberi lambang pada semua besaran yang terlibat, dan menentukan satuan untuk semua besaran.

Misalkan  $y(t)$ ,  $V(t)$ , dan  $t$  masing-masing adalah banyaknya gula dalam wadah (gram), volume campuran sirup dan gula dalam wadah (galon), dan waktu (menit). maka,

$$\begin{aligned} V(t) &= 2000(\text{galon}) + \left( 40 \frac{\text{galon}}{\text{menit}} - 45 \frac{\text{galon}}{\text{menit}} \right) (t \text{ menit}) \\ &= (2000 - 5t) \text{ galon} \end{aligned}$$

$$\text{Laju jumlah gula keluar} = \frac{y(t)}{V(t)} \cdot \text{debit senyawa keluar}$$

$$= \frac{y(t)}{(2000 - 5t)} \times 45 = \frac{45}{2000 - 5t} \frac{\text{gram}}{\text{menit}}$$

$$\begin{aligned} \text{Laju jumlah gula masuk} &= 20 \left( \frac{\text{gram}}{\text{galon}} \right) \times 40 \frac{\text{galon}}{\text{menit}} \\ &= 800 \frac{\text{gram}}{\text{menit}} \end{aligned}$$

Maka dari persamaan diferensial untuk percampuran diperoleh

$$\frac{dy}{dt} = 800 - \frac{45y}{2000 - 5t}$$

$$\text{Dalam bentuk standar: } \frac{dy}{dt} + \left( \frac{45}{2000 - 5t} \right) y = 800. \quad (2.2)$$

Tulis  $\left( \frac{45}{2000 - 5t} \right)$  sebagai  $p(t)$ , dan 800 sebagai  $g(t)$ .

Maka persamaan diferensial (2.2) berpola  $\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$  yang merupakan bentuk persamaan diferensial linear orde satu.

### 2.3.8 Penyelesaian dengan Faktor Integral

Apabila dipunyai persamaan dengan bentuk  $\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$  atau dapat ditulis  $y' + p(t)y = g(t)$ , untuk menyelesaikannya dapat digunakan metode faktor integral, yakni dengan mengalikan kedua ruas dengan suatu faktor pengintegral  $e^{\int p(t) dt}$ , sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dt} * e^{\int p(t) dt} + p(t)y * e^{\int p(t) dt} = g(t) * e^{\int p(t) dt}.$$

Pada ruas kiri merupakan

turunan dari  $y * e^{\int p(t) dt}$ . Maka persamaan diferensial dapat

dituliskembali dalam bentuk  $\frac{d}{dt} \left( y * e^{\int p(t) dt} \right) = g(t) * e^{\int p(t) dt}$  kemudian

dengan mengintegralkan kedua ruas, maka diperoleh

$$y * e^{\int p(t) dt} = \int \left( g(t) * e^{\int p(t) dt} \right) dt$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-\int p(t) dt} * \int \left( g(t) * e^{\int p(t) dt} \right) dt \quad (\text{Neswan, 2009: 14}).$$

Dengan menggunakan faktor integral, maka persamaan diferensial (2.2) pada contoh 2.1 dapat diselesaikan sebagai berikut.

Dari persamaan  $\frac{dy}{dt} + \left( \frac{45}{2000 - 5t} \right) y = 800$  diperoleh faktor integral:

$$e^{\int \frac{45}{2000-5t} dt} = e^{-9 \ln(2000-5t)} = (2000 - 5t)^{-9}.$$

Kalikan kedua ruas dengan faktor integral,

$$(2000 - 5t)^{-9} \frac{dy}{dt} + (2000 - 5t)^{-9} \left( \frac{45}{2000 - 5t} \right) y = (2000 - 5t)^{-9} 800$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} y(2000 - 5t)^{-9} = (2000 - 5t)^{-9} 800$$

$$\Leftrightarrow y(2000 - 5t)^{-9} = \int (2000 - 5t)^{-9} 800$$

maka solusi umumnya adalah

$$y = \frac{1}{(2000 - 5t)^{-9}} \int (2000 - 5t)^{-9} \times 800 dt$$

$$= \frac{800}{(2000 - 5t)^{-9}} \int (2000 - 5t)^{-9} dt$$

$$= \frac{800}{(2000 - 5t)^{-9}} \left( \frac{(2000 - 5t)^{-8}}{(-8) \cdot (-5)} + C \right)$$

$$= 20(2000 - 5t) + 800C(2000 - 5t)^9. \quad (2.3)$$

### 2.3.9 Persamaan Diferensial Peubah Terpisah

Suatu persamaan diferensial peubah terpisah ditandai oleh fakta bahwa dua peubah dari persamaan itu bersama-sama masing-masing diferensialnya dapat ditempatkan diruas yang berlawanan. Dalam persamaan semacam itu tanda sama-dengan ‘memisah’ satu peubah dari yang lain. Dengan manipulasi aljabar, memungkinkan kita menuliskan persamaan diferensial terpisah dalam bentuk  $y' = \frac{p(t)}{q(y)}$  atau, lebih eksplisit  $q(y) dy = p(t) dt$  (Finizio, 1982:15).

Metode penyelesaian persamaan diferensial variabel terpisah dapat dilakukan dengan mengintegalkan langsung persamaan diferensial  $q(y) dy = p(t) dt$  (Supriyono, 2007:4 ). Dengan mengintegalkan kedua ruas  $\int q(y) dy = \int p(t) dt$  diperoleh solusi implisit yang diharapkan memecahkan untuk solusi eksplisit,  $y(t)$ . Solusi eksplisit adalah solusi yang dapat dituliskan dengan  $y=y(t)$  (Dawkins, 2007:34). Untuk dapat mengetahui contoh persamaan diferensial bentuk peubah terpisah, dapat ditunjukkan melalui contoh 2.2 berikut.

#### Contoh 2.2.

Jika semula ada 12 gram zat A dan 6 gram zat B. 3 gram zat A dan 1 gram zat B membentuk 4 gram zat C dalam waktu 5 menit, tentukan berat zat C pada setiap saat.

#### Penyelesaian:

Untuk memperoleh model persamaan diferensial pada masalah ini,

sebagai langkah awal adalah mengidentifikasi semua besaran yang terlibat dalam masalah konsentrasi, memberi lambang pada semua besaran yang terlibat, dan menentukan satuan untuk semua besaran.

Misalkan  $x$  merurakan variabel tak bebas yang menyatakan jumlah zat C.

Peubah bebas adalah waktu yang dimisalkan dengan  $t$ .

Laju rata-rata berubahnya zat C dalam selang waktu  $\Delta t$  adalah

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Laju bertambahnya zat C pada setiap saat adalah

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

1 gram zat C terbentuk dari  $\frac{3}{4}$  gram zat A dan  $\frac{1}{4}$  gram zat B.

$x$  gram zat C terbentuk dari  $\frac{3x}{4}$  gram zat A dan  $\frac{x}{4}$  gram zat B.

Jadi, menurut hukum aksi massa diperoleh model matematika

$$\frac{dx}{dt} = k \left[ 12 - \frac{3x}{4} \right] \left[ 6 - \frac{x}{4} \right], \quad x(0)=0, \quad x(5)=4. \quad (2.4)$$

Persamaan diferensial (2.4) merupakan persamaan diferensial *separable*, dimana variabel-variabelnya dapat dipisahkan pada tiap sisi dari

$$\text{persamaan, sehingga diperoleh } \frac{dx}{(16-x)(24-x)} = \frac{3}{16} k dt \quad (2.5)$$

yang merupakan bentuk peubah terpisah. Dengan mengintegalkan masing-masing kedua ruas, maka akan diperoleh solusinya (Santosa, 1997: 40-42).

### 2.3. 10 Pengintegralan Fungsi Berbentuk $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

Strategi menentukan integral fungsi berbentuk  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  adalah

sebagai berikut.

1 Periksa apakah derajat  $p(x)$  kurang dari derajat  $q(x)$ . Jika tidak, adakan pembagian

2 Faktorkan  $q(x)$  menjadi faktor-faktor linier atau kuadrat, sebagai contoh:  $q(x) = (x-a_1)^{n_1} \dots (x-a_2)^{n_2} (x^2+b_1x+c_1)^{m_1} \dots (x^2+b_1x+c_1)^{m_1}$

3 Untuk setiap faktor linier  $(x-a)^n$  buat pecahan bagian:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

4 Untuk setiap faktor kuadrat  $(x^2+bx+c)^m$  buat pecahan bagian:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

5 Kombinasikan semua suku dalam pecahan bagian dengan menyamakan penyebut.

6 Hitung semua koefisien yang ada.

7 Integralkan.

(Chotim, 2004:133).

Untuk menyelesaikan persamaan (2.5) terlebih dahulu dapat digunakan

teknik penintegralan bentuk  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  untuk memecah

$$\frac{1}{(16-x)(24-x)}$$

Misalkan  $\frac{1}{(16-x)(24-x)} = \frac{A}{(16-x)} + \frac{B}{(24-x)}$

Maka  $A(24-x) + B(16-x) = 1$

$\Leftrightarrow 24A - Ax + 16B - Bx = 1$

Jelas  $-Ax - Bx = 0 \Leftrightarrow A = -B$

Substitusikan  $A = -B$  kedalam  $24A + 16B = 1$

kemudian ditemukan nilai  $A = \frac{1}{8}$  dan nilai  $B = -\frac{1}{8}$ .

Sehingga persamaan (2.5) menjadi  $\left( \frac{1}{8(16-x)} - \frac{1}{8(24-x)} \right) dx = \frac{3}{16} k dt$ .

Dengan mengintegalkan kedua ruas diperoleh

$$\int \frac{dx}{8(16-x)} - \int \frac{dx}{8(24-x)} = \int \frac{3}{16} k dt$$

$$\Leftrightarrow -\ln(16-x) + \ln(24-x) = \frac{3}{2} kt + \ln C. \quad (2.6)$$

### 2.3. 11 Masalah Nilai Awal

Masalah nilai awal bagi persamaan diferensial berorde-n

$$F\left[t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}\right] = 0 \quad \text{diartikan sebagai penyelesaian persamaan}$$

diferensial dalam interval  $a < t < b$  sedemikian sehingga di titik  $t_0$  berlaku

kondisi awal  $y(t_0) = y_0, \frac{dy}{dt}(t_0) = y_1, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(t_0) = y_{n-1}$ , dengan  $t_0$  dalam

selang  $a < t < b$  dan  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  merupakan konstanta.

Jika persamaan diferensialnya orde satu, maka kondisi inisialnya

hanya berupa persamaan tunggal.  $y(t_0) = y_0$ . Untuk persamaan diferensial orde dua, kondisi inisialnya adalah dalam  $y(t_0) = y_0$ ,  $\frac{dy}{dt}(t_0) = y_1$  dalam kondisi ini terdapat dua persamaan.

Istilah kondisi awal berasal dari mekanika. Dalam mekanika  $y(t_0) = y_0$  menyatakan kedudukan sebuah obyek pada saat  $t_0$  dan  $\frac{dy}{dt}(t_0) = y_1$  menyatakan kecepatan obyek pada saat  $t_0$  (Kusumah, 1989: 35-36).

Pada contoh 2.1 diketahui pada kondisi awal campuran, mengandung 10 kg zat gula larut didalamnya atau  $y=10$  saat  $t=0$ , ini merupakan bentuk masalah nilai awal. Maka dari solusi umum pada persamaan (2.3) dapat diperoleh solusi khusus dengan mensubstitusikan nilai awal  $y=10$  saat  $t=0$ , yaitu

$$\begin{aligned}
 y &= 20(2000 - 5t) + 800C(2000 - 5t)^9 \\
 \Leftrightarrow 10 &= 20(2000 - 5(0)) + 800C(2000 - 5(0))^9 \\
 \Leftrightarrow 10 &= 4000 - 800C(2000)^9 \\
 \Leftrightarrow -800C(2000)^9 &= 39.990 \\
 \Leftrightarrow C &= -\frac{39990}{800(2000)^9}
 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } y(t) = 20(2000 - 5t) - \frac{39990}{800(2000)^9} (2000 - 5t)^9$$

Dan akhirnya diperoleh  $y(20) \approx 37.968,5$  gram yang apabila diinterpretasikan berarti banyaknya zat gula setelah 20 menit percampuran

berlangsung adalah 37.968,5 gram.

Pada contoh 2.2, nilai  $x=0$  saat  $t=0$  serta  $x=4$  saat  $t=5$  juga merupakan bentuk masalah nilai awal. Sehingga apabila disubstitusikan nilai  $x=0$  saat  $t=0$  kedalam persamaan (2.6) maka diperoleh

$$-\ln 16 + \ln 24 = \ln C$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{3}{2}.$$

Substitusikan nilai  $x=4$  saat  $t=5$  kedalam persamaan (2.6) diperoleh

$$-\ln(16-4) + \ln(24-4) = \frac{3}{2}k5 + \ln \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{20}{12} = \frac{15}{2}k + \ln \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2}{15} \ln \frac{10}{9}$$

Sehingga persamaan (2.6) menjadi  $\ln \left( \left( \frac{24-x}{16-x} \right) \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{15} \ln \frac{10}{9} t$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{24-x}{16-x} \right) \frac{2}{3} = \exp \left[ \frac{t}{15} \ln \frac{10}{9} \right]$$

$$\Leftrightarrow 48 - 2x = (48 - x) \exp \left[ \frac{t}{15} \ln \frac{10}{9} \right]$$

$$\Leftrightarrow 48 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{t}{15} \ln \frac{10}{9} \right) \right] = x \left[ 3 - 2 \exp \left( -\frac{t}{15} \ln \frac{10}{9} \right) \right]$$

$$\Leftrightarrow x = 48 \frac{\left[ 1 - \exp \left( -\frac{t}{15} \ln \frac{10}{9} \right) \right]}{3 - 2 \exp \left[ -\frac{t}{15} \ln \frac{10}{9} \right]}$$

yang apabila di interpretasikan berarti berat zat C pada setiap saat adalah

$$x = 48 \frac{\left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{15} \ln \frac{10}{9}\right) \right]}{3 - 2 \exp\left[-\frac{t}{15} \ln \frac{10}{9}\right]} \text{ gram .}$$

### 2.3. 12 Persamaan Diferensial Homogen

Bentuk umum persamaan diferensial homogen dapat dinyatakan

$$\text{sebagai } \frac{dy}{dt} = f(t, y) = f\left(\frac{y}{t}\right). \quad (2.7)$$

Cara termudah untuk menyelesaikan persamaan diferensial homogen (2.7)

yaitu dengan mendefinisikan variabel baru  $z = \frac{y}{t}$  dan persamaan

diferensialnya menjadi  $t \frac{dz}{dt} + z = f(z)$ , dimana ruas kiri dari persamaan

diferensial ini diperoleh dengan menerapkan aturan rantai pada  $y=zt$ ,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dt} + \frac{dy}{dt} = t \frac{dz}{dt} + z, \text{ dalam bentuk ini kita selalu akan}$$

$$\text{memisahkan variabel-variabelnya, yakni } \frac{dt}{t} = \frac{dz}{f(z) - z} \quad (2.8)$$

yang dengan mudah dapat kita selesaikan persamaan diferensial (2.8)

dengan mengintegrasikan kedua ruas persamaan (Waluya, 2006: 40). Untuk

dapat mengetahui bentuk persamaan diferensial homogen, dapat

ditunjukkan melalui contoh 2.3 berikut.

#### Contoh 2.3.

Sebuah bejana berisi 50 liter air garam yang mengandung 1 kilogram

garam. Air garam yang mengandung 2 kilogram garam tiap liter mengalir

kedalam bejana dengan laju  $5 \frac{\text{liter}}{\text{menit}}$ . Larutan garam dalam bejana diaduk

agar homogen dan larutan ini dialirkan keluar bejana dengan laju  $3 \frac{\text{liter}}{\text{menit}}$ .

Berapa jumlah garam didalam bejana pada setiap waktu?.

**Penyelesaian:**

Untuk memperoleh model persamaan diferensial pada masalah ini, sebagai langkah awal adalah mengidentifikasi semua besaran yang terlibat dalam masalah konsentrasi, memberi lambang pada semua besaran yang terlibat, dan menentukan satuan untuk semua besaran.

Sebagai peubah bebas adalah waktu  $t$  dan peubah tak bebas adalah jumlah garam dalam bejana pada setiap saat, misalkan  $x$ .

Laju perubahan rata-rata jumlah garam didalam bejana dalam selang waktu  $\Delta t$  adalah  $\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$

Laju perubahan jumlah garam didalam bejana pada setiap saat adalah

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \text{laju jumlah garam masuk} - \text{laju jumlah garam keluar.}$$

$$\text{Laju jumlah garam masuk} = 2 \frac{\text{ki logram}}{\text{liter}} \times 5 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} = 10 \frac{\text{ki logram}}{\text{menit}}$$

$$\text{Volume dalam bejana setiap saat} = 50 + (5 - 3)t = 50 + 2t$$

$$\text{Konsentrasi garam dalam bejana} = \frac{x}{50 + 2t} \frac{\text{ki logram}}{\text{liter}}$$

$$\begin{aligned} \text{Laju jumlah garam keluar} &= \frac{x}{50+2t} \frac{\text{ki logram}}{\text{liter}} \times 3 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} \\ &= \frac{3x}{50+2t} \frac{\text{ki logram}}{\text{menit}} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } \frac{dx}{dt} = 10 - \frac{3x}{50+2t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{500+20t-3x}{50+2t}, x(0)=10. \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) dapat diselesaikan dengan mendefinisikan variabel baru

$$u = 500 + 20t - 3x, \quad v = 50 + 2t, \quad dx = \frac{1}{3}(10dv - du), \quad \text{dan } dt = \frac{1}{2}dv \text{ serta}$$

mensubstitusikannya ke persamaan diferensial (2.9).

$$\text{Diperoleh } \left[ \frac{u}{2} - \frac{10v}{3} \right] dv + \frac{v}{3} du = 0 \quad (2.10)$$

Substitusikan  $r = \frac{u}{v}$  dan  $du = r dv + v dr$  kedalam persamaan diferensial

(2.10) sehingga diperoleh persamaan diferensial peubah terpisah

$$\frac{dv}{2v} + \frac{dr}{5r-20} = 0. \text{ dengan mengintegrasikan masing-masing ruas maka}$$

$$\int \frac{dv}{2v} + \int \frac{dr}{5r-20} = \ln C$$

$$\Leftrightarrow \ln 2v + \ln 5r = \ln C. \quad (2.11)$$

Substitusi kembali nilai v dan r dalam x dan t kedalam persamaan (2.11),

$$\text{menghasilkan } x = \frac{c}{(50+2t)^{\frac{3}{2}}} + 4t + 100 \quad (2.12).$$

Dengan mensubstitusikan syarat awal  $x(0)=0$  didapat  $C = -22500\sqrt{2}$ , dan

dengan mensubstitusikan nilai  $C = -22500\sqrt{2}$  kedalam persamaan (2.12) Jadi

jumlah garam dalam bejana pada setiap saat adalah

$$x = 4t + 100 \frac{22500\sqrt{2}}{(50 + 2t)^{\frac{3}{2}}}. \text{ Jadi jumlah garam didalam bejana makin banyak}$$

jika volume bejana diketahui, dapat diketahui pula jumlah garam didalam bejana pada saat bejana penuh berisi air (Santosa, 1997:61-63).

### 2.3. 13 Masalah Pencampuran

Sebuah senyawa kimia dituangkan dengan laju tertentu ke dalam tanki yang berisi senyawa yang sama tapi, mungkin dengan konsentrasi berbeda. Keduanya dianggap tercampur sempurna. Pada saat yang sama, campuran tersebut juga dikeluarkan dari tanki dengan laju tertentu pula. Dalam proses ini, sering kali sangat penting untuk mengetahui konsentrasi larutan dalam tanki pada setiap saat.

Persamaan diferensial untuk masalah ini didasarkan pada formula:

Laju perubahan jumlah senyawa dalam tanki = Laju banyak senyawa masuk ke dalam tanki - Laju banyak senyawa ke luar dari tanki (Neswan, 2009: 18).

Laju masuknya senyawa = konsentrasi masuk  $\times$  laju larutan masuk

Laju keluarnya senyawa = konsentrasi keluar  $\times$  laju larutan keluar (Dawkins, 2007: 77). Dengan mengambil  $y(t)$  sebagai banyak senyawa dalam tanki pada saat  $t$ , dan  $v(t)$  sebagai volume larutan dalam tanki pada saat  $t$ ,

maka laju keluarnya senyawa =  $\frac{y(t)}{v(t)} \times$  laju larutan keluar dari tanki

jadi  $\frac{dy}{dt} =$  laju senyawa masuk  $- \frac{y(t)}{v(t)} \times$  laju larutan keluar dari tanki.

Apabila  $y(t)$ ,  $v(t)$  dan  $t$  diukur masing-masing dalam kg, liter, dan menit, maka satuan dalam persamaan di atas adalah

$$\frac{\text{kg}}{\text{menit}} = \frac{\text{kg}}{\text{menit}} - \frac{\text{kg}}{\text{liter}} \times \frac{\text{liter}}{\text{menit}} \quad (\text{Neswan, 2009: 18}).$$

Apabila dianggap kondisi awal dalam tanki memuat volume  $v_0$  campuran (substansi dan larutan) dari konsentrasi  $c_0$ , maka jumlah kondisi awal senyawa adalah  $y_0=c_0v_0$  dan laju larutan yang keluar  $r_0$ . jika konsentrasi yang masuk adalah

$c_i(t)$  pada laju  $r_i(t)$  maka  $\frac{dy}{dt} = c_i(t) \cdot r_i(t) - \frac{y(t)}{v(t)} \times r_0(t)$ ,  $y(0)=y_0$  dan

$\frac{dv}{dt} = r_i(t) - r_0(t)$ , sehingga diperoleh  $v(t) = v_0 + \int_0^t (r_i(s) - r_0(s))ds$  (Finan, 2006:1).

Contoh 2.1 dan contoh 2.3 merupakan bentuk aplikasi persamaan diferensial pada masalah pencampuran, terutama dalam masalah konsentrasi atau kadar suatu zat dalam campuran.

## 2.4 PROGRAM MAPLE

*Maple* merupakan salah satu perangkat lunak (*software*) yang dikembangkan oleh Waterloo Inc. Kanada untuk keperluan *Computer Algebraic System* (CAS). *Maple* juga sering digunakan untuk penyelesaian persamaan diferensial dan visualisasinya. Keunggulan dari *Maple* sebagai aplikasi persamaan diferensial adalah kemampuan melakukan animasi grafik dari suatu fenomena gerakan yang dimodelkan kedalam persamaan diferensial yang mempunyai nilai awal dan syarat batas.

Menu-menu yang terdapat pada tampilan *Maple* terdiri dari *File*, *Edit*, *View*, *Insert*, *Format*, *Spredsheet*, *Option*, *Window*, dan *Help* yaitu merupakan menu standar untuk aplikasi pada sistem *Windows*. Bahasa yang digunakan pada *Maple* adalah bahasa pemrograman yang sekaligus sebagai bahasa aplikasi, sebab pernyataan atau *statement* yang merupakan masukan (*input*) pada *maple* merupakan deklarasi pada bahasa program dan perintah (*command*) yang sering digunakan pada bahasa aplikasi.

Pernyataan yang sering digunakan untuk keperluan menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial antara lain: *restart* sebagai pernyataan awal, *diff* digunakan untuk mendiferensialkan suatu fungsi, *solve* digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, dan *simplify* digunakan untuk menyederhanakan suatu persamaan. Setiap perintah pada *Maple* harus dituliskan setelah tanda *maple* prompt yang diakhiri dengan titik dua ( : ) yaitu bila hasilnya tidak akan ditampilkan atau diakhiri dengan titik koma ( ; ) yaitu bila hasilnya akan ditampilkan (Rahmawati, 2007:23).

Untuk memulai *Maple* baru dimulai dengan mulai membuka program *Maple*. Maka akan muncul tampilan *maple worksheet* yang kosong, kita bisa mengolah kata untuk memulainya dengan halaman yang kosong. Kita bisa melanjutkannya dengan “membuka” dokumen selanjutnya, atau memberikan nama dokumen sama seperti kita memulai *Maple*.

*Maple* akan berproses ketika kita memasukkan perintah pada *Maple*, dan tanggapan *Maple* (yang tampak pada dokumen) dan memasukkan perintah. Perintah harus dimasukkan dalam paragraph, kemudian diolah. Dokumen itu disebut *Maple worksheet*.

Sebagian besar, *Maple worksheet* seperti dokumen pengolahan kata. Kita bisa mendeskripsikan perintah seperti *tipe*, *backspacing*, dan *editing* pada dokumen dengan menggunakan operasi standar dalam pengolahan kata.

Berbeda dengan dokumen pengolah kata, *Maple* akan menyeleksi paragraph (memasukkan dalam baris) dapat pula dengan memasukkan perintah region. Memasukkan perintah region terbatas hanya berisi perintah *Maple* yang valid.

Kemudian tekan enter pada baris yang berisi *Maple* dengan perintah lengkap yang selanjutnya diolah oleh mesin komputasi *Maple*, memintanya untuk keluar dari program, dan memasukkan ke dalam dokumen dengan paragraph yang menyatakan perintah.

Dengan demikian, mengedit dokumen seperti ada asisten matematika di samping kita, menunggu kita untuk memberikan tugas padanya.

Khas, memulai *Maple*, kursor akan berada pada baris dengan dimulai tanda khusus  $>$ . “tanda” ini menandakan kita berada dalam perintah. Kita memprosesnya dengan perintah tertentu dan tekan tombol *enter*.

Sebagai contoh, perintah *Maple* tampil pada baris dengan huruf jelas diawali dengan tanda khusus  $>$ . Khas, berisi bentuk matematika dengan indikasi fungsi atau transformasi, dan diakhiri dengan tanda titik koma.

Perintah lengkap dengan diakhiri titik koma. Mungkin tanda ini bisa lebih dari satu tergantung grup dalam satu barisnya. Ketiadaan tanda titik koma di akhir *Maple* secara normal diharapkan dilengkapi perintah ini untuk baris berikutnya.

Menjalankan perintah, memasukkan titik pada beberapa baris yang berisi perintah, dan tekan *enter* untuk dihitung (dihitung kembali) hasilnya dan tampilan jawabannya.

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

#### **3.1 Ruang Lingkup Penelitian**

Ruang lingkup penelitian ini adalah sirup produk Nalla Semarang yang terletak di Jl. Parangkusumo I no 16 Tlogosari, Semarang. Penelitian terhadap produk sirup Nalla difokuskan pada proses produksi tahap percampuran *base* sirup. Pada proses percampuran, yang diteliti adalah kadar zat gula dalam percampuran dan *base* sirup.

#### **3.2 Prosedur Penelitian**

Dalam penelitian ini, prosedur atau langkah-langkah yang digunakan penulis adalah sebagai berikut.

1) **Identifikasi Masalah**

Pada tahap ini dilakukan penelaahan beberapa sumber pustaka yang berkaitan dengan persamaan diferensial, larutan, konsentrasi, senyawa, aplikasi persamaan diferensial pada masalah konsentrasi dan percampuran, proses percampuran pada sirup, dan program *Maple* sehingga sehingga memunculkan ide atau gagasan yang pada akhirnya menjadi landasan teori untuk melaksanakan masalah.

2) **Merumuskan Masalah**

Berdasarkan ide atau gagasan pada identifikasi masalah diatas,

kemudian dirumuskan permasalahan yang berkaitan dengan aplikasi persamaan diferensial pada masalah konsentrasi zat gula dalam proses produksi sirup. Masalah yang diangkat dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

- 1) Bagaimanakah formula (model persamaan diferensial) yang menyatakan jumlah zat gula dalam campuran *base* sirup Nalla sebagai suatu fungsi dari waktu  $t$ , yang jumlahnya akan berubah secara teratur pada pergeseran jumlah zat gula yang terjadi dalam percampuran *base* sirup Nalla?
  - 2) Bagaimanakah solusi dari formula pada masalah konsentrasi zat gula dalam campuran?
  - 3) Bagaimanakah aplikasi program *maple* dalam menyelesaikan dan menggambarkan formula pada masalah konsentrasi zat gula dalam campuran?
- 3) Wawancara
- Metode wawancara adalah metode pengumpulan data dengan cara tanya jawab langsung kepada narasumber. Pada tahap ini, yang menjadi narasumber yaitu pemilik industri produk sirup Nalla Semarang.
- 4) Observasi
- Pada tahap ini dilakukan survey dan pengumpulan data pada produk Nalla Semarang untuk mengestimasi besaran parameter yang berpengaruh terhadap persoalan yang dihadapi dalam proses percampuran *base* sirup Nalla. Estimasi ini digunakan untuk membangun dan mengevaluasi model

matematis dan persoalannya.

5) Memformulasikan Model Matematis dari Persoalan yang Dihadapi.

Masalah konsentrasi zat gula dalam proses pencampuran *base* sirup dalam produksi sirup direpresentasikan kedalam bentuk persamaan diferensial, yaitu dengan :

- a) Mengidentifikasi semua besaran yang terlibat dalam masalah konsentrasi
- b) Memberi lambang pada semua besaran yang terlibat.
- c) Menentukan satuan untuk semua besaran.
- d) Menentukan besaran mana yang merupakan konstanta dan variabel
- e) Menentukan hubungan variabel bebas dan variabel tak bebas, sehingga dapat disusun menjadi suatu model matematika.

6) Analisis dan Pemecahan Masalah

Dari berbagai pustaka yang sudah menjadi bahan kajian, teori-teori matematika persamaan diferensial, diperoleh suatu pemecahan masalah yang telah dimodelkan, yang selanjutnya dikembangkan suatu model simulasi penyelesaian masalah persamaan diferensial dengan bantuan program *maple*.

7) Mengevaluasi Model dan Menggunakannya untuk Prediksi

Pada langkah ini, ditentukan apakah model matematis yang dibangun pada langkah sebelumnya telah menggambarkan keadaan nyata secara akurat. Jika belum, maka dibuat model yang baru.

## 8) Mengimplementasikan Hasil Studi

Pada langkah ini, hasil studi perhitungan diterjemahkan kedalam bahasa sehari-hari yang mudah dimengerti. Kesimpulan diperoleh dari interpretasi hasil solusi formula pada langkah pemecahan masalah.

### 3.3 Teknik Analisis Masalah

Analisis masalah dari hasil penelitian ini adalah memformulasikan model matematis dari persoalan masalah konsentrasi zat gula dalam proses pencampuran *base* sirup dalam produksi sirup Nalla direpresentasikan kedalam bentuk persamaan diferensial serta disolusikan. Adapun langkah-langkah analisis data dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

#### 3.3.1 Pembentukan Model Matematika

Analisis yang digunakan dalam pembentukan model matematika yang dalam hal ini adalah model persamaan diferensial adalah merumuskan masalah melalui pembuatan asumsi dengan melakukan penghampiran dan pengidealan yang didasarkan pada eksperimen dan pengamatan, serta hukum-hukum alam. Dalam penelitian ini hukum-hukum maupun rumus dasar yang terlibat dalam pembentukan model matematika persamaan diferensial adalah sebagai berikut.

##### 1. Hukum Aksi Massa

Hukum aksi masa yaitu apabila suatu larutan zat A berreaksi dengan larutan zat B untuk membentuk suatu larutan zat C, maka laju perubahan jumlah larutan zat C pada setiap saat, berbanding lurus dengan hasil kali

antara sisa larutan zat A dan sisa larutan zat B pada saat itu. (Santosa, 1997). Dengan memisalkan variabel tak bebas  $x$  yang menyatakan banyaknya jumlah zat C dalam campuran setiap saat, sedangkan variabel bebas adalah waktu, misalkan  $t$ , dan  $x'(t)$  adalah laju rata-rata perubahan zat C pada saat  $t$ . Maka laju rata-rata berubahnya zat C dalam selang waktu  $\Delta t$  adalah  $\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ . Laju bertambahnya zat C pada setiap

$$\text{saat adalah } \frac{dx}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Dalam penelitian ini, hukum aksi masa digunakan untuk mencari baertambahnya *base* sirup yang merupakan hasil percampuran zat gula dengan komposisi lainnya.

## 2. Volume Tabung

Dalam penelitian ini volume tabung digunakan untuk menghitung volume larutan yang terletak dalam wadah yang berbentuk tabung. Dengan mengambil nilai diameter tabung dan tinggi akan diperoleh volume larutan dalam tabung.

$$\text{volume tabung} = \pi \times \text{jari} - \text{jari} \times \text{jari} - \text{jari} \times \text{tinggi}.$$

## 3. Laju Senyawa

Dalam penelitian ini laju senyawa dihitung dari jumlah zat yang dicampurkan pada proses pemindahan dibagi jumlah total waktu yang dibutuhkan. Satuan yang digunakan untuk laju senyawa dalam penelitian ini adalah liter/menit atau liter/detik.

$$\text{laju senyawa} = \frac{\text{banyaknya senyawa yang mengalir}}{\text{satuan waktu}} \left( \frac{\text{liter}}{\text{menit}} \right)$$

#### 4. Konsentrasi Zat Gula

Dalam penelitian ini perhitungan konsentrasi zat gula dapat dilakukan dengan membandingkan jumlah zat gula (sebagai zat terlarut) dengan jumlah total zat dalam larutan.

$$\text{konsentrasi zat gula} = \frac{\text{ki logram zat gula dalam bejana pada saat } t}{\text{jumlah liter senyawa gula pada saat } t} \left( \frac{\text{gram}}{\text{liter}} \right)$$

Adapun cara menghitung konsentrasi/kekentalan gula dalam sirup yang diketahui derajat brix-nya dapat menggunakan pendekatan tabel konversi kekentalan gula dengan cara adalah sebagai berikut, misalkan kekentalan campuran berdasarkan hasil pemeriksaan adalah 43 °brix. Dengan demikian, berdasarkan tabel konversi dapat diketahui kadar gula yang diperlukan untuk mendapatkan °brix tertentu, yaitu sebagai berikut:

$$\text{Kekentalan } 43 \text{ } ^\circ\text{brix} \rightarrow \text{kadar gula} = 800 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$$

Jika diketahui bahwa volume campuran adalah 30 liter, sedangkan kadar gula hasil pemeriksaan adalah  $800 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$ . Dengan demikian, kadar gula dalam

campuran dapat dihitung kadar gula dalam campuran: = 30 liter x 800

$$\frac{\text{gram}}{\text{liter}} = 24.000 \text{ gram.}$$

#### 5. Laju Jumlah Zat Gula

Dalam penelitian ini, laju jumlah zat gula digunakan untuk menyatakan banyaknya zat gula dalam larutan yang mengalir tiap satuan waktu. Laju

jumlah zat gula dalam penelitian ini meliputi laju jumlah zat gula masuk dan laju jumlah zat gula keluar.

Laju jumlah zat gula keluar

$$= \text{konsentrasi gula} \times \text{laju keluar} \left( \frac{\text{gram}}{\text{menit}} \right)$$

Laju jumlah zat gula masuk

$$= \text{konsentrasi gula} \times \text{laju masuk} \left( \frac{\text{gram}}{\text{menit}} \right)$$

## 6. Pemodelan Persamaan Diferensial dalam Percampuran

Analisis yang digunakan dalam pembentukan model matematika diferensial yang dalam penelitian ini didasarkan pada formula:

Laju perubahan jumlah zat gula dalam campuran = Laju banyak zat gula masuk - Laju banyak zat gula keluar.

### 3.3.2 Penyelesaian Model Matematika

Untuk menyelesaikan pemodelan matematika yang berupa persamaan diferensial, digunakan beberapa penyelesaian sesuai dengan model matematisnya, kemudian dilakukan penganalisaan pada model itu. Beberapa analisis penyelesaian model persamaan diferensial dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

#### 1. Faktor Integral

Apabila dipunyai persamaan diferensial dengan bentuk  $\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$

atau dapat ditulis  $y' + p(t)y = g(t)$ , untuk menyelesaikannya dapat digunakan metode faktor integral, yakni dengan mengalikan kedua ruas

dengan suatu faktor pengintegral  $e^{\int p(t) dt}$ , sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dt} * e^{\int p(t) dt} + p(t)y * e^{\int p(t) dt} = g(t) * e^{\int p(t) dt}.$$

Pada ruas kiri merupakan turunan dari  $y * e^{\int p(t) dt}$ . Maka persamaan diferensial dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\frac{d}{dt} \left( y * e^{\int p(t) dt} \right) = g(t) * e^{\int p(t) dt}$$

kemudian dengan mengintegrasikan kedua

ruas, maka diperoleh  $y * e^{\int p(t) dt} = \int \left( g(t) * e^{\int p(t) dt} \right) dt$

$$\Leftrightarrow y = e^{-\int p(t) dt} * \int \left( g(t) * e^{\int p(t) dt} \right) dt \quad (\text{Neswan, 2009: 14}).$$

## 2. Peubah Terpisah

Apabila dijumpai suatu persamaan diferensial peubah terpisah, yang ditandai oleh fakta bahwa dua peubah dari persamaan itu bersama-sama masing-masing diferensialnya dapat ditempatkan diruas yang berlawanan, maka dalam persamaan semacam itu tanda sama-dengan ‘memisah’ satu peubah dari yang lain. Dengan manipulasi aljabar, memungkinkan persamaan diferensial terpisah ditulis dalam bentuk  $y' = \frac{p(t)}{q(y)}$  atau, lebih eksplisit  $q(y) dy = p(t) dt$  (Finizio, 1982:15).

Metode penyelesaian persamaan diferensial variabel terpisah dapat dilakukan dengan mengintegrasikan langsung persamaan diferensial  $q(y) dy = p(t) dt$  (Supriyono, 2007:4).

### 3. Pengintegralan Fungsi Berbentuk $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

Strategi menentukan integral fungsi berbentuk  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  adalah sebagai

berikut.

8 Periksa apakah derajat  $p(x)$  kurang dari derajat  $q(x)$ . Jika tidak, adakan pembagian

9 Faktorkan  $q(x)$  menjadi faktor-faktor linier atau kuadrat, sebagai contoh:  $q(x) = (x-a_1)^{n_1}, \dots, (x-a_2)^{n_2}, (x^2+b_1x+c_1)^{m_1}, \dots, (x^2+b_1x+c_1)^{m_1}$

10 Untuk setiap faktor linier  $(x-a)^n$  buat pecahan bagian:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

11 Untuk setiap faktor kuadrat  $(x^2+bx+c)^m$  buat pecahan bagian:

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{B_mx + C_m}{(x^2 + bx + c)^m}$$

12 Kombinasikan semua suku dalam pecahan bagian dengan menyamakan penyebut.

13 Hitung semua koefisien yang ada.

14 Integralkan (Chotim, 2004:133).

### 4. Masalah Nilai Awal

Masalah nilai awal bagi persamaan diferensial berorde-n

$F\left[t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}\right] = 0$  diartikan sebagai penyelesaian persamaan

diferensial dalam interval  $a < t < b$  sedemikian sehingga di titik  $t_0$  berlaku

kondisi awal  $y(t_0) = t_0$ ,  $\frac{dy}{dt}(t_0) = y_1$ ,  $\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(t_0) = y_{n-1}$ , dengan  $t_0$  dalam selang  $a < t < b$  dan  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  merupakan konstanta.

Jika persamaan diferensialnya orde satu, maka kondisi inisialnya hanya berupa persamaan tunggal.  $y(t_0) = y_0$  (Kusumah, 1989: 35-36).

Istilah kondisi awal  $y(t_0) = y_0$  menyatakan kedudukan jumlah zat gula pada saat  $t_0$  dan  $\frac{dy}{dt}(t_0) = y_1$  menyatakan laju jumlah zat gula pada saat  $t_0$ .

## 5. Bentuk Homogen

Bentuk umum persamaan diferensial homogen dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \quad (3.1)$$

Cara termudah untuk menyelesaikan persamaan diferensial homogen (3.1)

yaitu dengan mendefinisikan variabel baru  $z = \frac{y}{t}$  dan persamaan

diferensialnya menjadi  $t \frac{dz}{dt} + z = f(z)$ , dimana ruas kiri dari persamaan

diferensial ini diperoleh dengan menerapkan aturan rantai pada  $y=zt$ ,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dt} + \frac{dy}{dt} = t \frac{dz}{dt} + z, \quad \text{dalam bentuk ini kita selalu akan}$$

memisahkan variabel-variabelnya, yakni  $\frac{dt}{t} = \frac{dz}{f(z) - z}$  (3.2)

yang dengan mudah dapat kita selesaikan persamaan diferensial (3.2)

dengan mengintegalkan kedua ruas persamaan (Waluya, 2006: 40).

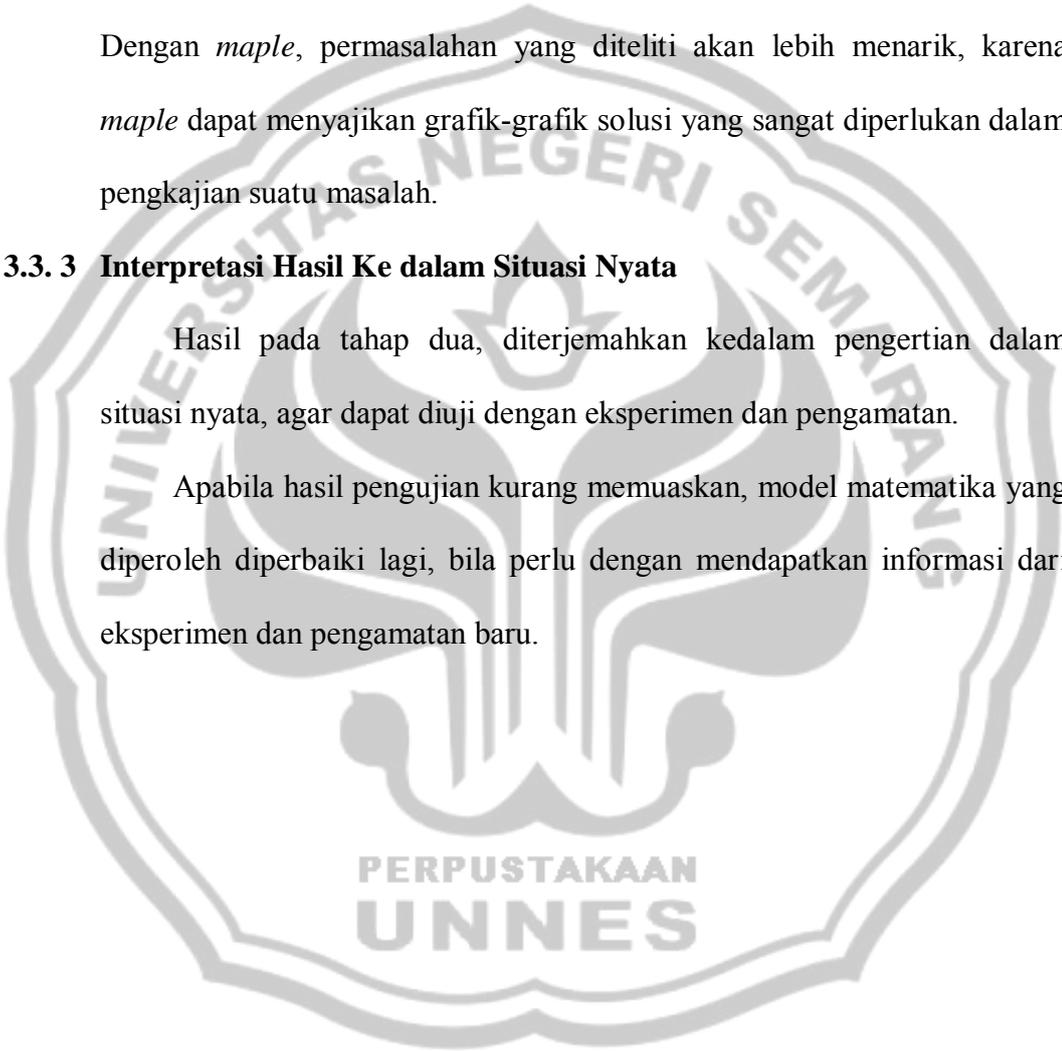
## 6. Pemrograman *Maple*

Penyelesaian model matematika bentuk persamaan diferensial juga dapat diselesaikan dengan program *maple*. Keunggulan dari *Maple* sebagai aplikasi persamaan diferensial adalah kemampuan menyelesaikan persamaan diferensial dengan lebih mudah dan hasil yang diperoleh lebih akurat. Dengan *maple*, permasalahan yang diteliti akan lebih menarik, karena *maple* dapat menyajikan grafik-grafik solusi yang sangat diperlukan dalam pengkajian suatu masalah.

### 3.3.3 Interpretasi Hasil Ke dalam Situasi Nyata

Hasil pada tahap dua, diterjemahkan kedalam pengertian dalam situasi nyata, agar dapat diuji dengan eksperimen dan pengamatan.

Apabila hasil pengujian kurang memuaskan, model matematika yang diperoleh diperbaiki lagi, bila perlu dengan mendapatkan informasi dari eksperimen dan pengamatan baru.



## BAB IV

### HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

#### 4.1 HASIL PENELITIAN

Penelitian ini mengkaji tentang masalah konsentrasi zat gula dalam produksi sirup Nalla Semarang, khususnya pada proses pembuatan campuran *base* sirup. Berdasarkan data yang diperoleh peneliti, yaitu berupa data ukuran kadar zat gula dalam proses percampuran *base* sirup Nalla, ukuran kadar zat gula yang dipakai oleh produk Nalla adalah ukuran tetap. karena pada masa awal produksi, sirup Nalla telah melalui beberapa percobaan ukuran komposisi termasuk zat kadar gula dalam sirup sebagai ukuran standar. Sehingga telah diperoleh suatu ukuran tetap yang sampai sekarang digunakan secara kontinu pada setiap produksi sirup Nalla.

Dalam setiap memproduksi sirup, perusahaan sangat berhati-hati dalam menjaga kualitas produk dengan selalu menggunakan ukuran tetap sedemikian sehingga tidak terjadi pergeseran ukuran kadar zat gula. Tabel 4.1 berikut merupakan data ukuran kadar zat gula dalam proses percampuran *base* sirup Nalla.

Volume air (liter)	Jumlah gula pasir (gram)	Rumput laut (gram)	Na siklamat (gram)	Jumlah glukosa (gram)	Konsentrasi gula dalam campuran (gram/liter)	Derajat brix gula ( <sup>0</sup> Brix)	Volume campuran (liter)	Total waktu percampuran (menit)
20	50.000	75	100	7.500	2.880	70	64.821	80

Tabel 4.1 Ukuran bahan *base* sirup

Adapun proses pembuatan *base* sirup Nalla adalah sebagai berikut.

1. Memasukkan satu galon air hasil filtrasi (20 liter) dalam bejana pertama yang berbentuk silinder (diameter 50 cm dan tinggi 58 cm) dipanaskan sampai mendidih, berdasarkan pengamatan 1 liter air = 1000 gram.
2. Memasukkan 75 gram rumput laut, tunggu rumput laut larut sehingga menjadi larutan rumput laut.
3. Memasukkan gula pasir refinasi tiap satu wadah silinder kecil (diameter 13 cm dan tinggi 13 cm) hingga 50 kilogram, setiap penyampuran, campuran dipertahankan kondisinya dengan pengadukan secara terus menerus. Pada saat gula pasir masuk kedalam campuran rumput laut, suhu turun hingga 40<sup>0</sup>C dan dipertahankan sekitar 60<sup>0</sup>C, dan maksimal 80<sup>0</sup>C. ini memerlukan waktu sekitar 400 detik.
4. Tinggi campuran adalah 2,92 cm dari tinggi bejana pertama.
5. Memasukkan Na siklamat 100 gram.
6. Memasukkan glukosa (kadar 83<sup>0</sup> brix) 7500 gram yang berupa likuid dan membutuhkan waktu 50 detik.
7. Melakukan pengadukan secara terus menerus sampai kira-kira 80 menit dari proses awal percampuran.
8. Tinggi campuran dalam bejana pertama adalah setinggi 33 cm dari tinggi bejana pertama.

9. Memindahkan campuran yang telah merata kedalam bejana silinder kedua (diameter 35 cm dan tinggi 58 cm) yang dilapisi penyaring dengan teratur menggunakan wadah silinder kecil (diameter 13 cm dan tinggi 13 cm) dengan waktu 13 menit.
10. Mendinginkan hasil percampuran *base* sirup untuk penyesuaian suhu kamar (tanpa alat pendingin).

Biasanya dalam satu pekan, produk Nalla menyediakan beberapa bahan baku *base* sirup untuk beberapa kali pembuatan *base* sirup. Adapun data persediaanya ditunjukkan pada tabel 4.2 berikut.

Tabel 4.2 Data persediaan bahan untuk *base* sirup dalam satu minggu

Gula pasir	Glukosa	Na siklamat	Rumput laut	Air filtrasi
10 karung x @ 50 kilogram = 500 kilogram	75 kilogram	1 kilogram	900 gram	12 galon = 240 liter = 240 kilogram

## 4.2 PEMBAHASAN

### 4.2.1 Perhitungan dalam Proses Percampuran *Base* Sirup Nalla

Dari data pada tabel 4.1 dan proses pembuatan *base* sirup Nalla, dapat dilakukan perhitungan sebagai berikut.

- a. Volume air filtrasi = 20 liter
- b. Volume air campuran rumput laut dalam bejana = 20 liter
- c. Volume wadah silinder kecil =  $\frac{22}{7} \times 0,65 \text{ dm} \times 0,65 \text{ dm} \times 1,3 \text{ dm}$   
= 1,726 liter

d. Laju penyampuran gula refinasi kedalam campuran

$$= \frac{50.000 \text{ gram}}{400 \text{ detik}} = \frac{50.000 \text{ gram}}{6,67 \text{ menit}} = 7.500 \frac{\text{gram}}{\text{menit}}$$

e. Volume campuran gula pasir refinasi

$$= \frac{22}{7} \times 2,5 \text{ dm} \times 2,5 \text{ dm} \times 2,92 \text{ dm} = 57,35 \text{ liter}$$

f. Konsentrasi atau kadar gula (murni gula pasir) pada campuran

$$= \frac{50.000 \text{ gram}}{20 \text{ liter}} = 2.500 \frac{\text{gram}}{\text{liter}} = 70^{\circ} \text{ brix.}$$

g. Kadar glukosa : Karena tabel konversi tingkat kekentalan dan berat jenis larutan gula yang diperoleh peneliti terbatas sampai 70, maka untuk memperoleh nilai 83<sup>0</sup> brix digunakan dengan pendekatan sebagai berikut:

$$\text{Nilai } 69^{\circ} \text{ brix} = 2.379,4 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$$

$$\text{Nilai } 70^{\circ} \text{ brix} = 2.500,0 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$$

$$\text{Maka } \frac{83^{\circ} - 70^{\circ}}{80^{\circ} - 69^{\circ}} = \frac{\text{nilai } 83^{\circ} - 2.500}{\text{nilai } 83^{\circ} - 2.379,4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{14} = \frac{\text{nilai } 83^{\circ} - 2.500}{\text{nilai } 83^{\circ} - 2.379,4}$$

$$\Leftrightarrow 13 \times (\text{nilai } 83^{\circ} \text{ brix} - 2.379,4) = 14 \times (\text{nilai } 83^{\circ} \text{ brix} - 2.500)$$

$$\Leftrightarrow (13 \times \text{nilai } 83^{\circ} \text{ brix}) - (13 \times 2.379,4) = (14 \times \text{nilai } 83^{\circ} \text{ brix}) - (14 \times 2.500)$$

$$\Leftrightarrow 3.5000 - 30.9322,2 = \text{nilai } 83^{\circ} \text{ brix}$$

$$\Leftrightarrow \text{nilai } 83^{\circ} \text{ brix} = 4.067,8 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$$

h. Konsentrasi atau kadar zat gula (gula pasir refinasi dan Na siklamat)

$$\text{pada campuran} = \frac{50.100 \text{ gram}}{20 \text{ liter}} = 2.505 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$$

i. Laju senyawa glukosa masuk kedalam campuran =  $\frac{7,5 \text{ liter}}{50 \text{ detik}}$

$$= \frac{7,5 \text{ liter}}{0,833 \text{ menit}} = 9 \frac{\text{liter}}{\text{menit}}$$

j. Volume hasil campuran =  $\frac{22}{7} \times 2,5 \text{ dm} \times 2,5 \text{ dm} \times 3,3 \text{ dm}$   
= 64,821 liter.

k. Laju pemindahan senyawa campuran kedalam bejana kedua

$$= \frac{64,821 \text{ liter}}{13 \text{ menit}} = 5 \frac{\text{liter}}{\text{menit}}$$

l. Kandungan zat gula dalam campuran *base sirup*

$$= \frac{\left(7,5 \text{ liter} \times 4,067,8 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}\right) + \left(57,35 \text{ liter} \times 2.505 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}\right)}{64,821 \text{ liter}}$$

$$= \frac{(30.508,5 \text{ gram}) + (143.661,75 \text{ gram})}{64,821 \text{ liter}}$$

$$= \frac{74.170,25 \text{ gram}}{64,821 \text{ liter}} = 2.686,9 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$$

m. Nilai kandungan zat gula  $2.686,9 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$  dalam satuan derajat brix

$$\text{Nilai } 69^{\circ} \text{ brix} = 2.379,4 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$$

$$\text{Nilai } 70^0 \text{ brix} = 2.500,0 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$$

$$\frac{(\text{nilai } 2.686,9 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}) - 70}{(\text{nilai } 2.686,9 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}) - 69} = \frac{2.686,9 - 2.500}{2.686,9 - 2.379,4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\text{nilai } 2.686,9 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}) - 70}{(\text{nilai } 2.686,9 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}) - 69} = \frac{186,9}{307,5}$$

$$\Leftrightarrow \left( (\text{nilai } 2.686,9 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}) - 70 \right) \times 307,5 = \left( (\text{nilai } 2.686,9 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}) - 69 \right) \times 186,9$$

$$\Leftrightarrow 307,5(\text{nilai } 2.686,9 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}) - 21.525 = 186,9(\text{nilai } 2.686,9 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}) - 12.896,1$$

$$\Leftrightarrow 307,5(\text{nilai } 2.686,9 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}) - 186,9(\text{nilai } 2.686,9 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}) = 21.525 - 12.896,1$$

$$\Leftrightarrow 120,6(\text{nilai } 2.686,9 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}) = 8.628,9$$

$$\Leftrightarrow (\text{nilai } 2.686,9 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}) = \frac{8.628,9}{120,6}$$

$$\Leftrightarrow (\text{nilai } 2.686,9 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}) = 71,55$$

$$\text{Jadi nilai } 2.686,9 \frac{\text{gram}}{\text{liter}} = 71,55^0 \text{ brix.}$$

#### 4.2.2 Persamaan Diferensial pada Data Ukuran Kadar Zat Gula dalam Proses Percampuran *Base Sirup Nalla*

Apabila pada proses pembuatan base sirup Nalla senyawa zat gula yang masuk dilakukan dalam waktu yang sama dengan keluarnya

senyawa dari campuran, maka dapat diperoleh gambaran sebagai berikut.

Dalam bejana pertama dengan volume 57,35 liter yang memuat air campuran rumput laut 20 liter yang mengandung 50 kilogram gula pasir refinasi dan 100 gram Na siklamat. Sebanyak 7,5 liter liquid glukosa 83<sup>0</sup> brix dialirkan kedalam bejana pertama dengan waktu sekitar 50 detik dan langsung tercampur dengan sempurna karena dijaga dengan pengadukan secara terus menerus. Hasil campuran ini dialirkan kedalam bejana kedua dengan laju  $\frac{64,81 \text{ liter}}{13 \text{ menit}}$ . Tentukan banyaknya zat gula setiap saat dan berapa jumlah zat gula 13 menit setelah percampuran berlangsung.

Untuk menyelesaikan permasalahan pada proses percampuran *base* sirup Nalla, dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

#### 4.2.2.1 Penurunan Model Matematika Persamaan Diferensial

Untuk menurunkan model matematika pada percampuran *base* sirup Nalla, dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

##### 1. Identifikasi besaran yang terlibat

Misalkan variabel tak bebas  $y$  dinotasikan sebagai jumlah gram zat gula dalam campuran, variabel bebas  $t$  menyatakan waktu,  $y(t)$  adalah jumlah gram zat gula dalam campuran pada saat  $t$ .  $y'(t)$  adalah laju perubahan zat gula dalam bejana pada saat  $t$ .  $V$  adalah volume campuran dalam bejana (liter),  $V(t)$  adalah volume campuran dalam bejana (liter) pada saat  $t$ , laju senyawa dalam adalah banyaknya liter senyawa yang mengalir per satuan menit waktu, [konsentrasi](#) zat gula adalah jumlah gram zat gula yang terkandung dalam setiap satuan liter volum senyawa, laju jumlah zat gula

masuk menyatakan banyaknya zat gula yang mengalir kedalam campuran tiap satuan waktu, laju jumlah zat gula keluar menyatakan banyaknya zat gula yang mengalir keluar campuran tiap satuan waktu.

## 2. Analisis pemodelan

Analisis pemodelan matematika dapat diperoleh melalui beberapa perhitungan berikut.

### a). Laju senyawa

$$\text{Laju senyawa masuk} = \frac{7,5 \text{ liter}}{50 \text{ detik}} = \frac{7,5 \text{ liter}}{0,833 \text{ menit}} = 9 \frac{\text{liter}}{\text{menit}}$$

$$\text{Laju senyawa campuran keluar} = \frac{64,81 \text{ liter}}{13 \text{ menit}} = 5 \frac{\text{liter}}{\text{menit}}$$

### b). Volume dalam bejana

$$\begin{aligned} V(t) &= 57,35 \text{ liter} + \left(9 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} - 5 \frac{\text{liter}}{\text{menit}}\right)(t \text{ menit}) \\ &= 57,35 + 4t \text{ liter} \end{aligned}$$

### c). laju jumlah zat gula

$$\begin{aligned} \text{Laju jumlah zat gula keluar} &= \frac{y(t)}{v(t)} \times \text{debit keluar} \\ &= \frac{y(t) \text{ gram}}{(57,35 + 4t) \text{ liter}} \times 5 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} \\ &= \frac{5y(t)}{(57,35 + 4t)} \frac{\text{gram}}{\text{menit}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Laju jumlah zat gula masuk} &= 83^0 \text{ brix} \times 9 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} \\ &= 4.067,8 \frac{\text{gram}}{\text{liter}} \times 9 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} \end{aligned}$$

$$= 36.610,2 \frac{\text{gram}}{\text{menit}}$$

### 3. Model persamaan diferensial

Dari analisis pemodelan, dapat diperoleh persamaan diferensial untuk percampuran, yaitu

Laju perubahan jumlah zat gula dalam bejana =

Laju jumlah zat gula masuk - Laju jumlah zat ke luar.

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = 36.610,2 - \frac{5y}{57,35 + 4t} \quad (4.1)$$

#### 4.2.2.2 Penyelesaian Model Matematika Persamaan Diferensial

Persamaan (4.1) merupakan persamaan diferensial dengan bentuk

standar  $\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$ , yakni  $\frac{dy}{dt} + \frac{5y}{57,35 + 4t} = 36.610,2$ . Persamaan

(4.1) merupakan persamaan diferensial linear yang dapat diselesaikan dengan faktor integral.

##### 1) Faktor integral

Dari persamaan  $\frac{dy}{dt} + \frac{5y}{57,35 + 4t} = 36.610,2$  diperoleh faktor integral:

$$e^{\int \frac{5}{57,35 + 4t} dt} = e^{\frac{5}{4} \ln(57,35 + 4t)} = (57,35 + 4t)^{\frac{5}{4}}$$

Kalikan kedua ruas persamaan  $\frac{dy}{dt} + \frac{5y}{57,35 + 4t} = 36.610,2$  dengan faktor

integral, diperoleh

$$(57,35 + 4t)^{\frac{5}{4}} \frac{dy}{dt} + (57,35 + 4t)^{\frac{5}{4}} \left( \frac{5}{57,35 + 4t} \right) y = (57,35 + 4t)^{\frac{5}{4}} \cdot 36.610,2$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} y(57,35 + 4t)^{\frac{5}{4}} = (57,35 + 4t)^{\frac{5}{4}} \cdot 36.610,2$$

$$\Leftrightarrow y(57,35 + 4t)^{\frac{5}{4}} = \int (57,35 + 4t)^{\frac{5}{4}} \cdot 36.610,2 dt$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{(57,35 + 4t)^{\frac{5}{4}}} \int (57,35 + 4t)^{\frac{5}{4}} \times 36.610,2 dt$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{36.610,2}{(57,35 + 4t)^{\frac{5}{4}}} \int (57,35 + 4t)^{\frac{5}{4}} dt$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{36.610,2}{(57,35 + 4t)^{\frac{5}{4}}} \left( \frac{(57,35 + 4t)^{\frac{9}{4}}}{\left(\frac{9}{4}\right) \cdot (4)} + C \right)$$

$$\Leftrightarrow y = 4.067,8(57,35 + 4t) + 36.610,2C(57,35 + 4t)^{-\frac{5}{4}} \quad (4.2).$$

Persamaan (4.2) merupakan solusi umum dari persamaan (4.1).

## 2) Masalah nilai awal

Karena pada saat  $y=50,1$  kilogram = 50.100 gram, saat  $t=0$ , maka persamaan (4.2) menjadi

$$50.100 = 4.067,8(57,35 + 4(0)) + 36.610,2C(57,35 + 4(0))^{-\frac{5}{4}}$$

$$\Leftrightarrow 50.100 = 4.067,8(57,35) + 36.610,2C(57,35)^{-\frac{5}{4}}$$

$$\Leftrightarrow 50.100 = 233.288,33 + 231,97C$$

$$\Leftrightarrow 231,97C = 50.100 - 233.288,33$$

$$\Leftrightarrow 231,97C = -183.188,33$$

$$\Leftrightarrow C = -\frac{183.188,33}{231,97}$$

$$\Leftrightarrow C = -789,7$$

Dengan mensubstitusikan nilai  $C = -789,7$  pada persamaan (4.2) maka diperoleh solusi khususnya adalah

$$y = 4.067,8(57,35 + 4t) + 36.610,2C(57,35 + 4t)^{-\frac{5}{4}}$$

$$\Leftrightarrow y = 4.067,8(57,35 + 4t) + 36.610,2(-789,7)(57,35 + 4t)^{-\frac{5}{4}}$$

$$\Leftrightarrow y = 4.067,8(57,35 + 4t) - 28.911.074,94(57,35 + 4t)^{-\frac{5}{4}}$$

$$\text{Jadi, } y(t) = 4.067,8(57,35 + 4t) - 28.911.074,94(57,35 + 4t)^{-\frac{5}{4}} \quad (4.3)$$

3) Solusi untuk  $t=13$

Pada saat  $t=13$ , maka dari persamaan (4.3) akan diperoleh:

$$y(13) = 4.067,8(57,35 + 4(13)) - 28.911.074,94(57,35 + 4(13))^{-\frac{5}{4}}$$

$$\Leftrightarrow y(13) = 4.067,8(57,35 + 52) - 28.911.074,94(57,35 + 52)^{-\frac{5}{4}}$$

$$\Leftrightarrow y(13) = 4.067,8(109,35) - 28.911.074,94(109,35)^{-\frac{5}{4}}$$

$$\Leftrightarrow y(13) = 444.813,93 - 28.911.074,94(0,002828)$$

$$\Leftrightarrow y(13) = 444.813,93 - 81759,975$$

$$\Leftrightarrow y(13) = 363.053,95$$

Jadi solusi pada saat  $t=13$  diperoleh  $y = 363.053,95$  gram

#### 4.2.2.3 Interpretasi Hasil Ke dalam Situasi Nyata

Solusi  $y = 4.067,8(57,35 + 4t) - 28.911.074,94(57,35 + 4t)^{-\frac{5}{4}}$  apabila diinterpretasikan berarti jumlah zat gula setiap saat waktu  $t$  menit adalah

$$= 4.067,8(57,35 + 4t) - 28.911.074,94(57,35 + 4t)^{-\frac{5}{4}} \text{ gram. Solusi pada saat}$$

$t=13$  diperoleh  $y = 363.053,95$  gram berarti setelah 13 menit percampuran

berlangsung jumlah total kandungan zat gula dalam campuran adalah 363.053,95 gram. Volume setelah 13 menit adalah  $= 57,35 + 4(13) = 109,35$  liter. Jadi total kadar zat gula dalam campuran setelah 13 menit adalah  $\frac{363.053,95}{109,35} = 3.320,1 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$ , dimana jumlah ini lebih dari

$2.500 \frac{\text{gram}}{\text{liter}} = 70^{\circ} \text{brix}$ , berarti termasuk memenuhi syarat mutu sirup no I

untuk standar SII.

#### **4.2.3 Persamaan Diferensial pada Data Persediaan Ukuran Bahan-Bahan dalam Proses Percampuran *Base* Sirup dalam Satu Minggu**

Dari data yang diperoleh, perusahaan Nalla biasanya menyediakan 240 kilogram air filtrasi, 900 gram rumput laut, 10 karung gula pasir refinasi, yang setiap karungnya berisi 50 kilogram, 75 kilogram glukosa, dan 1 kilogram Na siklamat. Dalam satu kali proses pembuatan *base* sirup, larutan 75 gram rumput laut dalam 20 kilogram air filtrasi dan 57.6 kilogram zat gula (50 kilogram gula pasir, 100 gram Na siklamat dan 7,5 kilogram glukosa) membentuk 77.675 kilogram campuran *base* sirup dalam waktu 80 menit. Untuk mendapatkan berat campuran *base* sirup pada setiap saat, dicari selesaian model matematikanya atau dilakukan penganalisaan pada model matematikanya.

Untuk menyelesaikan permasalahan pada data persediaan ukuran bahan-bahan dalam proses percampuran *base* sirup dalam satu minggu, dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

#### 4.2.3.1 Penurunan Model Matematika Persamaan Diferensial

Untuk menurunkan model matematika pada data persediaan ukuran bahan-bahan dalam proses pencampuran *base* sirup dalam satu minggu, dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Identifikasi besaran yang terlibat

Misalkan variabel tak bebas  $x$  menyatakan banyaknya kilogram campuran *base* sirup setiap saat. Sedangkan variabel bebas adalah waktu, misalkan  $t$ , dan  $x'(t)$  adalah laju rata-rata perubahan campuran *base* sirup pada saat  $t$ .

Laju rata-rata berubahnya campuran *base* sirup dalam selang waktu  $\Delta t$

adalah 
$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Laju bertambahnya campuran *base* sirup pada setiap saat adalah

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

2. Analisis pemodelan

1 kilogram campuran *base* sirup terbentuk dari  $\frac{20,075}{77.675}$  kilogram larutan

rumput laut dan  $\frac{57.6}{77.675}$  kilogram zat gula.

$x$  kilogram campuran *base* sirup terbentuk dari  $\frac{20,075 x}{77.675}$  kilogram larutan

rumput laut dan  $\frac{57.6 x}{77.675}$  gram zat gula.

### 3. Model persamaan diferensial

Jadi, berdasarkan analisis pemodelan dan hukum aksi massa dapat

diperoleh model matematika  $\frac{dx}{dt} = k \left[ 240,9 - \frac{20,075x}{77,675} \right] \left[ 576 - \frac{57,6x}{77,675} \right]$ ,

$$x(0)=0, x(80)=77.675. \quad (4.4)$$

#### 4.2.3.2 Penyelesaian Model Matematika Persamaan Diferensial

Dari persamaan diferensial (4.4) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k[240,9 - 0,258x][576 - 0,742x] \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{(240,9 - 0,258x)(576 - 0,742x)} &= kdt \end{aligned} \quad (4.5)$$

1. Teknik pengintegralan khusus bentuk  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

Untuk menyelesaikannya persamaan diferensial (4.5) diperlukan teknik

pengintegralan khusus bentuk  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , sehingga

$$\begin{aligned} \frac{dx}{(240,9 - 0,258x)(576 - 0,742x)} &= kdt \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{(933,72 - x)(776,28 - x)} &= 0,19kdt \\ \Leftrightarrow \frac{0,00635 dx}{(776,28 - x)} - \frac{0,00635 dx}{(933,72 - x)} &= 0,19k dt \end{aligned} \quad (4.6)$$

2. Peubah terpisah

Persamaan (4.6) merupakan persamaan diferensial terpisah variabelnya, sehingga dapat diselesaikan dengan mengintegalkan masing-masing ruas

$$\frac{0,00635 \, dx}{(776,28 - x)} - \frac{0,00635 \, dx}{(933,72 - x)} = 0,19k \, dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dx}{(776,28 - x)} - \int \frac{dx}{(933,72 - x)} = \int 30 \, k \, dt$$

$$\Leftrightarrow -\ln(776,28 - x) + \ln(933,72 - x) = 30 \, k \, t + \ln C, \quad \text{untuk } C \text{ suatu}$$

konstanta. (4.7)

### 3. Masalah nilai awal

Dengan menggunakan teknik masalah nilai awal (MNA), yakni pada saat sebelum percampuran ( $t=0$ ), jumlah total zat gula sama dengan nol ( $x=0$ ).

Substitusi  $t = 0$  dan  $x = 0$  kedalam persamaan (4.7), diperoleh

$$-\ln(776,28 - x) + \ln(933,72 - x) = 30 \, k \, t + \ln C$$

$$\Leftrightarrow -\ln 776,28 + \ln 933,72 = \ln C.$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{933,72}{776,28}\right) = \ln C \Leftrightarrow \ln C = \ln 1,2 \Leftrightarrow C=1,2$$

Dengan mensubstitusikan nilai  $C=1,2$  kedalam persamaan (4.7), diperoleh

$$-\ln(776,28 - x) + \ln(933,72 - x) = 0,0012 \, k \, t + \ln 1,2. \quad (4.8)$$

Pada saat 80 menit proses percampuran selesai dengan menghasilkan total campuran *base* sirup 77,675 kilogram.

Substitusi  $t = 80$  dan  $x = 77,675$  kedalam persamaan (4.8), diperoleh

$$-\ln(776,28 - 77,675) + \ln(933,72 - 77,675) = 0,0012 \, k \, (80) + \ln 1,2$$

$$\Leftrightarrow -\ln(698,605) + \ln(856,045) = 0,096 \, k + \ln 1,2$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{856,045}{698,605} = 0,096k + \ln 1,2$$

$$\Leftrightarrow \ln \left( \frac{856,045}{698,605} * \frac{1}{1,2} \right) = 0,096k$$

$$\Leftrightarrow \ln 1,02 = 0,096 k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{0,0198}{0,096}$$

$$\Leftrightarrow k=0,206$$

Jadi dengan mensubstitusikan nilai  $k=0,206$  kedalam persamaan (4.8), maka diperoleh

$$-\ln (776,28 - x) + \ln (933,72 - x) = 0,0012 * 0,206 t + \ln 1,2$$

$$\Leftrightarrow -\ln (776,28 - x) + \ln (933,72 - x) = 0,000247 t + \ln 1,2$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{(933,72 - x)}{(776,28 - x)} - \ln 1,2 = 0,000247 t$$

$$\Leftrightarrow \ln \left( \frac{933,72 - x}{776,28 - x} * \frac{1}{1,2} \right) = 0,000247 t$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{933,72 - x}{776,28 - x} * \frac{1}{1,2} \right) = \exp (0,000247 t)$$

$$\Leftrightarrow 933,72 - x = (931,53 - 1,2x) * \exp(0,000247t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{933,72 - x}{\exp(0,000247 t)} = 931,53 - 1,2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{933,72}{\exp(0,000247 t)} - \frac{x}{\exp(0,000247 t)} = 931,53 - 1,2 x$$

$$\Leftrightarrow 1,2x - \frac{x}{\exp(0,000247 t)} = 931,53 - \frac{933,72}{\exp(0,000247 t)}$$

$$\Leftrightarrow \left( 1,2 - \frac{1}{\exp(0,000247 t)} \right) x = 931,53 - \frac{933,72}{\exp(0,000247 t)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{931,53 - \frac{933,72}{\exp(0,000247t)}}{1,2 - \frac{1}{\exp(0,000247t)}} \quad (4.9)$$

Persamaan (4.9) merupakan solusi khusus untuk persamaan diferensial (4.4) dengan nilai  $k=0,206$ .

#### 4.2.3.3 Interpretasi Hasil Ke dalam Situasi Nyata

Dari penyelesaian matematika  $x = \frac{931,53 - \frac{933,72}{\exp(0,000247t)}}{1,2 - \frac{1}{\exp(0,000247t)}}$ , terlihat

bahwa  $t \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \frac{931,53}{1,2} = 776,3$ . Ini berarti bahan reaksi itu sebenarnya

tidak menghabiskan larutan rumput laut (air filtrasi dan rumput laut).

Karena 776,3 kilogram campuran *base* sirup terbentuk dari 576 kilogram zat gula (yang berarti semua zat gula) dan 200,3 kilogram air yang mengandung rumput laut. Jadi persediaan rumput laut dan air filtrasi pada sirup Nalla dapat dikurangi menjadi 200,3 yang meliputi 10 galon air filtrasi dan 750 gram rumput laut. Sedangkan untuk ukuran zat gula tetap seperti semula.

#### 4.2.4 Kasus Pergeseran Ukuran Kadar Zat Gula dalam Proses Percampuran *Base* Sirup

Berdasarkan hasil penelitian, produk sirup Nalla tidak pernah mengalami pergeseran kadar zat gula dalam proses produksinya karena penjagaan proses produksi yang ketat. Dalam hal ini digambarkan apabila

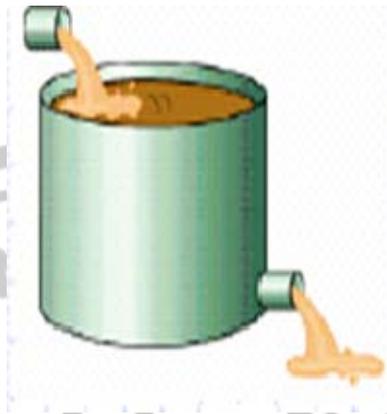
terjadi pergeseran kadar zat gula dalam proses percampuran *base* sirup dengan menggunakan data simulasi, yang dirumuskan melalui pembuatan asumsi dengan melakukan penghampiran dan pengidealan yang didasarkan pada pengamatan. Kasus pergeseran kadar zat gula yang diambil adalah kasus kelebihan gula, kasus kekurangan gula serta kasus percampuran dua senyawa gula dengan berbeda konsentrasinya.

Solusi yang digunakan pada kasus kesalahan dalam konsentrasi/kepekatan pada kadar zat gula dalam campuran adalah dengan menambahkan dan mengurangi campuran dengan zat gula atau komponen lainnya dalam waktu yang sama sehingga jumlah gula berubah secara teratur sampai pada ukuran yang diinginkan.

#### **4.2.4.1 Kelebihan Ukuran Kadar Zat Gula dalam Proses Percampuran *Base* Sirup**

Karena suatu kesalahan dalam proses percampuran *base* sirup, dalam wadah terdapat 60 liter campuran gula yang memuat 20 liter air, 60 kilogram gula pasir refinasi tertaburkan dalam wadah yang mestinya hanya diperlukan 50 kilogram gula pasir refinasi. Untuk mengatasi masalah ini, sebelum larutan dicampuri komposisi lain, dialirkan keluar campuran yang mengandung gula pasir refinasi 60 kilogram dengan teratur 3 liter tiap menit. Dalam waktu yang sama, kedalam wadah dimasukkan juga air murni 4 liter tiap menit. Jika dijaga agar kondisi gula dalam wadah merata setiap saat dengan pengadukan. Berapa lama waktu yang dibutuhkan agar gula didalam wadah sesuai standar mutu yang diharapkan yaitu 50

kilogram gula pasir . Proses pencampuran zat gula dengan pengaliran masuk dan pengaliran keluar dalam waktu yang sama dapat dilihat pada gambar 4.1 berikut.



Gambar 4.1 Proses pencampuran zat gula

Untuk menyelesaikan permasalahan pada kasus kelebihan ukuran kadar zat gula dalam proses pencampuran *base* sirup, dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

#### a. Penurunan Model Matematika Persamaan Diferensial

Untuk menurunkan model matematika pada kasus kelebihan ukuran kadar gula dalam proses pencampuran *base* sirup, dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

##### a.1. Identifikasi besaran yang terlibat

Misalkan variabel tak bebas  $y$  dinotasikan sebagai jumlah gram gula pasir dalam campuran, variabel bebas  $t$  menyatakan waktu,  $y(t)$  adalah jumlah gram gula pasir dalam campuran pada saat  $t$ .  $y'(t)$  adalah laju perubahan gula pasir dalam bejana pada saat  $t$ .  $V$  adalah volume campuran dalam bejana (liter),  $V(t)$  adalah volume campuran dalam bejana (liter) pada saat

$t$ , laju senyawa dalam adalah banyaknya liter senyawa yang mengalir per satuan menit waktu, [konsentrasi](#) gula adalah jumlah gram gula pasir yang terkandung dalam setiap satuan liter volume senyawa, laju jumlah gula pasir masuk menyatakan banyaknya gula pasir yang mengalir kedalam campuran tiap satuan waktu, laju jumlah gula pasir keluar menyatakan banyaknya gula pasir yang mengalir keluar campuran tiap satuan waktu.

#### a.2. Analisis pemodelan

Analisis pemodelan matematika dapat diperoleh melalui beberapa perhitungan berikut.

##### 1. Laju senyawa

$$\text{Laju senyawa masuk} = 4 \frac{\text{liter}}{\text{menit}}$$

$$\text{Laju senyawa campuran keluar} = 3 \frac{\text{liter}}{\text{menit}}$$

##### 2. Volume dalam bejana

$$\begin{aligned} V(t) &= 60 \text{ liter} + \left( 4 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} - 3 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} \right) (t \text{ menit}) \\ &= 60 + t \text{ liter} \end{aligned}$$

##### 3. Laju jumlah zat gula

$$\begin{aligned} \text{Laju jumlah zat gula pasir keluar} &= \frac{y(t)}{v(t)} \times \text{debit keluar} \\ &= \frac{y(t) \text{ gram}}{(60 + t) \text{ liter}} \times 3 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} \\ &= \frac{3y(t) \text{ gram}}{(60 + t) \text{ menit}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Laju jumlah zat gula pasir masuk} &= 0 \frac{\text{gram}}{\text{liter}} \times 4 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} \\ &= 0 \frac{\text{gram}}{\text{menit}} \end{aligned}$$

### a.3. Model persamaan diferensial

Dari analisis pemodelan, dapat diperoleh persamaan diferensial untuk percampuran, yaitu

Laju perubahan jumlah zat gula dalam bejana =

Laju jumlah zat gula masuk - Laju jumlah zat gula keluar.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} &= 0 - \frac{3y}{60+t} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} &= -\frac{3y}{60+t} \end{aligned} \quad (4.10)$$

### b. Penyelesaian Model Matematika Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial (4.10) dapat diselesaikan dengan langkah berikut.

#### b.1. Peubah terpisah

Persamaan (4.10) merupakan persamaan diferensial terpisah variabelnya, sehingga dapat diselesaikan dengan mengintegrasikan masing-masing ruas

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\frac{3y}{60+t} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{3y} &= -\frac{dt}{60+t} \\ \Leftrightarrow \int \frac{dy}{3y} &= -\int \frac{dt}{(60+t)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \ln y = -\ln(60+t) + \ln C, \text{ untuk } C \text{ suatu konstanta}$$

$$\Leftrightarrow \ln(y)^{\frac{1}{3}} = \ln \frac{C}{(60+t)}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{C_2}{(60+t)^3}, \text{ untuk } C_2 \text{ suatu konstanta.} \quad (4.11)$$

Persamaan (4.11) merupakan solusi umum dari persamaan diferensial (4.10).

#### b.2. Masalah nilai awal

Dengan menggunakan teknik masalah nilai awal (MNA), yakni pada saat awal ( $t=0$ ), jumlah total zat gula sama 60 kilogram ( $y=60.000$ ). Substitusi  $t=0$  dan  $y=60.000$  kedalam persamaan (4.11), diperoleh

$$y = \frac{C_2}{(60+t)^3}$$

$$\Leftrightarrow 60.000 = \frac{C_2}{(60+0)^3}$$

$$\Leftrightarrow C_2 = 60.000 (60)^3$$

$$\Leftrightarrow C_2 = 12.960.000.000$$

Substitusikan nilai  $C_2 = 12.960.000.000$  kedalam persamaan (4.11)

$$\text{sehingga menjadi } y = \frac{12.960.000.000}{(60+t)^3} \quad (4.12)$$

Persamaan (4.12) merupakan solusi khusus dari persamaan diferensial (4.10).

#### b.3. Solusi saat $y=50.000$

Agar jumlah gula dalam wadah adalah 50 kilogram = 50.000 gram, maka

waktu yang dibutuhkan adalah dengan mensubstitusikan nilai  $y=50.000$  kedalam persamaan (4.12), diperoleh

$$50.000 = \frac{12.960.000.000}{(60 + t)^3}$$

$$\Leftrightarrow (60 + t)^3 = \frac{12.960.000.000}{50.000}$$

$$\Leftrightarrow (60 + t)^3 = 259.200$$

$$\Leftrightarrow 60 + t = (259.200)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 60 + t = 63,75$$

$$\Leftrightarrow t = 63,75 - 60$$

$$\Leftrightarrow t = 3,75$$

### c. Interpretasi Ke dalam Situasi Nyata

Persamaan  $y = \frac{12.960.000.000}{(60 + t)^3}$  menyatakan bahwa jumlah

kandungan gula sebanyak  $y$  kilogram dalam campuran akan diperoleh dalam waktu  $t$  menit. Dan agar jumlah kandungan gula dalam wadah adalah 50 kilogram, maka waktu yang dibutuhkan selama percampuran adalah 3,75 menit.

#### 4.2.4.2 Kekurangan Ukuran Kadar Zat Gula dalam Proses Percampuran

##### *Base Sirup*

Karena suatu kesalahan dalam proses percampuran *base sirup*, dalam wadah terdapat 50 liter campuran yang konsentrasi gula pasirnya hanya

$1000 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$ , mestinya diperlukan 50 kilogram gula pasir refinasi tiap 20 liter air. Untuk mengatasi masalah ini, sebelum larutan dicampuri komposisi lain, campuran dialirkan keluar dengan teratur 2 liter tiap menit. Dalam waktu yang sama, kedalam wadah dimasukkan juga senyawa gula pasir refinasi yang konsentrasinya  $2.700 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$  dengan laju yang sama.

Jika dijaga agar kondisi gula dalam wadah merata setiap saat dengan pengadukan. Berapa lama waktu yang dibutuhkan agar didalam wadah terdapat campuran dengan jumlah gula sesuai standar mutu yang diharapkan yaitu  $70^0$  brix gula pasir refinasi.

Untuk menyelesaikan permasalahan pada kasus kekurangan ukuran kadar zat gula dalam proses percampuran *base* sirup, dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

#### **a. Penurunan Model Matematika Persamaan Diferensial**

##### a.1. Identifikasi besaran yang terlibat

Misalkan variabel tak bebas  $y$  dinotasikan sebagai jumlah gram gula pasir dalam campuran, variabel bebas  $t$  menyatakan waktu,  $y(t)$  adalah jumlah gram gula pasir dalam campuran pada saat  $t$ .  $y'(t)$  adalah laju perubahan gula pasir dalam bejana pada saat  $t$ .  $V$  adalah volume campuran dalam bejana (liter),  $V(t)$  adalah volume campuran dalam bejana (liter) pada saat  $t$ , laju senyawa dalam adalah banyaknya liter senyawa yang mengalir per satuan menit waktu, [konsentrasi](#) gula adalah jumlah gram gula pasir yang terkandung dalam setiap satuan liter volum senyawa, laju jumlah gula

pasir masuk menyatakan banyaknya gula pasir yang mengalir kedalam campuran tiap satuan waktu, laju jumlah gula pasir keluar menyatakan banyaknya gula pasir yang mengalir keluar campuran tiap satuan waktu.

#### a.2. Analisis pemodelan

Untuk menurunkan model matematika pada kasus kekurangan ukuran kadar zat gula dalam proses percampuran *base* sirup, dapat dilakukan langkah-langkah perhitungan sebagai berikut.

##### 1. Laju senyawa

$$\text{Laju senyawa masuk} = 2 \frac{\text{liter}}{\text{menit}}$$

$$\text{Laju senyawa campuran keluar} = 2 \frac{\text{liter}}{\text{menit}}$$

##### 2. Volume dalam bejana

$$\begin{aligned} V(t) &= 50 \text{ liter} + \left( 2 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} - 2 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} \right) (t \text{ menit}) \\ &= 50 \end{aligned}$$

##### 3. Konsentrasi gula

$$\text{Konsentrasi gula awal} = 1000 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$$

$$\text{Konsentrasi gula masuk} = 2.700 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$$

##### 4. Laju jumlah zat gula

$$\text{Laju jumlah zat gula keluar} = \frac{y(t)}{v(t)} \times \text{debit keluar}$$

$$= \frac{y(t) \text{ gram}}{55 \text{ liter}} \times 2 \frac{\text{liter}}{\text{menit}}$$

$$= \frac{2y(t) \text{ gram}}{55 \text{ menit}}$$

$$\begin{aligned} \text{Laju jumlah zat gula masuk} &= 2.700 \frac{\text{gram}}{\text{liter}} \times 2 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} \\ &= 5400 \frac{\text{gram}}{\text{menit}} \end{aligned}$$

### a.3. Model persamaan diferensial

Dari analisis pemodelan, dapat diperoleh persamaan diferensial untuk percampuran, yaitu

Laju perubahan jumlah gula dalam bejana =

Laju jumlah gula masuk - Laju jumlah gula keluar.

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = 5400 - \frac{2y}{50} \quad (4.13)$$

### b. Penyelesaian Model Matematika Persamaan Diferensial

#### b.1. Peubah terpisah

Persamaan (4.13) merupakan persamaan diferensial dengan bentuk

peubah terpisah. Yaitu  $\frac{dy}{dt} = \frac{270.000 - 2y}{50}$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{(270.000 - 2y)} = \frac{dt}{50}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{(270.000 - 2y)} = \int \frac{dt}{50}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dy}{135.000 - y} = \frac{1}{50} \int dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \ln(135.000 - y) = \frac{t}{50} + \ln C, \text{ untuk } C \text{ suatu konstanta.}$$

$$\Leftrightarrow \ln(135.000 - y) = -\frac{2t}{50} - 2\ln C$$

$$\Leftrightarrow \ln(135.000 - y) = -\frac{2t}{50} - \ln C_2, \text{ untuk } C_2 \text{ suatu konstanta}$$

$$\Leftrightarrow 135.000 - y = \exp\left(-\frac{t}{25} - \ln C_2\right)$$

$$\Leftrightarrow y = 135.000 - C_3 e^{-\frac{t}{25}}, \text{ untuk } C_3 \text{ suatu konstanta}$$

Jadi solusi umum persamaan (4.13) adalah  $y = 135.000 - C_3 e^{-\frac{t}{25}}$

#### b.2. Masalah nilai awal

Karena pada saat  $t=0$ ,  $y=10.000$  gram, maka persamaan (4.14) menjadi

$$10.000 = 135.000 - C_3 e^{-\frac{0t}{25}}$$

$$\Leftrightarrow 10.000 = 135.000 - C_3$$

$$\Leftrightarrow C_3 = 125.000$$

Dengan mensubstitusikan nilai  $C_3 = 125.000$  kedalam persamaan (4.14),

diperoleh solusi khususya adalah  $y(t) = 135.000 - 125.000 \cdot e^{-\frac{t}{25}}$  (4.15)

#### b.3. Solusi saat konsentrasi gula $70^0$ brix

Untuk mengetahui lama waktu yang dibutuhkan agar gula didalam wadah terdapat campuran yang sesuai standar mutu yang diharapkan yaitu  $70^0$  brix gula pasir maka terlebih dahulu dihitung jumlah gula dalam bejana.

$$\text{Nilai } 70^0 \text{ brix} = 2.500,0 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$$

$$\text{Jumlah gula dalam bejana} = 2.500,0 \frac{\text{gram}}{\text{liter}} \times 50 \text{ liter}$$

$$= 125.000 \text{ gram .}$$

Maka persamaan (4.15) menjadi

$$125.000 = 135.000 - 125.000 \cdot e^{-\frac{t}{25}} \quad (4.16).$$

Untuk mendapatkan nilai  $t$  pada persamaan (4.16) dapat digunakan program *Maple*, yaitu diperoleh nilai 63,14321611.

### c. Interpretasi Hasil Ke dalam Situasi Nyata

Dari solusi khusus yang diperoleh pada persamaan (4.15) menyatakan bahwa jumlah gula dalam campuran pada waktu  $t$  menit adalah

$$y(t) = 135.000 - 125.000 \cdot e^{-\frac{t}{25}}.$$

Untuk memperoleh jumlah gula 2500  $\frac{\text{gram}}{\text{liter}}$  diperlukan waktu sebanyak 63.14321611 menit.

#### 4.2.4.3 Percampuran Dua Senyawa yang Berbeda Konsentrasi Gulanya

Dalam suatu proses percampuran untuk *base* sirup, senyawa gula pasir refinasi sebanyak 20 liter yang mengandung gula sebanyak 40 kilogram akan dicampurkan dengan 30 liter yang didalamnya mengandung gula sebanyak 80 kilogram. Percampuran ini dilakukan dengan mengalirkan masing-masing senyawa secara bersamaan dengan laju yang sama yaitu  $4 \frac{\text{liter}}{\text{menit}}$  kedalam sebuah bejana besar yang memuat 5 liter air

tanpa gula. Untuk menjaga percampuran, dilakukan pengadukan setiap saat sehingga tercampur dengan sempurna. Kemudian dari hasil campuran

tersebut dialirkan keluar dengan laju  $5 \frac{\text{liter}}{\text{menit}}$ . Berapa banyaknya gula dalam bejana setiap saat? Berapa lama waktu yang dibutuhkan agar jumlah gula yang terdapat dalam campuran adalah 12500 gram..

Untuk menyelesaikan permasalahan pada dua senyawa yang berbeda konsentrasi gulanya, dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

### a. Penurunan Model Matematika Persamaan Diferensial

#### a.1. Identifikasi besaran yang terlibat

Misalkan variabel tak bebas  $x$  dinotasikan sebagai jumlah gram gula pasir dalam campuran, variabel bebas  $t$  menyatakan waktu,  $x(t)$  adalah jumlah gram gula pasir dalam campuran pada saat  $t$ .  $x'(t)$  adalah laju perubahan gula dalam bejana pada saat  $t$ .  $V$  adalah volume campuran dalam bejana (liter),  $V(t)$  adalah volume campuran dalam bejana (liter) pada saat  $t$ , laju senyawa dalam adalah banyaknya liter senyawa yang mengalir per satuan menit waktu, [konsentrasi](#) gula adalah jumlah gram zat gula yang terkandung dalam setiap satuan liter volume senyawa, laju jumlah gula masuk menyatakan banyaknya gula yang mengalir ke dalam campuran tiap satuan waktu, laju jumlah gula keluar menyatakan banyaknya gula yang mengalir keluar campuran tiap satuan waktu.

#### a.2. Analisis pemodelan

Untuk menurunkan model matematika pada kasus kekurangan ukuran kadar zat gula dalam proses pencampuran *base* sirup, dapat dilakukan langkah-langkah perhitungan sebagai berikut.

i) Laju senyawa

$$\text{Debit senyawa masuk} = 4 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} + 4 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} = 8 \frac{\text{liter}}{\text{menit}}$$

$$\text{Debit senyawa campuran keluar} = 5 \frac{\text{liter}}{\text{menit}}$$

ii) Volume dalam bejana

$$\begin{aligned} V(t) &= 5 \text{ liter} + \left( 8 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} - 5 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} \right) (t \text{ menit}) \\ &= 5 + 3t \text{ liter} \end{aligned}$$

iii) laju jumlah zat gula

$$\begin{aligned} \text{Laju jumlah zat gula keluar} &= \frac{y(t)}{v(t)} \times \text{debit keluar} \\ &= \frac{y(t) \text{ gram}}{(5 + 3t) \text{ liter}} \times 5 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} \\ &= \frac{5y(t) \text{ gram}}{(5 + 3t) \text{ menit}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Laju jumlah zat gula masuk senyawa I} &= \frac{40.000 \text{ gram}}{20 \text{ liter}} \times 4 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} \\ &= 500 \frac{\text{gram}}{\text{menit}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Laju jumlah zat gula masuk senyawa II} &= \frac{80.000 \text{ gram}}{30 \text{ liter}} \times 4 \frac{\text{liter}}{\text{menit}} \\ &= 666,67 \frac{\text{gram}}{\text{menit}} \end{aligned}$$

a.3. Model persamaan diferensial

Persamaan diferensial untuk percampuran diperoleh

Laju perubahan jumlah zat gula dalam bejana =

Laju jumlah zat gula masuk - Laju jumlah zat gula keluar.

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = (500 + 666,67) - \frac{5y}{5 + 3t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = 1.166,67 - \frac{5y}{5 + 3t} \quad (4.17)$$

### b. Penyelesaian Model Matematika Persamaan Diferensial

Dari persamaan (4.17) diperoleh

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5.833,35 + 3.500,01 t - 5y}{5 + 3t} \quad (4.18)$$

Substitusikan  $u = 5.833,35 + 3.500,01 t - 5y$

$$v = 5 + 3t$$

$$dy = -\frac{1}{5} \left( \frac{3.500,01}{3} dv - du \right)$$

$$\text{dan } dt = \frac{1}{3} dv$$

kedalam persamaan (4.18), sehingga diperoleh

$$\frac{-\frac{1}{5}(1.166,67 dv - du)}{\frac{1}{3} dv} = \frac{u}{v}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}(1.166,67 dv - du)v = \frac{1}{3}u dv$$

$$\Leftrightarrow -233,334 v dv + \frac{1}{5}vdu = \frac{1}{3}u dv$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{1}{3}u + 233,334 v \right) dv = \frac{1}{5}vdu \quad (4.19)$$

Persamaan (4.19) merupakan persamaan diferensial homogen yang dapat diselesaikan dengan langkah berikut.

### 1. Persamaan Diferensial Homogen

Persamaan (4.19) dapat ditulis menjadi 
$$\frac{du}{dv} = \frac{\left(\frac{1}{3}u + 233,334 v\right)}{\frac{1}{5}v} \quad (4.20)$$

Dengan mensubstitusikan  $z = \frac{u}{v}$  dan  $du = z dv + v dz$  atau  $\frac{du}{dv} = v \frac{dz}{dv} + z$

kedalam persamaan (4.20), diperoleh 
$$v \frac{dz}{dv} + z = \frac{\left(\frac{1}{3}zv + 233,334 v\right)}{\frac{1}{5}v}$$

$$\Leftrightarrow v \frac{dz}{dv} + z = \frac{5}{3}z + (233,334 \times 5)$$

$$\Leftrightarrow v \frac{dz}{dv} + z = \frac{5}{3}z + 1.166,67$$

$$\Leftrightarrow v \frac{dz}{dv} = \frac{5}{3}z - z + 1.166,67$$

$$\Leftrightarrow v \frac{dz}{dv} = \frac{2}{3}z + 1.166,67$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{\frac{2}{3}z + 1.166,67} = \frac{dv}{v}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dz}{\frac{2}{3}z + 1.166,67} = \int \frac{dv}{v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \ln z - \ln v = \ln C, \text{ untuk } C \text{ suatu konstanta.}$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{z^{\frac{3}{2}}}{v} = \ln C$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{v} \quad (4.21)$$

Substitusikan kembali nilai  $v$  dan  $z$  dalam  $y$  dan  $t$  pada persamaan (4.21), diperoleh

$$C = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{v^{\frac{5}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{(5.833,35 + 3.500,01 t - 5y)^{\frac{3}{2}}}{(5 + 3t)^{\frac{5}{2}}} \quad (4.22)$$

$$\Leftrightarrow (5 + 3t)^{\frac{5}{2}} C = (5.833,35 + 3.500,01 t - 5y)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left( (5 + 3t)^{\frac{5}{2}} C \right)^{\frac{2}{3}} = 5.833,35 + 3.500,01 t - 5y$$

$$\Leftrightarrow (5 + 3t)^{\frac{5}{3}} C_2 = 5.833,35 + 3.500,01 t - 5y, \text{ untuk } C_2 \text{ suatu konstanta.}$$

$$\Leftrightarrow 5y = 5.833,35 + 3.500,01 t - (5 + 3t)^{\frac{5}{3}} C_2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5.833,35 + 3.500,01 t - (5 + 3t)^{\frac{5}{3}} C_2}{5} \quad (4.23)$$

Persamaan (4.23) merupakan solusi umum dari persamaan diferensial (4.17).

## 2. Masalah Nilai Awal

Pada saat awal ( $t=0$ ) jumlah gula dalam wadah adalah 0 ( $y=0$ ), maka dengan mensubstitusikan nilai  $y=0$  dan  $t=0$  pada persamaan (4.22)

diperoleh

$$C = \frac{(5.833,35 + 3.500,01(0) - 5(0))^{\frac{3}{2}}}{(5 + 3(0))^{\frac{5}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{(5.833,35)^{\frac{3}{2}}}{(5)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{1445.530,1}{55,9}$$

$$\Leftrightarrow C = 25.859,2$$

Ingat  $C_2 = C^{2/3}$

$$\text{Jadi } C_2 = (25.859,2)^{\frac{2}{3}} = 874,46.$$

Dengan mensubstitusikan nilai  $C_2 = 874,46$  kedalam persamaan (4.22), diperoleh solusi khususnya adalah

$$y = \frac{5.833,35 + 3.500,01 t - (5 + 3t)^{\frac{5}{3}}(874,46)}{5}$$

$$\Leftrightarrow y = 1.166,67 + 700 t - 174,9 (5 + 3t)^{\frac{5}{3}} \quad (4.24)$$

3. Solusi saat jumlah gula = 12.500 gram

Untuk mengetahui lama waktu yang dibutuhkan agar gula didalam wadah terdapat jumlah gula sebanyak 12.500 gram.

Maka persamaan (4.24) menjadi

$$12.500 = 1.166,67 + 700 t - 174,9 (5 + 3t)^{\frac{5}{3}} \quad (4.25)$$

Dengan bantuan program *Maple*, diperoleh solusi nilai  $t = 26,91929112$

atau  $t = 27$  dengan volume campuran =  $5 + 3(27) = 86$  liter.

### c. Interpretasi Hasil ke dalam Situasi Nyata

Solusi khusus  $y = 1.166,67 + 700 t - 174,9 (5 + 3t)^{\frac{5}{3}}$  menyatakan banyaknya jumlah gula pasir refinasi pada saat  $t$  adalah  $= 1.166,67 + 700 t - 174,9 (5 + 3t)^{\frac{5}{3}}$ . Sedangkan untuk mengetahui lama waktu yang dibutuhkan agar jumlah gula didalam wadah 12.500 gram, maka dibutuhkan waktu percampuran 27 menit, dengan volume = 86 liter.

## 4.2.5 Aplikasi *Maple* untuk Visualisasi Persamaan Diferensial

### 4.2.5.1 Plot Solusi Pada Data Ukuran Kadar Gula dalam Proses

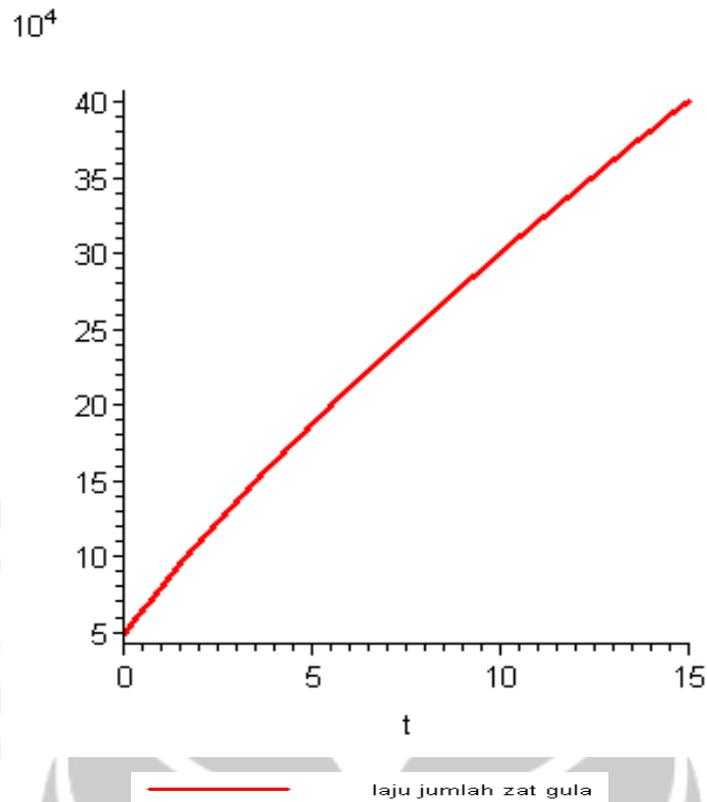
#### Percampuran *Base Sirup Nalla*

Plot solusi  $\frac{dy}{dt} = 36.610,2 - \frac{5y}{57,35 + 4t}$  menghasilkan solusi khusus

$y(t) = 4.067,8(57,35 + 4t) - 28.911.074,94(57,35 + 4t)^{-\frac{5}{4}}$  dan solusi pada

saat  $t=13$  diperoleh  $y = 363.053,95$  gram berarti setelah 13 menit percampuran berlangsung jumlah total kandungan zat gula dalam campuran adalah 363.053,95 gram dalam volume 109,35 liter .

$y(t)$



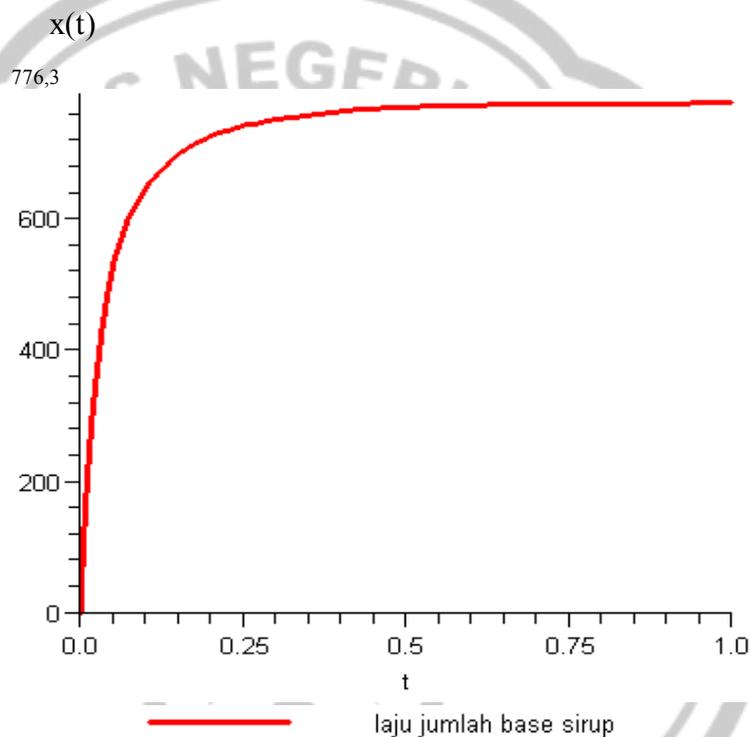
Gambar 4.2 Grafik konsentrasi zat gula

Dari gambar 4.2 dapat dilihat bahwa solusinya semakin meningkat untuk nilai  $t$  yang semakin besar, dikarenakan jumlah zat gula yang masuk lebih besar daripada jumlah zat gula yang keluar, sehingga konsentrasi atau jumlah zat gula dalam campuran selalu bertambah. Untuk nilai  $t$  menuju tak hingga diperoleh jumlah zat gula juga menuju tak hingga, hal ini juga disebabkan volumenya merupakan fungsi waktu yang selalu bertambah jika  $t$  semakin besar.

#### 4.2.5.2 Plot Solusi pada Data Persediaan Ukuran Bahan-Bahan dalam Proses Percampuran *Base Sirup* dalam Satu Minggu

Plot solusi  $\frac{dx}{dt} = 0,206[240,9 - 0,258 x][576 - 0,742 x]$  menghasilkan

$$\text{solusi umum } x = \frac{931,53 - \frac{933,72}{\exp(0,000247t)}}{1,2 - \frac{1}{\exp(0,000247t)}}$$



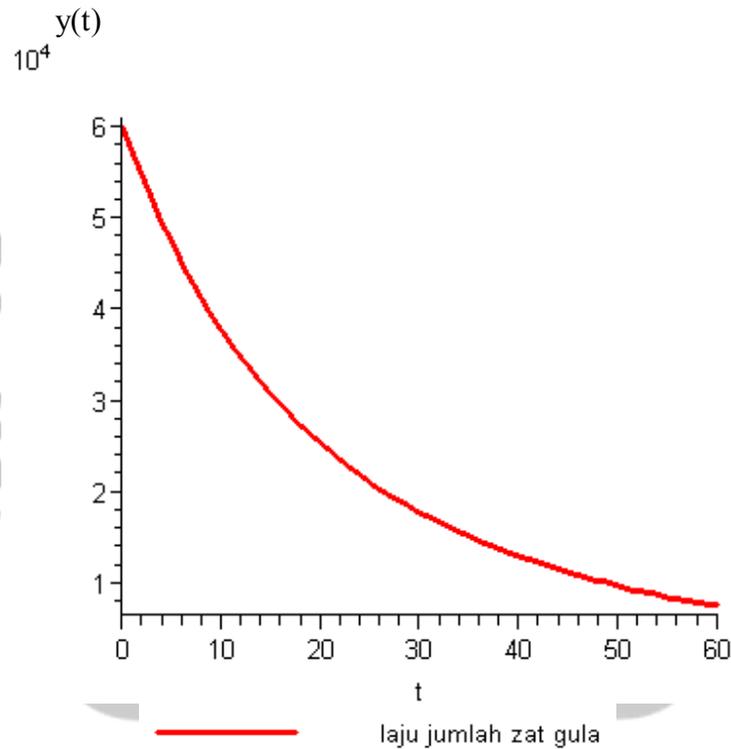
Gambar 4.3 Grafik laju *base sirup*

Dari gambar 4.3 dapat dilihat bahwa solusinya semakin membesar untuk nilai  $t$  yang semakin besar, dikarenakan jumlah campuran *base sirup* selalu bertambah dan tidak berkurang sama sekali. Untuk nilai  $t$  menuju tak hingga diperoleh jumlah campuran *base sirup* menuju angka 776,3, yang merupakan campuran *base sirup* terbentuk dari 576 kilogram zat gula (yang berarti semua zat gula) dan 200,3 kilogram air yang mengandung rumput laut.

#### 4.2.5.3 Plot Solusi Kelebihan Ukuran Kadar Zat Gula dalam Proses

##### Percampuran *Base Sirup*

Plot solusi  $\frac{dy}{dt} = -\frac{3y}{60+t}$  menghasilkan solusi  $y = \frac{12.960.000.000}{(60+t)^3}$



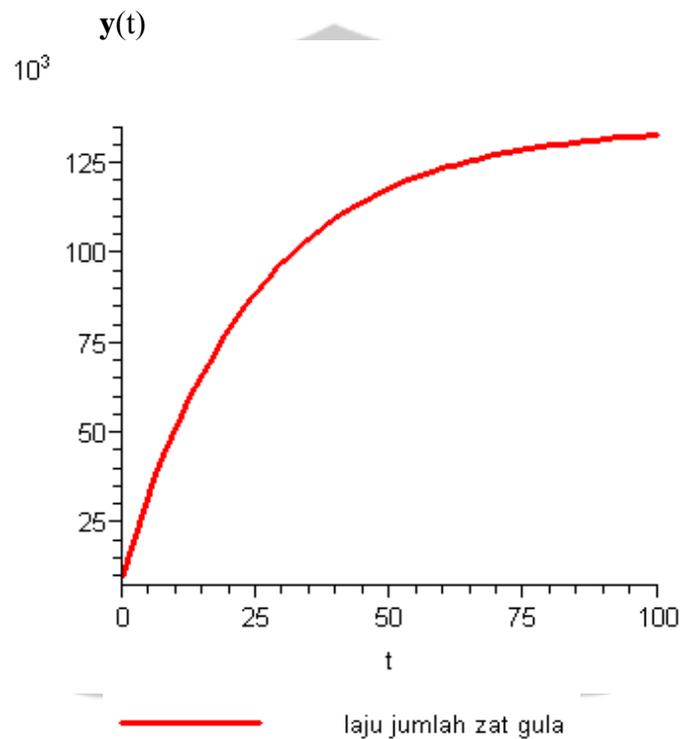
Gambar 4.4 Grafik penurunan konsentrasi gula

Dari gambar 4.4 dapat dilihat bahwa solusinya semakin menurun untuk nilai  $t$  yang semakin besar, dikarenakan jumlah zat gula yang keluar lebih banyak daripada jumlah zat gula yang masuk, sehingga jumlah zat gula dalam campuran menurun. Untuk nilai  $t$  menuju tak hingga diperoleh jumlah zat gula dalam campuran menuju angka 0, yang berarti jumlah gula habis.

#### 4.2.5.4 Plot Solusi Kekurangan Ukuran Kadar Zat Gula dalam Proses Percampuran *Base* Sirup

Plot solusi  $\frac{dy}{dt} = 5400 - \frac{2y(t)}{50}$  menghasilkan solusi khusus

$$y(t) = 135.000 - 125.000 \cdot e^{-\frac{t}{25}}.$$



Gambar 4.5 Grafik kenaikan konsentrasi gula

Dari gambar 4.5 dapat dilihat bahwa solusinya semakin membesar untuk nilai  $t$  yang semakin besar, dikarenakan jumlah zat gula yang masuk sama dengan jumlah zat gula yang keluar, sehingga volume campuran tetap sedangkan konsentrasi atau jumlah zat gula dalam campuran selalu bertambah. Untuk nilai  $t$  menuju tak hingga diperoleh jumlah zat gula juga menuju ke 135.000 gram. Untuk memperoleh jumlah gula  $2500 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$  diperlukan waktu sebanyak 63.14321611 menit.

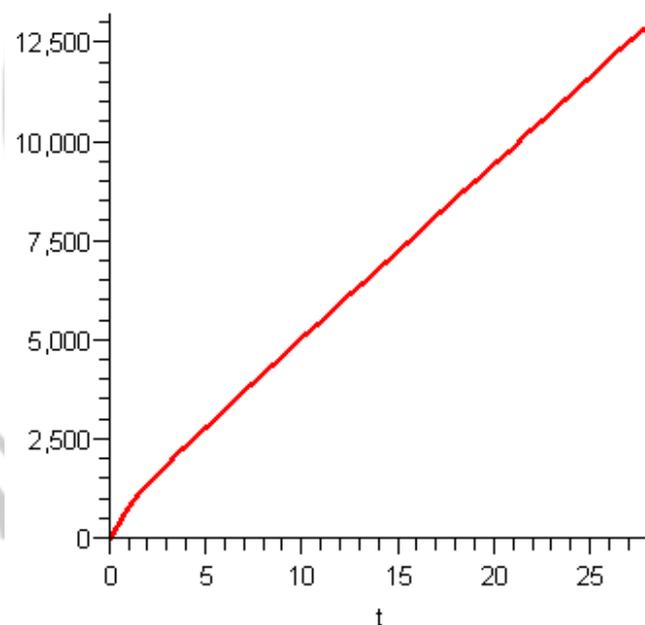
#### 4.2.5.5 Plot Solusi Percampuran Dua Senyawa Yang Berbeda Konsentrasi

##### Gulanya

Plot solusi  $\frac{dy}{dt} = 1.166,67 - \frac{5y}{5+3t}$  menghasilkan solusi khusus

$y = 1.166,67 + 700t - 174,9(5+3t)^{\frac{5}{3}}$  yang menyatakan banyaknya jumlah gula pasir refinasi pada saat  $t$  adalah

$= 1.166,67 + 700t - 174,9(5+3t)^{\frac{5}{3}}$ . Sedangkan solusi untuk mengetahui lama waktu yang dibutuhkan agar jumlah gula didalam wadah terdapat 12.500 gram, maka dibutuhkan waktu dalam proses pencampuran selama 26.91929112 menit atau 27 menit.



— laju jumlah zat gula

Gambar 4.6 Grafik konsentrasi gula

Dari gambar 4.6 dapat dilihat bahwa solusinya semakin membesar untuk nilai  $t$  yang semakin besar, dikarenakan jumlah zat gula yang masuk lebih besar daripada jumlah zat gula yang keluar, sehingga konsentrasi

atau jumlah zat gula dalam campuran selalu bertambah. Untuk nilai  $t$  menuju tak hingga diperoleh jumlah zat gula juga menuju tak hingga karena volume campuran selalu bertambah.



## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1 Simpulan

Dari hasil penelitian dan pembahasan diperoleh beberapa simpulan yaitu:

1. Dalam proses percampuran *base* sirup pada produk sirup Nalla, tidak pernah mengalami pergeseran kadar zat gula dalam proses produksinya karena penjagaan proses produksi yang ketat dan selalu menggunakan ukuran tetap. Sehingga dalam hal ini digambarkan apabila terjadi pergeseran kadar gula dalam proses percampuran *base* sirup dengan menggunakan data simulasi, yang dirumuskan melalui pembuatan asumsi dengan melakukan penghampiran dan pengidealan yang didasarkan pada pengamatan. Dalam hal ini penulis mengambil lima kasus, dari semua kasus diperoleh model matematika diferensialnya adalah persamaan diferensial orde satu linear. yaitu

1. Pada proses pembuatan *base* sirup Nalla dengan senyawa zat gula yang masuk dilakukan dalam waktu yang sama dengan keluarnya senyawa dari campuran, diperoleh model persamaan diferensial untuk

$$\text{laju jumlah zat gula adalah } \frac{dy}{dt} = 36.610,2 - \frac{5y}{57,35 + 4t}.$$

2. Pada proses percampuran *base* sirup dari data persediaan ukuran bahan-bahan dalam satu minggu diperoleh model persamaan

diferensial untuk laju jumlah *base* sirup adalah

$$\frac{dx}{dt} = 0,206[240,9 - 0,258 x][576 - 0,742 x].$$

3. Pada kasus kesalahan konsentrasi/kepekatan pada kelebihan kadar zat gula dalam campuran diperoleh model persamaan diferensial

$$\text{untuk laju jumlah zat gula adalah } \frac{dy}{dt} = -\frac{3y}{60 + t}.$$

4. Pada kasus kesalahan konsentrasi/kepekatan pada kekurangan kadar zat gula dalam campuran diperoleh model persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dt} = 5400 - \frac{2y(t)}{50}.$$

5. Pada kasus percampuran dua senyawa yang berbeda konsentrasi gulanya diperoleh model persamaan diferensial untuk laju jumlah gula

$$\frac{dy}{dt} = 1.166,67 - \frac{5y}{5 + 3t}.$$

2. Solusi formula untuk masing-masing kasus 1 dan 5 dapat diselesaikan dengan faktor integral dan bentuk homogen, sedangkan untuk kasus 2, 3 dan 4 dapat diselesaikan dengan metode peubah terpisah, dan membutuhkan teknik pengintegralan khusus untuk bentuk  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ .

Masing-masing kasus memanfaatkan masalah nilai awal (MNA).

Adapun solusinya adalah sebagai berikut.

2.1. Pada model persamaan diferensial  $\frac{dy}{dt} = 36.610,2 - \frac{5y}{57,35 + 4t}$

diperoleh  $y(t) = 4.067,8(57,35 + 4t) - 28.911.074,94(57,35 + 4t)^{\frac{5}{4}}$

sebagai solusi khusus, dan solusi pada saat  $t=13$  diperoleh  $y = 363.053,95$  gram, yang berarti setelah 13 menit percampuran berlangsung jumlah total kandungan zat gula dalam campuran adalah 363.053,95 gram.

2.2. Pada model persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = 0,206[240,9 - 0,258x][576 - 0,742x]$$

$$x = \frac{931,53 - \frac{933,72}{\exp(0,000247t)}}{1,2 - \frac{1}{\exp(0,000247t)}}$$

diperoleh jumlah campuran *base* sirup menuju angka 776,3, yang berarti campuran *base* sirup terbentuk dari 576 kilogram zat gula (yang berarti semua zat gula) dan 200,3 kilogram air yang mengandung rumput laut.

2.3. Pada model persamaan diferensial  $\frac{dy}{dt} = -\frac{3y}{60+t}$  diperoleh

$$\text{solusi } y = \frac{12.960.000.000}{(60+t)^3}$$

yang menyatakan bahwa jumlah kandungan gula pasir refinasi sebanyak  $y$  kilogram dalam campuran akan diperoleh dalam waktu  $t$  menit. Dan agar jumlah kandungan gula dalam wadah menjadi 50 kilogram, maka waktu yang dibutuhkan selama percampuran adalah 3,75 menit.

2.4. Pada model persamaan diferensial  $\frac{dy}{dt} = 5400 - \frac{2y(t)}{50}$  diperoleh

solusi  $y(t) = 135.000 - 125.000 \cdot e^{-\frac{t}{25}}$ , yang menyatakan bahwa jumlah gula pada saat  $t$  adalah  $y(t)$ . Untuk memperoleh jumlah gula 2500

$\frac{\text{gram}}{\text{liter}}$  diperlukan waktu sebanyak 63.14321611 menit, dalam hal ini

untuk memperbaiki campuran dengan laju senyawa masuk sama dengan laju senyawa keluar, maka penambahan senyawa gula yang masuk konsentrasinya harus lebih tinggi dari campuran dan lebih dari konsentrasi standar yang diharapkan.

2.5. Pada model persamaan diferensial  $\frac{dy}{dt} = 1.166,67 - \frac{5y}{5+3t}$

diperoleh solusi  $y = 1.166,67 + 700t - 174,9(5+3t)^{\frac{5}{3}}$  yang

menyatakan banyaknya jumlah gula pasir refinasi pada saat  $t$  adalah  $= 1.166,67 + 700t - 174,9(5+3t)^{\frac{5}{3}}$ . Sedangkan solusi khusus untuk mengetahui lama waktu yang dibutuhkan agar gula didalam wadah terdapat campuran yang sesuai standar mutu yang diharapkan yaitu

$2.500,0 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$  gula pasir maka dibutuhkan waktu dalam proses

percampuran selama 26.91929112 menit atau 27 menit.

3. Aplikasi program *maple* untuk masing-masing kasus adalah

3.1. Pada plot solusi *maple* persamaan  $\frac{dy}{dt} = 36.610,2 - \frac{5y}{57,35+4t}$

diperoleh solusinya semakin naik untuk nilai  $t$  yang semakin besar,

dikarenakan jumlah zat gula yang masuk lebih besar daripada jumlah zat gula yang keluar, sehingga konsentrasi atau jumlah zat gula dalam campuran selalu bertambah. Untuk nilai  $t$  menuju tak hingga diperoleh jumlah zat gula juga menuju tak hingga.

3.2. Pada plot solusi *maple* persamaan

$$\frac{dx}{dt} = 0,206[240,9 - 0,258 x][576 - 0,742 x]$$

diperoleh bahwa solusinya semakin naik menuju 776,28 untuk nilai  $t$  yang semakin besar, dikarenakan jumlah campuran *base* sirup selalu bertambah.

3.3. Pada plot solusi *maple* persamaan  $\frac{dy}{dt} = -\frac{3y}{60+t}$  diperoleh

solusinya semakin menurun menuju nol untuk nilai  $t$  yang semakin besar, dikarenakan jumlah zat gula yang keluar lebih banyak daripada jumlah zat gula yang masuk (dalam hal ini senyawa yang masuk adalah senyawa tanpa gula), sehingga jumlah zat gula dalam campuran menurun. Untuk nilai  $t$  menuju tak hingga diperoleh jumlah zat gula dalam campuran menuju angka 0 yang berarti jumlah gula habis.

3.4. Pada plot solusi *maple* persamaan  $\frac{dy}{dt} = 5400 - \frac{2y(t)}{50}$  diperoleh

bahwa solusinya semakin naik untuk nilai  $t$  yang semakin besar, dikarenakan jumlah zat gula yang masuk sama dengan jumlah zat gula yang keluar, sehingga volume campuran tetap sedangkan konsentrasi atau jumlah zat gula dalam campuran selalu bertambah. Untuk nilai  $t$

menuju tak hingga diperoleh jumlah zat gula juga menuju ke 135.000 gram.

3.5. Pada gambar plot solusi *maple* persamaan

$$\frac{dy}{dt} = 1.166,67 - \frac{5y}{5 + 3t}$$

diperoleh bahwa solusinya semakin naik untuk nilai  $t$  yang semakin besar, dikarenakan jumlah zat gula yang masuk lebih besar daripada jumlah zat gula yang keluar, sehingga konsentrasi atau jumlah zat gula dalam campuran selalu bertambah. Untuk nilai  $t$  menuju tak hingga diperoleh jumlah zat gula juga menuju tak hingga karena volume campuran bertambah (laju senyawa yang masuk lebih besar daripada laju senyawa yang keluar).

## 5.2 Saran

Berkaitan dengan hasil-hasil penelitian, ada beberapa hal yang perlu mendapat perhatian, yaitu:

1. Masalah yang dikaji dalam penelitian ini masih fokus pada pengkajian suatu proses percampuran yang sederhana terutama pada kandungan zat gula, untuk itu perlu pengkajian lebih lanjut untuk masalah yang lebih variatif dan kompleks.
2. Program *maple* sangat diperlukan dalam melakukan penyelesaian persamaan diferensial karena lebih mudah dan hasil yang diperoleh lebih akurat. Dengan *maple*, permasalahan yang diteliti akan lebih menarik, karena *maple* dapat menyajikan grafik-grafik solusi yang sangat diperlukan dalam pengkajian suatu masalah.

3. Pada kasus pergeseran konsentrasi zat gula dalam penelitian ini menggunakan data simulasi, untuk itu perlu dicoba pemodelan dengan data asli kasus pergeseran konsentrasi yang terjadi di lapangan.



## DAFTAR PUSTAKA

- Anonim. 2009. *Sirup jeruk*. Tersedia di:  
<http://www.citrus-indonesia.com/> [15 Februari 2009].
- Anshory, I. 2000. *Acuan Pelajaran Kimia SMU Untuk Kelas 1*. Jakarta: Erlangga.
- Arikunto, S. 2002. *Prosedur Penelitian Suatu Pendekatan Praktek*. Yogyakarta: Rineka Cipta.
- Chotim, M. 2004. *Kalkulus 2*. Semarang: Jurusan Matematika FMIPA UNNES.
- Dawkins, P. 2007. *Differential Equation (Math 3301)*. Tersedia di  
<http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/IntroFirstOrder.aspx>  
[5 September 2009].
- Fachruddin, L. 2002. *Membuat Aneka Sari Buah*. Yogyakarta: Kanisius.
- Finan, M.B. 2006, *MATH 2924: Calculus II, 70. First Order Differential Equation Models: Mixing Problems and Motion of Falling Body with Air Resistance*. Arkansas: Arkansas Tech University.
- Finizio, N. 1982. *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern edisi kedua*. Jakarta: Erlangga.
- Grant, E.L. 1998. *Pengendalian Mutu Statistik Edisi keenam Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Green, L. 2002. *Courses 204*. tersedia di  
<http://ltcconline.net/green/courses/204/204.htm> [5 September 2009].
- Haryoto. *Sirup Asam*. 1998. Yogyakarta: Kanisius.
- Kartono. 2005. *Maple Untuk Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Kusumah, Y. S. 1989. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Depdikbud.
- Neswan. O. 2009. *Catatan Kuliah MA1223 Kalkulus Elementer II*. Bandung: Departemen Matematika-ITB. Tersedia di:  
[www.ai3.itb.ac.id/~basuki/usdi/TPBkuliah/materi/materikalkuluselementer/Bab18.pdf](http://www.ai3.itb.ac.id/~basuki/usdi/TPBkuliah/materi/materikalkuluselementer/Bab18.pdf) [9 Februari 2009]

Padron, V. 2005. *Lecture Files*. Tersedia di

<http://www.math.umn.edu/~padro005/LectureFiles> [5 September 2009]

Purba, M. 2000. *kimia 2000 untuk SMU kelas satu*. Jakarta: Erlangga.

Rahmawati, L. 2007. *Solusi Periodik Persamaan Diferensial Non Linear Tipe Rayleigh*. (Skripsi Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang).

Santosa, W. 1997. *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: Matematika ITB.

Suprpti, M.L. 2005. *Aneka Olahan Pepaya Mentah Dan Mengkal*. Yogyakarta: Kanisius.

Supriyono. 2007. *Persamaan Diferensial*. Semarang: Universitas Negeri Semarang.

Waluya, S. B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Wikipedia. 2008. Larutan. Tersedia di:

<http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Solution&oldid=67023984> [9 Maret 2008].



Lampiran 1

**PRINT OUT *MAPLE* UNTUK MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN  
DIFERENSIAL PADA DATA UKURAN KADAR GULA DALAM PROSES  
PERCAMPURAN *BASE* SIRUP NALLA**

> restart;

> pers1 := diff(y(t), t) = 36610.2K  $\frac{5y(t)}{(57.35C - 4t)}$ ;

$$\text{pers1} := \frac{d}{dt} y(t) = 36610.2K \frac{5y(t)}{57.35C - 4t}$$

> sol := dsolve(pers1, y(t));

$$\text{sol} := y(t) = \frac{23328833}{100} C \frac{81356}{5} t C \frac{C1}{(1147C - 80t)^{(5/4)}}$$

> solusi := dsolve( {pers1, y(0) = 50100}, y(t));

$$\text{solusi} := y(t) = \frac{23328833}{100} C \frac{81356}{5} t K \frac{21011701451}{100} \frac{1147^{(1/4)}}{(1147C - 80t)^{(5/4)}}$$

> jumlahzatgula = subs(t = 13, solusi);

$$\begin{aligned} \text{jumlahzatgula} &= y(13) \\ &= \frac{44481393}{100} K \frac{21011701451}{478296900} 2187^{(3/4)} 1147^{(1/4)} \end{aligned}$$

> plot(rhs(solusi), t = 0 ..15, legend=["laju jumlah zat gula",  
, title= "", thickness= 2);

> limit(solusi t = N );

$$\lim_{t \rightarrow N} y(t) = N$$

## Lampiran 2

**PRINT OUT *MAPLE* UNTUK MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN  
DIFERENSIAL PADA DATA UKURAN BAHAN-BAHAN DALAM  
PROSES PERCAMPURAN *BASE SIRUP* DALAM SATU MINGGU**

- > restart;
- > pers2 := diff(x(t), t) = 0.206\$ (240.9K - 0.258\$ x(t))  
\$ (576K - 0.742\$ x(t));

$$\text{pers2} := \frac{d}{dt} x(t) = 0.206 (240.9 K - 0.258 x(t)) - (576 K - 0.742 x(t))$$

- > sol := dsolve(pers2, x(t));

$$\text{sol} := x(t) = \frac{288000 e^{\frac{15521997}{2500000} t} - C_1 K - 40150}{K - 43 C_1 - 371 e^{\frac{15521997}{2500000} t} - C_1}$$

- > solusi := dsolve( {pers2, x(0) = 0}, x(t) );

$$\text{solusi} := x(t) = \frac{231264000 e^{\frac{15521997}{2500000} t} - K - 1}{247680 e^{\frac{15521997}{2500000} t} - K - 297913}$$

- > plot( rhs(solusi), t = 0 ..1, legend=["laju jumlah base sirup"],  
title = "", thickness = 2);
- > limi( solusi t = N );

$$\lim_{t \rightarrow N} x(t) = \frac{288000}{371}$$

## Lampiran 3

**PRINT OUT *MAPLE* UNTUK MENENTUKAN SOLUSI KELEBIHAN KADAR GULA DALAM PROSES PERCAMPURAN BASE SIRUP**

> restart;

> pers3 := diff(y(t), t) = K  $\frac{3 y(t)}{60 C t}$ ;

$$\text{pers3} := \frac{d}{dt} y(t) = K \frac{3 y(t)}{60 C t}$$

> sol := dsolve(pers3, y(t));

$$\text{sol} := y(t) = \frac{C1}{(60 C t)^3}$$

> solusi := dsolve( {pers3, y(0) = 60000 }, y(t) );

$$\text{solusi} := y(t) = \frac{12960000000}{(60 C t)^3}$$

> 50000 = rhs(solusi);

$$50000 = \frac{12960000000}{(60 C t)^3}$$

> fsolve(50000 =  $\frac{12960000000}{(60 C t)^3}$ , t);

$$3 \\ .759514151$$

> plot(rhs(solusi), t = 0 ..100, legend=["laju jumlah gula",  
, title = "", thickness = 2);

> limit(solusi t = N );

$$\lim_{t \rightarrow N} y(t) = 0$$

## Lampiran 4

**PRINT OUT *MAPLE* UNTUK MENENTUKAN SOLUSI KEKURANGAN  
KADAR GULA DALAM PROSES PERCAMPURAN *BASE SIRUP***

> restart;

> pers4 := diff(y(t), t) = 5400 K  $\frac{2 y(t)}{50}$ ;

$$\text{pers4} := \frac{d}{dt} y(t) = 5400 K \frac{1}{25} y(t)$$

> sol := dsolve(pers4, y(t));

$$\text{sol} := y(t) = 135000 C_1 e^{0.216 t} + C_2$$

> solusi := dsolve( {pers4, y(0) = 10000 }, y(t));

$$\text{solusi} := y(t) = 135000 K - 125000 e^{0.216 t}$$

> jumlahgula70brix = 125000 = rhs(solusi);

$$\text{jumlahgula70brix} = 125000 = 135000 K - 125000 e^{0.216 t}$$

> fsolve(jumlahgula70brix);

63.14321611

> t = evalf(5 \* ln(125000/10000));

t = 63.14321610

> plot(rhs(solusi), t = 0 .. 100, legend=["laju jumlah gula"],  
title="", thickness=2);

> limit(solusi, t = N);

$$\lim_{t \rightarrow N} y(t) = 135000$$

## Lampiran 5

**PRINT OUT MAPLE UNTUK MENENTUKAN SOLUSI PERCAMPURAN  
DUA SENYAWA YANG BERBEDA KONSENTRASI GULANYA**

> restart;

> pers5 := diff(y(t), t) = 1166.67 K  $\frac{5y(t)}{5C + 3t}$ ;

$$\text{pers5} := \frac{d}{dt} y(t) = 1166.67 K \frac{5y(t)}{5C + 3t}$$

> sol := dsolve(pers5, y(t));

$$\text{sol} := y(t) = \frac{116667}{160} C \frac{350001}{800} t C \frac{C1}{(5C + 3t)^{(5/3)}}$$

> solusi := dsolve( {pers5, y(0) = 0 }, y(t) );

$$\text{solusi} := y(t) = \frac{116667}{160} C \frac{350001}{800} t K \frac{116667}{32} \frac{5^{(2/3)}}{(5C + 3t)^{(5/3)}}$$

> jumlhgula = subs(t = 20, solusi);

$$\text{jumlhgula} = y(20) = \frac{1516671}{160} K \frac{116667}{135200} 65^{(1/3)} 5^{(2/3)}$$

> 12500 = rhs(solusi);

$$12500 = \frac{116667}{160} C \frac{350001}{800} t K \frac{116667}{32} \frac{5^{(2/3)}}{(5C + 3t)^{(5/3)}}$$

$$y(0) = 12500 = \frac{116667}{160}$$

$$y(t) = \frac{50001}{800} e^{-0.05t} + \frac{116667}{32} e^{-0.03t} - \frac{1}{3} e^{-0.03t}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 26.91929112$   
 (limit of solution as  $t \rightarrow \infty$ );

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = N$$



## Lampiran 6

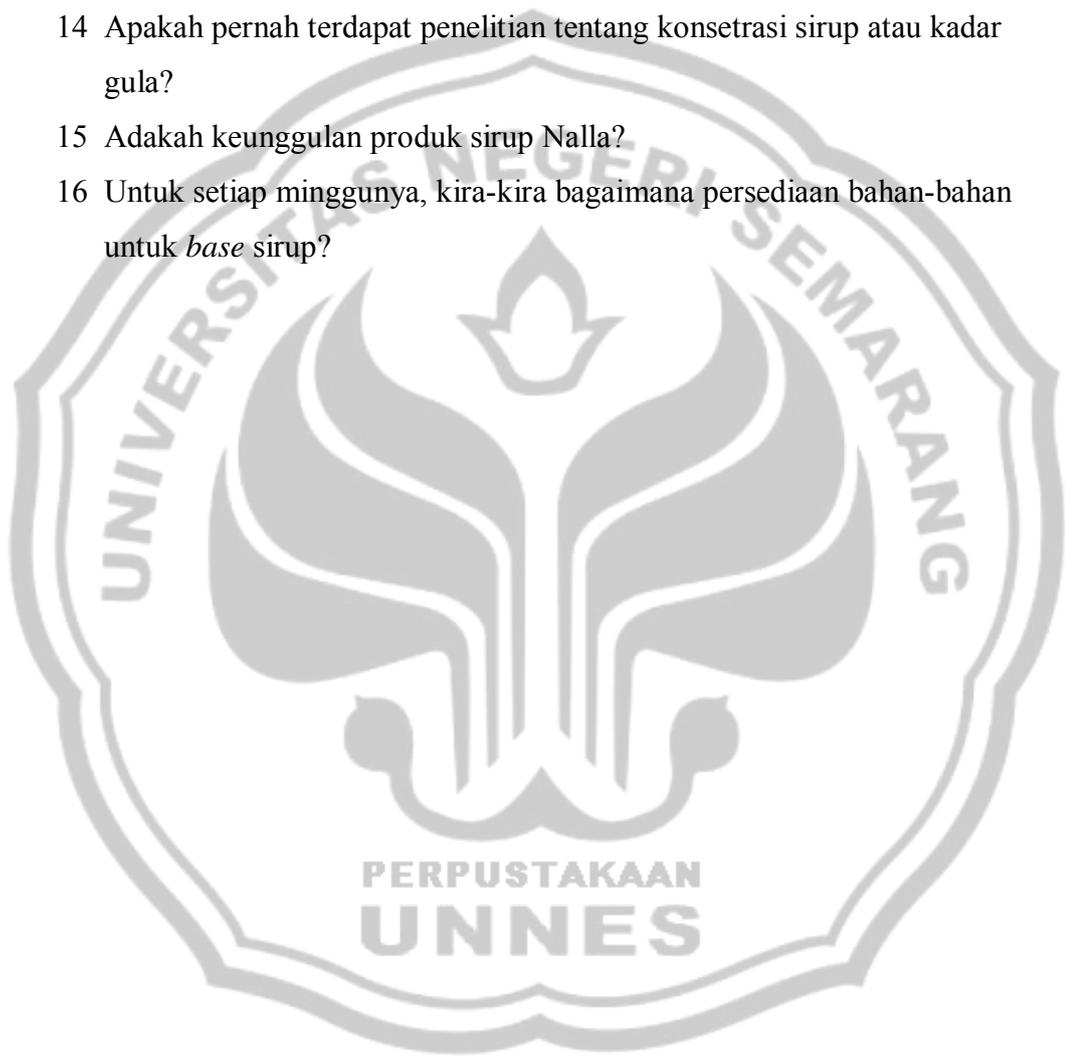
**DAFTAR PERTANYAAN WAWANCARA DENGAN PIMPINAN  
PERUSAHAAN NALLA SEMARANG**

- 1 Sejak kapan produk sirup Nalla ada?
- 2 Berapa jenis rasa produk sirup nalla?
- 3 Bagaimanakah proses produksi sirup Nalla untuk beberapa rasa yang berbeda?
- 4 Apakah produk Nalla memenuhi standar mutu sirup sesuai sengan standar SII?

No	Uraian	Persyaratan
1	Kadar gula minimum	Mutu I 65% Mutu II 55%
2	Zat warna	Yang diperbolehkan untuk dimakan
3	Pemanis buatan	Negatif
4	Bahan pengawet (asam benzoat)	Maksimum 250 mg/kg
5	Asam salisilat	Negatif
6	Logam berbahaya (C., Hg, Pb, As)	Negatif
7	Zat pengental	Yang diperbolehkan untuk minuman
8	Jamur ragi	Negatif
9	Bakteri bentuk coli	negatif

- 5 Termasuk standar mutu keberapakah produk sirup Nalla?
  - 1 Sirup mutu no.1 : kadar gula  $\geq 65\%$
  - 2 Sirup mutu no 2 : kadar gula 60%-65%
  - 3 Sirup mutu no 3 : kadar gula 55%-60%
- 6 Berapakah standar kadar gula produk sirup Nalla?
- 7 Dalam proses produksi sirup adakah tahap percampuran?
- 8 Bagaimanakah tahapan produksi *base* sirup?
- 9 Berapa botol yang dihasilkan dari sekali produksi?
- 10 Berapakah volume tiap botol produk sirup Nalla?

- 11 Dalam proses produksi *base* sirup, tahap apa yang memerlukan waktu yang paling lama? Mengapa?
- 12 Pada tahap percampuran, apa yang dilakukan apabila terjadi pergeseran (kelebihan atau kekurangan) zat gula pada waktu tertentu? Bagaimana proses pembetulannya?
- 13 Apakah pernah diadakan penelitian pada produk Nalla?
- 14 Apakah pernah terdapat penelitian tentang konsentrasi sirup atau kadar gula?
- 15 Adakah keunggulan produk sirup Nalla?
- 16 Untuk setiap minggunya, kira-kira bagaimana persediaan bahan-bahan untuk *base* sirup?



## Lampiran 7

**DAFTAR JAWABAN WAWANCARA DENGAN PIMPINAN  
PERUSAHAAN NALLA SEMARANG**

1. Kami mulai produksi sejak tahun 2003, berawal dari industri kecil. Baru ada perkembangan baik sekitar tahun 2005.
2. Ada enam rasa, yaitu jeruk, rose, frambos, lechi, melon dan jambu biji.
3. Untuk beberapa rasa yang berbeda, pertama kami membuat campuran *base* sirup yang sama sesuai dengan standar mutu produk kami, kemudian setelah *base* sirup sudah jadi, kami melanjutkan proses untuk masing-masing rasa.

No	Uraian	Persyaratan	Hasil
1	Kadar gula minimum	Mutu I 65% Mutu II 55%	V
2	Zat warna	Yang diperbolehkan untuk dimakan	V
3	Pemanis buatan	Negatif	V
4	Bahan pengawet (asam benzoat)	Maksimum 250 mg/kg	V
5	Asam salisilat	Negatif	V
6	Logam berbahaya (C., Hg, Pb,	Negatif	V
7	As)	Yang diperbolehkan untuk minuman	V
8	Zat pengental	Negatif	V
9	Jamur ragi	negatif	V
	Bakteri bentuk coli		

4. Sirup Nalla mempunyai standar mutu no 1.
5. Yakni kadar gula pasir murni mencapai 86,8%.
6. Ada. yakni pada base sirup (percampuran zat gula), dan ada tahap percampuran pewarna dan rasa.
7. Dalam tiap produksi sirup, kami menggunakan ukuran tunggal/tetap. Yakni untuk 20 liter air, gula pasir 50 kg dan glukosa 7,5 kg, 75 gram rumput laut dan 100 gram Na siklomat dengan proses sebagai berikut:
  - a. Air 20 liter dalam bejana dipanaskan sampai mendidih

- b. Masukkan 75 gram rumput laut, tunggu rumput laut meleleh sehingga menjadi larutan rumput laut.
  - c. Masukkan gula tiap satu kilogram hingga 50 kilogram, setiap penyampuran, campuran dipertahankan kondisinya dengan pengadukan secara terus menerus. Pada saat gula pasir masuk kedalam campuran rumput laut, suhu turun hingga  $40^{\circ}\text{C}$  dan dipertahankan sekitar  $60^{\circ}\text{C}$ , dan maksimal  $80^{\circ}\text{C}$ .
  - d. Masukkan 100 gram glukosa  $83^{\circ}$  brix yang berupa likuid, dan Na siklamat 100 gram.
  - e. Lakukan pengadukan secara terus menerus sampai kira-kira 80 menit dari proses awal percampuran.
  - f. Pindahkan hasil campuran ke wadah kedua dengan penyaringan.
  - g. Diamkan hasil percampuran untuk penyesuaian suhu kamar (tanpa alat pendingin).
8. Setiap satu kali produksi akan menghasilkan sekitar 85 botol.
  9. Ssetiap botol berisi 650 ml atau 900 gram.
  10. Proses pendinginan setelah percampuran, yakni memerlukan waktu sekitar 15 jam. Karena kami tidak menggunakan alat pendingin. Kami diamkan hasil campuran untuk bisa mencapai suhu kamar.
  11. Tidak pernah terjadi, karena pada awal-awal kami produksi, kami melakukan percobaan untuk beberapa ukuran kadar gula dan komposisi lainnya sehingga kami menemukan ukuran tetap (untuk setiap 20 liter air, gula pasir 50 kg dan glukosa 7,5 kg menghasikan campuran *base* dalam waktu 80 menit dengan derajat brix sekitar 70 derajat) .sebagai standar mutu kami. Dan pada setiap produksi, kami menggunakan ukuran sesuai standar mutu kami, sehingga tidak pernah terjadi kelebihan ataupun kekurangan ukuran gula. Apabila terjadi kelebihan kadar gula maka yang akan terjadi adalah pengkristalan.
  12. Pernah. Tentang rumput laut.
  13. Belum pernah.

14. Sirup Nalla tidak mengandung alkohol sedikitpun, karena kami menjaga produksinya mulai dari bahan-bahan bakunya yang benar-benar bebas alkohol, kemudian sirup Nalla mengandung rumput laut yang sangat baik untuk kesehatan, kemudian kami mempertahankan pemanis dengan gula pasir yang akan mempertahankan waktu layak konsumsi.
15. Adapun perkiraan persediaan bahan untuk satu minggu yaitu 10 karung gula pasir sebagai bahan utama *base* sirup, 75 kilogram glukosa, 1 kilogram Na siklamat dan untuk rumput laut 900 gram. Untuk jumlah air filtrasi kondisional, karena persediaannya yang mudah. Dalam satu minggu bisa mencapai 10 sampai 12 galon, tergantung produksinya.



## Lampiran 8

**DAFTAR TABEL KONVERSI KEKENTALAN  
DAN BERAT JENIS LARUTAN GULA**

<b>Derajat Brix</b>	<b>Berat Jenis</b>	<b>Derajat Boume</b>	<b>Kandungan Gula (g/liter Air)</b>
1	1,0038	0,6	10,3
2	1,0077	1,1	20,8
3	1,0117	1,7	31,6
4	1,0157	2,3	42,5
5	1,0197	2,8	53,7
6	1,0237	3,4	65,2
7	1,0277	4,0	76,9
8	1,0318	4,5	88,9
9	1,0359	5,1	101,1
10	1,0401	5,7	113,6
11	1,0443	6,2	126,4
12	1,0485	6,8	139,5
13	1,0527	7,4	152,9
14	1,0570	7,9	166,7
15	1,0613	8,5	180,7
16	1,0656	9,0	195,1
17	1,0700	9,1	209,9
18	1,0744	10,1	225,0
19	1,0788	10,7	240,5
20	1,0832	11,3	256,4
21	1,0877	11,8	272,7
22	1,0923	12,4	289,5
23	1,0963	13,0	306,7
24	1,1014	13,5	324,4
25	1,1060	14,1	342,4
26	1,1107	14,6	361,1
27	1,1154	15,2	380,3
28	1,1201	15,7	400,0
29	1,1248	16,3	420,0
30	1,1296	16,8	441,2
31	1,1344	17,4	462,6
32	1,1393	17,95	484,9
33	1,1442	18,5	507,7
34	1,1491	19,05	531,2

35	1,1541	19,6	571,1
36	1,1591	20,1	580,7
37	1,1641	20,7	606,5
38	1,1692	21,2	633,3
39	1,1743	21,8	661,0
40	1,1794	22,3	689,7
41	1,1846	22,9	719,3
42	1,1898	23,4	750,0
43	1,1950	23,95	800,0
44	1,2003	24,5	814,9
45	1,2056	25,0	849,0
46	1,2110	25,6	884,7
47	1,2163	26,1	921,6
48	1,2218	26,6	960,0
49	1,2272	27,2	1.000,0
50	1,2327	27,7	1.041,7
51	1,2383	28,2	1.085,1
52	1,2439	28,8	1.130,5
53	1,2495	29,3	1.177,9
54	1,2551	29,8	1.227,3
55	1,2608	30,4	1.279,1
56	1,2665	30,9	1.333,4
57	1,2723	31,4	1.390,3
58	1,2781	31,9	1.450,0
59	1,2840	32,5	1.512,9
60	1,2898	33,0	1.578,9
61	1,2958	33,5	1.648,6
62	1,3017	34,0	1.722,3
63	1,3077	34,5	1.800,0
64	1,3138	35,1	1.882,4
65	1,3198	35,6	1.969,7
66	1,3260	36,1	2.062,5
67	1,3322	36,6	2.164,3
68	1,3384	37,1	2.266,7
69	1,3446	27,6	2.379,4
70	1,3509	38,1	2.500,0

Sumber: *Agricultural Technical Mission Republic of China*, Deskripsi Pengolahan Bahan Pangan, 1987.

Lampiran 12

**GAMBAR LABEL SIRUP NALLA**



PERPUSTAKAAN  
UNNES