DIGRAF EKSENTRIK DARI GRAF STAR DAN GRAF WHEEL

skripsi

disajikan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

Rido Oktosa

4150406504

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2011

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan perundang-undangan.

Semarang, September 2011

Rido Oktosa

4150406504

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Digraf Eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel

disusun oleh

Rido Oktosa

4150406504

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA Unnes pada tanggal 20 September 2011.

Panitia:

Ketua	Sekretaris
Dr. Kasmadi Imam S., M.S.	Drs. Edy Soedjoko, M.Pd.
195111151979031001	195604191987031001

Ketua Penguji

Dr. St. Budi Waluya, M.Si.

196809071993031002

Anggota Penguji/ Pembimbing Utama	Anggota Penguji/ Pembimbing Pendamping
Dr. Mulyono, S.Si., M.Si.	Drs. Amin Suyitno, M.Pd.
197009021997021001	195206041976121001

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

- "Hai orang-orang yang beriman, bersabarlah kamu dan kuatkanlah kesabaranmu dan tetaplah bersiap siaga (di perbatasan negerimu) dan bertakwalah kepada Allah, supaya kamu beruntung."
  (QS. Ali 'Imran : 200)

- Bersyukurlah pada Yang Maha Kuasa, hargailah orang-orang yang menyayangimu, dan selalu ada setia di sisimu.

- Man Jadda Wa Jada (Barangsiapa bersungguh-sungguh, ia pasti berhasil).

PERSEMBAHAN

- Puji syukur kepada Allah SWT.
- Bapak dan Ibu atas do'a, dukungan, dan kasih sayang.
- Adik yang memberiku kekuatan dan motivasi.
- Sahabat dan teman-temanku yang selalu memberi semangat.
- Almamater UNNES.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat, hidayah, dan inayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"DIGRAF EKSENTRIK DARI GRAF STAR DAN GRAF WHEEL"** dengan baik dan lancar.

Skripsi ini dapat diselesaikan berkat bimbingan dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati disampaikan terima kasih kepada yang terhormat:

1. Prof. Dr. H. Sudijono Sastroatmodjo, M.Si, Rektor Universitas Negeri Semarang yang telah memberikan izin kuliah dan segala fasilitas untuk menyelesaikan skripsi ini.
2. Dr. Kasmadi Imam S., M.S, Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Edy Soedjoko, M.Pd, Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.
4. Dr. Mulyono, M.Si, Pembimbing Utama yang dengan penuh kesabaran memberikan bimbingan dan arahan dalam penulisan skripsi ini.
5. Drs. Amin Suyitno, M.Pd, Pembimbing Pendamping yang dengan penuh kesabaran memberikan bimbingan dan arahan dalam penulisan skripsi ini.

6. Dr. St. Budi Waluya, M.Si, Ketua Penguji yang memberikan bimbingan dalam penulisan skripsi ini.
7. Bapak, ibu, dan adikku tercinta yang telah mendoakan dan memberikan semangat yang sangat tinggi agar selalu maju dan pantang menyerah.
8. Teman-teman Matematika angkatan 2006 terima kasih atas bantuan dan kerjasamanya.
9. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini yang tidak bisa disebutkan satu per satu.

Mudah-mudahan apa yang dituangkan dalam skripsi ini dapat menambah informasi dan bermanfaat bagi semua pihak.

Semarang,   September 2011

Penulis

ABSTRAK

Oktosa, Rido. 2011. "*Digraf Eksentrik Dari Graf Star Dan Graf Wheel*". Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Pembimbing Utama Dr. Mulyono, M.Si. dan Pembimbing Pendamping Drs. Amin Suyitno, M.Pd.

Kata kunci : eksentrisitas, digraf eksentrik, graf star, graf wheel

Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik V(G) dan himpunan sisi E(G). Jarak dari titik u ke v di G adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke v, dinotasikan dengan $d(u, v)$. Eksentrisitas titik u dalam graf G adalah jarak terjauh dari titik u ke setiap titik di G, dinotasikan dengan $e(u)$. Titik v merupakan titik eksentrik dari u jika $d(u, v) = e(u)$. Digraf eksentrik dari suatu graf G, dinotasikan dengan $ED(G)$ adalah graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik di G, dan *arc* yang menghubungkan titik u ke v jika v adalah titik eksentrik dari u.

Tujuan penelitian ini adalah menentukan digraf eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel. Metode yang digunakan dalam skripsi ini adalah dengan mengumpulkan sumber pustaka berupa buku maupun referensi lain yang selanjutnya dijadikan landasan untuk melakukan penelitian ini..

Berdasarkan pembahasan. Dapat disimpulkan bahwa bentuk digraf eksentrik untuk Graf Star untuk $n = 2$ adalah digraf komplit simetri dan memiliki jumlah *arc* $|A(ED(S_n))| = 2$ dan untuk $n > 2$ adalah digraf komplit dan memiliki jumlah *arc* $|A(ED(S_n))| = (n-1)^2$. Sedangkan bentuk digraf eksentrik dari Graf Wheel untuk $n = 4$ adalah digraf komplit simetri dan memiliki jumlah *arc* $|A(ED(W))| = 12$ dan untuk $n > 4$ adalah digraf komplit dan memiliki jumlah *arc* $|A(ED(W_n))| = n^2 - 4n + 3$. Karena penelitian ini hanya membahas tentang digraf eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel, untuk itu disarankan perlu penelitian lebih lanjut mengenai digraf eksentrik dari kasifikasi graf yang lainnya.

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

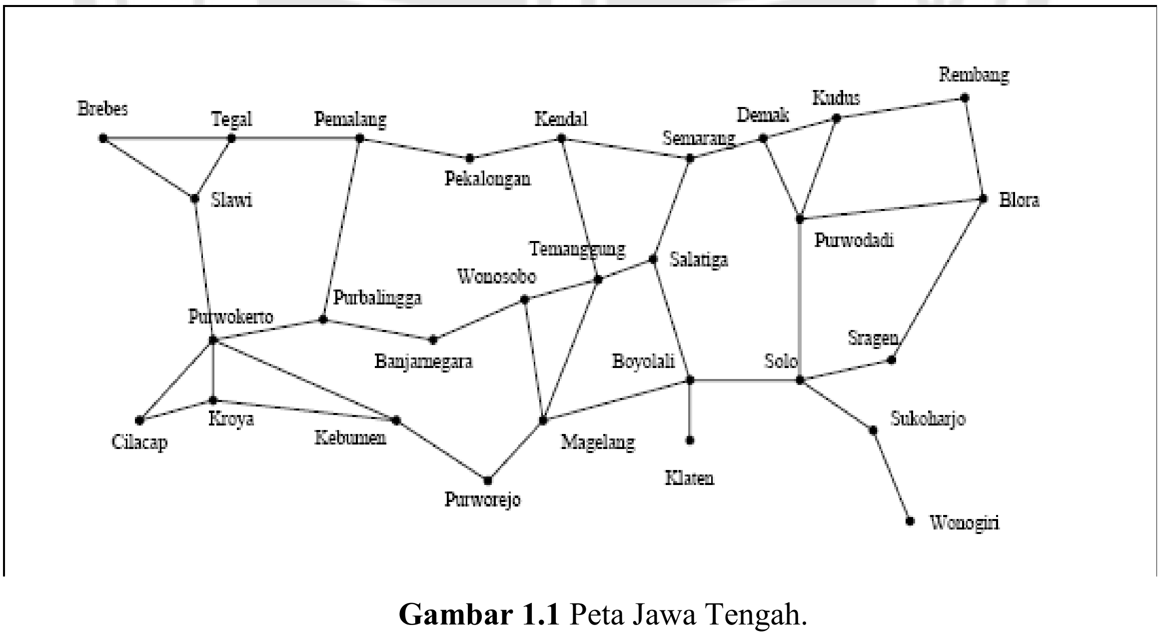
DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

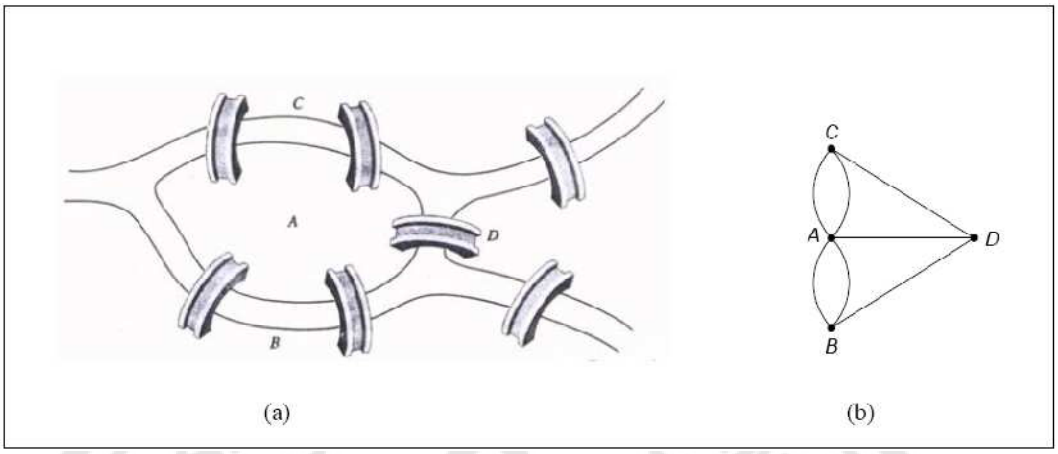
1.1 Latar Belakang

Teori Graf merupakan pokok bahasan yang sudah tua usianya namun memiliki banyak terapan sampai saat ini. Graf juga digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan, atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis. Sebagai contoh, pada Gambar 1 adalah sebuah peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Jawa Tengah. Sesungguhnya peta tersebut adalah sebuah graf, yang dalam hal ini kota dinyatakan sebagai bulatan sedangkan jalan dinyatakan sebagai garis. Dengan adanya peta tersebut, dapat diketahui apakah ada lintasan antara dua buah kota. Contoh lain adalah bila panjang jalan kereta api antara dua buah kota bertetangga diketahui, dapat juga ditentukan rute perjalanan yang tersingkat dari kota *A* ke kota *B*. Selain itu masih banyak pertanyaan lain yang dapat dimunculkan berkenaan dengan graf.



Gambar 1.1 Peta Jawa Tengah.

Menurut catatan sejarah, masalah jembatan Königsberg adalah masalah yang pertama kali menggunakan graf (tahun 1736). Di kota Königsberg (sebelah timur Prussia, Jerman sekarang), sekarang bernama kota Kaliningrad, terdapat sungai Pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai (Sundari, 2008).



Gambar 1.2 (a) Jembatan Königsberg dan (b) graf yang merepresentasikan jembatan Königsberg.

Ada tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh sungai tersebut (Gambar 2(a)). Masalah jembatan Königsberg adalah: apakah mungkin melalui ketujuh buah jembatan itu masing-masing tepat satu kali, dan kembali lagi ke tempat semula? Sebagian penduduk kota sepakat bahwa memang tidak mungkin melalui setiap jembatan itu hanya sekali dan kembali lagi ke tempat asal mula keberangkatan, tetapi mereka tidak dapat menjelaskan mengapa demikian jawabannya, kecuali dengan cara coba-coba. Tahun 1736, seorang matematikawan Swiss, L.Euler, adalah orang pertama yang berhasil menemukan jawaban masalah itu dengan pembuktian yang sederhana. Ia memodelkan masalah ini ke dalam graf. Daratan (titik-titik yang dihubungkan oleh jembatan) dinyatakannya sebagai titik (noktah) yang disebut simpul (*vertex*) dan jembatan dinyatakan sebagai garis yang disebut sisi (*edge*). Setiap titik diberi label huruf *A*, *B*, *C*, dan *D*. Graf yang dibuat oleh Euler diperlihatkan pada Gambar 2(b).

Jawaban yang dikemukakan oleh Euler adalah: orang tidak mungkin melalui ketujuh jembatan itu masing-masing satu kali dan kembali lagi ke tempat asal keberangkatan jika *derajat* setiap titik tidak seluruhnya genap. Yang dimaksud dengan derajat adalah banyaknya garis yang bersisian dengan noktah. Sebagai contoh, titik C memiliki derajat 3 karena ada tiga buah garis yang bersisian dengannya, titik B dan D juga berderajat dua, sedangkan titik A berderajat 5. Karena tidak semua titik berderajat genap, maka tidak mungkin dilakukan perjalananan berupa sirkuit (yang dinamakan dengan *sirkuit Euler*) pada graf tersebut (Sundari, 2008).

Secara garis besar ada empat masalah pokok dalam teori graf, yaitu:

1. Masalah *Eksistensi*: masalah yang berhubungan dengan pertanyaan, apakah ada suatu graf yang…? Apakah mungkin dibuat atau dibangun suatu graf…?
2. Masalah *Konstruksi*: masalah yang berhubungan dengan pembentukan atau pengkonstruksian atau pengadaan. Jika suatu graf ada, apakah mungkin kita mengkonstruksinya? Bagaimana kita dapat membangunnya?
3. Masalah *Enumerasi*: masalah yang berhubungan dengan perhitungan atau pencacahan. Berapa banyak graf seperti itu? Bagaimana cara kita menghitungnya?
4. Masalah *Optimasi*: masalah yang berhubungan dengan keputusan yang terbaik, terdekat, terkecil, atau paling… Jika ada banyak kemungkinan, bagaimana kita mendapatkan yang terbaik? Mana yang paling baik?

(Gunawan, 2003).

Di dalam teori graf, terdapat berbagai macam jenis-jenis graf. Jenis-jenis graf tersebut adalah graf star, graf double star, graf siklus, graf wheel, dan masih banyak yang lainnya. Salah satu graf yang terbentuk dengan menghubungkan titik sentral menuju titik daun $(n-1)$ dan titik sentral dihubungkan menuju titik siklus $(n-1)$ adalah Graf Star dan Graf Wheel. Dalam kehidupan nyata konsep Graf Star digunakan untuk memodelkan jaringan komputer, jaringan komputer dimodelkan dan digunakan untuk pembagian perhitungan setelah mempelajari Graf Star. Sedangkan konsep Graf Wheel digunakan untuk pola penentuan channel stasiun radio.

Salah satu aplikasi dalam teori graf adalah menentukan kota terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari suatu kota ke kota yang lain yang terdiri dari kumpulan kota dalam suatu daerah. Masalah ini ekuivalen dengan menentukan eksentrisitas titik pada graf. Misal G graf dengan himpunan titik V(G) dan himpunan sisi E(G). Titik v dikatakan terjangkau dari titik u pada graf G jika terdapat lintasan berarah dari u ke v dan panjang lintasan terpendek adalah jarak dari u ke v, dinotasikan dengan *d(u,v)*. Jika tidak ada lintasan berarah dari titik u ke v, maka kita definisikan jarak $d(u,v) = \infty$.

Eksentrisitas dari titik u, dinotasikan dengan *e(u)* pada graf G adalah jarak maksimal dari u ke setiap v di G, atau dapat ditulis $e(u) = maks\ \{d(u,v) | \forall v \in G\}$. Suatu titik pada graf G dikatakan sebagai titik eksentris dari titik u jika jarak dari u ke v sama dengan *e(u)*. Digraf eksentrik dari graf G yang dinotasikan dengan *ED(G)* jika dan hanya jika v adalah titik eksentris dari u.

Dari pengertian eksentrisitas, digraf eksentrik, dan kegunaan Graf Star dan Graf Wheel tersebut, penulis tertarik untuk mengambil judul penelitian yang berjudul Digraf Eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel.

1.2 Perumusan Masalah

(1). Bagaimana langkah-langkah mengkonstruksi digraf eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel?

(2). Bagaimana bentuk digraf eksentrik dari Graf Star?

(3). Bagaimana bentuk digraf eksentrik dari Graf Wheel?

(4). Apakah Graf Star dan Graf Wheel eksentrik?

1.3 Tujuan dan Manfaat Penelitian

1.3.1 Tujuan Penelitian

(1). Mengetahui cara mengkonstruksi digraf eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel.

(2). Mengetahui bentuk digraf eksentrik dari Graf Star.

(3). Mengetahui bentuk digraf eksentrik dari Graf Wheel.

(4). Mengetahui apakah Graf Star dan Graf Wheel eksentrik.

1.3.2 Manfaat Penelitian

(1). Bagi Penulis

Untuk mengembangkan ilmu pengetahuan, terutama dalam hal mengkonstruksi digraf eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel.

(2). Bagi pembaca

Untuk menambahkan ilmu pengetahuan terutama dalam hal mengkonstruksi digraf eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel.

1.4 Sistematika Penulisan

BAB I Merupakan bab pendahuluan yang berisi tentang latar belakang, perumusan masalah, tujuan, dan manfaat kegiatan.

BAB II Menguraikan materi penunjang yang menjadi dasar teori disusunnya skripsi ini.

BAB III Menguraikan tentang metode penelitian yaitu langkah-langkah yang dilakukan peneliti.

BAB IV Menguraikan pembahasan tentang langkah-langkah mengkonstruksi digraf eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel, bentuk digraf eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel, dan sifat eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel.

BAB V Berisi kesimpulan dan saran dari pembahasan tentang bentuk digraf eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel.

BAB II
LANDASAN TEORI

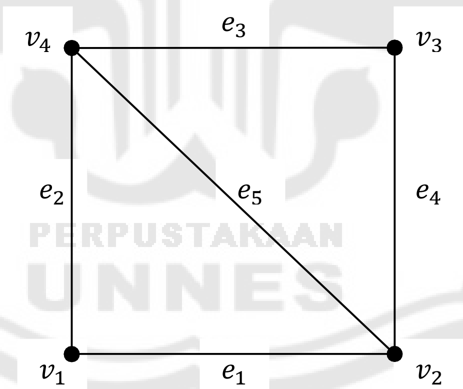
2.1 Definisi Graf

Sebuah graf linier (atau secara sederhana disebut graf) $G = (V, E)$ adalah suatu sistem yang terdiri atas suatu himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ yang disebut himpunan titik (tidak boleh kosong), dan sebuah himpunan $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ yang merupakan himpunan sisi (boleh kosong) sedemikian hingga tiap sisi e_k dikaitkan dengan suatu pasangan tak terurut (v_i, v_j). Titik (v_i, v_j) yang berkaitan dengan sisi e_k disebut titik-titik ujung dari sisi e_k (Sutarno, 2003).

Definisi 2.1

Jika terdapat sisi e ={u,v} = {v,u} = uv, maka sisi e dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika e = {u,v} adalah sisi pada graf G, maka u dan v disebut titik yang berhubungan langsung atau bertetangga (*adjacent*). Sedangkan u dan e serta v dan e disebut terkait (*incident*) (Chartrand and Lesniak, 1996).

Contoh 2.1



Gambar 2.1 Graf G.

Pada gambar 2.1, titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan v_4, tetapi titik v_1 tidak bertetangga dengan titik v_3.

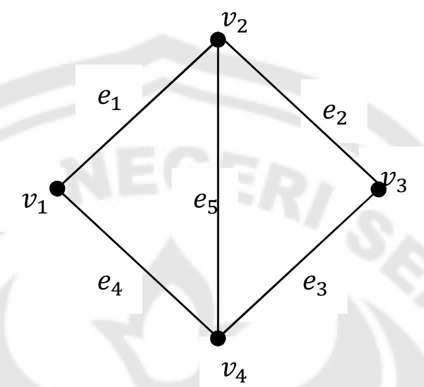
Definisi 2.2

Jika terdapat lebih dari satu sisi yang berkaitan dengan sepasang titik pada graf maka sisi tersebut disebut sisi ganda (*parallel edges*). Loop adalah sisi yang kedua titik ujungnya sama.

Definisi 2.3

Graf sederhana adalah graf yang tidak memuat loop dan sisi ganda.

Contoh 2.2



Gambar 2.2 Graf sederhana

Definisi 2.4

Kardinalitas himpunan titik dari graf G disebut order dari graf G dan dinotasikan dengan n(G), |V| atau n. Sedangkan kardinalitas dari himpunan sisi disebut size yang dinotasikan dengan m(G), |E| atau m. Suatu graf G (n,m) mempunyai order n dan size m (Chartrand and Lesniak, 1996).

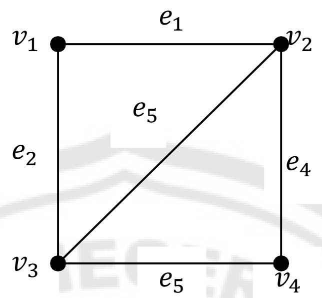
Contoh 2.3

Graf G pada gambar 2.2, mempunyai order 4 dan size 5.

Definisi 2.5

Derajat dari titik v pada graf G adalah jumlah sisi pada G yang terkait dengan v, yang dinotasikan dengan $\deg_G$ v atau deg v. Suatu titik dikatakan ganjil atau genap sesuai dengan derajat titik tersebut ganjil atau genap (Chartrand and Lesniak, 1996).

Contoh 2.4



Gambar 2.3 Graf G.

Pada gambar 2.3, titik v_1 dan v_4 berderajat 2 atau merupakan titik genap, sedangkan v_2 dan v_3 berderajat 3 atau merupakan titik ganjil.

Definisi 2.6

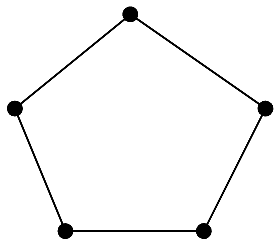
Suatu graf sederhana dikatakan komplit (*complete*) jika setiap 2 titiknya bertetangga. Graf komplit (n,m) merupakan graf regular dengan derajat n-1 dan jumlah sisi m, dengan m= $\frac{n(n-1)}{2}$ dan dinotasikan dengan K_n (Chartrand and Lesniak, 1996).

Definisi 2.7

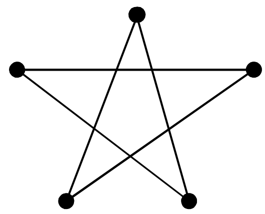
Komplemen dari graf G (diberi simbol dengan $\bar{G}$) adalah graf dengan himpunan titik V(G) dimana dua titik dikatakan bertetangga di $\bar{G}$ jika dan hanya jika titik tersebut tidak bertetangga di G (Chartrand and Lesniak, 1996).

Contoh 2.5

G :



$\overline{G}$:



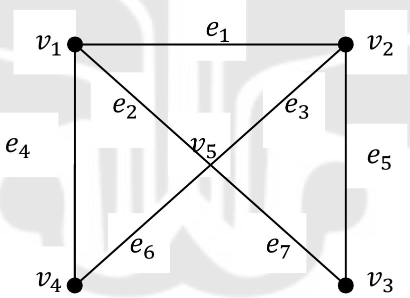
Gambar 2.4 Graf G dan komplemennya.

Definisi 2.8

Misalkan G adalah sebuah graf. Sebuah jalan (*walk*) di G adalah sebuah barisan berhingga tak kosong dengan $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir sisi e_i, untuk $1 < i < k$. Kita katakan W adalah sebuah jalan dari v_0 ke v_k, atau jalan (v_0, v_k). Titik v_0 dan titik v_k berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir W. Sedangkan titik-titik $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$ disebut titik-titik internal dari W dan k disebut panjang dari W (Sutarno, 2003).

Contoh 2.6

G :



Gambar 2.5 Graf G.

Pada gambar 2.5, $v_4 - e_6 - v_5 - e_7 - v_3 - e_5 - v_2 - e_1 - v_1 - e_4 - v_4$ adalah jalan.

Definisi 2.9

Jika semua sisi $e_1 - e_2 - e_3 - \cdots - e_k$ dalam suatu jalan W berbeda, maka W disebut jejak (*trail*). Jika semua titik $v_1 - v_2 - v_3 - \cdots - v_k$ dalam suatu jalan W juga berbeda, maka W disebut lintasan (*path*) (Sutarno, 2003).

Contoh 2.7

Pada gambar 2.5, jalan $v_4 - e_6 - v_5 - e_3 - v_2 - e_1 - v_1 - e_2 - v_5 - e_7 - v_3$ adalah jejak tetapi bukan lintasan, sedangkan $v_1 - e_4 - v_4 - e_6 - v_5 - e_3 - v_2 - e_5 - v_3$ adalah lintasan.

Definisi 2.10

Lintasan terpendek (*shortest path*) adalah lintasan dengan jumlah sisi paling sedikit.

Contoh 2.8

Pada gambar 2.5, lintasan terpendek dari titik v_1 ke v_3 adalah $v_1 - e_2 - v_5 - e_7 - v_3$ dengan panjang lintasan 2.

Definisi 2.11

Jejak tertutup disebut sirkuit. Sirkuit yang titik internalnya berlainan disebut siklus (*cycle*) (Sutarno, 2003).

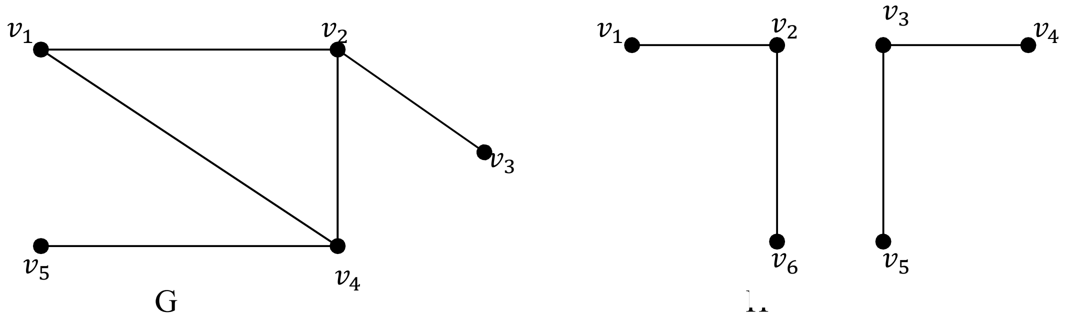
Contoh 2.9

Pada gambar 2.5, jalan $v_1 - e_2 - v_5 - e_7 - v_3 - e_5 - v_2 - e_1 - v_1$ adalah siklus.

Definisi 2.12

Suatu graf G dikatakan terhubung jika terdapat lintasan untuk setiap pasang titik di G.

Contoh 2.10



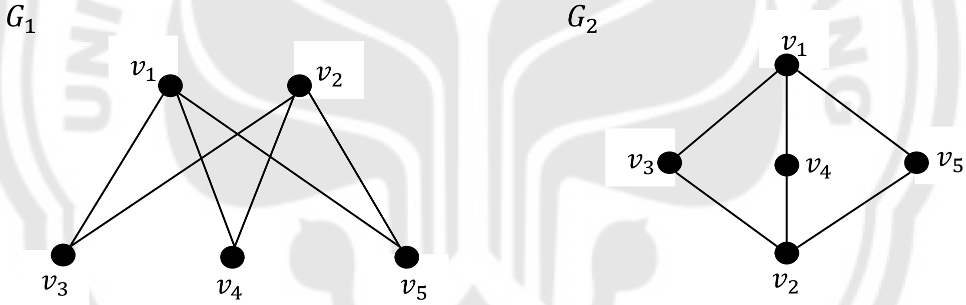
Gambar 2.6 Graf terhubung G dan graf tak terhubung H.

Pada gambar 2.6, graf G adalah graf terhubung dan graf H adalah graf tidak terhubung.

Definisi 2.13

Suatu graf G_1 disebut isomorfik dengan graf G_2 jika terdapat pemetaan satu-satu yang disebut dengan isomorfisme (φ), dari $V(G_1)$ ke $V(G_2)$ sehingga $uv \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $\varphi u \varphi v \in E(G_2)$.

Contoh 2.11

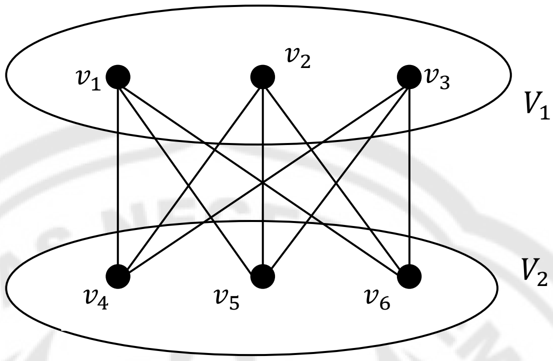


Gambar 2.7 Graf isomorfik.

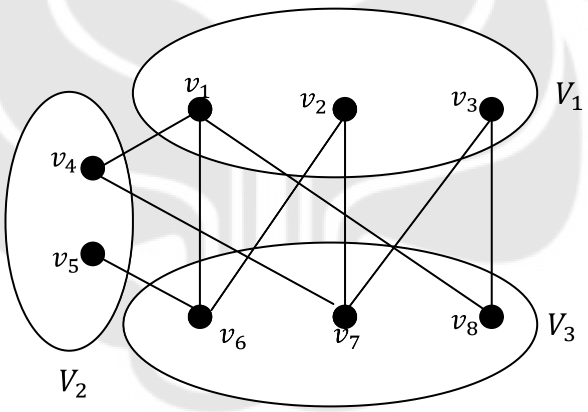
Definisi 2.14

Untuk $s \geq 2$, graf G disebut s-partit (*s-partite graph*) jika $V(G)$ dapat dipartisi ke s subhimpunan tak kosong $V_1, V_2, \dots, V_s$ sedemikian hingga tidak ada sisi dari graf G yang menghubungkan titik-titik di dalam himpunan yang sama. Himpunan $V_1, V_2, \dots, V_s$ disebut himpunan partisi dari G.

Contoh 2.12



(a)



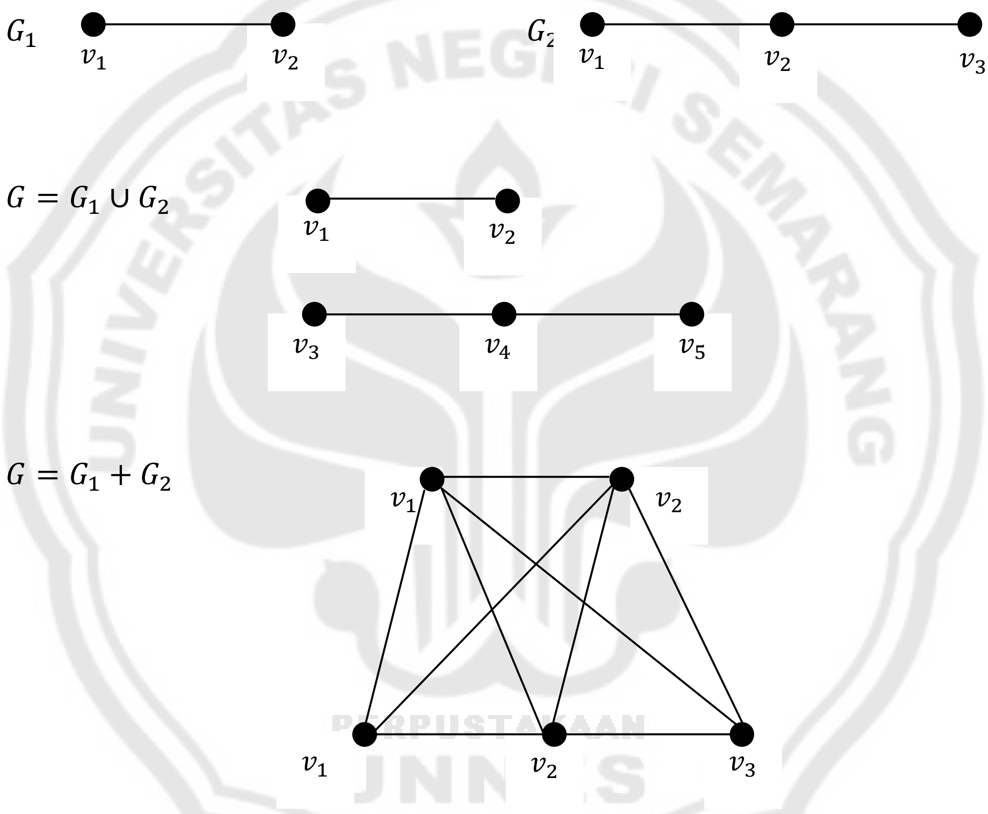
(b)

Gambar 2.8 (a) Graf $K_{3,3}$ dan (b) Graf $K_{3,2,3}$.

Definisi 2.15

Misalkan G_1 dan G_2 adalah dua graf dengan himpunan titik $V(G_1)$ dan $V(G_2)$ yang saling asing, begitu juga himpunan sisi $E(G_1)$ dan $E(G_2)$. Gabungan (*Union*) dari G_1 dan G_2 adalah graf dengan $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$, dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$. Sedangkan *Join* dari G_1 dan G_2, dinotasikan dengan $G_1 + G_2$, adalah graf yang terdiri dari Gabungan $G_1 \cup G_2$ bersama-sama dengan semua sisi $v_1 v_2$ dengan $v_1 \in V(G_1)$ dan $v_2 \in V(G_2)$.

Contoh 2.13



Gambar 2.9 Gabungan dan *Join* dari dua graf.

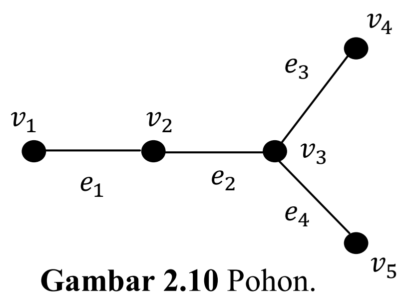
Definisi 2.16

Graf H dikatakan subgraf dari graf G jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$ (Chartrand and Oellerman, 1993).

Definisi 2.17

Pohon (*Tree*) adalah graf terhubung yang tidak memiliki siklus.

Contoh 2.14

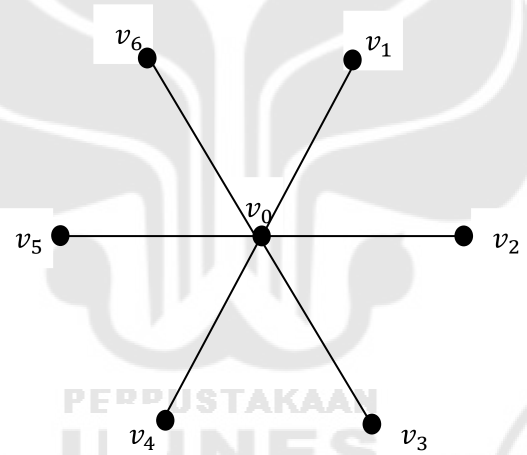


Gambar 2.10 Pohon.

Definisi 2.18

Di dalam teori graf, Graf Star S_n adalah graf komplit bipartit $K_{1,n}$, sebuah pohon dengan satu titik sentral dan *n* titik daun. Atau, beberapa penulis mendefinisikan S_n adalah pohon dengan n titik dengan diameter maksimum 2; dalam hal ini Graf Star untuk $n > 2$ memiliki $n - 1$ titik daun (Wikipedia.com).

Contoh 2.15

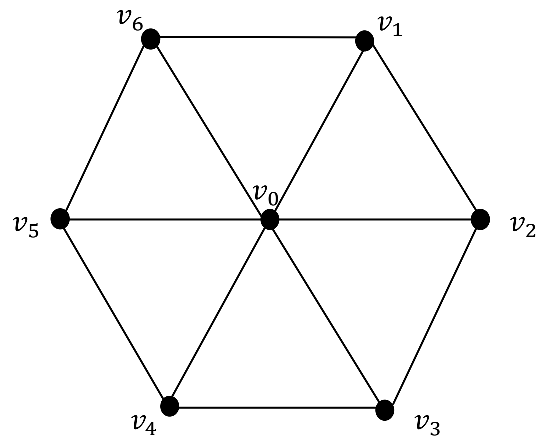


Gambar 2.11 Graf Star S_7.

Definisi 2.19

Graf Wheel W_n adalah graf dengan n titik yang dibentuk dengan menghubungkan titik sentral ke semua titik dari sebuah siklus $(n - 1)$ (Wikipedia.com).

Contoh 2.16

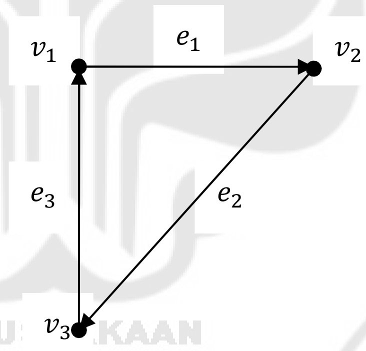


Gambar 2.12 Graf Wheel W_7.

2.2 Definisi Digraf

Graf berarah atau digraf (*digraph*) D adalah himpunan berhingga tak kosong dari objek-objek yang disebut titik dengan himpunan (mungkin kosong) pasangan berurutan dari titik di D yang disebut *arc* atau sisi berarah (Chartrand and Lesniak, 1996).

Contoh 2.17



Gambar 2.13 Digraf D.

Seperti pada graf, himpunan titik-titik dari digraf D di notasikan dengan V(D) dan himpunan sisi dinotasikan E(D). Pada gambar 2.13, digraf D dengan V(D) = $\{v_1, v_2, v_3\}$ dan E(D) = $\{(v_1, v_2),(v_1, v_3),(v_2, v_3)\}$. Sisi $(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$.

Definisi 2.20

Order dari digraf D adalah kardinalitas himpunan titik dari digraf D dinotasikan dengan n(D) atau n. Size dari digraf D adalah kardinalitas dari himpunan *arc* digraf D dinotasikan dengan m(D) atau m. Digraf (n,m) adalah digraf dengan order n dan size m.

Contoh 2.18

Pada gambar 2.13, digraf D mempunyai order 3 dan size 3.

Definisi 2.21

Jika $e_1 = (v_1, v_2)$ adalah *arc* dari digraf D, maka e_1 disebut menghubungkan v_1 ke v_2. *Arc* e_1 terkait dari v_1 dan terkait ke v_2, sedangkan v_1 terkait ke e_1 dan v_2 terkait dari e_1. Atau dapat dikatakan v_1 bertetangga ke v_2 dan v_2 bertetangga dari v_1. Titik v_1 dan v_2 pada digraf D tidak bertetangga (*non adjacent*) jika v_1 tidak bertetangga ke v_2 atau tidak bertetangga dari v_2.

Contoh 2.19

Pada gambar 2.13, misal e_1 = (v_1, v_2) terkait dari v_1 dan terkait ke v_2. Titik v_1 bertetangga ke titik v_2, tetapi v_2 tidak bertetangga ke v_1.

Definisi 2.22

Derajat keluar (*out degree*) titik v (od v) dari digraf D adalah jumlah titik dari digraf D yang bertetangga dari titik v. Derajat masuk (*in degree*) titik v (id v) dari digraf D adalah jumlah titik dari digraf D yang bertetangga ke titik v. Derajat titik v (deg v) pada digraf D didefinisikan dengan deg v = *od* v + *id* v.

Contoh 2.20

Pada gambar 2.13, $od\ v_1$= $id\ v_1 = 1$, $od\ v_2$ = $id\ v_2 = 1$, $od\ v_3$= $id\ v_3 = 1$ dan deg v_1= deg v_2= deg v_3= 2.

Definisi 2.23

Out-neighbours adalah himpunan titik yang bertetangga dari suatu titik v dinotasikan dengan $N^{+}(v)$ dengan kardinalitas sama dengan derajat keluar v. *In-neighbours* adalah himpunan titik yang bertetangga ke suatu titik v dinotasikan dengan $N^{-}(v)$ dengan kardinalitas sama dengan derajat masuk v.

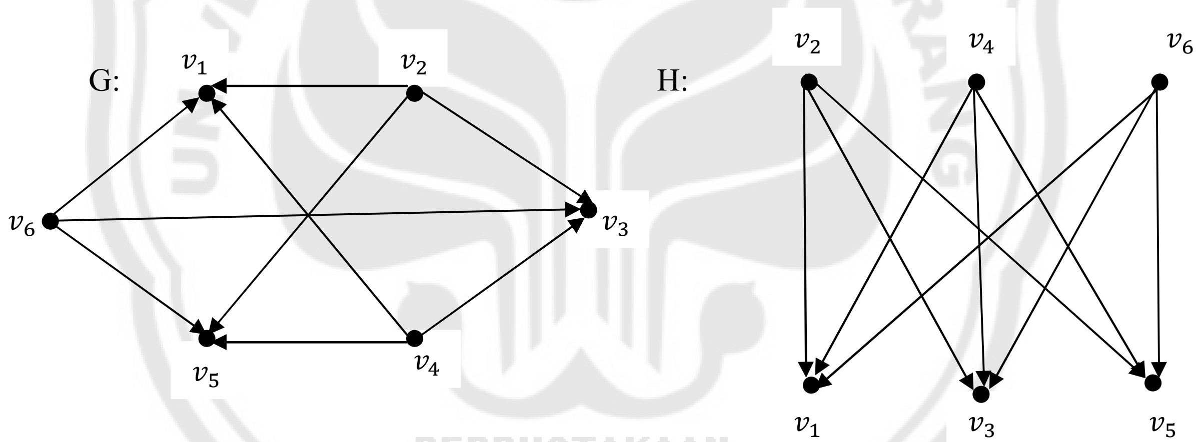
Contoh 2.21

Pada gambar 2.13, $N^{+}(v_1)$ = $\{v_2\}$ dan $N^{-}(v_1)$ = $\{v_3\}$.

Definisi 2.24

Suatu digraf D_1 dikatakan isomorfik dengan digraf D_2 jika terdapat pemetaan satu-satu (φ) yang disebut isomorfisme, dari $V(D_1)$ ke $V(D_2)$ sedemikian hingga (u,v) ϵ $E(D_1)$ jika dan hanya jika (φu , φv) ϵ E (D_2). Pada digraf relasi isomorfik sama dengan relasi persamaan.

Contoh 2.22



Gambar 2.14 Digraf isomorfik.

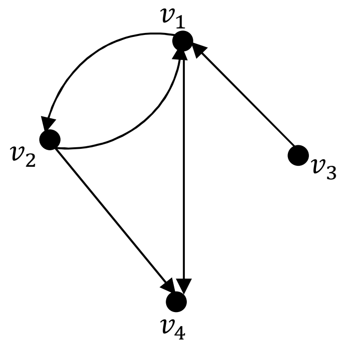
Pada gambar 2.14, digraf G isomorfik dengan digraf H.

Definisi 2.25

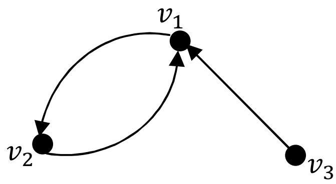
Suatu digraf D_1 adalah subdigraf dari D jika $V(D_1) \subseteq V(D)$ dan $E(D_1) \subseteq E(D)$.

Contoh 2.23

D_1 :



D_2 :



Gambar 2.15 Digraf dan subdigraf.

Pada gambar 2.15, digraf D_2 adalah subdigraf dari digraf D_1.

Definisi 2.26

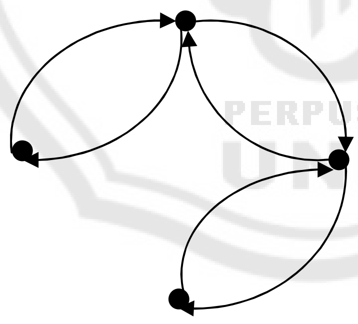
Suatu digraf D disebut simetri (*symmetric*) jika untuk setiap (v,u) adalah *arc* dari D dan (u,v) juga merupakan *arc* dari D (Chartrand and Lesniak, 1996).

Definisi 2.27

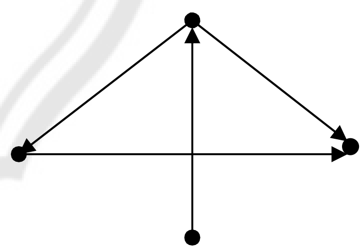
Suatu digraf D disebut digraf tak simetri (*asymmetric digraph* atau *oriented digraph*) jika untuk setiap (u,v) adalah *arc* pada G, tetapi (v,u) bukan *arc* pada D (Chartrand and Lesniak, 1996).

Contoh 2.24

D_1 :



D_2 :



Gambar 2.16 Digraf simetri dan digraf tidak simetri.

Pada gambar 2.16, digraf D_1 adalah digraf simetri, digraf D_2 adalah digraf tidak simetri.

Definisi 2.28

Suatu digraf D disebut digraf komplit jika untuk setiap dua titik u dan v di D dihubungkan oleh salah satu *arc* (v,u) atau (v,u) di D (Chartrand and Lesniak, 1996).

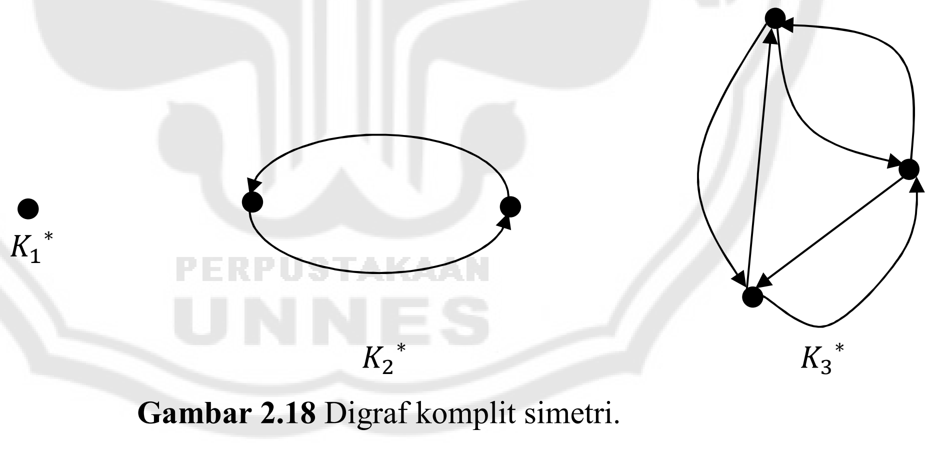
Contoh 2.25

Gambar 2.17 Digraf komplit.

Definisi 2.29

Digraf komplit simetri dengan ordo n adalah digraf yang mempunyai kedua sisi (u,v) dan (v,u) untuk setiap pasangan titik u dan v dan dinotasikan dengan $K_n{}^*$ (Chartrand and Lesniak, 1996).

Contoh 2.26



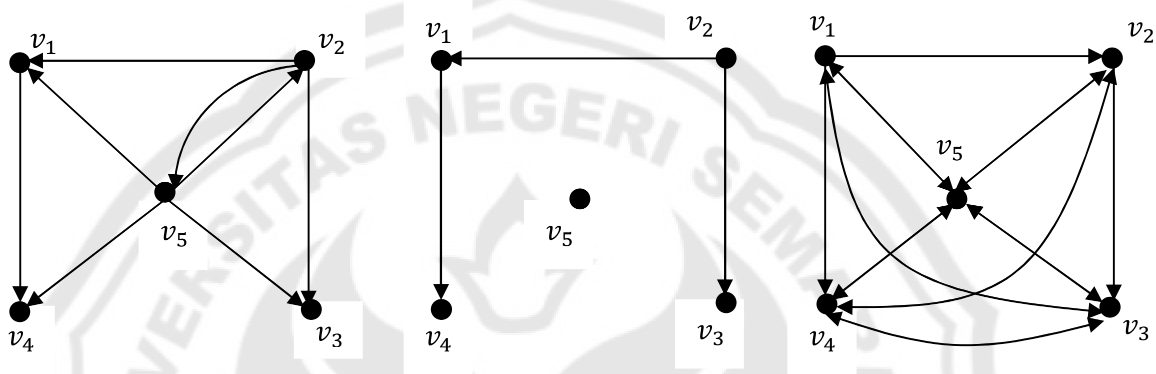
Gambar 2.18 Digraf komplit simetri.

Definisi 2.30

Komplemen digraf D dinotasikan dengan $\overline{D}$ yaitu digraf yang mempunyai himpunan titik V(D) yang sama dengan D dan himpunan komplemen *arc* $A(\overline{D}) = \{(x,y) \in V(D)X\,V(D) | (x,y) \notin A(D)\}$. Misalkan suatu digraf D dengan n titik, reduksi dari D dinotasikan dengan D^{-} adalah digraf yang diperoleh dengan menghapus semua *arc* yang terkait dari titik yang mempunyai derajat keluar $n-1$.

Contoh 2.27

D $\qquad\qquad\qquad$ D^{-} $\qquad\qquad\qquad$ $\overline{D}^{-}$

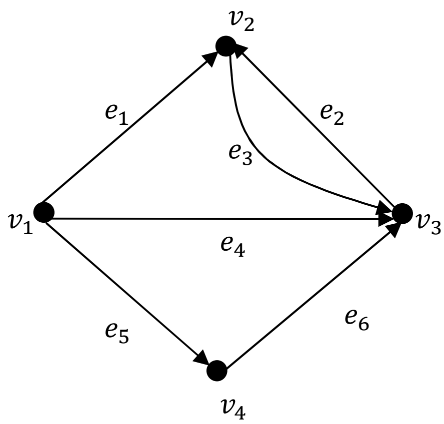


Gambar 2.19 Digraf D, reduksi digraf D, dan komplemen reduksi digraf D.

Definisi 2.31

Untuk setiap titik u dan v di digraf D, jalan u-v pada D adalah barisan berhingga titik dan *arc* u = u_0, a_1, u_1, a_2,…, u_{k-1}, a_k, u_k = v sedemikian hingga a_i = (u_{i-1}, u_i) $\forall_i$ = 1,2,3,…,k dengan k adalah panjang dari jalan (Chartrand and Lesniak, 1996).

Contoh 2.28



Gambar 2.20 Digraf D.

Pada gambar 2.20, jalan $v_1 - e_1 - v_2 - e_3 - v_3 - e_2 - v_2$ adalah jalan dengan panjang 3.

Definisi 2.32

Lintasan berarah (*directed path*) sama seperti pada lintasan sederhana dan setiap *arc* mempunyai arah yang sama, ini berarti bahwa setiap titik internalnya mempunyai derajat masuk dan derajat keluar 1. Titik v dikatakan terjangkau (*reachable*) dari titik u jika terdapat lintasan berarah dari u ke v.

Definisi 2.33

Lintasan berarah terpendek (*shortest directed path*) adalah lintasan berarah dengan jumlah sisi paling sedikit.

Contoh 2.29

Pada gambar 2.20, lintasan yang menghubungkan titik v_1 ke titik v_3 adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_2 - v_3$, $v_1 - e_5 - v_4 - e_6 - v_3$, dan $v_1 - e_4 - v_3$, yang memiliki jumlah sisi paling sedikit yaitu lintasan $v_1 - e_4 - v_3$, jadi lintasan $v_1 - e_4 - v_3$ adalah lintasan terpendek dari titik v_1 ke titik v_3. Titik v_3 terjangkau dari titik v_1 karena terdapat lintasan berarah dari v_1 ke v_3.

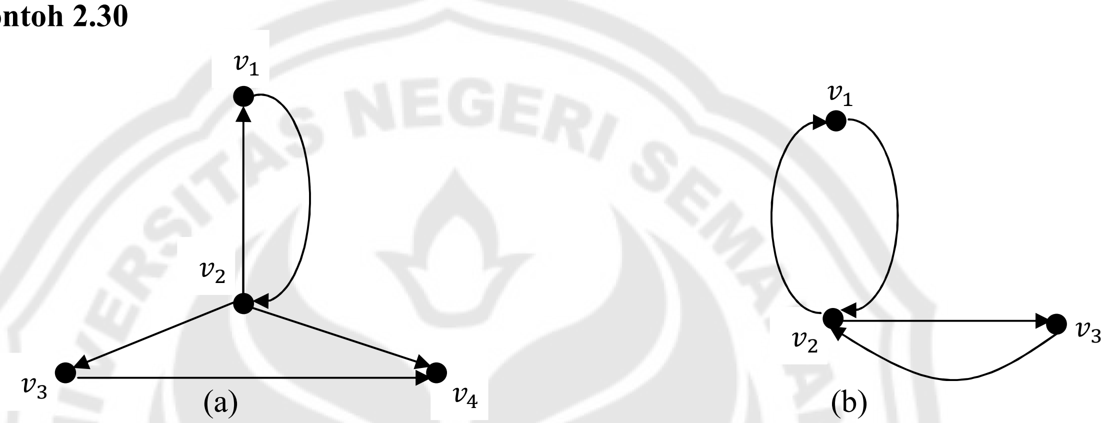
Definisi 2.34

Digraf D disebut terhubung kuat (*strongly connected*) jika untuk setiap pasang titik sembarang u dan v di D terdapat lintasan berarah dari u ke v dan juga lintasan berarah dari v ke u.

Definisi 2.35

Graf dasar (*Underlying Graph*) adalah graf yang diperoleh dari digraf D dengan menghapus tanda panahnya. Digraf D dikatakan terhubung lemah (*weakly connected*) jika graf dasarnya terhubung.

Contoh 2.30



Gambar 2.21 (a) Digraf terhubung lemah dan (b) Digraf terhubung kuat.

Definisi 2.36

Jarak (berarah) d(u,v) dari u ke v adalah panjang lintasan berarah terpendek u-v di D. Jarak d(u,v) dan d(v,u) tersebut didefinisikan untuk setiap pasang titik pada digraf terhubung kuat (Chartrand and Lesniak, 1996). Jika tidak terdapat lintasan berarah dari u ke v maka $d(u, v) = \infty$.

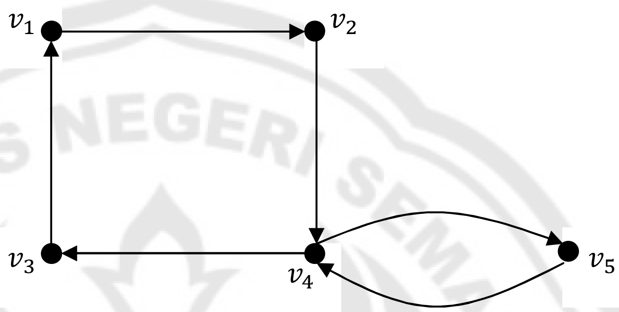
Contoh 2.31

Pada gambar 2.21, (a) d(v_3, v_4) = 1 dan d(v_4, v_3) = ∞.

Definisi 2.37

Eksentrisitas e(u) dari u dalam G adalah jarak maksimal dari u ke setiap v di G, atau dapat ditulis e(u) = maks{d(u,v)| $\forall\, v \in$ G}. Titik v disebut titik eksentrik jika jarak dari u ke v sama dengan e(u). Radius dari G (rad(G)) adalah eksentrisitas minimum dari setiap titik G, dapat ditulis rad(G) = min{e(u)| $\forall\, u \in$ G} sedangkan diameter dari G (diam(G)) adalah eksentrisitas maksimum dari setiap titik di G dapat ditulis diam(G) = maks{e(u)| $\forall\, u \in$ G}. Titik u disebut titik sentral (central) jika e(u) = rad (G) (Chartrand and Lesniak, 1996).

Contoh 2.32



Gambar 2.22 Digraf D.

Penyelesaian:

Titik	**Eksentrisitas**	**Titik Eksentrik**
v_1	3	v_3, v_5
v_2	3	v_1
v_3	4	v_5
v_4	3	v_2
v_5	4	v_2

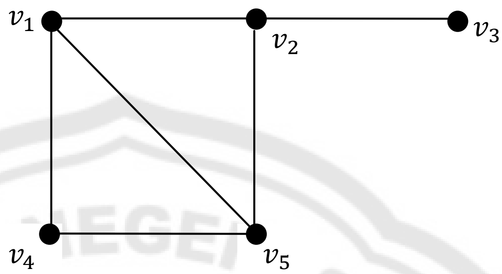
Tabel 2.1 Eksentrisitas dari Digraf D.

Dari tabel 2.1 diperoleh rad(D) = 3, diam(D) = 4, dan titik sentral = v_1, v_2, v_4.

2.3 Digraf Eksentrik

Digraf eksentrik dari graf G (dinotasikan dengan ED(G)) didefinisikan sebagai graf yang mempunyai himpunan yang mempunyai titik yang sama dengan himpunan di titik G atau V (ED(G)) = V(G), dengan *arc* dari titik u ke v di ED(G) jika dan hanya jika v adalah titik eksentrik dari u.

Contoh 2.33



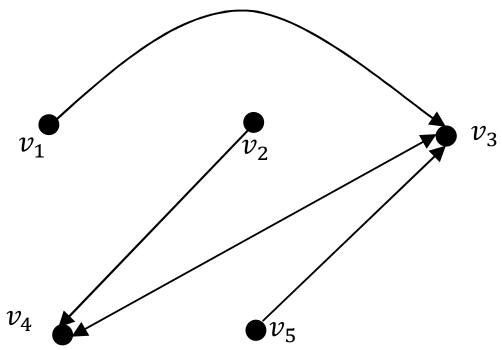
Gambar 2.23 Graf G.

Penyelesaian:

Titik	**Eksentrisitas**	**Titik Eksentrik**
v_1	2	v_3
v_2	2	v_4
v_3	3	v_4
v_4	3	v_3
v_5	2	v_3

Tabel 2.2 Eksentrisitas dari Graf G.

Dari tabel 2.2 diperoleh rad(G) = 2, diam(G) = 3, dan titik sentral = v_1, v_2, v_5.



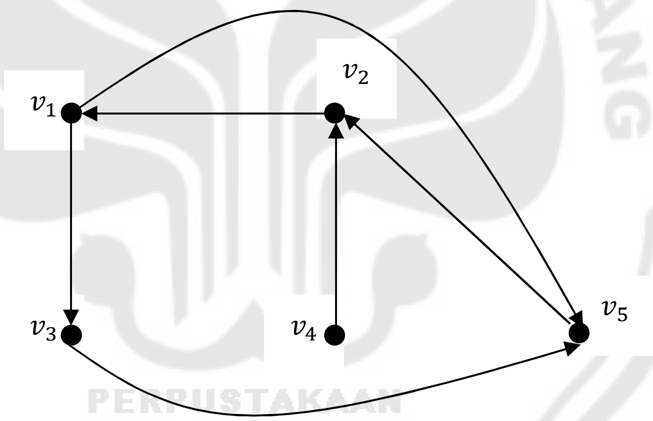
Gambar 2.24 ED(G).

Definisi 2.38

Definisi digraf eksentrik dari digraf D yang dinotasikan dengan ED(D) didefinisikan sebagai digraf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik di D, dengan *arc* dari titik u ke v pada ED(D) jika dan hanya jika v adalah titik eksentrik dari u.

Contoh 2.34

Dari gambar 2.22, diperoleh digraf eksentrik



Gambar 2.25 ED(D).

Definisi 2.39

Graf G disebut eksentrik jika terdapat graf H sedemikian hingga $ED(H) \cong G$, dengan $\cong$ dinotasikan sebagai graf yang isomorfik.

Definisi 2.40

Pusat (*Centre*) $C(G)$ dari graf terhubung G adalah subgraf yang dibentuk oleh titik-titik dari G yang eksentrisitasnya sama dengan radius di G.

Definisi 2.41

G *self-centered* adalah graf G yang sama dengan $C(G)$.

BAB III

METODE PENELITIAN

Studi pustaka adalah metode yang digunakan dalam penelitian penulisan skripsi, dimana langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut

3.1 Identifikasi Masalah

Tahapan ini merupakan tahapan pertama dalam penelitian yaitu dengan pencarian ide atau gagasan materi eksentrisitas suatu titik, graf eksentrik, dan digraf eksentrik. Kemudian menentukan permasalahan yaitu menentukan digraf eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel untuk dikaji pada penelitian ini.

3.2 Perumusan Masalah

Tahap ini dimaksudkan untuk memperjelas permasalahan yang telah ditemukan yaitu sebagai berikut

(1). Bagaimana langkah-langkah mengkonstruksi digraf eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel?

(2). Bagaimana bentuk digraf eksentrik dari Graf Star?

(3). Bagaimana bentuk digraf eksentrik dari Graf Wheel?

(4). Apakah Graf Star dan Graf Wheel eksentrik?

3.3 Studi Pustaka

Studi pustaka merupakan penelaah sumber pustaka relevan yang digunakan untuk mengumpulkan data maupun informasi yang diperlukan dalam penelitian ini. Studi pustaka diawali dengan mengumpulkan sumber pustaka yaitu berupa buku-buku maupun referensi yang menjadi dasar dalam penelitian ini. Setelah sumber pustaka terkumpul dilanjutkan dengan penelaahan isi sumber pustaka tersebut. Pada akhirnya sumber pustaka ini dijadikan landasan untuk melakukan penelitian ini.

3.4 Pemecahan Masalah

Pada tahap ini dilakukan analisa dan pemecahan masalah yaitu dengan langkah-langkah sebagai berikut.

(1). Mempelajari dan mengkaji tentang eksentrisitas titik, graf eksentrik, dan digraf eksentrik.

(2). Menentukan langkah-langkah untuk mengkonstruksi digraf eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel dengan menggunakan referensi yang ada serta bagaimana membuktikan teorema yang mendukung keberadaannya.

(3). Menggunakan kajian tentang digraf eksentrik untuk menemukan bagaimana bentuk digraf eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel.

(4). Menggunakan kajian tentang sifat-sifat digraf eksentrik untuk mengetahui apakah Graf Star dan Graf Wheel eksentrik.

3.5 Penarikan Simpulan

Tahap ini merupakan tahap terakhir dalam penelitian. Setelah menganalisis dan memecahkan masalah berdasarkan studi pustaka dan pembahasannya, kemudian dibuat suatu simpulan sebagai jawaban dari permasalahan yang telah dirumuskan sebelumnya.

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab ini, akan kita bahas mengenai langkah-langkah untuk mengkonstruksi digraf eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel dan mencari bentuk digraf eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel.

4.1 Langkah-langkah Mengkonstruksi Digraf Eksentrik

Pada BAB II telah didefinisikan tentang jarak, eksentrisitas titik, dan digraf eksentrik. Misalkan graf G dengan himpunan titik V(G) = $\{ v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \}$ dan himpunan sisi E(G) = $\{ e_1, e_2, e_3, \dots, e_m \}$.

Maka digraf eksentrik dari graf G dapat dikonstruksi dengan langkah-langkah sebagai berikut.

(1). Menentukan jarak setiap titik $v_i \in V(G)\ \forall\ i = 1,2, \dots, n$ ke semua titik di V(G), dinotasikan dengan $d(v_i, v_j)$, yaitu panjang lintasan terpendek dari titik v_i ke titik v_j.

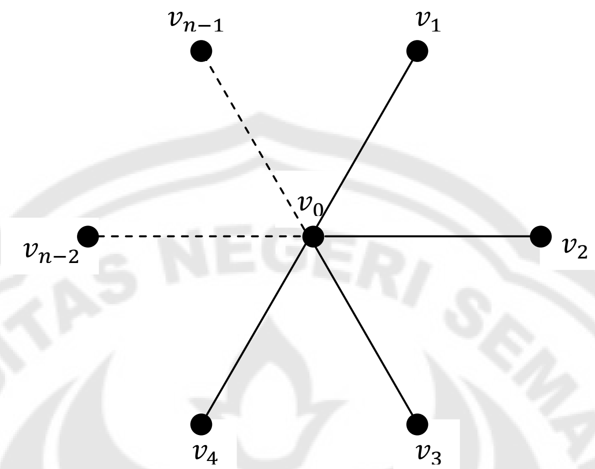
(2). Menentukan eksentrisitas dari titik $v_i \in V(G)\ \forall\ i = 1,2, \dots, n$ dan titik eksentriknya. Titik $v_j \in V(G)\ \forall\ j = 1,2, \dots, n$ dan $v_i \neq v_j$ disebut titik eksentrik dari v_i jika jarak dari v_i ke v_j sama dengan $e(v_i)$. Titik eksentrik dari v_i mungkin tidak tunggal.

(3). Membangun digraf ED(G) dengan himpunan titik V(ED(G)) = V(G) dan himpunan sisi E(ED(G)) = $\{ \mathrm{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m} \}$ dimana $\mathrm{e_k} = (\mathrm{v_i v_j})$, $\mathrm{i} = 1,2, \dots, \mathrm{n}$, $k = 1,2, \dots, m$ dan v_j adalah titik eksentrik dari v_i.

4.2 Digraf Eksentrik dari Graf Star (S_n)

Pada bagian ini akan dibahas tentang bentuk digraf eksentrik dari Graf Star.

Misalkan bahwa Graf Star S_n mempunyai himpunan titik $V(S_n) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ dengan v_0 adalah titik sentral dan $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$ adalah titik daun dan himpunan sisi $E(S_n) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}\}$ dengan $e_i = v_0 v_i \; \forall \; i = 1,2,3, \dots, n-1$.



Gambar 4.1 Graf Star S_n.

(1). Menentukan jarak dari setiap titik ke semua titik $v_i \in V(S_n) \; \forall \; i = 0,1,2,3, \dots, n-1$.

untuk $n = 2$, maka jarak suatu titik sentral menuju titik daun atau sebaliknya adalah 1. Jadi $e(v_i) = 1 \; \forall \; i = 0,1$.

Titik	v_0	v_1
v_0	0	1
v_1	1	0

Tabel 4.1 Jarak setiap titik menuju titik lain pada Graf Star untuk $n = 2$.

untuk $n > 2$:

jarak dari v_0 menuju semua titik daun v_i untuk setiap $i = 1,2,3, \dots, n-1$ adalah 1. Jadi $e(v_0) = 1$.

jarak suatu titik daun v_i menuju titik daun v_j adalah 2. Jadi $e(v_i) = 2$ $\forall \; i, j = 1,2,3, \dots, n-1$ dengan $i \neq j$.

Titik	v_0	v_1	v_2	v_3	...	v_{n-2}	v_{n-1}
v_0	0	1	1	1	...	1	1
v_1	1	0	2	2	...	2	2
v_2	1	2	0	2	...	2	2
v_3	1	2	2	0		2	2
.	.	.	.		.	.	.
.	.	.	.		.	.	.
.	.	.	.		.	.	.
v_{n-2}	1	2	2	2	...	0	2
v_{n-1}	1	2	2	2	...	2	0

Tabel 4.2 Jarak setiap titik menuju titik lain pada Graf Star untuk $n > 2$.

(2). Menentukan titik eksentrik

Graf Star S_n untuk $n = 2$

$$e(v_i) = 1 \ \forall \ i = 0,1.$$

Sehingga eksentrisitas dari titik v_i adalah 1, maka titik eksentriknya adalah semua titik v_i pada Graf Star S_n kecuali dirinya sendiri untuk setiap $i = 0,1$.

Graf Star S_n untuk $n > 2$

Eksentrisitas dari titik sentral v_0 menuju titik daun v_i adalah 1 dengan $i = 1,2,3, \dots, n-1$, maka titik eksentriknya adalah semua titik daun v_i pada Graf Star S_n.

Sedangkan eksentrisitas dari titik daun v_i menuju titik daun v_j adalah 2, maka titik eksentriknya adalah semua titik daun v_j untuk setiap $j = 1,2,3, \dots, m-1$ dengan $i \neq j$.

(3). Digraf eksentrik dari Graf Star (S_n)

Digraf eksentrik $ED(S_n)$ dari Graf Star (S_n) untuk $n = 2$ adalah digraf dengan himpunan titik $V(ED(S_n)) = \{v_0, v_1\}$ dan himpunan *arc*

$$A\big(ED(S_n)\big) = v_o v_1 \text{ dan } v_1 v_0.$$

Titik eksentrik dari titik sentral v_0 adalah titik daun v_1 sedangkan titik eksentrik dari titik daun v_1 adalah titik sentral v_0, sehingga terdapat *arc* dari v_0 ke v_1 dan v_1 ke v_0.

Digraf eksentrik $ED(S_n)$ dari Graf Star (S_n) untuk $n > 2$ adalah digraf dengan himpunan titik $V(ED(S_n)) = \{v_0, v_i\}$ dan himpunan *arc*

$$A\big(ED(S_n)\big) = v_o v_i \ \forall\ i = 0,1,2,\dots,n-1$$

Titik eksentrik dari titik sentral v_0 adalah titik daun v_i untuk setiap $i = 1,2,3,\dots,n-1$, sehingga terdapat *arc* dari v_0 ke v_i.

Demikian juga untuk titik daun v_i untuk setiap $i = 1,2,3,\dots,n-1$ titik eksentriknya adalah titik daun v_j untuk setiap $j = 1,2,3,\dots,m-1$ dengan $i \neq j$, sehingga ada *arc* dari v_i ke v_j yaitu $v_i v_j$.

Jadi digraf eksentrik dari Graf Star $ED(S_n)$ untuk $n = 2$ adalah digraf komplit simetri dengan *arc* dari titik v_i bertetangga keluar ke semua titik v_j $\forall\ i,j = 0,1$ dengan $i \neq j$ dan jumlah *arc* adalah = $\left|A\big(ED(W_n)\big)\right| = 2$.

Sedangkan digraf eksentrik dari Graf Star $ED(S_n)$ untuk $n > 2$ adalah digraf komplit dengan *arc* dari titik v_o bertetangga keluar ke semua titik daun v_i $\forall\ i = 0,1,2,\dots,n-1$ dan *arc* dari titik daun v_i bertetangga keluar ke semua titik daun v_j $\forall\ i,j = 0,1,2,\dots,n-1$ dengan jumlah *arc* adalah = $\left|A\big(ED(W_n)\big)\right| = (n-1)^2$.

Berikut ini akan dijelaskan jumlah *arc* dari Graf Star (S_n) untuk $n > 2$.

Bukti:

Misalkan S_3 = 1 + 3
= 1 + (2.3 – 3) = $4 = (3-1)^2$

S_4 = 1 + 3 + 5
= 1 + 3 + (2.4 – 3) = $9 = (4-1)^2$

S_5 = 1 + 3 + 5 + 7
= 1 + 3 + 5 + (2.5 – 3) = $16 = (5-1)^2$

S_6 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9
= 1 + 3 + 5 + 7 + (2.6 – 3) = $25 = (6-1)^2$

.

.

.

$S_n = 1 + [3+5+7+\cdots+(2n-3)] = (n-1)^2$.

(i) *Basis Induksi*

Untuk $n = 3$, diperoleh $4 = 2^2$ sehingga pernyataan benar.

(ii) *Langkah Induksi*

Diasumsikan benar untuk $n = k$.

Sehingga diperoleh $1 + [3+5+7+\cdots+(2k-3)] = (k-1)^2$.

Akan dibuktikan bahwa untuk $n = k+1$ juga benar.

$1 + [3+5+\cdots+(2k-3)] + (2(k+1)-3) = (k-1)^2 + (2(k+1)-3)$.

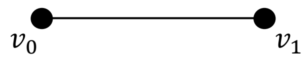
Kemudian diperoleh,

$$\begin{aligned} 1 + [3+5+7+\cdots+(2(k+1)-3)] &= (k-1)^2 + [2(k+1)-3] \\ &= (k^2-2k+1) + (2k+2-3) \\ &= k^2-2k+1+2k-1 \\ &= k^2 \\ &= (k+1-1)^2 \\ &= [(k+1)-1]^2 \end{aligned}$$

Jadi, berdasarkan langkah (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa $1 + [3+5+7+\cdots+(2n-3)] = (n-1)^2$ adalah benar untuk $n > 2$.

Soal 4.1

Tentukan digraf eksentrik dari Graf Star S_2.



Gambar 4.2 Graf Star S_2.

Penyelesaian:

Titik	**Eksentrisitas**	**Titik Eksentrik**
v_0	1	v_1
v_1	1	v_0

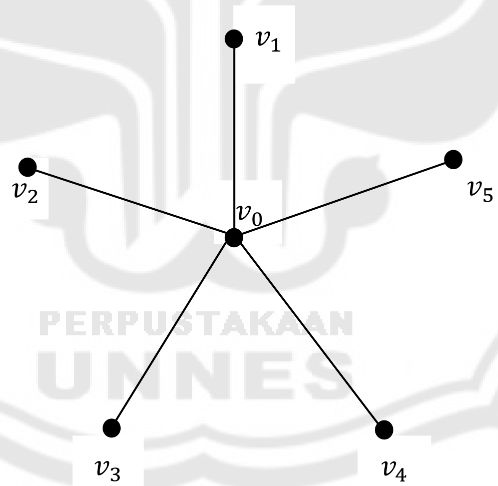
Tabel 4.3 Eksentrisitas dari Graf Star S_2.

Dari tabel 4.3 diperoleh rad(S_2) = 1, diam(S_2) = 1, dan titik sentral = v_0, v_1.

Gambar 4.3 $ED(S_2)$.

Soal 4.2

Tentukan digraf eksentrik dari Graf Star S_6.



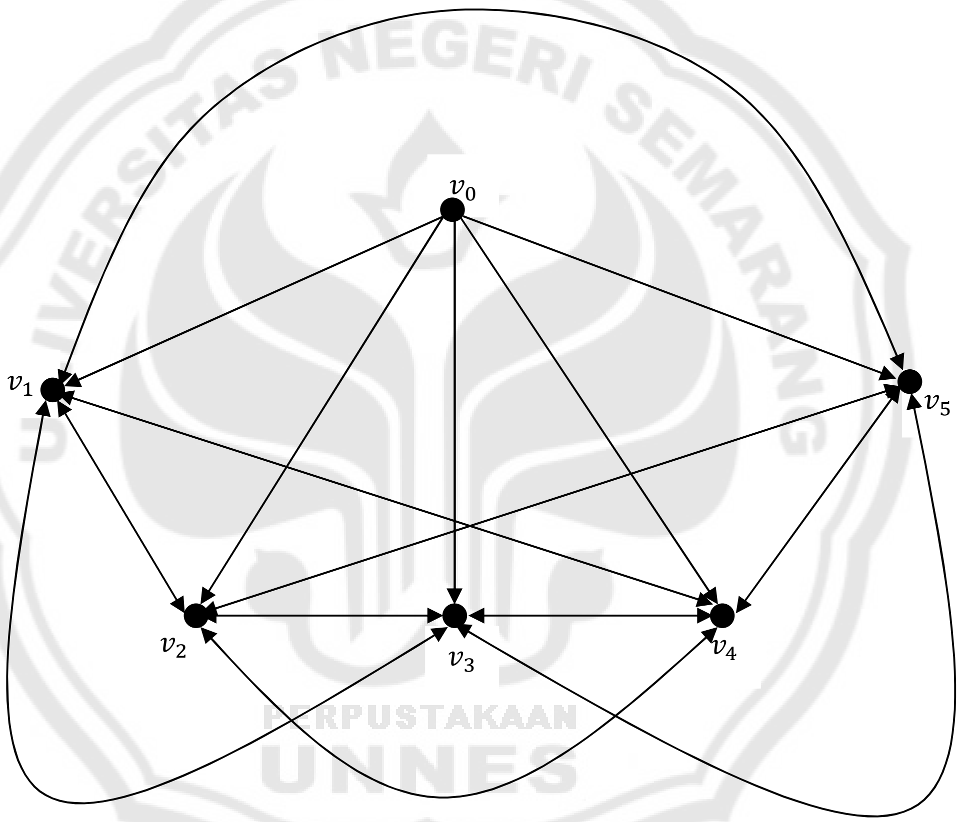
Gambar 4.4 Graf Star S_6.

Penyelesaian :

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
v_0	1	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5
v_1	2	v_2, v_3, v_4, v_5
v_2	2	v_1, v_3, v_4, v_5
v_3	2	v_1, v_2, v_4, v_5
v_4	2	v_1, v_2, v_3, v_5
v_5	2	v_1, v_2, v_3, v_4

Tabel 4.4 Eksentrisitas dari Graf Star S_6.

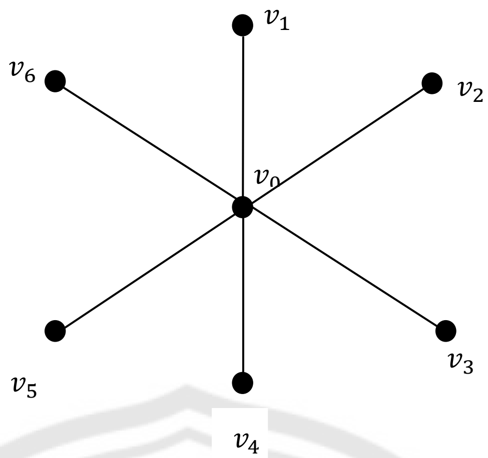
Dari tabel 4.4 diperoleh rad(S_6) = 1, diam(S_6) = 2, dan titik sentral = v_0.



Gambar 4.5 $ED(S_6)$.

Soal 4.3

Tentukan digraf eksentrik dari Graf Star S_7.



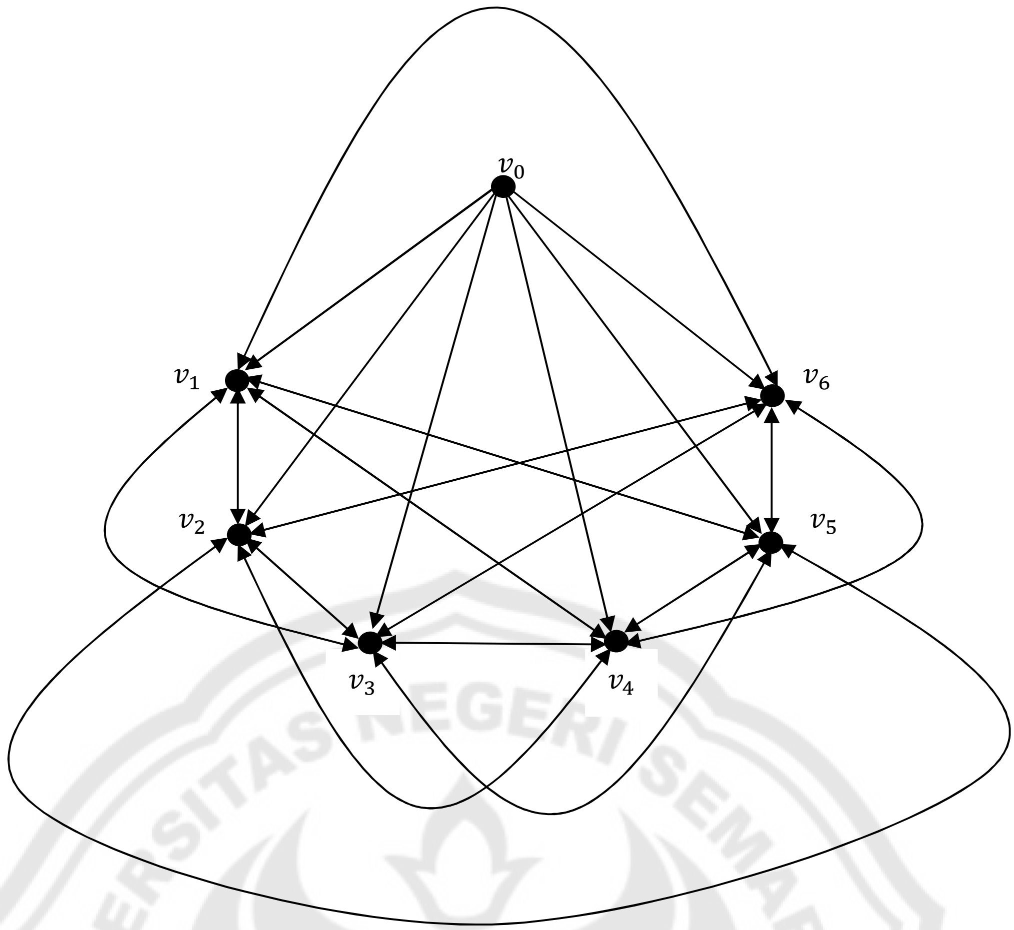
Gambar 4.6 Graf Star S_7.

Penyelesaian :

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
v_0	1	$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$
v_1	2	v_2, v_3, v_4, v_5, v_6
v_2	2	v_1, v_3, v_4, v_5, v_6
v_3	2	v_1, v_2, v_4, v_5, v_6
v_4	2	v_1, v_2, v_3, v_5, v_6
v_5	2	v_1, v_2, v_3, v_4, v_6
v_6	2	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5

Tabel 4.5 Eksentrisitas dari Graf Star S_7.

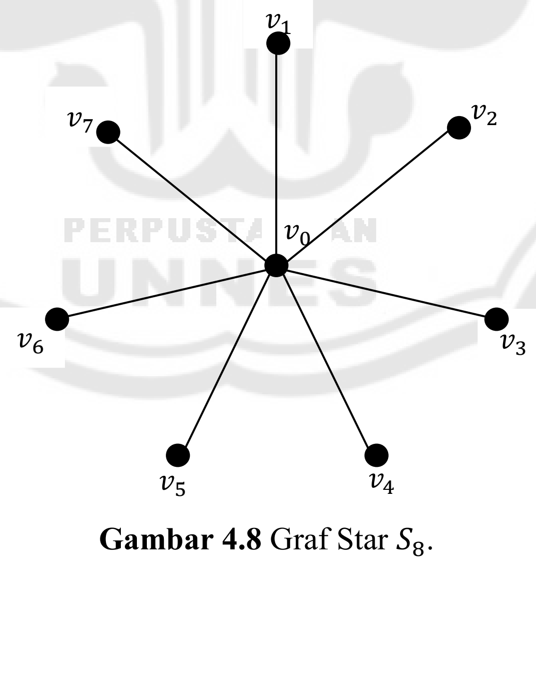
Dari tabel 4.5 diperoleh rad(S_7) = 1, diam(S_7) = 2, dan titik sentral = v_0.



Gambar 4.7 $ED(S_7)$.

Soal 4.4

Tentukan digraf eksentrik dari Graf Star S_8.



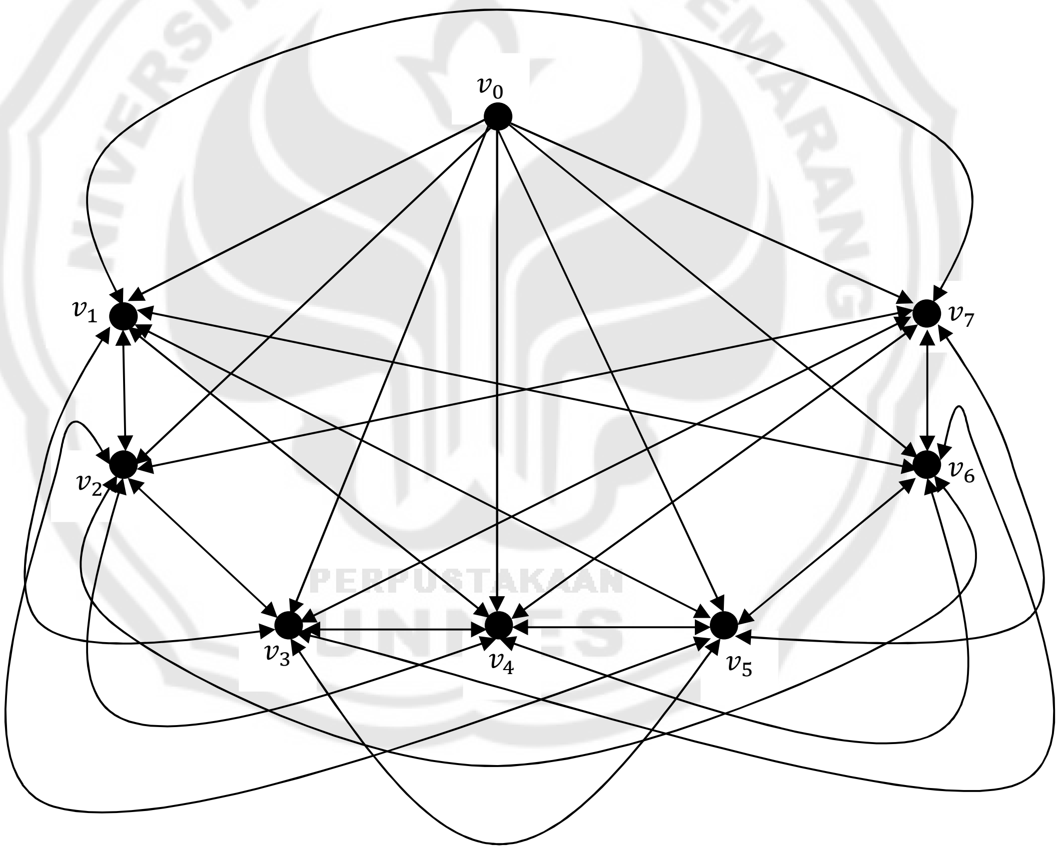
Gambar 4.8 Graf Star S_8.

Penyelesaian :

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
v_0	1	$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$
v_1	2	$v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$
v_2	2	$v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$
v_3	2	$v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_7$
v_4	2	$v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7$
v_5	2	$v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7$
v_6	2	$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7$
v_7	2	$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$

Tabel 4.6 Eksentrisitas dari Graf Star S_8.

Dari tabel 4.6 diperoleh rad(S_8) = 1, diam(S_8) = 2, dan titik sentral = v_0.



Gambar 4.9 $ED(S_8)$.

4.3 Digraf eksentrik dari Graf Wheel (W_n)

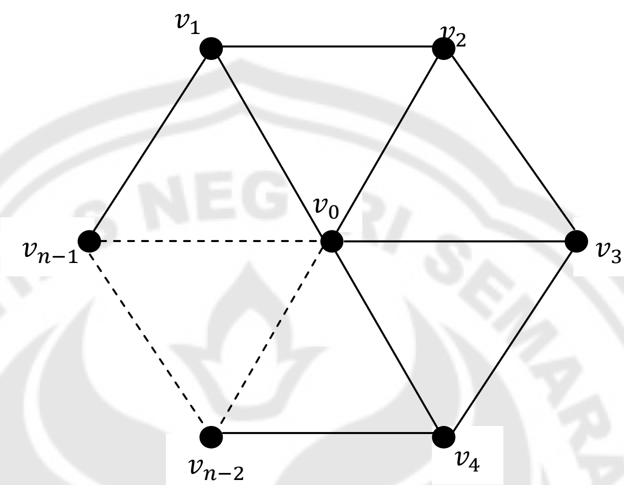
Pada bagian ini akan dibahas tentang bentuk digraf eksentrik dari Graf Wheel.

Misal Graf Wheel W_n mempunyai himpunan titik

$$V(W_n) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}\}$$

Dan himpunan sisi

$$E(W_n) = \begin{cases} E_1 = \{v_0v_1, v_0v_2, \dots, v_0v_{n-1}\} \\ E_2 = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_iv_{i+1}, \dots, v_{n-1}v_1\} \end{cases}$$



Gambar 4.10 Graf Wheel W_n.

(1). Menentukan jarak dari suatu titik ke setiap titik $v_i \in V(W_n)\ \forall\ i = 0,1,2,3, \dots, n-1$.

untuk $n = 4$, maka jarak suatu titik menuju titik yang lain adalah 1. Jadi $e(v_i) = 1\ \forall\ i = 0,1,2,3$.

Titik	v_0	v_1	v_2	v_3
v_0	0	1	1	1
v_1	1	0	1	1
v_2	1	1	0	1
v_3	1	1	1	0

Tabel 4.7 Jarak setiap titik menuju titik lain pada Graf Wheel untuk $n = 4$.

untuk $n > 4$:

Jarak dari v_0 menuju semua titik siklus v_i untuk setiap $i = 1,2,3,\dots,n-1$ adalah 1. Jadi $e(v_0) = 1$.

Jarak suatu titik siklus v_i menuju titik siklus v_j, dengan i tidak bertetangga dengan j adalah 2. Jadi $e(v_i) = 2\ \forall\ i,j = 1,2,3,\dots,n-1$ dengan v_i tidak bertetangga dengan v_j.

Titik	v_0	v_1	v_2	v_3	...	v_{n-2}	v_{n-1}
v_0	0	1	1	1	...	1	1
v_1	1	0	1	2	...	2	1
v_2	1	1	0	1	...	2	2
v_3	1	2	1	0	...	2	2
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
v_{n-2}	1	2	2	2	...	0	1
v_{n-1}	1	2	2	2	...	1	0

Tabel 4.8 Jarak setiap titik menuju titik lain pada Graf Wheel untuk $n > 4$.

(2). Menentukan titik eksentrik

Graf Wheel W_n untuk $n = 4$

$$e(v_i) = 1\ \forall\ i = 0,1,2,3.$$

Sehingga eksentrisitas dari titik v_i adalah 1, maka titik eksentriknya adalah semua titik v_i pada Graf Wheel W_n kecuali dirinya sendiri untuk setiap $i = 0,1,2,3$.

Graf Wheel W_n untuk $n > 4$

Eksentrisitas dari titik v_0 menuju titik siklus v_i adalah 1 dengan $i = 1,2,3,\dots,n-1$, maka titik eksentriknya adalah semua titik siklus v_i pada graf wheel W_n.

Sedangkan eksentrisitas dari titik siklus v_i menuju titik siklus v_j adalah 2, maka titik eksentriknya adalah semua titik siklus v_j untuk setiap $j = 1,2,3,\dots,m-1$ dengan v_i tidak bertetangga dengan v_j.

(3). Digraf eksentrik dari Graf Wheel (W_n)

Digraf eksentrik $ED(W_n)$ dari Graf Wheel (W_n) untuk $n = 4$ adalah digraf dengan himpunan titik $V(ED(S_n)) = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan *arc*

$$A\big(ED(S_n)\big) = v_i v_j \ \forall\, i, j = 0,1,2,3.$$

Titik eksentrik dari titik v_i adalah titik v_j, sehingga terdapat *arc* dari v_i ke v_j.

Digraf eksentrik $ED(W_n)$ dari Graf Wheel (W_n) untuk $n > 4$ adalah digraf dengan himpunan titik $V(ED(S_n)) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}\}$ dan himpunan *arc*

$$A\big(ED(S_n)\big) = \begin{cases} v_o v_i \ \forall\, i = 0,1,2,\dots,n-1 \\ v_i v_j \ \forall\, i, j = 0,1,2,\dots,n-1 \ \ v_i\, tidak\ bertetangga\ v_j \end{cases}$$

Titik eksentrik dari titik sentral v_0 adalah titik siklus v_i untuk setiap $i = 0,1,2,\dots,n-1$, sehingga terdapat *arc* dari v_0 ke v_i yaitu $v_0 v_i$.

Demikian juga untuk titik siklus v_i untuk setiap $i = 1,2,3,\dots,n-1$ titik eksentriknya adalah titik siklus v_j untuk setiap $j = 1,2,3,\dots,m-1$ dengan $i \neq j$, sehingga ada *arc* dari v_i ke v_j yaitu $v_i v_j$.

Jadi digraf eksentrik dari Graf Wheel $ED(W_n)$ untuk $n = 4$ adalah digraf komplit simetri dengan *arc* dari titik v_i bertetangga keluar ke semua titik v_j $\forall\, i, j = 0,1,2,3$ dengan $i \neq j$ dan jumlah *arc* adalah = $\big|A\big(ED(W_n)\big)\big| = 12$.

Sedangkan digraf eksentrik dari Graf Wheel $ED(W_n)$ untuk $n > 4$ adalah digraf dengan *arc* dari titik v_o bertetangga keluar ke semua titik siklus v_i $\forall\, i = 0,1,2,\dots,n-1$ dan *arc* dari titik siklus v_i bertetangga keluar ke semua titik siklus v_j $\forall\, i, j = 0,1,2,\dots,n-1$ dengan v_i tidak bertetangga dengan v_j, dengan jumlah *arc* adalah = $\big|A\big(ED(W_n)\big)\big| = n^2 - 4n + 3$.

Berikut ini akan dijelaskan jumlah *arc* dari Graf Wheel (W_n) untuk $n > 4$.

Bukti:

Misalkan W_5 = 3 + 5

= 3 + (2.5 – 5) = 8 = $5^2 - 4.5 + 3$

W_6 = 3 + 5 + 7

= 3 + 5 + (2.6 – 5) = 15 = $6^2 - 4.6 + 3$

W_7 = 3 + 5 + 7 + 9

= 3 + 5 + 7 + (2.7 – 5) = 24 = $7^2 - 4.7 + 3$

. .

.

.

W_n = 3 + $[5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 5)]$ = $n^2 - 4n + 3$

(i) *Basis Induksi*

Untuk $n = 5$, diperoleh $8 = 5^2 - 4.5 + 3$ sehingga pernyataan benar.

(ii) *Langkah Induksi*

Diasumsikan benar untuk $n = k$.

Sehingga diperoleh 3 + $[5 + 7 + 9 + \cdots + (2k - 5)]$ = $k^2 - 4k + 3$.

Akan dibuktikan bahwa untuk $n = k + 1$ juga benar.

3 + $[5 + 7 + 9 + \cdots + (2k - 5)] + (2(k + 1) - 5)$ = $(k^2 - 4k + 3) + (2(k + 1) - 5)$.

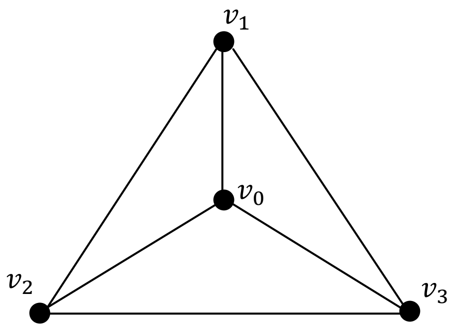
Kemudian diperoleh,

$$
\begin{aligned}
3 + [5 + 7 + 9 + \cdots + (2(k + 1) - 5)] &= (k^2 - 4k + 3) + [(2(k + 1)) - 5] \\
&= (k^2 - 4k + 3) + (2k - 3) \\
&= k^2 - 4k + 3 + 2k - 3 \\
&= k^2 - 4k + 3 + 2k - 4 + 1 \\
&= (k^2 + 2k + 1) + (-4k - 4) + 3 \\
&= (k + 1)^2 - 4(k + 1) + 3
\end{aligned}
$$

Jadi, berdasarkan langkah (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa 3 + $[5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 5)]$ = $n^2 - 4n + 3$ adalah benar untuk $n > 4$.

Soal 4.5

Tentukan digraf eksentrik dari Graf Wheel W_4.



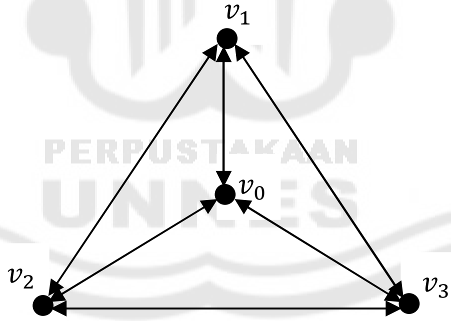
Gambar 4.11 Graf Wheel W_4.

Penyelesaian:

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
v_0	1	v_1, v_2, v_3
v_1	1	v_0, v_2, v_3
v_2	1	v_0, v_1, v_3
v_3	1	v_0, v_1, v_2

Tabel 4.9 Eksentrisitas dari Graf Wheel W_4.

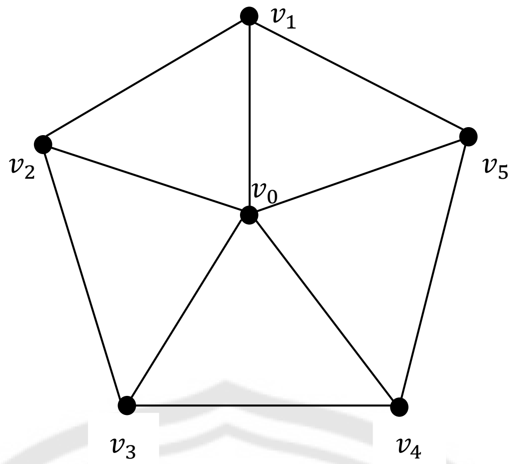
Dari tabel 4.9 diperoleh rad(W_4) = 1, diam(W_4) = 1, dan titik sentral = v_0, v_1, v_2, v_3.



Gambar 4.12 ED(W_4).

Soal 4.6

Tentukan digraf eksentrik dari Graf Wheel W_6.



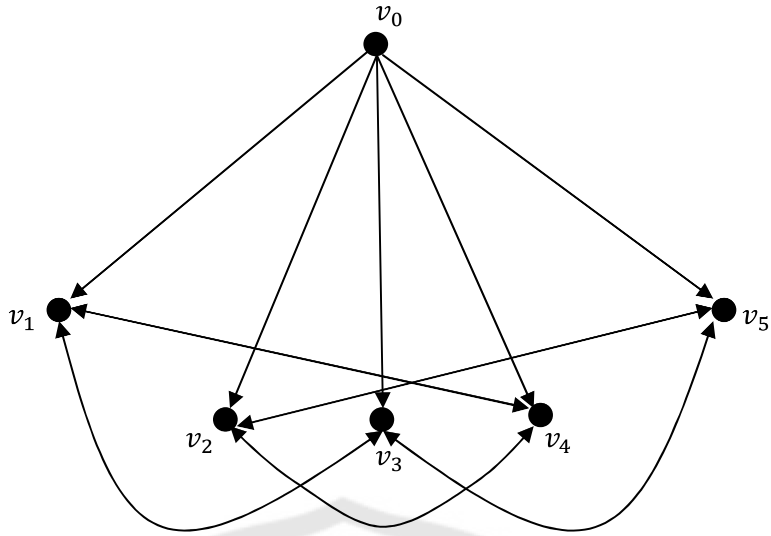
Gambar 4.13 Graf Wheel W_6.

Penyelesaian:

Titik	**Eksentrisitas**	**Titik Eksentrik**
v_0	1	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5
v_1	2	v_3, v_4
v_2	2	v_4, v_5
v_3	2	v_1, v_5
v_4	2	v_1, v_2
v_5	2	v_2, v_3

Tabel 4.10 Eksentrisitas dari Graf Wheel W_6.

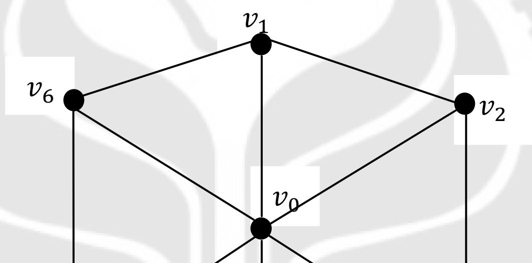
Dari tabel 4.10 diperoleh rad(W_6) = 1, diam(W_6) = 2, dan titik sentral = v_0.



Gambar 4.14 ED(W_6).

Soal 4.7

Tentukan digraf eksentrik dari Graf Wheel W_7.



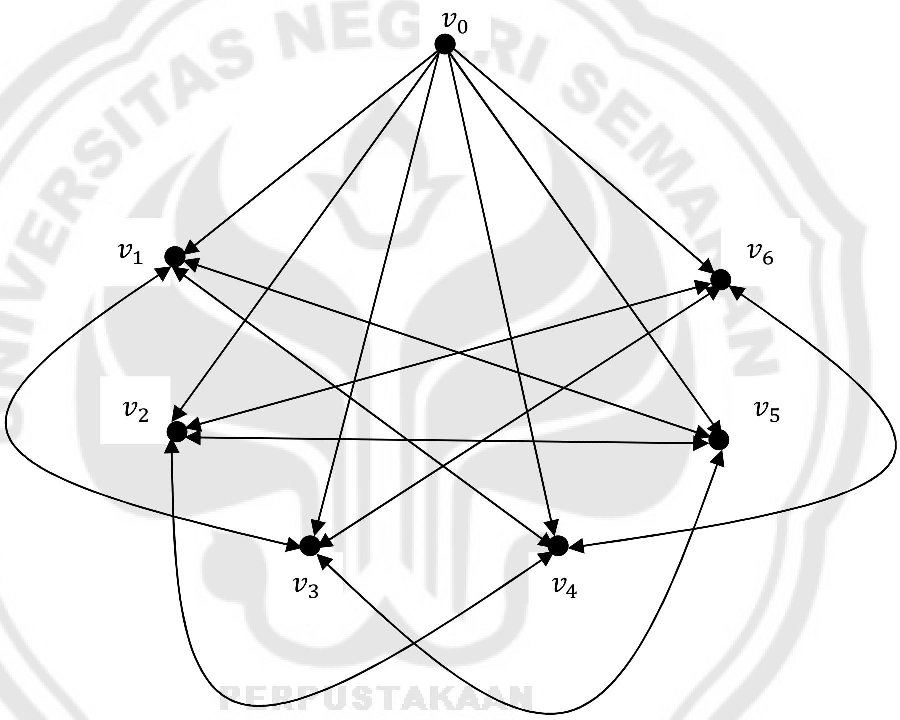
Gambar 4.15 Graf Wheel W_7.

Penyelesaian:

Titik	**Eksentrisitas**	**Titik Eksentrik**
v_0	1	$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$
v_1	2	v_3, v_4, v_5
v_2	2	v_4, v_5, v_6
v_3	2	v_1, v_5, v_6
v_4	2	v_1, v_2, v_6
v_5	2	v_1, v_2, v_3
v_6	2	v_2, v_3, v_4

Tabel 4.11 Eksentrisitas dari Graf Wheel W_7.

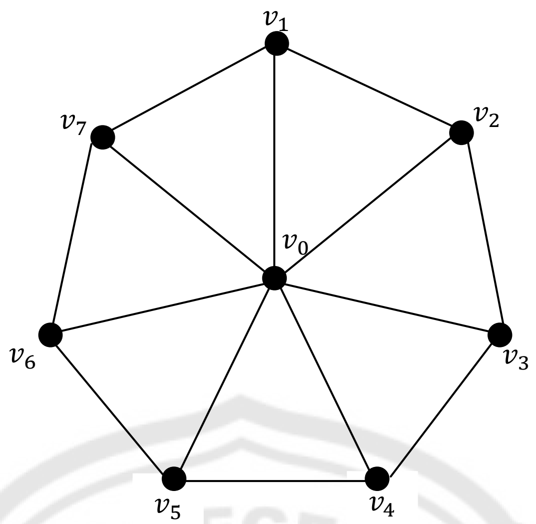
Dari tabel 4.11 diperoleh rad(W_7) = 1, diam(W_7) = 2, dan titik sentral = v_0.



Gambar 4.16 ED(W_7).

Soal 4.8

Tentukan digraf eksentrik dari Graf Wheel W_8.



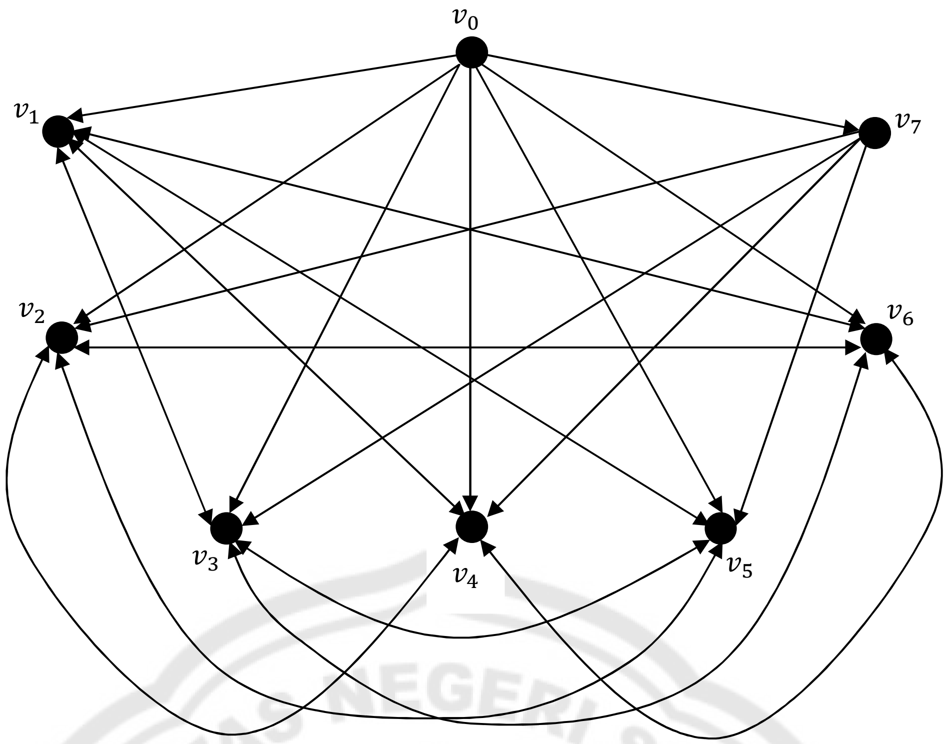
Gambar 4.17 Graf Wheel W_8.

Penyelesaian:

Titik	**Eksentrisitas**	**Titik Eksentrik**
v_0	1	$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$
v_1	2	v_3, v_4, v_5, v_6
v_2	2	v_4, v_5, v_6, v_7
v_3	2	v_1, v_5, v_6, v_7
v_4	2	v_1, v_2, v_6, v_7
v_5	2	v_1, v_2, v_3, v_7
v_6	2	v_1, v_2, v_3, v_4
v_7	2	v_2, v_3, v_4, v_5

Tabel 4.12 Eksentrisitas dari Graf Wheel W_8.

Dari tabel 4.12 diperoleh rad(W_8) = 1, diam(W_8) = 2, dan titik sentral = v_0.



Gambar 4.18 ED(W_8).

4.4 Sifat-sifat Digraf Eksentrik

Teorema 1

Diketahui G adalah digraf. $ED(G) = \overline{G^-}$ jika dan hanya jika untuk suatu titik $u \in V(G)$ dengan eksentrisitas > 2 memenuhi sifat transitif:

$(u, v), (v, w) \in E(G) \Rightarrow (u, w) \in E(G), \forall\, u, w \in V(G)$ dan $u \neq w$. (1)

Bukti:

($\Longrightarrow$) Diketahui G digraf dengan order $n > 1$ dan u titik di G. Diketahui $ED(G) = \overline{G^-}$, artinya titik-titik eksentrik u di G bertetangga keluar dari u di $\overline{G^-}$ jika dan hanya jika himpunan (tak kosong) jarak dari u di G adalah

$$\{d(u, v), v \in V(G)\backslash\{u\}\} = \{1\}, \{\infty\}, \{1,2\} \text{ atau } \{1, \infty\}.$$

Jika $e(u) > 2$, maka suatu titik $v \in V(G)\backslash\{u\}$ terjangkau dari $u(d(u, v) < \infty)$ dan berjarak 1 dari u. Hal ini berarti bahwa sifat transitif terpenuhi.

($\Longleftarrow$) Jika $e(u) > 2$ dan u memenuhi kondisi transitif maka jarak dari u di G adalah salah satu dari $\{\infty\}$ atau $\{1, \infty\}$.

Teorema 2

Misalkan G adalah graf dengan order $n > 1$. $ED(G) = \overline{G^-}$ jika dan hanya jika G memenuhi salah satu dari beberapa sifat berikut:

(1) rad(G) = 1;

(2) G adalah *self-centered* dengan radius 2;

(3) G adalah gabungan dari graf komplit dengan $k \geq 2$;

Bukti:

Misalkan G adalah digraf simetri.

Jika $r = 1$ maka setiap titik dari G memiliki eksentrisitas ≤ 2. Jadi dari **Teorema 1**, $ED(G) = \overline{G^-}$ sehingga

$$ED(G) = \begin{cases} K_n & jika\ G = K_n \\ K_{n-n'} \rightarrow \bar{H} & jika\ G = K_{n-n'} + H \end{cases}$$

H adalah graf dengan order n' dan derajat maksimum $< n' - 1$.

Jika $1 < r < \infty$ maka G terhubung dan tidak memiliki titik dengan derajat $n - 1$.

Dari **Teorema 1**, $ED(G) = \overline{G^-} = \bar{G}$ jika dan hanya jika semua titik di G memiliki eksentrisitas 2 yang berarti G adalah *self-centered* dengan radius 2.

Jika $r = \infty$ maka $G = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$ dengan $k \geq 2$ dengan setiap C_i menyatakan komponen terhubung dari G. Pada kasus ini, G memenuhi syarat (1) jika dan hanya jika semua komponen terhubungnya adalah graf transitif yang berarti setiap C_i adalah graf komplit. Jadi, $G = K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \ldots \cup K_{n_k}$ dan akibatnya $ED(G) = \bar{G} = K_{n_1,\ldots,n_k}$ adalah graf komplit multipartit.

Teorema 3

Digraf G eksentrik jika dan hanya jika $ED(\overline{G^-}) = G$.

Bukti:

($\Leftarrow$) Jelas jika $ED(\overline{G^-}) = G$ maka G eksentrik.

($\Rightarrow$) Misalkan G digraf eksentrik dengan order $n > 1$.

Ini berarti terdapat digraf H sehingga $ED(H) = G$.

Jelas bahwa suatu titik di H setidaknya memiliki sebuah titik eksentrik, dan G tidak memiliki titik dengan derajat keluar 0.

Ini berakibat komplemen reduksi $\overline{G^-}$ sama dengan G.

Dengan menggunakan **Teorema 1**, $ED(\overline{G^-}) = G$ sama halnya dengan mengatakan bahwa $\overline{G^-}$ memenuhi sifat transitif (1) untuk setiap titik dengan eksentrisitas > 2.

Misalkan sifat (1) tidak memenuhi sedikitnya sebuah titik u dengan eksentrisitas > 2 di $\overline{G^-}$.

Ini berakibat bahwa kita dapat membagi titik-titik dari himpunan $V\backslash\{u\}$, dengan $V = V(\overline{G^-}) = V(G)$ ke dalam sedikitnya tiga bagian (tak kosong) berdasarkan jaraknya dari u di $\overline{G^-}$.

Dengan demikian kita dapat mengambil $V\backslash\{u\} = D_1 \cup D_2 \cup D_{>2}$, dengan D_1, D_2, dan $D_{>2}$ yang terdiri dari titik-titik di $\overline{G^-}$ dengan jarak 1,2, dan > 2 dari u.

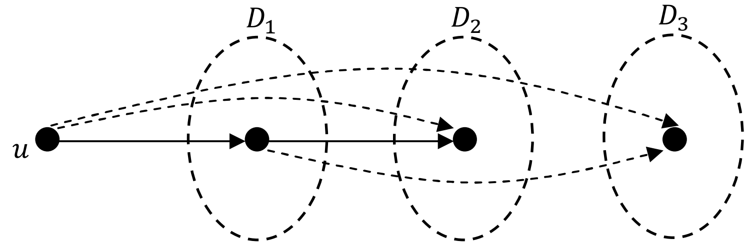
Dari definisi pembagian jarak dapat diperoleh beberapa sifat ketetanggaan di $\overline{G^-}$:

(1) Semua titik di D_1 harus berderajat keluar $< n - 1$, sebaliknya eksentrisitas dari titik u adalah 2;

(2) Setiap titik di D_2 bertetangga dari sedikitnya satu titik diD_1;

(3) Tidak terdapat *arc* dari u ke suatu titik di $D_2 \cup D_{>2}$;

(4) Tidak terdapat *arc* dari suatu titik di D_1 ke suatu titik di $D_{>2}$.



Garis putus-putus menunjukkan tidak bertetangga.

Gambar 4.19 Graf yang menunjukkan ketetanggaan titik.

Mari lihat bagaimana properti ini digambarkan pada G. Yang pertama perhatikan bahwa semua ketetanggaan dari titik-titik di himpunan $\{u\} \cup D_1$ adalah sama di $\bar{G}$ juga seperti di $\overline{G^-}$, jelas bahwa semua titik-titik ini memiliki derajat keluar $< n - 1$. (Lihat (1)).

Selanjutnya diperoleh pembagian dari himpunan yang bertetangga keluar dari u di G adalah $N^+(u) = D_2 \cup D_{>2}$, sehingga:

$(2')$ Untuk suatu titik $w \in D_2$ sedikitnya terdapat sebuah titik $v \in D_1$ sehingga (v, w) bukan merupakan sisi berarah di D_1;

$(4')$ Setiap titik di $D_{>2}$ bertetangga dari semua titik-titik di D_1.

Akan dibuktikan bahwa pembagian dari $N^+(u)$ seperti ini tidak konsisten dengan anggapan bahwa G adalah digraf eksentrik dari sebuah digraf H.

Jelas $G = ED(H)$ adalah subdigraf dari $\overline{H^-}$ dan tidak memiliki derajat keluar 0 juga tidak memiliki derajat $n - 1$ di H (u akan memiliki eksentrisitas 1 di G dan sebagai akibatnya di $\overline{G^-}$) didapatkan beberapa sifat ketetanggaan di H:

$(3'')$ Himpunan (tak kosong) yang bertetangga keluar dari u adalah berisi di D_1.

$(4'')$ Tidak terdapat *arc* yang terkait dari suatu titik di D_1 ke suatu titik di $D_{>2}$.

Jadi, jika terdapat sebuah jalan di H dari u ke sebuah titik di $D_{>2}$ hal itu harus terjadi paling sedikit sebuah titik di D_2. Tetapi ini akan menyebabkan

$$\min\{\mathrm{dist}_H(u,v), v \in D_2\} < \min\{\mathrm{dist}_H(u,v), v \in D_{>2}\},$$

sehingga hal tersebut tidak mungkin karena semua titik di $N^+(u) = D_2 \cup D_{>2}$ adalah eksentrik dari u di H, sebagai akibatnya mereka berada pada jarak yang sama dari u.

Oleh karena itu tidak terdapat titik dari $D_{>2}$ yang terjangkau dari u di H, sehingga mengakibatkan

$\mathrm{dist}_H(u,v) = e_H(u) = \infty$, untuk suatu titik $v \in D_2 \cup D_{>2}$.

Pada tulisan yang lain setiap titik $v \in D_1$ harus terjangkau dari u di H, sebaliknya v akan menjadi titik eksentrik dari u di H dan u tidak bertetangga ke v di $G = ED(H)$.

Dari hal diatas tidak terdapat *arc* di H yang terkait dari sebuah titik di D_1 ke sebuah titik $w \in D_2$, sehingga hal tersebut menyebakan $\mathrm{dist}_H(u,w) < \infty$.

Ini berarti bahwa di H, setiap titik $w \in D_2$ adalah titik eksentrik dari semua titik di D_1 yang kontradiksi dengan fakta bahwa paling sedikit terdapat sebuah titik di D_1 yang tidak bertetangga ke w di G (lihat $(2')$), dengan $G = ED(H)$.

Teorema 4 (Lihat Gimbert, 2006)

Misalkan G adalah graf dengan order $n > 1$. Maka G disebut eksentrik jika dan hanya jika $\bar{G}$ adalah *self-centered* dengan radius dua atau $\bar{G}$ adalah gabungan dari graf komplit.

Bukti:

Dari pembuktian **Teorema 3**, didapatkan bahwa G eksentrik jika dan hanya jika G memiliki derajat minimum > 0 dan $ED(\overline{G^-})$ sama dengan komplemen reduksi dari $\overline{G^-}$. Jadi, dengan menggunakan **Teorema 2**, G eksentrik jika dan hanya jika $\overline{G^-}$ memenuhi salah satu dari beberapa syarat berikut:

(1) rad($\overline{G^-}$) = 1 dan G tidak memiliki titik dengan derajat 0;

(2) $\overline{G^-}$ *self-centered* dengan radius 2;

(3) $\overline{G^-}$ adalah gabungan dari graf komplit dengan $k \geq 2$.

(1) Misalkan bahwa $\overline{G^-}$ adalah digraf dengan radius 1. Ini berarti bahwa $\overline{G^-}$ adalah graf komplit K_n atau $K_{n-n'} + H$, dengan H adalah graf dengan order $n' - 1$.

Dengan syarat tambahan bahwa G tidak memiliki titik dengan derajat 0, dapat disimpulkan bahwa $G = K_n$ atau G adalah komplemen reduksi dari $K_{n-n'} + H$ yang mana $G = K_{n-n'} \rightarrow H$. Jelas G adalah digraf simetri, sehingga dapat disimpulkan $G = K_n$. Dengan demikian $\bar{G}$ adalah gabungan dari beberapa n dengan dari graf komplit K_1.

Jika radius dari $\overline{G^-}$ lebih dari satu, maka $\overline{G^-} = \bar{G}$. Dengan demikian, syarat (2) dan (3) dapat dirumuskan kembali dengan mengatakan bahwa $\bar{G}$ adalah *self-centered* dengan radius 2 atau $\bar{G} = K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \ldots \cup K_{n_k}$, dengan $k \geq 2$.

Teorema 5

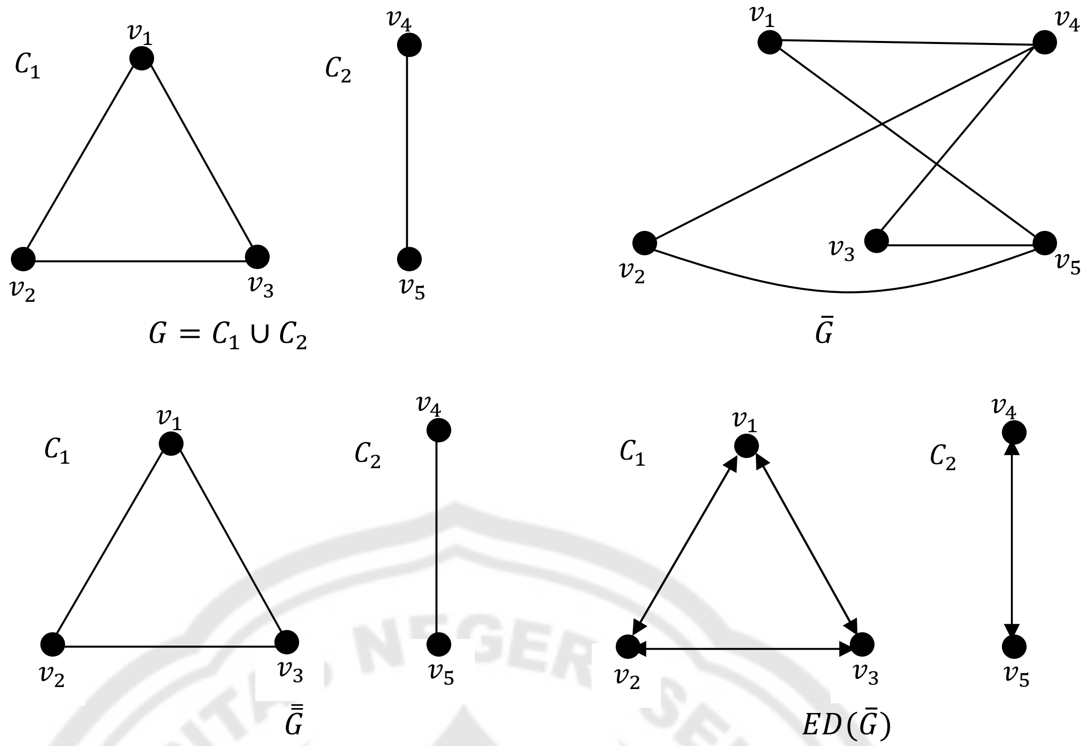
(i) Setiap graf tak terhubung dengan derajat minimum > 0 adalah eksentrik.

(ii) Eksentrik graf dengan radius 1 adalah graf komplit multipartit dengan sedikitnya *one partite set* dari kardinalitas 1.

(iii) Setiap graf terhubung dengan radius ≥ 3 atau diameter ≥ 4 adalah eksentrik.

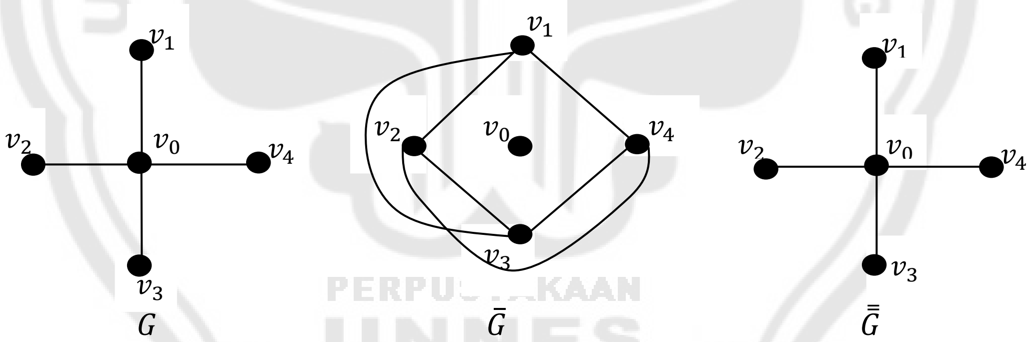
Bukti:

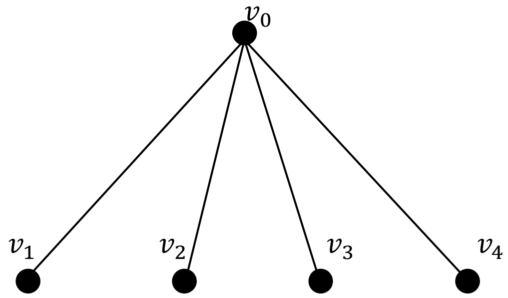
(i) Jika G adalah graf tak terhubung dengan derajat minimum > 0 maka $G = C_1 \cup \ldots \cup C_k$, dengan $k \geq 2$, dengan setiap C_i menyatakan komponen terhubung dari G (dengan order > 1). Oleh karena itu berdasarkan **Teorema 4**, $\bar{G}$ adalah *self-centered* dengan radius 2. Jadi, G eksentrik $(ED(\bar{G})) = \bar{\bar{G}} = G$.



Gambar 4.20 Graf tak terhubung G, $\bar{G}$, $\bar{\bar{G}}$, dan $ED(\bar{G})$.

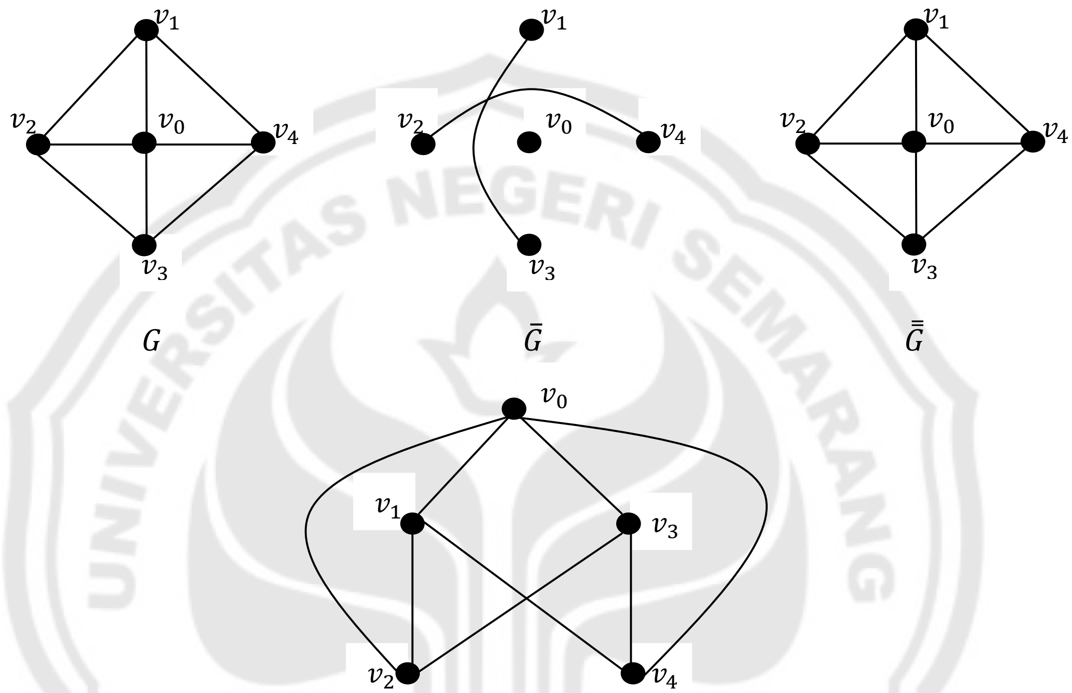
(ii) Jika G adalah graf dengan radius 1 sedemikian hingga G eksentrik, yang berarti bahwa $\bar{G}$ adalah gabungan dari graf komplit, maka $G = \bar{\bar{G}}$ adalah graf komplit multipartit dengan paling sedikit *one partite set* dari kardinalitas 1.





$G = \bar{\bar{G}}$ adalah graf komplit multipartit

Gambar 4.21 Graf G dengan rad = 1, $\bar{G}$, dan $\bar{\bar{G}}$.



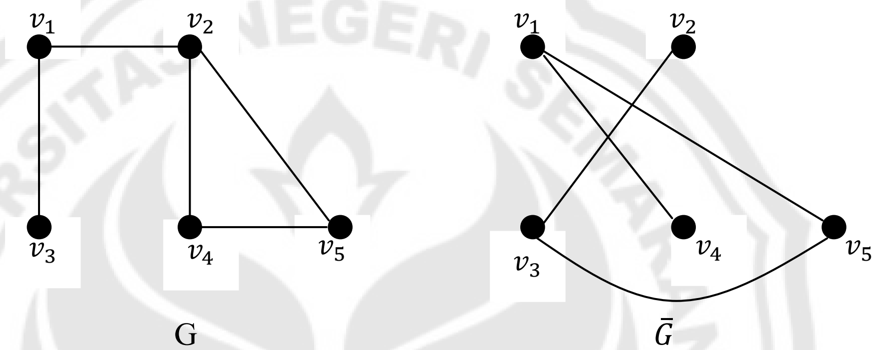
$G = \bar{\bar{G}}$ adalah graf komplit multipartit

Gambar 4.22 Graf G dengan rad = 1, $\bar{G}$, dan $\bar{\bar{G}}$.

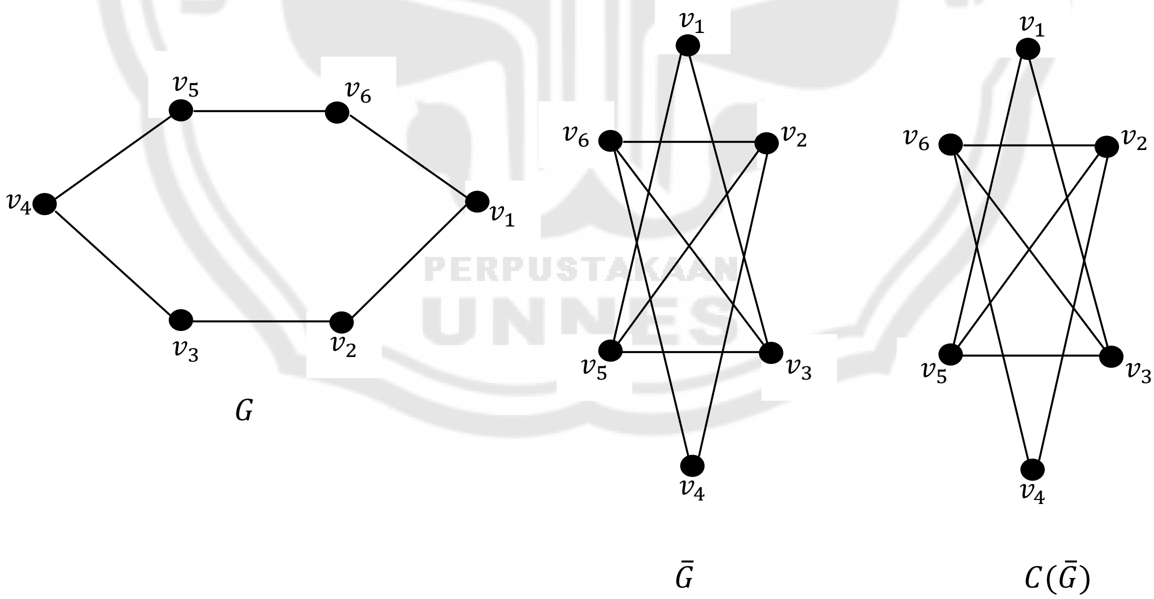
(iii) Akan dibuktikan bahwa jika G adalah graf dengan derajat minimum $\delta(G) > 0$ sedemikian hingga komplemen graf $\bar{G}$ bukan *self centered* beradius 2, maka radius G ≤ 2 dan diameter G ≤ 3.

Sebagai konsekuensi, setiap Graf terhubung G dengan radius ≥ 3 atau diameter≥ 4 akan eksentrik. Jadi $ED(\bar{G}) = \bar{\bar{G}} = G$.

Misalkan bahwa $\bar{G}$ bukanlah graf yang memiliki titik dengan eksentrisitas satu ($\delta(G) > 0$) dan juga bukan subgraf dari $\bar{G}$ yang dibentuk oleh titik beradius 2. Ini berarti bahwa terdapat sedikitnya sepasang titik u dan v yang tidak bertetangga di $\bar{G}$ sedemikian hingga u dan v tidak memiliki suatu titik tetangga yang sama di $\bar{G}$, sehingga eksentrisitas titik u di $\bar{G}$ ($e_{\bar{G}}(u)$) ≥ jarak dari u ke v di $\bar{G}$ ($dist_{\bar{G}}(u, v)$) > 2. Jadi, dalam komplemen grafnya, yaitu G, suatu titik di $V\backslash$ {u,v} bertetangga dengan salah satu u atau v, u dan v selalu bertetangga. Oleh karena itu, eksentrisitas dari u di G adalah ≤ 2 dan jarak maksimum antara suatu pasang dari titik w dan z di G adalah ≤ 3, jelas bahwa terdapat sedikitnya sebuah jalan w-z dengan panjang 3 melewati u dan v sebagai titik yang dilewati. Jadi, rad(G) ≤ 2 dan diam(G) ≤ 3.



Gambar 4.23 Graf G dengan rad = 2 dan diam = 3 dan komplemennya.



Gambar 4.24 Graf G dengan rad = 3, $\bar{G}$, dan $C(\bar{G})$.

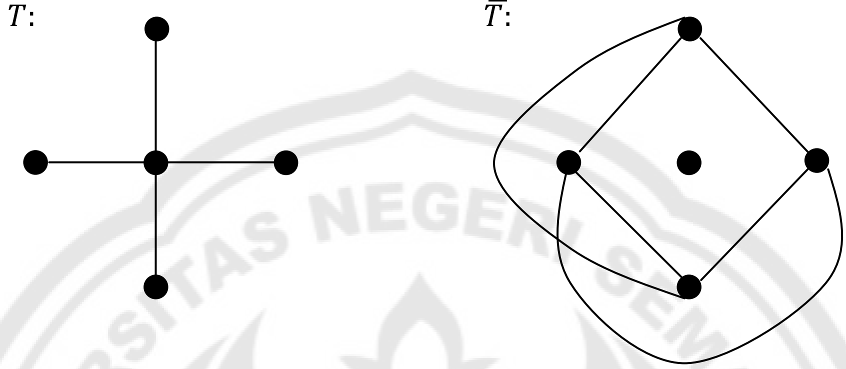
Teorema 6 (Lihat Gimbert, 2006)

Sebuah pohon adalah eksentrik jika dan hanya jika diameternya tidak sama dengan 3.

Bukti:

Misal T adalah pohon dengan titik $n > 1$. Kita bedakan kasus berdasarkan diameter T.

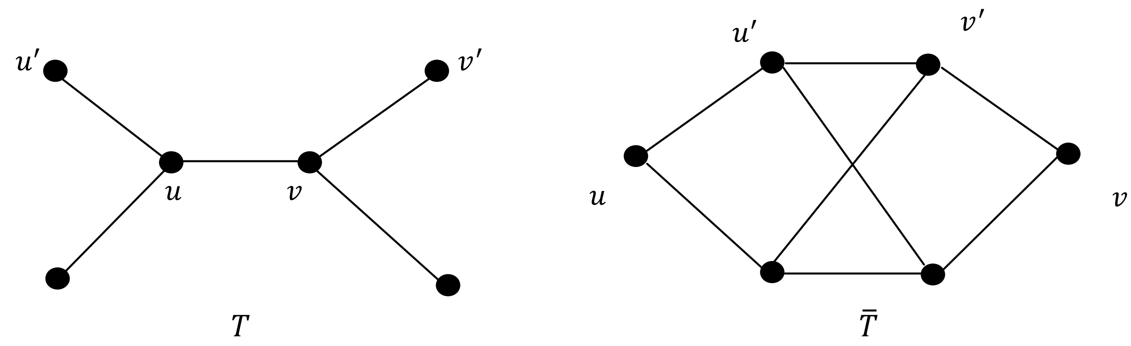
Jika $\text{diam}(T) \leq 2$ maka T adalah Graf Star, $T = K_{1,n-1}$. Jadi komplemennya adalah gabungan dari graf komplit, sehingga berdasarkan **Teorema 4**, T eksentrik.



Gambar 4.25 Pohon dengan diam = 2 dan komplemennya.

Jika $\text{diam}(T) = 3$ maka T memiliki dua titik sentral dan titik u dan v saling bertetangga.

Tiap titik w yang lain dari T harus memiliki derajat 1 (w adalah titik daun) dan bertetangga dengan salah satu, titik u atau titik v (tetapi tidak keduanya). Untuk tambahan, disana sekurang-kurangnya ada dua titik daun u' dan v' di T yang masing-masing bertetangga ke titik u dan v. Sehingga, jika kita mengambil komplemen graf dari T, kita dapat melihat jarak antara u dan v di $\overline{T}$ adalah sama dengan 3. Jadi u, v', u', u adalah jalan $u - v$ terpendek di $\overline{T}$.



Gambar 4.26 Pohon dengan diam = 3 dan komplemennya.

Oleh karena itu, $\bar{T}$ bukanlah *self centered* yang dibentuk oleh titik dengan radius 2 dan $\bar{T}$ juga bukan gabungan dari graf komplit. Jadi T tidak eksentrik.

Jika diam$(T) = 4$ maka dengan menggunakan **Teorema 5**(iii) maka T eksentrik.

(1). Graf Star

Misal Graf Star S_n mempunyai himpunan titik $V(S_n) = (v_0, v_1, v_2, , \dots, v_{n-1})$ dengan v_0 adalah titik sentral dan $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ adalah titik daun dan himpunan sisi $E(S_n) = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1})$ dengan $e_i = v_0 v_i \ \forall\ i = 1,2,3, \dots, n-1$.

Berdasarkan **Definisi 2.18**, Graf Star adalah pohon dengan sebuah titik sentral dan $n-1$ titik daun.

Jadi berdasarkan **Teorema 6**, Graf Star bukan pohon dengan diam = 3 sehingga dapat disimpulkan bahwa Graf Star adalah eksentrik.

(2). Graf Wheel

Misal Graf Wheel $\mathrm{W_n}$ mempunyai himpunan titik

$$V(W_n) = \begin{cases} V_1 = \{v_0\} \\ V_2 = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}\} \end{cases}$$

Dan himpunan sisi

$$E(W_n) = \begin{cases} E_1 = \{v_0 v_1, v_0 v_2, \dots, v_1 v_n\} \\ E_2 = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_i v_{i+1}, \dots, v_{n-1} v_1\} \end{cases}$$

Berdasarkan **Definisi 2.19**, Graf Wheel adalah graf yang terbentuk dari sebuah titik sentral yang dihubungkan ke semua titik siklus $n-1$.

Jadi berdasarkan **Teorema 4**, komplemen dari Graf Wheel adalah gabungan dari graf komplit sehingga dapat disimpulkan bahwa Graf Wheel adalah eksentrik.

BAB V
PENUTUP

5.1 Simpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka kesimpulan yang dapat diambil mengenai digraf eksentrik dari Graf Star dan Graf Wheel adalah sebagai berikut

(1). Langkah-langkah mengkonstruksi digraf eksentrik dari suatu graf adalah

(1). Menentukan jarak setiap titik $v_i \in V(G)\ \forall\ i = 1,2,\dots,n$ ke semua titik di V(G), dinotasikan dengan $d(v_i, v_j)$, yaitu panjang lintasan terpendek dari titik v_i ke titik v_j.

(2). Menentukan eksentrisitas dari titik $v_i \in V(G)\ \forall\ i = 1,2,\dots,n$ dan titik eksentriknya. Titik $v_j \in V(G)\ \forall\ j = 1,2,\dots,n$ dan $v_i \neq v_j$ disebut titik eksentrik dari v_i jika jarak dari v_i ke v_j sama dengan $e(v_i)$. Titik eksentrik dari v_i mungkin tidak tunggal.

(3). Membangun digraf ED(G) dengan himpunan titik V(ED(G)) = V(G) dan himpunan sisi E(ED(G)) = $\{ e_1, e_2, e_3, \dots, e_m \}$ dimana $e_k = (v_i v_j)$ $i = 1,2,\dots,n, k = 1,2,\dots,m$ dan v_j adalah titik eksentrik dari v_i.

(2). Bentuk digraf eksentrik dari Graf Star adalah

untuk $n = 2$ adalah digraf komplit simetri dengan *arc* dari titik sentral v_0 bertetangga keluar ke titik daun v_1 dan titik daun v_1 bertetangga keluar ke titik sentral v_0 dengan jumlah *arc* adalah $\left|A\left(ED(S_n)\right)\right| = 2$.

untuk $n > 2$ adalah digraf komplit dengan *arc* dari titik sentral bertetangga keluar ke semua titik daun dan *arc* dari setiap titik daun bertetangga keluar ke setiap titik daun lainnya kecuali dirinya sendiri dengan jumlah *arc* adalah $\left|A\left(ED(S_n)\right)\right| = (n-1)^2$.

(3). Bentuk digraf eksentrik dari Graf Wheel adalah

untuk $n = 4$ adalah digraf komplit simetri dengan *arc* dari suatu titik bertetangga keluar ke titik lainnya kecuali dirinya sendiri dengan jumlah *arc* adalah $|A(K_n)| = \left|A\big(ED(W)\big)\right| = 12.$

untuk $n > 4$ adalah digraf dengan *arc* dari titik sentral bertetangga keluar ke semua titik siklus dan *arc* dari setiap titik siklus bertetangga keluar ke setiap titik siklus lainnya kecuali titik siklus yang saling bertetangga dengan jumlah *arc* adalah $\left|A\big(ED(W_n)\big)\right| = n^2 - 4n + 3.$

(4). Graf Star dan Graf Wheel adalah graf yang eksentrik

5.2 Saran

Berkaitan dengan hasil penelitian, ada beberapa hal yang perlu mendapat perhatian yaitu penelitian ini hanya membahas digraf eksentrik pada Graf Star dan Graf Wheel. Untuk itu disarankan perlu penelitian lebih lanjut tentang digraf eksentrik pada klasifikasi graf yang lainnya seperti graf double star, graf siklus, graf komplit multipartit, dan jenis-jenis graf lain yang belum pernah diteliti.

Daftar Pustaka

Budayasa, I. K.1997. *Matematika Diskrit I*. Surabaya: Balai Pustaka.

Chartrand, G. and Lesniak. 1996. *Graphs & Digraphs* 3rd edition. Florida: Chapman & Hill.

Gimbert, J. et al., 2006. Characterization of Eccentric Digraphs. *Discrete Mathematics*. 306/2: 210-219. Tersedia di : http://web.udl.es/usuaris/p4088280/research/art_eccentric_char.pdf. [21 Maret 2011].

Goodaire, E. G. 2003. *Discrete Mathematics With Graph Theory*. New Delhi: Prentice Hall of India Private Limited.

Huilgol, I. M., dan Sunilchandra A. R. 2011. On Eccentric Digraphs of Graphs. *Applied Mathematics*, 2: 705-710.

Munir, R. 2001. *Buku Teks Ilmu Komputer Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.

Santosa, Gunawan. 2002. *Aplikasi Teorema Polya pada Enumerasi Graf Sederhana*. 8(1): 1-10. Tersedia di: http://santosa.ukdw.ac.id. [18 Maret 2011].

Siang, J. J. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Andioffset.

Sundari, S. 2008. Eksentrisitas Digraf pada Graf Cycel dan Graf Lintasan. Skripsi Universitas Sumatera Utara.

Sutarno, H. 2003. *Matematika Diskrit*. Bandung: JICA.

Vasudev, C. 2007. *Combinatorics and Graph Theory*. New Delhi: New Age International (P) Ltd.

Weisstein, E. W. 2009. *Graph*. Tersedia di : http://mathworld.wolfram.com [21 Maret 2011].