PENGGUNAAN TEOREMA POLYA DALAM ENUMERASI GRAF

skripsi

disajikan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sain

Program Studi Matematika

Oleh

Wendy Lestyo Purnomo

4150406029

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2010

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Penggunaan Teorema Polya Dalam Enumerasi Graf

disusun oleh

Nama : Wendy Lestyo Purnomo

NIM : 4150406029

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA Unnes pada tanggal 20 Desember 2010

Panitia:

Ketua

Dr. Kasmadi Imam S., M.S.
195111151979031001

Sekretaris

Drs. Edy Soedjoko, M.Pd.
195604191987031001

Ketua Penguji

Drs. Amin Suyitno, M.Pd.
195206041976121001

Anggota Penguji/
Pembimbing Utama

Isnarto, S.Pd., M.Si.
196902251994031001

Anggota Penguji/
Pembimbing Pendamping

Isnaini Rosyida, S.Si., M.Si.
197302191998022001

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi dan sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya yang diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dirujuk dalam skripsi ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Semarang, Januari 2011

Wendy Lestyo Purnomo
NIM. 4150406029

ABSTRAK

Purnomo, Wendy Lestyo. 2010. "*Penggunaan Teorema Polya Dalam Enumerasi Graf*". Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Pembimbing I: Isnarto, S.Pd, M.Si., Pembimbing II: Isnaini Rosyida, S.Si, M.Si

Kata kunci : indeks siklik, teorema polya, isomorfik graf.

Salah satu yang dipelajari dalam ilmu aljabar abstrak adalah teori grup. Munculnya teori grup didasari dari penyelidikan permutasi suatu himpunan berhingga. Dalam konsep tindakan suatu grup terhadap himpunan berhingga yang tidak kosong terdapat beberapa teorema yang bisa digunakan untuk menyelesaikan masalah enumerasi, diantaranya adalah Teorema Polya. Masalah enumerasi merupakan masalah kombinatorika yang mempelajari pengaturan objek-objek yang berkisar pada persoalan pencacahan dari suatu pengaturan. Pada penelitian kali ini penulis tertarik untuk mengkaji tentang enumerasi graf dengan *n* simpul. Enumerasi graf yang dimaksud dalam penelitian ini adalah banyaknya graf yang dapat dibentuk dari *n* simpul yang takisomorfik satu dengan yang lainnya.

Permasalahan dalam skripsi ini adalah sebagai berikut. Pertama, bagaimana hasil enumerasi graf *n* simpul dengan menggunakan Teorema Polya. Kedua, bagaimana perbandingan hasil penyelesaian masalah enumerasi graf yang diselesaikan dengan Teorema Polya dan dengan menggunakan software *Maple* dan *The Graph Isomorphism Algorithm Demonstration Program*.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu identifikasi masalah, perumusan masalah, studi pustaka, pemecahan masalah, dan penarikan simpulan.

Kesimpulan yang didapat dalam penelitian ini sebagai berikut: Banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari dua simpul ada sebanyak 3, banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari dua simpul ada sebanyak 6, banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari tiga simpul ada sebanyak 10, banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari tiga simpul ada sebanyak 20, banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari empat simpul ada sebanyak 66, banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari empat simpul ada sebanyak 90, banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari lima simpul ada sebanyak 792, banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari lima simpul ada sebanyak 544, banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari enam simpul ada sebanyak 25.506, banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari enam simpul ada sebanyak 5.096, banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari tujuh simpul ada sebanyak 2.302.938, banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari tujuh simpul ada sebanyak 79.264, banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari delapan simpul ada sebanyak 591.901.884, banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari delapan simpul ada sebanyak 2.208.612. Dengan software *Maple* dan *The Graph Isomorphism Algorithm Demonstration Program* diperoleh semua graf yang terbentuk dari *n* simpul tak isomorfik satu dengan yang lainnya.

Saran dari penulis yaitu adanya penelitian mengenai Teorema Polya yang dikembangkan pada pewarnaan graf dan enumerasi graf berarah.

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO:

- *Solat, sabar, dan berpikir positif adalah kunci keberhasilan memperoleh sesuatu.*
- *Jangan pernah menyerah sebelum bertindak. Jikalau belum berhasil janganlah jadikan beban, tapi jadikanlah pengalaman hidup yang berharga.*
- *Orang berakal tidak akan bosan untuk meraih manfaat berpikir, tidak putus asa dalam menghadapi keadaan, dan tidak akan pernah berhenti dari berpikir dan berusaha.*

PERSEMBAHAN:

Kupersembahkan kepada

Bapak dan Ibu

Adikku Dava

Teman-teman Matematika Angk. 2006

KATA PENGANTAR

Puji syukur senantiasa penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan segala rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang diberi judul " Penggunaan Teorema Polya dalam Enumerasi Graf".

Penulis menyadari sepenuhnya, bahwa dalam penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan dan bimbingan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis akan menyampaikan rasa hormat, serta terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Sudijono Sastroatmodjo, M.Si., Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Dr. Kasmadi Imam S, M.S., Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Edy Soedjoko, M.Pd., Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
4. Isnarto, S.Pd, M.Si., selaku Dosen Sembimbing I yang senantiasa meluangkan waktu untuk membimbing dan memberikan masukan serta motivasi sehingga dapat terselesaikannya penulisan skripsi ini.
5. Isnaini Rosyida, S.Si, M.Si., selaku Dosen Pembimbing II yang senantiasa membantu dan memberikan masukan dalam penulisan skripsi ini.
6. Seluruh Dosen Matematika yang telah mengajar dengan baik dan memberikan bekal ilmu selama mengikuti perkuliahan di Jurusan Matematika.

7. Bapak, Ibu, Kakakku, dan keponakanku yang telah memberikan doa dan motivasi.
8. Teman-teman dekatku, tetap semangat selalu dan terima kasih atas dukungannya selama ini.
9. Teman-teman matematika angkatan 2006, terima kasih atas segala bantuan dan dukungannya.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini belum sempurna. Oleh karena itu penulis senantiasa menerima kritik dan saran. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat berguna dan bermanfaat bagi pihak yang berkepentingan, Amin.

Semarang, Desember 2010

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR SIMBOL

A(G)	Matriks ketetanggaan dari graf G
$d(v_i)$	derajat (*degree*) dari titik v_i
E(G)	Himpunan sisi-sisi di graf G
$F(g)$	Karakter permutasi g di himpunan X
$\|G\|$	Order grup G
Gx	Orbit x terhadap grup G
G_x	Penstabil x di grup G
$\langle G,*\rangle$	himpunan G grup dengan operasi bintang $(*)$
gH	Koset kiri dari H
Hg	Koset kanan dari H
K_n	Graf Lengkap dengan n titik
$K_{m,n}$	Graf bipartisi lengkap
$PI(G; w(y_1), w(y_2), \dots, w(y_r)$	Persediaan pola himpunan C terhadap grup G
R_n	Grup simetri dari himpunan pasangan simpul
S_n	Grup simetri dari himpunan simpul
V(G)	Himpunan titik-titik di graf G
$w(y_i)$	Bobot dari y_i
$Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$	Indeks siklik dari grup G
$Z(g; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$	Indeks siklik dari permutasi g
σ	Permutasi
$\subset$	Subgrup

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Di dalam matematika, teori graf adalah cabang ilmu yang mempelajari tentang sifat-sifat graf. Suatu graf merupakan suatu diagram yang memuat informasi tertentu. Dalam kehidupan sehari-hari, graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada. Tujuannya adalah untuk memvisualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti. Misalnya: graf organisasi, bagan alir, peta, rangkaian listrik, trayek angkutan, dan lain-lain.

Suatu graf dapat disajikan sebagai suatu himpunan yang terdiri dari simpul (*vertex*) dan sisi (*edge*). Walaupun visualisasi suatu graf terlihat sederhana, tetapi terkadang sulit untuk menyelesaikan masalah yang terkandung dalam graf tersebut. Sebagai contoh menghitung optimalisasi dan jarak terpendek dari suatu graf. Untuk menyelesaikan masalah-masalah tersebut dibutuhkan suatu teknik untuk menyelesaikannya.

Secara garis besar ada empat masalah pokok dalam teori graf, yaitu:

1. Masalah Eksistensi: masalah yang berhubungan dengan pertanyaan, apakah ada suatu graf yang…? Apakah mungkin dibuat atau dibangun suatu graf…?
2. Masalah Konstruksi: masalah yang berhubungan dengan pembentukan atau pengkonstruksian atau pengadaan. Jika suatu graf ada, apakah

mungkin kita mengkonstruksinya? Bagaimana kita dapat membangunnya?

3. Masalah Enumerasi: masalah yang berhubungan dengan perhitungan atau pencacahan. Berapa banyak graf seperti itu? Bagaimana cara kita menghitungnya?
4. Masalah Optimasi: masalah yang berhubungan dengan keputusan yang terbaik, terdekat, terkecil, atau paling… Jika ada banyak kemungkinan, bagaimana kita mendapatkan yang terbaik? Mana yang paling baik?

(Gunawan 2003)

Ilmu aljabar abstrak merupakan bagian dari matematika yang berkembang dengan pesat karena berhubungan dengan himpunan dan sifat struktur-struktur di dalamnya. Salah satu yang dipelajari dalam ilmu aljabar abstrak adalah teori grup. Ide dasar munculnya teori grup adalah penyelidikan permutasi dari himpunan berhingga di dalam teori persamaan. Selanjutnya ditemukan bahwa konsep dari suatu grup adalah universal dan konsep grup tersebut muncul di berbagai cabang matematika dan ilmu pengetahuan lainnya.

Salah satu permasalahan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep grup adalah masalah enumerasi. Masalah enumerasi merupakan persoalan kombinatorika, yaitu masalah yang mempelajari pengaturan objek-objek, yang berkisar pada persoalan pencacahan/klasifikasi dari suatu pengaturan. Para ilmuwan diberbagai bidang sering kali menemukan permasalahan kombinatorika. Misalnya seorang ahli kimia kerap berhadapan dengan banyaknya pola molekul yang terbentuk dari sejumlah atom/molekul yang bergabung. Untuk menghitung

banyaknya pola molekul berbeda yang terbentuk dengan cara menguraikan satu persatu pola molekul yang mungkin terbentuk sehingga akan diperlukan pengerjaan yang banyak memakan waktu dan cukup panjang. Oleh karena itu perlu suatu cara tertentu untuk menyelesaikan masalah tersebut. Salah satu cara adalah dengan menggunakan konsep tindakan suatu grup G terhadap himpunan berhingga X (Rusdiati 2004).

Dalam konsep tindakan suatu grup G terhadap suatu himpunan berhingga X yang tidak kosong terdapat beberapa teorema yang bisa digunakan untuk menyelesaikan masalah enumerasi tersebut diantaranya adalah Teorema Polya. Hal ini diperkuat oleh penelitian Ferdinand Yap Tomakin (2009), yang menunjukkan bahwa Teorema Polya dapat digunakan untuk mengenumerasi jumlah G-orbit dari r-himpunan bagian, dari suatu himpunan berhingga X, dalam hal ini pada fungsi $c(x) = 1 + x$, $\forall x \in X$. Teorema Polya juga dapat digunakan untuk menentukan suatu grup permutasi itu dapat dikatakan transitif atau tidak. Dalam penelitian lain yang dilakukan R. Gunawan Santosa (2003), Teorema Polya juga dapat digunakan untuk mengenumerasi graf sederhana.

Teorema Polya sendiri ditemukan oleh George Polya (1887-1985), seorang ahli berkebangsaan Hungaria yang berimigrasi ke Amerika Serikat pada tahun 1940. Teorema Polya dibagi menjadi dua yaitu Teorema Polya I dan II. Teorema Polya I hanya menjelaskan tentang banyaknya orbit yang berbeda dari himpunan berhingga X terhadap grup yang bertindak. Grup yang bertindak/beraksi pada himpunan X memiliki pengertian suatu grup yang dapat

diterapkan pada himpunan X dengan dikenai suatu tindakan tertentu. Sedangkan pengertian orbit sendiri sebagai berikut.

Misalkan σ permutasi himpunan A

i. Untuk a ∈ A orbit dari a terhadap σ disimbolkan $O_{a,\sigma}$ didefinisikan sebagai $O_{a,\sigma} = \{\sigma^n(a) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

ii. $O_{a,\sigma}$ untuk semua a ∈ A dinamakan orbit dari σ.

Teorema Polya II selain menjelaskan banyaknya orbit yang berbeda juga menjelaskan bentuk/jenis orbit yang berbeda tersebut.

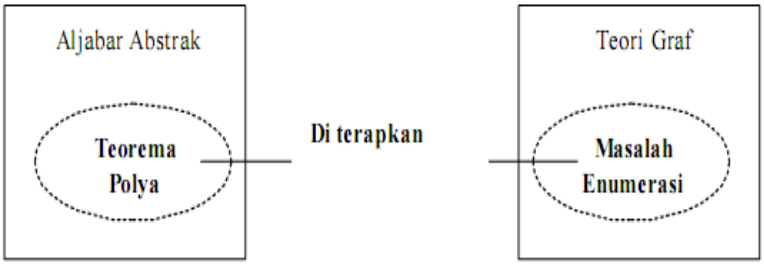
Masalah enumerasi yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah masalah enumerasi yang berhubungan dengan perhitungan banyaknya graf yang tidak isomorfis antara graf satu dengan yang lainnya. Graf menjadi sangat penting untuk diteliti dikarenakan aplikasinya yang begitu luas dalam kehidupan sehari-hari. Graf yang dimaksud disini adalah graf sederhana dan tidak sederhana. Adapun graf sederhana memiliki pengertian graf yang hanya memiliki satu sisi pada setiap pasang simpulnya dan tidak mempunyai sisi yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama (loop).

Sedangkan dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfis jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduanya, sedemikian sehingga jika sisi *e* bersisian dengan simpul *u* dan *v* di G_1 maka sisi *e'* di G_2 juga harus bersisian dengan *u'* dan *v'*.

Apabila *n* simpul pada graf *G* dikenai permutasi, maka $\frac{n(n-1)}{2}$ pasangan simpul tak berurut (artinya *ij* = *ji*) dari himpunan simpul tersebut juga mengalami permutasi. Dalam hal ini pasangan simpul tak berurut pada suatu himpunan dapat

dipandang sebagai sisi, yang ujung-ujungnya adalah pasangan simpul tersebut. Sehingga dari teorema ini penulis mencoba untuk mengenumerasi banyaknya graf dengan *n* simpul yang tak saling isomorfik.

Pada dasarnya tulisan ini merupakan penggabungan dua bidang ilmu yaitu antara bidang aljabar (abstrak) dan bidang teori graf, artinya aljabar abstrak melalui Teorema Polya akan digunakan untuk menyelesaikan masalah enumerasi pada graf. Skema penyelesaiannya seperti terlihat pada bagan di bawah



Dengan alasan di atas, penulis mengambil judul "**PENGGUNAAN TEOREMA POLYA DALAM ENUMERASI GRAF**".

1.2 Permasalahan

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan yang timbul adalah sebagai berikut.

(1). Bagaimana hasil enumerasi graf *n* simpul dengan menggunakan Teorema Polya?

(2). Bagaimana perbandingan hasil penyelesaian masalah enumerasi graf yang diselesaikan dengan menggunakan Teorema Polya dan dengan menggunakan software *Maple* dan *The Graph Isomorphism Algorithm Demonstration Program*?

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini dibatasi ruang lingkup dari graf sebagai berikut.

(1). Graf yang digunakan dalam aplikasi Teorema Polya I dan II adalah multigraf dengan sisi rangkap paling banyak dua dan graf tanpa sisi rangkap dari dua simpul sampai dengan delapan simpul.

(2). Graf yang dibandingkan dengan software *Maple* dan *The Graph Isomorphism Algorithm Demonstration Program* adalah graf yang terbentuk dari dua dan tiga simpul.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan dari penulisan ini adalah sebagai berikut:

(1). Memperoleh hasil enumerasi graf n simpul dengan menggunakan Teorema Polya.

(2). Membandingkan penyelesaian masalah enumerasi graf dengan menggunakan Teorema Polya dan dengan software *The Graph Isomorphism Algorithm Demonstration Program*.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dalam penyusunan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1.5.1 Bagi Penulis

Dapat mengimplementasikan teori-teori yang diperoleh dalam ilmu aljabar ke dalam teori-teori graf.

1.5.2 Bagi Pembaca

Memberikan wawasan dan pengetahuan bahwa ilmu aljabar yang selama ini banyak orang menganggapnya abstrak ternyata mampu menyelesaikan masalah yang lebih real, dalam hal ini enumerasi graf.

1.6 Sistematika Penulisan Skripsi

Secara garis besar dalam penulisan skripsi ini dibagi dalam tiga bagian, yaitu: bagian awal, bagian isi, dan bagian akhir skripsi.

1.6.1 Bagian Awal

Bagian awal skripsi terdiri dari halaman judul, halaman pengesahan, pernyataan keaslian tulisan, abstrak, motto dan persembahan, kata pengantar, daftar isi, daftar gambar, daftar gambar, dan daftar simbol.

1.6.2 Bagian Isi

Bagian isi terdiri dari lima bab yaitu sebagai berikut.

(1) Bab 1 : Pendahuluan

Pada bab ini dikemukakan tentang latar belakang, permasalahan, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan skripsi.

(2) Bab 2 : Landasan Teori

Berisi penjelasan mengenai teori-teori yang menyangkut dan mendasari pemecahan masalah yang ada.

(3) Bab 3 : Metode Penelitian

Berisi metode-metode yang digunakan dalam penelitian, meliputi identifikasi masalah, perumusan masalah, studi pustaka, pemecahan masalah dan penarikan simpulan.

(4) Bab 4 : Pembahasan

Berisikan pembahasan dan hasil masalah-masalah yang dikaji.

Bab 5 : Penutup

Bab ini berisi simpulan dan saran.

1.6.3 Bagian Akhir

Bagian akhir berisi daftar pustaka yang merupakan informasi mengenai buku-buku, sumber, dan referensi yang digunakan penulis.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Struktur Aljabar

2.1.1 Grup

Operasi biner * pada himpunan S adalah aturan yang mengawankan setiap pasangan terurut $(a, b) \in S \times S$ dengan tepat satu elemen di S. Suatu himpunan berhingga jika dikenakan operasi biner padanya dan memenuhi syarat-syarat tertentu akan membentuk suatu grup.

Definisi 2.1 Grup

Himpunan $\mathrm{G} \neq \emptyset$ dengan operasi * yang didefinisikan padanya disebut Grup $\langle G,* \rangle$, bila memenuhi syarat:

1. $\forall x, y \in G, x * y \in G$ (sifat tertutup terhadap operasi *)
2. $\exists e \in G,$ sehingga $x * e = e * x = x, \forall x \in G$ (ada elemen identitas *e*).
3. $\forall x \in G, \exists x^{-1} \in G$ sehingga $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ (setiap elemen di G mempunyai invers).
4. $\forall x, y, z \in G, x * (y * z) = (x * y) * z$ (sifat asosiatif)

Contoh 2.1

Himpunan bilangan bulat ($\mathbb{Z}$) akan membentuk grup terhadap operasi penjumlahan, disimbolkan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Elemen netral grup tersebut adalah 0 dan invers dari a adalah $-a$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

Sebuah himpunan pastilah mempunyai himpunan bagian, paling tidak himpunan kosong. Himpunan bagian dari suatu grup dapat membentuk grup apabila diberikan operasi yang sama dengan grupnya masih memenuhi sifat-sifat grup.

Definisi 2.2 Subgrup

Jika G grup dan H ⊂ G maka H dinamakan subgrup apabila H merupakan grup terhadap operasi yang didefinisikan pada G.

Contoh 2.2

a. Di bawah ini akan dibuktikan bahwa himpunan $\mathrm{H} = \{2h | h \in \mathbb{Z}\}$ adalah subgrup dari $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

Bukti:

Jelas $\mathrm{H} \subset \mathbb{Z}$.

1. Ambil sebarang $x, y \in \mathrm{H}$.

   Ini berarti $x = 2h_1$ dan $y = 2h_2$ untuk $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}$.

   Jelas $x + y = 2h_1 + 2h_2 = 2(h_1 + h_2)$

   Karena $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}$ grup terhadap operasi penjumlahan, maka $(h_1 + h_2) \in \mathbb{Z}$.

   Sehingga $x + y \in H$.

   Jadi $\forall x, y \in \mathrm{H}, x + y \in \mathrm{H}$.

2. Ambil sebarang $x \in \mathrm{H}$.

   Jelas $x + 0 = 0 + x = x$.

   Sehingga $\exists 0 \in \mathrm{H} \ni x + 0 = 0 + x = x, \forall x \in \mathrm{H}$.

   Jadi $0 \in \mathrm{H}$ merupakan elemen netral pada H.

3. Ambil sebarang $x \in \mathrm{H}$.

   Jelas $-x \in \mathrm{H}$.

   Sehingga $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

   Jadi untuk setiap $x \in \mathrm{H} \exists - x \in \mathrm{H} \ni x + (-x) = (-x) + x = 0$

4. Ambil sebarang $x, y, z \in \mathrm{H}$

   Jelas $(x + y) + z = x + (y + z)$.

   Jadi operasi penjumlahan pada H bersifat assosiatif.

Dari 1-4 disimpulkan $\langle \mathrm{H}, + \rangle$ merupakan grup.

Jadi $\langle \mathrm{H}, + \rangle$ merupakan subgrup dari $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

b. Himpunan bilangan asli ($\mathbb{N}$) bukan merupakan subgrup dari $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ karena tidak ada $e \in \mathbb{N}$ yang mengakibatkan $x + e = e + x = x$ untuk setiap $x \in \mathbb{N}$ sehingga sifat identitas terhadap operasi penjumlahan tidak terpenuhi.

2.1.2 Grup Permutasi

Suatu fungsi dari himpunan A ke B adalah aturan yang mengawankan setiap anggota $a \in A$ tepat satu anggota $b \in B$. Ada tiga sifat dalam fungsi, yaitu injektif, surjektif, dan bijektif.

Definisi 2.3 Permutasi

Permutasi pada himpunan A adalah fungsi $\emptyset: A \to A$ yang bijektif.

Contoh 2.3

Misalkan $A = \{1,2,3\}$. Salah satu permutasi dari A adalah $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Artinya fungsi α memetakan elemen 1 ke 1, elemen 2 ke 2, dan elemen 3 ke 3.

Di atas telah dijelaskan bahwa grup terbentuk dari suatu himpunan yang apabila diberikan suatu operasi biner kepadanya memenuhi syarat-syarat grup. Tak

terkecuali himpunan yang anggota-anggotanya merupakan fungsi dari A ke B juga dapat membentuk grup.

Definisi 2.4 Grup Simetri

Jika $A = \{1,2,3,\dots,n\}$ maka grup yang memuat semua permutasi dari A dinamakan grup simetri pada n unsur dan simbolkan dengan S_n. Grup simetri S_n memuat elemen sebanyak $n!$.

Contoh 2.4

a. Akan dibuktikan bahwa himpunan S_3 terhadap operasi komposisi merupakan grup simetri.

Bukti:

Permutasi-permutasi dari himpunan $X = \{1,2,3\}$, yaitu:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga $S_3 = \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \sigma, \theta\}$.

Operasi yang didefinisikan pada S_3 adalah komposisi.

Hasil operasi keenam permutasi tersebut dapat disajikan dalam tabel berikut:

$\circ$	α	β	γ	ε	σ	θ
α	α	β	γ	ε	σ	θ
β	β	α	θ	σ	ε	γ
γ	γ	ε	α	β	θ	σ
ε	ε	γ	σ	θ	β	α
σ	σ	θ	ε	γ	α	β
θ	θ	σ	β	α	γ	ε

Tabel 1

1. Dari tabel1 terlihat untuk sebarang $x, y \in S_3$ mengakibatkan $x \circ y \in S_3$

13

Jadi sifat tertutup terpenuhi.

2. Dari tabel1 juga terlihat untuk sebarang $x, y, z \in S_3$ berlaku

   $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

   Jadi sifat assosiatif terpenuhi.

3. Ambil sebarang $x \in S_3$.

   Jelas $\alpha \in S_3$.

   Dari tabel1 terlihat $x \circ \alpha = \alpha \circ x = x$.

   Jadi α merupakan elemen netral di S_3.

4. Dari tabel1, jelas terlihat

   $\alpha \circ \alpha = \alpha$ $\qquad$ $\beta \circ \beta = \alpha$

   $\gamma \circ \gamma = \alpha$ $\qquad$ $\varepsilon \circ \theta = \alpha$

   $\sigma \circ \sigma = \alpha$ $\qquad$ $\theta \circ \varepsilon = \alpha$

   Jelas $\forall x \in S_3$ terdapat $x^{-1} \in S_3$ sehingga $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = \alpha$.

   Jadi $\forall x \in S_3$ punya invers di S_3.

Dari 1-4 disimpulkan $\langle S_3, \circ \rangle$ grup simetri.

b. Dipunyai $H = \{\alpha, \varepsilon, \theta\}$ himpunan bagian dari S_3. Akan dibuktikan bahwa himpunan H merupakan subgrup dari S_3.

Bukti:

Jelas $H \subset S_3$.

1. Ambil sebarang $x, y \in H$.

$\circ$	α	ε	θ
α	α	ε	θ
ε	ε	θ	α
θ	θ	α	ε

Tabel 2

Dari tabel 2 jelas $x \circ y \in H$.

Jadi sifat tertutup terpenuhi.

2. Ambil $\alpha, \varepsilon, \theta \in H$.

   Dari tabel1 jelas terlihat $(\alpha \circ \varepsilon) \circ \theta = \varepsilon \circ \theta = \alpha = \alpha \circ \alpha = \alpha \circ (\varepsilon \circ \theta)$

   $(\alpha \circ \theta) \circ \varepsilon = \theta \circ \varepsilon = \alpha = \alpha \circ \alpha = \alpha \circ (\theta \circ \varepsilon)$

   $(\varepsilon \circ \alpha) \circ \theta = \varepsilon \circ \theta = \alpha = \varepsilon \circ \theta = \varepsilon \circ (\alpha \circ \theta)$

   $(\varepsilon \circ \theta) \circ \alpha = \alpha \circ \alpha = \alpha = \varepsilon \circ \theta = \varepsilon \circ (\theta \circ \alpha)$

   $(\theta \circ \alpha) \circ \varepsilon = \theta \circ \varepsilon = \alpha = \theta \circ \varepsilon = \theta \circ (\alpha \circ \varepsilon)$

   $(\theta \circ \varepsilon) \circ \alpha = \alpha \circ \alpha = \alpha = \theta \circ \varepsilon = \theta \circ (\varepsilon \circ \alpha)$

   Jadi sifat assosiatif terpenuhi.

3. Ambil sebarang $x \in H$.

   Jelas $\alpha \in H$.

   Diperoleh $x \circ \alpha = \alpha \circ x = x$.

   Jadi α merupakan elemen netral di H

4. Dari tabel 2 terlihat, untuk setiap $x \in H$ terdapat $x^{-1} \in H$ sehingga

   $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = \alpha$

   Jadi $\forall x \in H$ punya invers di H.

Dari 1-4 disimpulkan $\langle H, \circ \rangle$ subgrup dari $\langle S_3, \circ \rangle$.

Suatu permutasi kadang memetakan semua anggotanya ke anggota yang identik, seperti terlihat pada contoh 2.3. Tetapi ada juga yang hanya memetakan ke beberapa anggota yang identik. Permutasi-permutasi semacam itu dalam suatu grup mempunyai kedudukan yang penting, seperti terlihat pada definisi di bawah ini.

Definisi 2.5 Orbit, Penstabil, dan Karakter Permutasi

Apabila G adalah subgrup dari grup simetri S_n dan untuk $x \in X$, maka:

1. $Gx = \{g(x): g \in G\}$ yaitu himpunan semua bayangan elemen $x \in X$ oleh permutasi g di G. Gx disebut orbit x terhadap G.
2. $G_x = \{g \in G: g(x) = x\}$ adalah himpunan semua permutasi di G yang mengakibatkan x sebagai titik tetap. Himpunan G_x disebut penstabil x di G.
3. $F(g) = \{z \in X: g(z) = z\}$ adalah himpunan semua titik-titik tetap dari permutasi $g \in G$. Himpunan $F(g)$ disebut karakter permutasi g di himpunan X.

Contoh 2.5

Dipunyai $X = \{1,2,3\}$ dan $G = \{\alpha, \varepsilon, \theta\}$ subgrup dari S_3. Orbit x terhadap G, penstabil x di G dan karakter permutasi g di himpunan X sebagai berikut.

1. Orbit x terhadap G yaitu $Gx = \{g(x): g \in G\}$

   Orbit 1 terhadap G:

   $$\begin{aligned} G1 &= \{g(1): g \in G\} \\ &= \{\alpha(1), \varepsilon(1), \theta(1)\} \\ &= \{1,3,2\}. \end{aligned}$$

   Jadi orbit 1 terhadap G adalah $\{1,3,2\}$.

   Orbit 2 terhadap G:

   $$\begin{aligned} G2 &= \{g(2): g \in G\} \\ &= \{\alpha(2), \varepsilon(2), \theta(2)\} \\ &= \{2,1,3\}. \end{aligned}$$

   Jadi orbit 2 terhadap G adalah $\{2,1,3\}$.

Orbit 3 terhadap G:

$$G3 = \{g(3): g \in G\}$$

$$= \{\alpha(3), \varepsilon(3), \theta(3)\}$$

$$= \{3,2,1\}.$$

Jadi orbit 3 terhadap G adalah $\{3,2,1\}$.

2. Penstabil x di G yaitu $G_x = \{g \in G: g(x) = x\}$

   Penstabil 1 di G:

   $$G_1 = \{g \in G: g(1) = 1\} = \{\alpha\}.$$

   Penstabil 2 di G:

   $$G_2 = \{g \in G: g(2) = 2\} = \{\alpha\}.$$

   Penstabil 3 di G:

   $$G_3 = \{g \in G: g(3) = 3\} = \{\alpha\}.$$

3. Karakter permutasi g di himpunan X yaitu $F(g) = \{z \in X: g(z) = z\}$.

   Karakter permutasi α di himpunan X:

   $$F(\alpha) = \{z \in X: \alpha(z) = z\} = \{1,2,3\}.$$

   Karakter permutasi ε di himpunan X:

   $$F(\varepsilon) = \{z \in X: \varepsilon(z) = z\} = \{\quad\}.$$

   Karakter permutasi ε di himpunan X:

   $$F(\theta) = \{z \in X: \theta(z) = z\} = \{\quad\}.$$

Dari contoh di atas jelas terlihat bahwa setiap elemen netral dari suatu subgrup permutasi merupakan penstabil pada grup tersebut.

Grup-grup yang terbentuk dari suatu himpunan pastilah mempunyai anggota. Banyaknya anggota dari grup tersebut ada yang hingga, tetapi ada juga

yang tak hingga. Sebagai contoh $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ adalah grup yang banyak anggotanya tak hingga, sedangkan $\langle S_3, \circ \rangle$ adalah grup yang banyak anggotanya hingga.

Definisi 2.6 Grup Berhingga

Grup *G* disebut grup berhingga jika memiliki sejumlah berhingga anggota. Banyaknya anggota dalam grup *G* disebut order *G* dan disimbolkan dengan $|G|$.

Contoh 2.6

Grup simetri S_3 merupakan grup berhingga. Sebab banyak anggota atau order dari S_3 adalah $|S_3| = 6$.

2.1.3 Koset dan Teorema Lagrage

Pemahaman mengenai koset diperlukan untuk mengkaji keterkaitan antara order suatu grup dengan order subgrupnya. Keterkaitan itu kemudian dinyatakan dalam sebuah teorema, yaitu Teorema Lagrage.

Definisi 2.7 Koset

Jika *H* adalah subgrup dari grup *G* dan *g* adalah anggota *G* maka:

$gH = \{gh : h \in H\}$ disebut koset kiri H terhadap g dan $Hg = \{hg : h \in H\}$ disebut koset kanan *H* terhadap *g*.

Contoh 2.7

Dipunyai $H = \{\alpha, \varepsilon, \theta\}$ dan $\langle H, \circ \rangle$ subgrup dari $G = \langle S_3, \circ \rangle$. Koset kiri dan koset kanan *H* terhadap *G* yaitu

<u>Koset Kiri *H* terhadap *G*</u>	<u>Koset Kanan *H* terhadap *G*</u>
$\alpha H = \{\alpha, \varepsilon, \theta\} = \varepsilon H = \theta H$	$H\alpha = \{\alpha, \varepsilon, \theta\} = H\varepsilon = H\theta$

$\beta H = \{\beta, \sigma, \gamma\} = \sigma H = \gamma H$ $\qquad$ $H\beta = \{\beta, \gamma, \sigma\} = H\gamma = H\sigma$

Jadi banyaknya koset kiri dan koset kanan adalah dua.

Dari contoh 2.7 terlihat bahwa sebuah grup akan dipartisi menjadi koset-koset kiri (kanan) dari subgrupnya.

Definisi 2.8 Kelas

Kumpulan dari himpunan koset kiri (kanan) *H* yang berbeda dari grup *G* akan membentuk partisi grup *G*, yaitu:

1. Setiap anggota *G* akan berada paling sedikit pada satu koset kiri (kanan) *H*
2. Dua koset kiri (kanan) yang berbeda tidak memiliki anggota yang sama.

Partisi yang mempunyai sifat seperti ini disebut kelas.

Contoh 2.8

Perhatikan contoh 2.7. Koset-koset kiri (kanan) yang terbentuk yaitu:

Koset Kiri *H* terhadap *G*	Koset Kanan *H* terhadap *G*
$\alpha H = \{\alpha, \varepsilon, \theta\} = \varepsilon H = \theta H$	$H\alpha = \{\alpha, \varepsilon, \theta\} = H\varepsilon = H\theta$
$\beta H = \{\beta, \sigma, \gamma\} = \sigma H = \gamma H$	$H\beta = \{\beta, \gamma, \sigma\} = H\gamma = H\sigma$

Sehingga kelas-kelasnya adalah αH dan βH.

Sebelum memahami Teorema Lagrage terlebih dahulu dipahami tentang Hukum Kanselasi Kiri dan Kardinalitas suatu himpunan, sebagaimana tercantum pada teorema di bawah ini.

Teorema 2.1 Hukum Kanselasi Kiri

Dipunyai $\langle G, * \rangle$ grup dan $a, b, c \in G$. Hukum Kanselasi Kiri berbunyi:

Jika $a * b = a * c$ maka $b = c$

Bukti:

Ambil sebarang $a, b, c \in G$ dengan $a * b = a * c$.

Jelas karena G grup maka terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga $a^{-1} * a = e$.

Diperoleh $a * b = a * c \Leftrightarrow a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$

$$\Leftrightarrow (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$$

$$\Leftrightarrow e * b = e * c$$

$$\Leftrightarrow b = c.$$

Jadi terbukti jika $a * b = a * c$ maka $b = c$ dan Hukum Kanselasi Kiri berlaku pada grup.

Teorema 2.2 Kardinalitas

Jika H adalah subgrup dari grup G dan $|H| = k$ maka setiap koset kiri (kanan) H memiliki kardinalitas k.

Bukti:

Buat pemetaan $\varphi: H \to gH$ dengan $\varphi(h) = gh, \forall h \in H$ dan $g \in G$.

Akan ditunjukkan φ bijektif.

i. Ambil sembarang $h_1, h_2 \in H$ dengan $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$.

   Maka $gh_1 = gh_2$.

   Berdasarkan hukum kanselasi kiri diperoleh $h_1 = h_2$.

   Jadi jika $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$ maka $h_1 = h_2$ sehingga φ injektif.

ii. Ambil sebarang $y \in gH$.

   Maka $y = gh_0$ untuk suatu $h_0 \in H$.

   Pilih $x = h_0$.

   Diperoleh $\varphi(x) = \varphi(h_0) = gh$ [illegible] y.

Jadi $\forall y \in gH$ terdapat $x \in H$ dengan $\varphi(x) = y$ sehingga φ surjektif.

Berdasarkan i dan ii dapat disimpulkan bahwa φ bijektif sehingga H dan gH mempunyai elemen yang sama banyak.

Sehingga jika $|H| = k$ maka $|gH| = k$ untuk setiap $g \in G$.

Jadi setiap koset kiri H memiliki kardinalitas yang sama.

Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan bahwa H juga mempunyai elemen yang sama banyaknya dengan Hg untuk setiap $g \in G$.

Contoh 2.9

Perhatikan contoh 2.7. Jelas $|H| = 3$ dan $|\alpha H| = |\beta H| = |H\alpha| = |H\beta| = 3$.

Jadi setiap koset kiri (kanan) H memiliki kardinalitas 3.

Teorema 2.3 Lagrage

Order grup berhingga dapat dibagi oleh order sembarang subgrupnya.

Bukti:

Misal $H \subset G$ dengan $|G| = n$ dan $|H| = m$.

Akan ditunjukkan $m|n$.

Karena G berhingga maka terdapat sejumlah berhingga koset kiri dari H, namakan $g_1H, g_2H, \dots, g_rH$.

Berdasarkan Teorema 2.2 $|g_1H| = |g_2H| = \cdots = |g_rH| = m$.

Karena g_iH untuk $i = 1,2, \dots, r$ membentuk partisi pada G maka

$$|g_1H| + |g_2H| + \cdots + |g_rH| = n$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{m + m + \cdots + m}_{r} = n$$

$$\Leftrightarrow rm = n.$$

Jadi $m|n$.

Jadi order grup berhingga dapat dibagi oleh order sembarang grup bagiannya.

Contoh 2.10

Dipunyai $\langle H, o\rangle$ subgrup $\langle S_3, o\rangle$ dengan $S_3 = G = \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \sigma, \theta\}$ dan $H = \{\alpha, \varepsilon, \theta\}$.

Jelas $|G| = 6$ dan $|H| = 3$.

Sehingga $\frac{|G|}{|H|} = \frac{6}{3} = 2$

Jadi order *G* dapat dibagi dengan order *H*.

2.1.4 Grup Aksi

Grup dapat diterapkan pada himpunan. Hal tersebut bergantung dari operasi biner yang membangun grup tersebut. Selanjutnya akan didefinisikan sebuah operasi biner yang mengawankan dua elemen menggunakan *Cartesian Product*.

Didefinisikan pemetaan $*: A \times B \to C$ dengan operasi biner *:

$a * b = c$ untuk $a \in A, b \in B$, dan $c \in C$.

Ini berarti sebarang elemen $a \in A$ dipasangkan dengan elemen $b \in B$ akan menghasilkan elemen $c \in C$. Sekarang pandang $A = G, B = X$, dan $C = X$ dimana G adalah grup dan X adalah himpunan. Diperoleh pemetaan $*: G \times X \to X$ dengan operasi biner *:

$g * x = y$ disingkat menjadi $gx = y$ untuk $g \in G$dan $x, y \in X$.

Definisi 2.9 Grup Aksi

Misalkan *X* adalah suatu himpunan dan *G* adalah grup.

Aksi dari *G* pada *X* (grup *G* yang beraksi pada *X*) adalah pemetaan

$*: G \times X \to X$ dengan $g * x = y \Leftrightarrow gx = y$ untuk $g \in G$ dan $x, y \in X$, yang memenuhi:

1. $e(x) = x$ untuk semua $x \in X$.
2. $(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2(x))$ untuk semua $x \in X$ dan semua $g_1, g_2 \in G$.

Jika memenuhi syarat di atas, *X* disebut *G*-Set.

Contoh 2.11

Dipunyai himpunan $X = \{1,2,3\}$ dan $H = \{\alpha, \varepsilon, \theta\}$ grup. Akan ditunjukkan bahwa X adalah H-Set.

Buat pemetaan $*: H \times X \to X$, dengan $hx = y$ untuk $h \in H$ dan $x, y \in X$

i). Ambil sembarang $x \in X$.

Jelas $\alpha \in H$ dan $\alpha(x) = x$ untuk setiap $x \in X$.

Jadi $\forall x \in X$ terdapat $e = \alpha \in H$ yang bersifat $e(x) = \alpha(x) = x$.

ii). Ambil sebarang $x \in X$.

Karena H adalah grup yang terbentuk dari operasi komposisi maka untuk setiap $f, g \in H$ berlaku:

$(fg)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Jadi untuk setiap $x \in X$dan $f, g \in H$ berlaku $(fg)(x) = f(g(x))$.

Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan *X* adalah *H*-Set.

2.1.5 Burnside Lemma

Burnside lemma adalah suatu lemma yang mendasari suatu jenis teknik perhitungan kombinatorik yang bernama Polya Enumeration. Untuk lebih

memahami Burnside Lemma terlebih dahulu akan dijelaskan tentang teorema penstabil dan teorema orbit-penstabil.

Teorema 2.4 G_x subgrup G

Jika X adalah G-Set maka G_x adalah subgroup dari G untuk setiap $x \in X$.

Bukti:

Jelas $G_x \subset G$.

Ambil sembarang $x \in X$ dan $g_1, g_2, g_3 \in G_x$.

i. Karena $g_1, g_2 \in G_x$ maka $g_1(x) = x$ dan $g_2(x) = x$.

   Akibatnya $(g_1 g_2)(x) = g_1\big(g_2(x)\big) = g_1(x) = x$.

   Jadi $g_1 g_2 \in G_x$ sehingga G_x tertutup terhadap operasi biner atas G.

ii. Jelas $e(x) = x$ sehingga $e \in G_x$.

   Jadi G_x mempunyai elemen netral yaitu e.

iii. Ambil sembarang $g \in G_x$.

   Jika $g \in G_x$ maka $g(x) = x$.

   Sehingga $x = e(x) = (g^{-1}g)(x) = g^{-1}\big(g(x)\big) = g^{-1}(x)$.

   Akibatnya $g^{-1} \in G_x$.

   Jadi $\forall\ g \in G_x$ terdapat $g^{-1} \in G_x$ sehingga $g^{-1}g = e$.

iv. Jelas $g_1(g_2 g_3)(x) = g_1 k(x) = g_1\big(k(x)\big) = g_1(x) = x$ dan

   $(g_1 g_2) g_3(x) = l g_3(x) = l\big(g_3(x)\big) = l(x) = x$.

   Jadi $g_1(g_2 g_3)(x) = (g_1 g_2) g_3(x)$.

Dari (i) - (iv) disimpulkan G_x subgrup G.

Teorema 2.5 Orbit-Penstabil

Jika X adalah G-Set dan $x \in X$ maka :

1. $\forall x \in X, |Gx|.|G_x| = |G|$ (*Teorema Orbit-Penstabil*)

$$\Leftrightarrow |Gx| = \frac{|G|}{|G_x|}$$

2. $\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |F(g)|$

Bukti:

1. Ide utama dari Teorema Orbit-Penstabil adalah, apabila satu elemen pada Gx dapat dipetakan tepat satu elemen pada $\frac{G}{G_x}$, atau dengan kata lain ditunjukkan pemetaan $*: Gx \to \frac{G}{G_x}$ adalah pemetaan bijektif.

   Buat pemetaan $\psi: Gx \to \frac{G}{G_x}$.

   Misalkan $r = \frac{|G|}{|G_x|}$.

   Berdasarkan Teorema 2.4 diperoleh G_x adalah suatu subgrup dari G.

   Dan berdasarkan Teorema2.2 juga diperoleh $|G_x| = |gG_x|, \ \forall g \in G$.

   Sehingga

$$\frac{|G|}{|G_x|} = r = \frac{|G|}{|gG_x|}.$$

   Jelas $\frac{|G|}{|gG_x|} = r \Leftrightarrow |G| = r.|gG_x|$

$$\Leftrightarrow |G| = |g_1G_x| + |g_2G_x| + |g_3G_x| + \cdots + |g_rG_x|$$

   Jadi *r* adalah banyaknya koset kiri G_x terhadap G.

   Sehingga pemetaannya sekarang menjadi $\psi: Gx \to Y$ dengan

   $Y = \{g_1G_x, g_2G_x, g_3G_x, \dots, g_r\cup_x\}$.

   Ambil $x_1 \in Gx$.

Karena $x_1 \in Gx$ maka terdapat $g_1 \in G$sehingga $g_1 x = x_1$.

Didefinisikan $\psi(x_1)$ sebagai koset kiri $g_1 G_x$ dari G_x, $\psi(x_1) = g_1 G_x$.

Akan ditunjukkan peta ψ terdefinisi dengan baik (*well-defined*), artinya $g_1 G_x$ tunggal.

Andaikan $g_1' x = x_1$.

Ditunjukkan $g_1 G_x = g_1' G_x$.

Jelas $g_1\ x = g_1' x$.

Kaena $g_1 \in G$ dan G grup maka terdapat ${g_1}^{-1} \in G$ sehingga

$$g_1\ x = g_1' x \Leftrightarrow {g_1}^{-1}(g_1 x) = {g_1}^{-1}(g_1' x)$$

$$\Leftrightarrow ({g_1}^{-1} g_1)x = ({g_1}^{-1} g_1')x$$

$$\Leftrightarrow ex = ({g_1}^{-1} g_1')x$$

$$\Leftrightarrow x = ({g_1}^{-1} g_1')x.$$

Akibatnya ${g_1}^{-1} g_1' \in G_x$.

Sehingga $g_1({g_1}^{-1} g_1') = (g_1 {g_1}^{-1}) g_1'$

$$= (g_1 {g_1}^{-1}) g_1'$$

$$= e g_1'$$

$$= g_1' \in g_1 G_x.$$

Karena $g_1' \in g_1 G_x$ maka $g_1 G_x = g_1' G_x$.

Jadi pemetaan ψ terdefinisi dengan baik (*well-defined*).

Buat pemetaan $\psi: Gx \to Y$ dengan $\psi(x_i) = g_i G_x$.

Ditunjukkan ψ bijektif.

(i). Ambil sembarang $x_1, x_2 \in Gx$ dengan $\psi(x_1) = \psi(x_2)$.

Karena $x_1, x_2 \in Gx$ maka terdapat $g_1, g_2 \in G$ yang memenuhi $x_1 = g_1 x$ dan $x_2 = g_2 x$.

Jelas $\psi(x_1) = \psi(x_2) \Leftrightarrow g_1 G_x = g_2 G_x$ sehingga $g_2 \in g_1 G_x$.

Akibatnya $g_2 = g_1 g$ untuk suatu $g \in G_x$.

Sehingga $x_2 = g_2 x = (g_1 g)x = g_1(gx) = g_1 x = x_1$.

Jadi apabila $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ maka $x_1 = x_2$ sehingga ψ injektif.

(ii). Ambil sembarang $y \in Y$.

Ini berarti $y = g_i G_x$ untuk suatu $g_i \in G$.

Jelas $g_i x = x_i \in Gx$.

Pilih $x = x_i$.

Diperoleh $\psi(x) = \psi(x_i) = g_i G_x = y$.

Jadi $\forall y \in g_i G_x$ terdapat $x \in Gx$ dengan $\psi(x) = y$ sehingga ψ surjektif.

Dari (i) dan (ii) disimpulkan bahwa ψ pemetaan yang bijektif.

Jadi $|Gx| = |Y| \Leftrightarrow |Gx| = r$

$$\Leftrightarrow |Gx| = \frac{|G|}{|gG_x|}$$

$$\Leftrightarrow |Gx| = \frac{|G|}{|G_x|}.$$

2. Diketahui $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$ dan $F(g) = \{x \in X : g(x) = x\}$.

Perhatikan pasangan (g, x) ıgan $g(x) = x$, dimana banyaknya pasangan tersebut adalah sebanyak *N* buah.

Jelas pasangan (g, x) ditentukan oleh g dan x.

Karena ditentukan oleh g maka untuk setiap $g \in G$ terdapat $|F(g)|$ pasangan. Sehingga

$$\sum_{g \in G} |F(g)| = N$$

Karena ditentukan juga oleh x, maka untuk setiap $x \in X$ terdapat $|G_x|$ pasangan. Sehingga

$$\sum_{x \in X} |G_x| = N$$

Akibatnya

$$\sum_{g \in G} |F(g)| = N = \sum_{x \in X} |G_x|$$

Jadi

$$\sum_{g \in G} |F(g)| = \sum_{x \in X} |G_x|$$

Contoh 2.12

Dipunyai $X = \{1,2,3\}$ dan $\langle G, o \rangle$ subgrup $\langle S_3, o \rangle$ dengan $G = \{\alpha, \varepsilon, \theta\}$.

1. Untuk $x = 1$:

   Jelas $|G1| = |\{g(1): g \in G\}| = |\{1,3,2\}| = 3$

   $|G_1| = |\{g \in G: g(1) = 1\}| = |\{\alpha\}| = 1$ dan

   $|G| = 3$.

   Sehingga $|G1|.|G_1| = 3.1 = 3 \vdots \quad G|$

   Untuk $x = 2$:

Jelas $|G2| = |\{g(2): g \in G\}| = |\{2,1,3\}| = 3$

$|G_2| = |\{g \in G: g(2) = 2\}| = |\{\alpha\}| = 1$ dan

$|G| = 3.$

Sehingga $|G2|.|G_2| = 3.1 = 3 = |G|$

Untuk $x = 3$:

Jelas $|G3| = |\{g(3): g \in G\}| = |\{3,2,1\}| = 3$

$|G_3| = |\{g \in G: g(3) = 3\}| = |\{\alpha\}| = 1$ dan

$|G| = 3.$

Sehingga $|G3|.|G_3| = 3.1 = 3 = |G|$

Jadi $\forall x \in X$ berlaku $|Gx|.|G_x| = |G|$.

2. Jelas $\sum_{x \in X} |G_x| = |G_1| + |G_2| + |G_3| = 1 + 1 + 1 = 3$ dan

$$\sum_{g \in G} |F(g)| = |F(\alpha)| + |F(\varepsilon)| + |F(\theta)| = 3 + 0 + 0 = 3.$$

Sehingga $\sum_{x \in X} |G_x| = 3 = \sum_{g \in G} |F(g)|$.

Jadi $\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |F(g)|$.

Burnside Lemma sendiri sebenarnya menjelaskan tentang hubungan antara orbit suatu himpunan dengan grup yang beraksi padanya.

Teorema 2.6 Burnside Lemma

Misal *G* adalah grup permutasi ya beraksi pada *X* dengan *G* dan *X* adalah hingga. Jika *k* adalah banyaknya orbit di *X* pada *G,* maka:

$$k.|G| = \sum_{g \in G} |F(g)|$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$$

Bukti:

Dari Teorema 2.5 diketahui $\forall x \in X, |Gx|.|G_x| = |G|$,

$$\Leftrightarrow |G_x| \quad = \frac{|G|}{|Gx|}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Gx|}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{x \in X} |G_x| = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|} \quad \dots\dots (1)$$

dan

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |F(g)| \quad \dots\dots (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$\sum_{g \in G} |F(g)| = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|}$$

Misal $k = \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|}$

maka

$$\textstyle\sum_{g \in G} |F(g)| = |G|.k \;\Leftrightarrow\; k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$$

Jadi banyaknya orbit di *X* terhadap *G* adalah

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$$

Contoh 2.13

Dipunyai $G = \{\alpha, \varepsilon, \theta\}$ grup yang beraksi pada $X = \{1,2,3\}$.

Jelas $|G| = 3$ dan

$$\sum_{g \in G} |F(g)| = |F(\alpha)| + |F(\varepsilon)| + |F(\theta)|$$

$$= 3 + 0 + 0$$

$$= 3.$$

Jadi banyaknya orbit di X terhadap G adalah

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)| = \frac{1}{3}.3 = 1$$

2.1.6 Indeks Siklik

Dalam suatu permutasi, *cycle* terbentuk dari orbit yang dihasilkan dari permutasi tersebut. Di dalam *cycle* urutan sangat diperhatikan, beda halnya dengan orbit. Sebagai contoh orbit $\{1,3,4\} =$ orbit $\{1,4,3\} =$ orbit $\{3,4,1\}$ dan seterusnya. Tetapi, untuk *cycle* $(1,3,4) =$ *cycle* $(3,4,1) =$ *cycle* $(4,1,3) \neq$ *cycle* $(1,4,3)$. Definisi *cycle* sendiri diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.10 *Cycle*

Suatu permutasi $\sigma \in S_n$ dinamakan *cycle* (untai) apabila σ paling banyak mempunyai satu orbit yang memuat elemen lebih dari satu. Panjang *cycle* didefinisikan sebagai banyaknya elemen dalam orbit terbesar.

Contoh 2.14

Dipunyai $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, dan $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Orbit dari α adalah $\{1\},\{2\},\{3\}$.

Orbit dari β adalah $\{1\},\{3,2\}$.

Orbit dari θ adalah $\{2,3,1\}$.

Karena α,β,θ paling banyak mempunyai satu orbit yang memuat lebih dari satu elemen maka α,β,θ merupakan *cycle*. Disimbolkan $\alpha = (1), \beta = (3,2)$, dan $\theta = (2,3,1)$. Sedangkan panjang *cycle* $\alpha = 1$, panjang *cycle* $\beta = 2$, dan panjang *cycle* $\theta = 3$.

Dua buah *cycle* dinamakan saling asing apabila berasal dari dua orbit yang saling asing.

Teorema 2.7

Setiap permutasi σ dari himpunan berhingga dapat dinyatakan sebagai hasil kali *cycle* yang saling asing.

Bukti:

Misalkan $O_1, O_2, O_3, \dots, O_r$ adalah orbit-orbit dari σ.

Jelas $O_i \cap O_j = \emptyset$ apabila $i \neq j$.

Dibentuk *cycle* $\mu_i, i = 1,2,\dots,r$ dengan $\mu_i(x) = \begin{cases} \sigma(x) \text{apabila } x \in O_i \\ x \quad \text{apabila } x \notin O_i \end{cases}$

Ditunjukkan $\sigma = \mu_1\mu_2 \dots \mu_r$.

Ambil sebarang $x \in X = \{1,2,3,..,n\}$.

Misal $x \in O_k$untuk tepat satu nilai k.

Diperoleh $(\mu_1\mu_2 \dots \mu_r)(x) = (\mu_1\mu_2 \dots \mu_{k-1}\mu_k\mu_{k+1} \dots \mu_r)(x)$

$$= \mu_1\mu_2 \dots \mu_{k-1}\big(\mu_k(x)\big)$$

$$= \quad {}_2 \dots \mu_{k-1}\big(\sigma(x)\big)$$

$$= \sigma(x).$$

Jadi $\sigma = \mu_1\mu_2 \dots \mu_r$.

Karena $O_1, O_2, \dots, O_r$ saling asing maka $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ merupakan *cycle* yang saling asing.

Telah dijelaskan bahwa suatu permutasi dapat disajikan dalam bentuk hasil kali *cycle* yang saling asing. *Cycle-cycle* yang terbentuk ini pastilah mempunyai panjang. Ada yang panjangnya sama dan ada juga yang berbeda. Sehingga hasil kali *cycle* yang saling asing dari suatu permutasi dapat dikelompokkan berdasarkan panjangnya.

Definisi 2.11 Tipe Untai dan Bobot

Diberikan penyajian untai (*cycle*) dari *f* (permutasi suatu himpunan dengan banyak anggota *n*) yang memuat sebanyak a_1 untai dengan panjang 1, sebanyak a_2 untai dengan panjang 2, sebanyak a_3 untai dengan panjang 3 ,…, sebanyak a_i untai dengan panjang *i* dan *i* = 1,2,3,4,…,n , maka tipe untai *f* disimbolkan dengan vektor $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ dan bobot *f* adalah bilangan bulat positif $W = 1^{a_1}2^{a_2}3^{a_3} \dots n^{a_n}$.

Contoh 2.15

Dipunyai $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Jelas *cycle* $\varepsilon = (3,2,1)$. Sehingga $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$.

Jadi tipe untai $\varepsilon = [a_1, a_2, a_3] = [0,0,1]$, dan bobot $\varepsilon = 1^{a_1}2^{a_2}3^{a_3} = 1^0 2^0 3^1 = 3$.

Dari definisi 2.11 akan berakibat munculnya definisi sebagai berikut.

Definisi 2.12 Indeks Siklik

Diberikan G adalah grup permutasi dengan order m dari suatu himpunan yang banyak anggotanya n dan $g \in G$ bertipe untai $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$. Indeks siklik g didefinisikan sebagai: $Z(g; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = {x_1}^{a_1} {x_2}^{a_2} {x_3}^{a_3} \dots {x_n}^{a_n}$ dan indeks siklik grup G didefinisikan:

$$Z(G; g; x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} Z(g; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Contoh 2.16

Dipunyai $G = \{\alpha, \varepsilon, \theta\}$ grup permutasi dari himpunan $X = \{1,2,3\}$.

Jelas $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. *Cycle* $\alpha = (1)(2)(3)$ dengan $a_1 = 3, a_2 = 0, a_3 = 0$.

Tipe untai $\alpha = [300]$ dan bobot $\alpha = 1^3 = 1$

$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Cycle* $\varepsilon = (3,2,1)$ dengan $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1$.

Tipe untai $\varepsilon = [001]$ dan bobot $\alpha = 3^1 = 3$

$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. *Cycle* $\theta = (2,3,1)$ dengan $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1$.

Tipe untai $\theta = [001]$ dan bobot $\theta = 3^1 = 3$

Sehingga Indeks siklik α: $Z(\alpha; x_1, x_2, x_3) = {x_1}^3$,

Indeks siklik ε: $Z(\varepsilon; x_1, x_2, x_3) = {x_3}^1$, dan

Indeks siklik θ: $Z(\theta; x_1, x_2, x_3) = {x_3}^1$.

Jadi indeks siklik G: $Z(G; x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}({x_1}^3 + 2x_3)$.

2.1.7 Persediaan Pola

Misalnya diberikan tiga simpul yang membentuk sebuah segitiga sama sisi. Simpul-simpul dalam segitiga tersebut akan diberi warna merah dan biru. Segitiga-segitiga yang berbeda yang terbentuk yaitu segitiga dengan titik berwarna merah semua, segitiga dengan titik berwarna dua merah dan satu biru, segitiga dengan titik berwarna dua biru dan satu merah, dan segitiga dengan titik berwarna biru semua. Sehingga banyaknya segitiga yang berbeda ada empat. Untuk memudahkan dalam menentukan hal semacam itu diberikan definisi-definisi berikut.

Definisi 2.13 Pewarnaan

Fungsi *f* dari himpunan berhingga *X* ke himpunan *Y* disebut pewarnaan *X*. Himpunan berhingga *Y* disebut warna, sedangkan himpunan semua jenis pewarnaan *X* terhadap warna *Y* disebut himpunan *C*. Dua pewarnaan $f, g \in C$ disebut ekivalen (tak dapat dibedakan) terhadap grup *G*, grup permutasi di *X* jika $\exists \pi \in G$ sehingga $f(x) = g(\pi(x))$ untuk $\forall x \in X$.

Contoh 2.17

Dipunyai $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a, b\}$ dan $G = \{\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \varepsilon, \theta\}$ grup permutasi dari X. Banyaknya pewarnaan X sama dengan banyaknya fungsi dari X ke Y, yaitu $|Y|^{|X|} = 2^3 = 8$. Jenis-jenis pewarnaan X:

$f_1: 1 \to a$	$f_2: 1 \to a$	$f_3: 1 \to a$	$f_4: 1 \to b$
$2 \to a$	$2 \to a$	$2 \to b$	$2 \to a$
$3 \to a$	$3 \to b$	$3 \to a$	$3 \to a$
$f_5: 1 \to b$	$f_6: 1 \to b$	$f_7: 1 \to a$	$f_8: 1 \to b$

$2 \to b$	$2 \to a$	$2 \to b$	$2 \to b$
$3 \to a$	$3 \to b$	$3 \to b$	$3 \to b$

Jelas $Y = \{a, b\}$ disebut warna-nya dan salah satu pewarnaan X adalah f_1.

Himpunan semua jenis pewarnaan X terhadap warna Y adalah

$C = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$.

Akan ditunjukkan f_2 dan f_3 pewarnaan yang ekivalen.

Jelas $f_2, f_3 \in C$

Untuk $x = 1$ diperoleh

$$f_2(\beta(1)) = f_2(1) = a = f_3(1)$$

Untuk $x = 2$ diperoleh

$$f_2(\beta(2)) = f_2(3) = b = f_3(2)$$

Untuk $x = 3$ diperoleh

$$f_2(\beta(3)) = f_2(2) = a = f_3(3)$$

Jadi karena $\forall x \in X, \exists \beta \in G$ sehingga $f_2(\beta(x)) = f_3(x)$ maka f_2, f_3 merupakan pewarnaan yang ekivalen.

Definisi 2.14 Pola

Kelas-kelas ekivalen yang mempartisi himpunan C dengan relasi tak dapat dibedakan disebut pola-pola di C terhadap grup G.

Contoh 2.18

Perhatikan contoh 2.17. Dipunyai $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a, b\}$, dan

$G = \{\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \varepsilon, \theta\}$ grup permutasi dari X.

Jelas $C = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$.

Untuk setiap $\pi \in G$ pola-pola di C yaitu:

(1). Pola Pertama (P_1)

Jelas $f_2(\beta(1)) = f_2(1) = a = f_3(1)$

$f_2(\beta(2)) = f_2(3) = b = f_3(2)$

$f_2(\beta(3)) = f_2(2) = a = f_3(3)$

Karena $\exists\beta \in G$ sehingga $f_2(\beta(x)) = f_3(x)$ maka f_2, f_3 merupakan pewarnaan yang ekivalen.

Jelas $f_3(\sigma(1)) = f_3(2) = b = f_4(1)$

$f_3(\sigma(2)) = f_3(1) = a = f_4(2)$

$f_3(\sigma(3)) = f_3(3) = a = f_4(3)$

Karena $\exists\sigma \in G$ sehingga $f_3(\sigma(x)) = f_4(x)$ maka f_3, f_4 merupakan pewarnaan yang ekivalen.

Jelas $f_2(\varepsilon(1)) = f_2(3) = b = f_4(1)$

$f_2(\varepsilon(2)) = f_2(1) = a = f_4(2)$

$f_2(\varepsilon(3)) = f_2(2) = a = f_4(3)$

Karena $\exists\varepsilon \in G$ sehingga $f_3(\pi(x)) = f_4(x)$ maka f_2, f_4 merupakan pewarnaan yang ekivalen.

Sehingga f_2, f_3, f_4 adalah pewarnaaan yang ekivalen.

Jadi $P_1 = \{f_2, f_3, f_4\}$.

(2). Pola Kedua (P_2)

Dengan cara yang sama untuk setiap $x \in X$ diperoleh

$f_5(\beta(x)) = f_6(x)$ $\qquad$ $f_6(\sigma(x)) = f_7(x)$

$f_5(\varepsilon(x)) = f_7(x)$

Sehingga f_5, f_6, f_7 adalah pewarnaaan yang ekivalen.

Jadi $P_2 = \{f_5, f_6, f_7\}$.

(3). Pola Ketiga (P_3)

Untuk setiap $x \in X$ diperoleh

$f_1\big(\alpha(x)\big) = f_1(x)$.

Jadi $P_3 = \{f_1\}$.

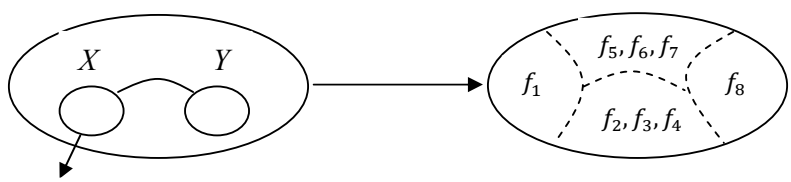
(4). Pola Keempat (P_4)

Untuk setiap $x \in X$ diperoleh

$f_4\big(\alpha(x)\big) = f_4(x)$.

Jadi $P_4 = \{f_4\}$.

Jadi pola-pola di himpunan C yang terbentuk adalah $P_1 = \{f_2, f_3, f_4\}$, $P_2 = \{f_5, f_6, f_7\}$, $P_3 = \{f_1\}$, dan $P_4 = \{f_4\}$.



G grup permutasi di *X*

Gambar 2.1 Pola-pola di *C*

Definisi 2.15 Persediaan Pola (Pattern Inventory/PI)

Misalkan fungsi bobot w memetakan himpunan Y ke sebuah himpunan r warna, $\{w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r)\}$. Persediaan pola C terhadap grup G adalah:

$$PI(G; w(y_1), w(y_2), \dots, w(y_r) = \sum_{n_1+n_2\dots+n_r=n} K(n_1, n_2, \dots, n_r)[w(y_1)]^{n_1}[w(y_2)]^{n_2} \dots [w(y_r)]^{n_r}$$

$K(n_1, n_2, n_3, \dots, n_r)$ adalah koefisien yang menyatakan banyaknya pewarnaan yang dapat dibedakan (banyak pola) sehingga warna $w(y_1)$ bersesuaian dengan n_1 anggota, $w(y_2)$ bersesuaian dengan n_2 anggota,…, dan $w(y_r)$ bersesuaian dengan n_r anggota.

Contoh 2.19

Dari contoh 2.18 pola-pola di C terhadap grup G yaitu $\{f_2, f_3, f_4\}$, $\{f_5, f_6, f_7\}$, $\{f_1\}$, dan $\{f_4\}$. Misalkan fungsi w memetakan himpunan $Y = \{a, b\}$ ke dua warna sehingga $w(a) = R$ (Red), $w(b) = B$ (Blue) dan $G = \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \sigma, \theta\}$ adalah grup permutasi di X. Persediaan pola di C terhadap grup G sebagai berikut.

Jelas terdapat 4 kemungkinan nilai (n_1, n_2): $(3,0), (2,1), (1,2), (0,3)$.

Sehingga

$$PI(G; w(a), w(b)) = \sum_{n_1+n_2=n} K(n_1, n_2)[w(a)]^{n_1}[w(b)]^{n_2}$$

$$\Leftrightarrow PI(H; R, B) = K(3,0)R^3 + K(1,2)R^2B + K(2,1)RB^2 + K(0,3)B^3$$

Pola-pola di C terhadap grup G yaitu:

(1). $P_1 = \{f_2, f_3, f_4\}$

Jelas

$$f_2: 1 \to a \xrightarrow{w} w(a) = R \quad f_3: 1 \to a \xrightarrow{w} w(a) = R \quad f_4: 1 \to b \xrightarrow{w} w(b) = B$$

$$2 \to a \xrightarrow{w} w(a) = R \qquad 2 \to b \xrightarrow{w} w(b) = B \qquad 2 \to a \xrightarrow{w} w(a) = R$$

$$3 \to b \xrightarrow{w} w(b) = B \qquad 3 \to a \xrightarrow{w} w(a) = R \qquad 3 \to a \xrightarrow{w} w(a) = R$$

Jadi pola $P_1 = \{f_2, f_3, f_4\}$ akan dibawa kewarna dua merah satu biru R^2B

(2). $P_2 = \{f_5, f_6, f_7\}$

Jelas

$f_5: 1 \to b \overset{w}{\to} w(b) = B$ $f_6: 1 \to b \overset{w}{\to} w(b) = B$ $f_7: 1 \to a \overset{w}{\to} w(a) = R$

$2 \to b \overset{w}{\to} w(b) = B$ $2 \to a \overset{w}{\to} w(a) = R$ $2 \to b \overset{w}{\to} w(b) = B$

$3 \to a \overset{w}{\to} w(a) = R$ $3 \to b \overset{w}{\to} w(b) = B$ $3 \to b \overset{w}{\to} w(b) = B$

Jadi pola $P_2 = \{f_5, f_6, f_7\}$ akan dibawa kewarna dua biru satu merah RB^2

(3). $P_3 = \{f_1,\}$

Jelas

$f_1: 1 \to a \overset{w}{\to} w(a) = R$

$2 \to a \overset{w}{\to} w(a) = R$

$3 \to a \overset{w}{\to} w(a) = R$

Jadi pola $P_3 = \{f_1\}$ akan dibawa kewarna merah semua R^3

(4). $P_4 = \{f_8,\}$

Jelas

$f_8: 1 \to b \overset{w}{\to} w(b) = B$

$2 \to b \overset{w}{\to} w(b) = B$

$3 \to b \overset{w}{\to} w(b) = B$

Jadi pola $P_4 = \{f_8\}$ akan dibawa kewarna biru semua B^3

Sehingga $PI(G; R, B) = 1R^3 + 1R^2B + 1RB^2 + 1B^3$.

Berdasarkan definisi 2.14 dan definisi 2.15 di atas dapat dengan mudah menentukan banyaknya pola suatu himpunan terhadap suatu grup.

2.1.8 Isomorfisma Grup

Dalam aljabar abstrak, dua buah grup dikatakan isomorfisma grup jika terdapat homomorfisma yang bersifat bijektif. Pengertian homomorfisma sendiri diberikan pada definisi 2.16. Dua buah grup G dan H dikatakan isomorfis jika G mempunyai struktur yang identik dengan H, yaitu G dan H mempunyai sifat atau struktur yang dapat dikatakan sama/mirip/identik.

Teorema 2.8 π' Permutasi dan G' Grup

Diberikan $C = \{f | f: X \to Y\}$ dan X,Y adalah himpunan berhingga, juga diketahui bahwa G adalah grup permutasi yang beraksi pada X. Untuk tiap $\pi \in G$ didefinisikan pemetaan π' dari C ke C dengan sifat:

$\pi'\big(f(x)\big) = f(\pi(x))$ untuk $\forall x \in X$ dan $\forall f \in C$, maka berlaku bahwa:

1. π' adalah permutasi di C.
2. $G' = \{\pi' : \pi \in G\}$ adalah grup

Bukti:

1. Buat pemetaan $\pi' : C \to C$ dengan $\pi'\big(f(x)\big) = f\big(\pi(x)\big)$, $\forall \pi \in G$.

   Akan ditunjukkan π' bijektif.

   Ambil sebarang $x \in X$ dan $f \in C$.

   (i). Ambil sebarang $f_1(x), f_2(x) \in C$ dengan $\pi'\big(f_1(x)\big) = \pi'(f_2(x))$.

   Karena $\pi'\big(f_1(x)\big) = \pi'(f_2(x))$ maka $f_1\big(\pi(x)\big) = f_2\big(\pi(x)\big)$.

   Dan karena $\pi \in G$ dan G grup maka terdapat π^{-1}, sehingga

$$(f_1\big(\pi(x)\big)\big(\pi^{-1}(x)\big) = (f_2\big(\pi(x)\big))(\pi^{-1}(x))$$

$$\Leftrightarrow f_1\left(\pi\big(\pi^{-1}(x)\big)\right) = f_2\left(\pi\big(\pi^{-1}(x)\big)\right)$$

$$\Leftrightarrow f_1\big((\pi\pi^{-1})(x)\big) \qquad = f_2\big((\pi\pi^{-1})(x)\big)$$

$$\Leftrightarrow f_1\big(e(x)\big) \qquad = f_2\big(e(x)\big)$$

$$\Leftrightarrow f_1(x) \qquad = f_2(x)$$

Jadi $\forall f_1(x), f_2(x) \in C$ dengan $\pi'\big(f_1(x)\big) = \pi'(f_2(x))$ mengakibatkan $f_1(x) = f_2(x)$, sehingga π' injektif.

(ii). Ambil sembarang $y \in C$.

Jelas $y = f_0(x)$.

Ini berarti $f_0(x) = f_0\big(e(x)\big)$

$$= f_0\big((\pi\pi^{-1})(x)\big)$$

$$= f_0\left(\pi\big(\pi^{-1}(x)\big)\right)$$

$$= \pi'(f_0(\pi^{-1}(x)))$$

Karena $\pi^{-1} \in G$ dan G adalah grup permutasi yang beraksi pada X maka $\pi^{-1}(x) \in X$.

Sehingga $f_0(\pi^{-1}(x)) \in C$.

Pilih $x_0 = f_0(\pi^{-1}(x))$.

Akibatnya $\pi'(x_0) = \pi'(f_0(\pi^{-1}(x)))$

$$= f_0(x).$$

Jadi $\forall y \in C$ terdapat $x_0 \in C$ sehingga $\pi'(x_0) = y$.

Akibatnya π' surjektif.

Dari (i) dan (ii) disimpulkan π' bijektif

Jadi π' adalah permutasi di C.

2. Dipunyai $G' = \{\pi' : \pi \in G\}$.

   Untuk membuktikan G' grup, cukup ditunjukkan G' tertutup terhadap operasi yang dikenai pada G, yaitu operasi komposisi.

   Jelas untuk setiap $\pi_1, \pi_2 \in G$ mengakibatkan terdapat $\pi'_1, \pi'_2 \in G'$.

   Akibatnya $\forall \pi_1 \pi_2 \in G$ juga mengakibatkan terdapat $\pi'_1 \pi'_2 \in G'$.

   Jelas $(\pi_1 \pi_2)'\big(f(x)\big) = f\big((\pi_1 \pi_2)(x)\big)$

   $$= f(\pi_1(\pi_2(x)))$$

   $$= \pi'_1(f(\pi_2(x)))$$

   $$= \pi'_1(\pi'_2(f(x))$$

   $$= (\pi'_1 \pi'_2)(f(x)),\ \forall f \in C \text{ dan } x \in X.$$

   Ini berarti $\pi'_1 \pi'_2 = (\pi_1 \pi_2)' \in G'$.

   Jadi sifat tertutup pada G' terpenuhi.

   Jadi $G' = \{\pi' : \pi \in G\}$ grup.

Contoh 2.20

Dipunyai $C = \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \sigma, \theta\}$, $X = \{1,2,3\}$, dan $Y = \{1,2,3\}$.

$G = \{\alpha, \varepsilon, \theta\}$ adalah grup permutasi yang beraksi pada *X*. Untuk tiap

$\pi \in G$ didefinisikan pemetaan π'dari *C* ke *C* dengan sifat

$\pi'\big(f(x)\big) = f(\pi(x))$ untuk $\forall x \in X$ dan $\forall f \in C$.

Akan ditunjukkan π' adalah permutasi di *C* dan $G' = \{\pi' : \pi \in G\}$ adalah grup.

Ambil sembarang $x \in X$ dan $f \in C$.

Untuk $\pi = \alpha$:

- Jika $f = \alpha$ maka $\pi'\big(\alpha(x)\big) = \alpha(\alpha(x))$.

Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh

$\pi'(\alpha(1)) = \alpha(\alpha(1))$; $\pi'(\alpha(2)) = \alpha(\alpha(2))$; $\pi'\big(\alpha(3)\big) = \alpha(\alpha(3)$

$\Leftrightarrow \pi'(1) = \alpha(1)$ $\Leftrightarrow \pi'(2) = \alpha(2)$ $\Leftrightarrow \pi'(3) = \alpha(3)$

$\Leftrightarrow \pi'(1) = 1$ $\Leftrightarrow \pi'(2) = 2$ $\Leftrightarrow \pi'(3) = 3$

Jadi $\pi' = \alpha$.

- Jika $f = \beta$ maka $\pi'\big(\beta(x)\big) = \beta(\alpha(x))$.

  Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh $\pi'(1) = 1$; $\pi'(3) = 3$; $\pi'(2) = 2$.

  Jadi $\pi' = \alpha$.

- Jika $f = \varepsilon$ maka $\pi'\big(\varepsilon(x)\big) = \varepsilon(\alpha(x))$.

  Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh $\pi'(3) = 3$; $\pi'(1) = 1$; $\pi'(2) = 2$.

  Jadi $\pi' = \alpha$.

- Jika $f = \gamma$ maka $\pi'\big(\gamma(x)\big) = \gamma(\alpha(x))$.

  Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh $\pi'(3) = 3$; $\pi'(2) = 2$; $\pi'(1) = 1$.

  Jadi $\pi' = \alpha$.

- Jika $f = \sigma$ maka $\pi'\big(\sigma(x)\big) = \sigma(\alpha(x))$.

  Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh $\pi'(2) = 2$; $\pi'(1) = 1$; $\pi'(3) = 3$.

  Jadi $\pi' = \alpha$.

- Jika $f = \theta$ maka $\pi'\big(\theta(x)\big) = \theta(\alpha(x))$.

  Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh $\pi'(2) = 2$; $\pi'(3) = 3$; $\pi'(1) = 1$.

  Jadi $\pi' = \alpha$.

Untuk $\pi = \varepsilon$:

- Jika $f = \alpha$ maka $\pi'\big(\alpha(x)\big) = \alpha(\varepsilon(x))$.

  Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh $\pi'(1) = 3;\ \pi'(2) = 1;\ \pi'(3) = 2$.

  Jadi $\pi' = \varepsilon$.

- Jika $f = \beta$ maka $\pi'\big(\beta(x)\big) = \beta(\varepsilon(x))$.

  Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh $\pi'(1) = 2;\ \pi'(3) = 1;\ \pi'(2) = 3$.

  Jadi $\pi' = \theta$.

- Jika $f = \varepsilon$ maka $\pi'\big(\varepsilon(x)\big) = \varepsilon(\varepsilon(x))$.

  Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh $\pi'(3) = 2;\ \pi'(1) = 3;\ \pi'(2) = 1$.

  Jadi $\pi' = \varepsilon$.

- Jika $f = \gamma$ maka $\pi'\big(\gamma(x)\big) = \gamma(\varepsilon(x))$.

  Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh $\pi'(3) = 1;\ \pi'(2) = 3;\ \pi'(1) = 2$.

  Jadi $\pi' = \theta$.

- Jika $f = \sigma$ maka $\pi'\big(\sigma(x)\big) = \sigma(\varepsilon(x))$.

  Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh $\pi'(2) = 3;\ \pi'(1) = 2;\ \pi'(3) = 1$.

  Jadi $\pi' = \theta$.

- Jika $f = \theta$ maka $\pi'\big(\theta(x)\big) = \theta(\varepsilon(x))$.

  Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh $\pi'(2) = 1;\ \pi'(3) = 2;\ \pi'(1) = 3$.

  Jadi $\pi' = \varepsilon$.

Untuk $\pi = \theta$:

- Jika $f = \alpha$ maka $\pi'\big(\alpha(x)\big) = \alpha(\theta(x))$.

  Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh $\pi'(1) = 2;\ \pi'(2) = 3;\ \pi'(3) = 1$.

  Jadi $\pi' = \theta$.

- Jika $f = \beta$ maka $\pi'\big(\beta(x)\big) = \beta(\theta(x))$.

  Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh $\pi'(1) = 3;\ \pi'(3) = 2;\ \pi'(2) = 1$.

  Jadi $\pi' = \varepsilon$.

- Jika $f = \varepsilon$ maka $\pi'\big(\varepsilon(x)\big) = \varepsilon(\theta(x))$.

  Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh $\pi'(3) = 1;\ \pi'(1) = 2;\ \pi'(2) = 3$.

  Jadi $\pi' = \theta$.

- Jika $f = \gamma$ maka $\pi'\big(\gamma(x)\big) = \gamma(\theta(x))$.

  Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh $\pi'(3) = 2;\ \pi'(2) = 1;\ \pi'(1) = 3$.

  Jadi $\pi' = \varepsilon$.

- Jika $f = \sigma$ maka $\pi'\big(\sigma(x)\big) = \sigma(\theta(x))$.

  Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh $\pi'(2) = 1;\ \pi'(1) = 3;\ \pi'(3) = 2$.

  Jadi $\pi' = \varepsilon$.

- Jika $f = \theta$ maka $\pi'\big(\theta(x)\big) = \theta(\theta(x))$.

  Sehingga $\forall x \in X$ diperoleh $\pi'(2) = 3;\ \pi'(3) = 1;\ \pi'(1) = 2$.

  Jadi $\pi' = \theta$

Jelas nilai-niai π' adalah $\alpha, \varepsilon, \theta$ yang merupakan permutasi-permutasi di C.

Jadi π' adalah permutasi di C.

Dipunyai $G' = \{\pi' : \pi \in G\}$.

Jelas $G' = \{\alpha, \varepsilon, \theta\} = \{\alpha', \varepsilon', \theta'\} = G$.

Karena $G = G'$ dan G grup maka G' juga merupakan grup.

Jadi $G' = \{\pi' : \pi \in G\}$ adalah grup.

Definisi 2.16 Isomorfisma grup

Misalkan G dan G' grup. Pemetaan $\varphi: G \to G'$ dinamakan homomorfisma grup apabila $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ untuk setiap $a, b \in G$.

Misalkan $\varphi: G \to G'$ homomorfisma. φ dinamakan isomorfisma apabila φ bijektif.

Contoh 2.21

Dipunyai grup $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ dan $\langle 2\mathbb{Z}, + \rangle$. Didefinisikan pemetaan $\alpha: \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ dengan $\alpha(n) = 2n$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan α homomorfisma.

Ambil sebamrang $a, b \in \mathbb{Z}$.

$\alpha(a + b) = 2(a + b) = 2a + 2b = \alpha(a) + \alpha(b)$.

Sehingga untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $\alpha(a + b) = \alpha(a) + \alpha(b)$.

Jadi α merupakan homomorfisma.

Akan ditunjukkan α isomorfisma.

Dipunyai α homomorfisma.

i. Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ dengan $(x) = \alpha(y)$.

   Jelas $\alpha(x) = \alpha(y) \Leftrightarrow 2x = 2y$

   $\Leftrightarrow x = y$.

Jadi $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ dengan $\alpha(x) = \alpha(y)$ berakibat $x = y$, sehingga α injektif.

ii. Ambil sebarang $y \in 2\mathbb{Z}$.

Jelas $y = 2x_0$ untuk suatu $x_0 \in \mathbb{Z}$.

Pilih $x = x_0$.

Diperoleh $\alpha(x) = \alpha(x_0) = 2x_0 = y$.

Jadi $\forall y \in 2\mathbb{Z}$ terdapat $x_0 \in \mathbb{Z}$ dengan $\alpha(x) = y$, sehingga α surjektif.

Dari (i) dan (ii) disimpulkan α bijektif.

Jadi $\alpha: \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ adalah isomorfisma grup.

Teorema Polya sebenarnya merupakan pengembangan dari definisi persediaan pola. Kalau dalam definisi persediaan pola sulit untuk menentukan banyaknya pola untuk jenis tertentu. Tetapi dengan Teorema Polya selain dapat dengan mudah menentukan banyaknya pola secara keseluruhan, dapat juga menentukan banyaknya pola untuk masing-masing jenis yang terbentuk. Seperti contoh 2.19, dengan menggunakan Teorema Polya dapat dengan mudah ditentukan banyaknya pola segitiga yang terbentuk dengan warna tertentu.

2.1.9 Teorema Polya I dan Pembuktiannya

Teorema Polya I

Diberikan $C = \{f | f: X \to Y\}$ dengan $|X| = n \geq 2$ dan $|Y| = r$. Jika G merupakan grup permutasi yang beraksi pada X dengan indeks siklik $Z(G;\ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ maka banyaknya pola di C terhadap G adalah $Z(G; r, r, r, \dots, r)$.

Bukti:

Pola-pola di *C* terhadap grup *G* (yang beraksi pada himpunan *X*) adalah orbit yang berbeda di *C* terhadap *G*. Berdasarkan isomorfisma grup Definisi 2.16, akan menghasilkan orbit-orbit di *C* terhadap *G'*. Sedangkan banyaknya pola-pola yang terjadi di *C'* terhadap *G'* diberikan oleh Teorema 2.6 (Burnside Lemma) yaitu:

$$k = \frac{1}{|G'|} \sum_{\pi' \in G'} |F(\pi')| \ \dots\dots\dots (*)$$

dengan $F(\pi') = \{f \in C: \pi'(f) = f\}$

Karena $\pi'(f) = f$ jika dan hanya jika $f\big(\pi(x)\big) = f(x)$ untuk $\forall x \in X$ dan karena $|G| = |G'|$ sebagai akibat Definisi 2.16 maka bentuk (*) yang memuat himpunan *C* dan grup *G'* dapat dibawa ke bentuk himpunan *X* dan grup *G* yang beraksi padanya, yaitu :

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \big| f \in C: f\big(\pi(x)\big) = f(x) \big| \text{ untuk } \forall x \in X \ \dots\dots\dots (**)$$

Jika $f\big(\pi(x)\big) = f(x)$ dan jika $\big(x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \dots x_j\big)$ adalah satu untai permutasi $\pi \in G$, maka $f(\pi(x_1)) = f(x_1) \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1)$

$$f(\pi(x_2)) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_3) = f(x_2)$$

$$\dots$$

$$f\big(\pi(x_{j-1})\big) = f\big(x_{j-1}\big) \Leftrightarrow f\big(x_j\big) = f(x_{j-1}).$$

Sehingga $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \cdots = f\big(x_j\big)$.

Dengan kata lain f mempunyai nilai konstan untuk tiap untai π dan jika $(x\ x_t \dots x_w\ )$ adalah untai yang memuat sembarang $x \in X$ maka $f(\pi(x) = f(x_t) = \cdots = f(x_w)$.

Jadi jumlah ruas kanan dari persamaan (**) hanyalah banyaknya cara pewarnaan X dengan $r \geq 2$ warna. Sehingga elemen-elemen dalam untai yang sama dari permutasi π akan diberi warna yang sama. Jika π bertipe $[a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \dots a_n]$, maka banyaknya cara pewarnaannya adalah: $r^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}$. Ini diperoleh dari banyaknya anggota $f(\pi(x))$ sebanyak r buah dan banyaknya anggota $\pi(x)$ sebanyak $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ buah, sehingga banyaknya pemetaan dari $\pi(x)$ ke $f(\pi(x))$ adalah sebanyak $n(f(\pi(x)))^{n(\pi(x))} = r^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}$. Jadi persamaan (**) menjadi:

$$k = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} r^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n} = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} r^{a_1}r^{a_2}r^{a_3}\dots r^{a_n}$$

$$k = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} Z(\pi; r, r, r, \dots, r) = Z(G; r, r, r, \dots, r) \qquad \text{(Santosa 2003)}$$

2.1.10 Teorema Polya II dan Pembuktiannya

Teorema Polya II

Persediaan pola warna, $PI(G; w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r))$ adalah merupakan indeks siklik dari $Z(G;\ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ pada

$x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + [w(y_3)]^i + \dots + [w(y_r)]^i$ dengan $i = 1,2, \dots, n$.

Bukti:

Penurunan rumus untuk Teorema Polya II menggunakan Teorema Burnside-Frobenius juga, dan hampir sama dengan Teorema Polya I. Pada intinya

fungsi bobot $w(f)$ memiliki sifat konstan yang diperlukan oleh Teorema 2.6 (Burnside Lemma) untuk orbit-orbit *C* terhadap permutasi dari grup *G'*.

$$\text{Jelas } k = \frac{1}{|G'|}\sum_{\pi' \in G'} |F(\pi')|$$

sehingga

$$PI\big(G; w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r)\big) = \frac{1}{|G'|}\sum_{n' \in G'} w(\pi') \qquad \dots\dots(a)$$

dimana

$$w(\pi') = \sum_{f \in F(\pi')} w(f)$$

Dari bentuk *C* dan *G'* dikembalikan ke bentuk *X* dan *G*, sehingga:

$$PI = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi \in G}\left\{\sum_{\substack{f \in C: f(\pi(x)) = f(x) \\ \forall x}} [wf(x_1))][wf(x_2))] \dots [wf(x_n))]\right\} \qquad \dots\dots(b)$$

Jumlahan pada persamaan (b) dapat diambil atas seluruh fungsi $f(x)$ yang konstan atas tiap untai π. Misalkan π bertipe $[a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \dots a_n]$ dan didefinisikan multinomial $w(y_i)$ sebagai

$$\Omega = \overbrace{[w(y_1)^1 + w(y_2)^1 + \cdots + w(y_r)^1] \dots [w(y_1)^1 + w(y_2)^1 + \cdots + w(y_r)^1]}^{a_1 \text{ faktor}}$$

$$\times \overbrace{[w(y_1)^2 + w(y_2)^2 + \cdots + w(y_r)^2] \dots [w(y_1)^2 + w(y_2)^2 + \cdots + w(y_r)^2]}^{a_2 \text{ faktor}}$$

$$\times \overbrace{[w(y_1)^3 + w(y_2)^3 + \cdots + w(y_r)^3] \dots [w(y_1)^3 + w(y_2)^3 + \cdots + w(y_r)^3]}^{a_3 \text{ faktor}}$$

$$\times$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\times \overbrace{[w(y_1)^n + w(y_2)^n + \cdots + w(y_r)^n] \dots [w(y_1)^n + w(y_2)^n + \cdots + w(y_r)^n]}^{a_n \text{ faktor}}$$

Ekspansi Ω memuat $r^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}$ bentuk, yang jumlahnya juga merupakan fungsi $f(x)$ yang konstan atas tiap untai π. Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa bentuk-bentuk dalam ekspansi tersebut sama dengan bobot ω dari fungsi $f(x)$. Misalkan bahwa untai dalam penyajian π mempunyai korespondensi satu-satu dengan faktor-faktor dari Ω, dengan cara yang biasa: untai dengan panjang 1 berkorespondensi dengan $a_1$faktor pertama, untai dengan panjang 2 dengan a_2 faktor kedua, dan seterusnya.

Jika $f(x)$ memetakan untai dengan panjang j yang diketahui (sebut saja hinpunan T) di dalam y_v, maka $w(y_v)^j = \prod_{x\in T} w(f(x))$. Bentuk ekspansi seluruhnya diberikan dengan perkalian semua untai yang akan sama dengan $\prod_U \prod_{x\in T} w(f(x))$ dimana U adalah semua untai π. Tapi untai-untai ini mempunyai pengaruh pada partisi di X, sehingga ekspansinya hanya $\prod_{x\in X} w\big(f(x)\big) = u'(f)$. Akhirnya telah dibuktikan bahwa seluruh jumlahan pada persamaan (b) mempunyai nilai yang sama dengan Ω, jelas terlihat bahwa:

$\Omega = Z(\pi;\ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

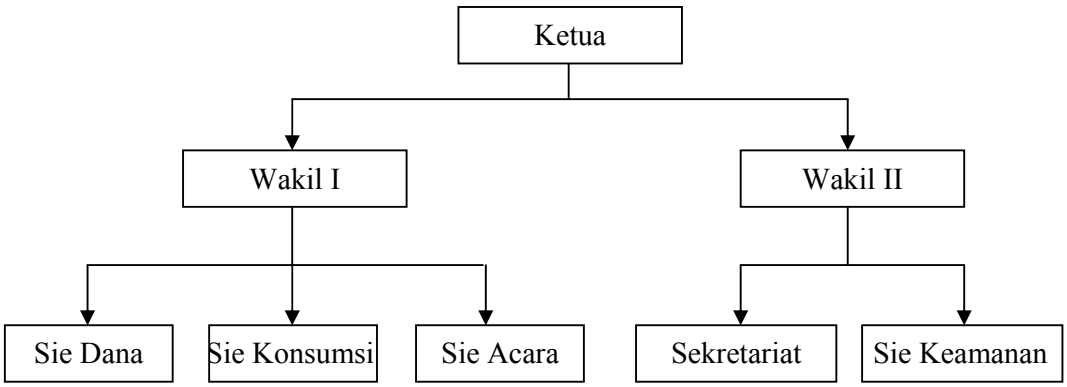
dengan $x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + [w(y_3)]^i + \cdots + [w(y_n)]^i$

untuk $i = 1,2,3, \dots, n$

2.2 Teori Graf

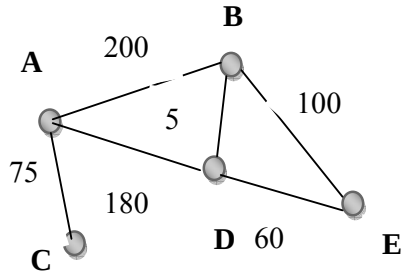
Secara kasar, graf adalah suatu diagram yang memuat informasi tertentu jika diinterpretasikan secara tepat. Dalam kehidupan sehari-hari, graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada. Tujuannya adalah sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti. Beberapa contoh graf yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari antara lain: struktur organisasi, bagan alir pengambilan mata kuliah, peta, rangkaian listrik, dan lain-lain.

Tiap–tiap diagram memuat sekumpulan objek (kotak, simpul, dan lain-lain) beserta sisi-sisi yang menghubungkan objek-objek tersebut. Sisi bisa berarah maupun tidak berarah. Sisi yang berarah biasanya digunakan untuk menyatakan hubungan yang mementingkan urutan antar objek-objek. Urut-urutan objek akan mempunyai arti yang lain jika arah sisi diubah. Sebagai contoh adalah sisi komando yang menghubungkan simpul-simpul struktur sebuah organisasi.



Gambar 2.2 struktur organisasi

Sebaliknya, sisi yang tidak berarah digunakan untuk menyatakan hubungan antar objek-objek yang tidak mementingkan urutan. Sebagai contoh adalah sisi untuk menyatakan jarak hubungan dua kota.



Gambar 2.3 graf jarak antar kota

Jarak dari kota A ke kota B sejauh 200 km akan sama dengan jarak dari kota B ke kota A. Apabila jarak dua tempat tidak sama jika dibalik (misalnya karena harus melalui jalan memutar), maka sisi yang digunakan haruslah sisi yang berarah

2.2.1 Konsep Dasar pada Teori Graf

Definisi 2.17

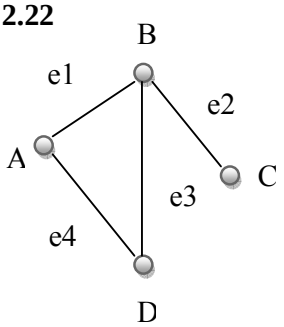
Sebuah graf linear (atau yang secara sederhana disebut graf) $G = (V, E)$ disajikan dalam sebuah sistem yang terdiri atas suatu himpunan objek $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ yang disebut himpunan simpul, dan sebuah koleksi $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ yang merupakan koleksi sisi sedemikian sehingga tiap sisi e_k merupakan suatu pasangan tak terurut (v_i, v_j). Simpul v_i, v_j yang berkaitan dengan e_k disebut simpul-simpul ujung sisi e_k (Sutarno 2005: 66).

Kadang-kadang suatu graf dinyatakan dengan gambar. Gambar suatu graf G terdiri dari himpunan simpul-simpul V(G), himpunan sisi-sisi E(G) yang menghubungkan simpul-simpul tersebut (beserta arah sisi pada graf berarah),

dan label pada sisinya (jika ada). Panjang sisi, kelengkungan sisi, dan letak simpul tidak berpengaruh dalam suatu graf (Siang 2003).

Dalam gambar tersebut, simpul-simpul dinyatakan sebagai titik (*nodes*) dan tiap sisi dinyatakan sebagai kurva yang menghubungkan tiap dua simpul. (Sutarno 2005)

Contoh 2.22



Gambar 2.4 graf *G*

Pada contoh di atas graf *G* terdiri dari himpunan simpul $V = \{A, B, C, D\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di mana $e_2 = (B, C) = (C, B)$,

$e_1 = (A, B) = (B, A)$, $e_3 = (B, D) = (D, B)$, $e_4 = (A, D) = (D, A)$.

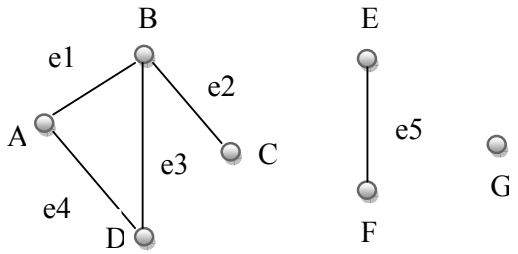
Contoh 2.23

Ada tujuh kota (A,…,G) yang beberapa diantaranya dapat dihubungkan secara langsung dengan jalan darat. Hubungan-hubungan langsung yang dapat dilakukan adalah sebagai berikut:

A dengan B dan D	C dengan B
B dengan D	E dengan F

Misalkan kota-kota dianggap sebagai simpul-simpul. Dua simpul/kota dihubungkan dengan sisi bila dan hanya bila ada jalan yang menghubungkan

langsung kedua kota tersebut. Dengan demikian, keadaan transportasi di 7 kota dapat dinyatakan dalam sebuah graf, yaitu:



Gambar 2.5 graf transportasi antar kota

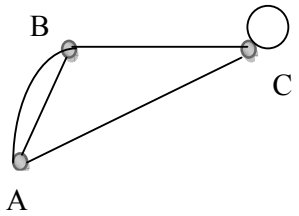
Dalam graf tersebut e1 berhubungan dengan simpul A dan B (keduanya disebut simpul ujung e1). Simpul A dan B dikatakan berhubungan, sedangkan simpul A dan C tidak berhubungan karena tidak ada sisi yang menghubungkannya secara langsung.

Simpul G adalah simpul terasing karena tidak ada sisi yang berhubungan dengan G. Dalam implementasinya, kota G merupakan kota terasing kerena tidak dapat dikunjungi dari kota-kota lain dengan jalan darat.

Definisi 2.18

Sisi yang hanya berhubungan dengan satu simpul ujung disebut loop. Dua sisi berbeda yang menghubungkan simpul yang sama disebut sisi paralel.

Contoh 2.24

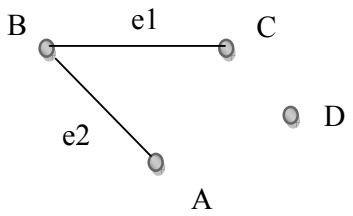


Gambar 2.6 graf dengan loop dan sisi parallel

Definisi 2.19

Jika sisi $e = (u, v) = uv \in E(G)$ dengan $u, v \in V(G)$ maka sisi *e* menghubungkan simpul *u* dan *v,* simpul *u* bertetangga (*adjacent*) dengan simpul *v* atau sebaliknya, sisi *e* dikatakan terkait (*incident*) dengan simpul *u* dan *v*. Sedangkan sebuah simpul yang tidak memiliki sisi yang menempel terhadap simpul tersebut disebut simpul terisolasi.

Contoh 2.25



Gambar 2.7 graf dengan simpul bertetangga dan simpul terisolasi

Simpul B bertetangga (*adjacent*) dengan simpul C, sebaliknya sisi e1 dikatakan terkait (*incident*) dengan simpul B dan C. Dan simpul D disebut simpul terisolasi.

Definisi 2.20

Jumlah atau banyaknya sisi yang menempel dengan suatu simpul v_i (loop dihitung dua kali) disebut derajat (*degree*) dari simpul tersebut. Dinotasikan $d(v_i)$.

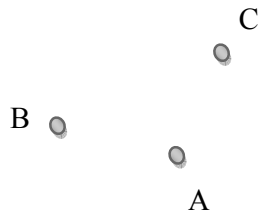
Contoh 2.26

Perhatikan Contoh 2.25 Derajat simpul B:$d(B) = 2$.

Definisi 2.21

Graf yang hanya mempunyai simpul disebut graf kosong.

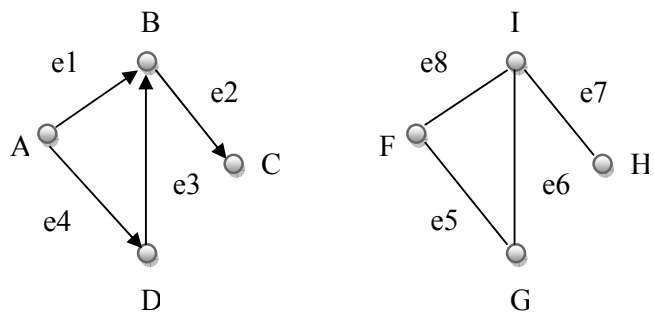
Contoh 2.27



Gambar 2.8 graf kosong

Suatu graf jika semua sisinya berarah maka graf-nya disebut graf berarah (*directed graph*, atau sering disebut *digraph*). Dan jika suatu graf semua sisinya tidak berarah, maka graf-nya disebut graf tidak berarah (*undirected graph*).

Contoh 2.28



Graf Berarah **Graf Tak Berarah**

Gambar 2.9

2.2.2 Penyajian Graf dengan Matriks Ketetanggaan

Selain dapat disajikan dengan himpunan simpul dan sisi, sebuah graf juga dapat disajikan dalam bentuk matriks.

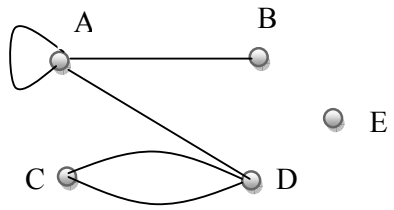
Definisi 2.22

Misal G adalah graf dengan n simpul. Matriks ketetanggaan dari graf G adalah matriks bujursangkar (persegi) berordo n, $A(G) = (a_{ij})$, dengan

elemen a_{ij} menyatakan banyaknya sisi yang menghubungkan simpul ke-i dan simpul ke-j.

Contoh 2.29

Perhatikan gambar 2.9 di bawah ini.



Gambar 2.10: Graf H

Matriks ketetanggaan graf H yaitu:

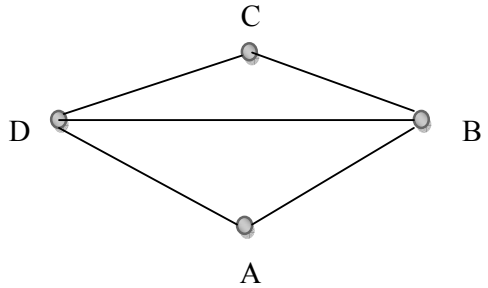
$$X(G) = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.2.3 Jenis – Jenis Graf

Definisi 2.23

Graf Sederhana (*Simple Graph*) adalah graf yang tidak mempunyai loop ataupun sisi ganda

Contoh 2.30



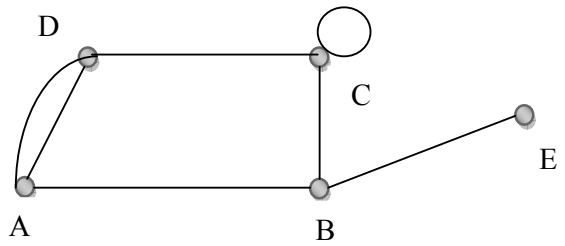
Gambar 2.11 graf sederhana

Definisi 2.24

G disebut graf berhingga atau graf terhingga apabila

$G = (V, E)$ dengan V dan E hingga

Contoh 2.31

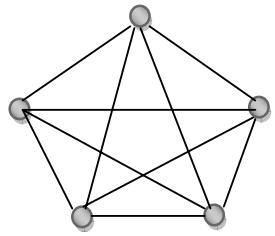


Gambar 2.12 graf berhingga

Definisi 2.25

Graf Lengkap (*Complete Graph*) dengan n simpul (simbol K_n) adalah graf sederhana dengan n simpul, dimana setiap dua simpul berbeda dihubungkan dengan suatu sisi.

Contoh 2.32



Gambar 2.13 graf lengkap K_5

Lemma 2.1 (Lemma Jabat Tangan)

Untuk setiap graf G dengan *n* simpul dan *m* sisi berlaku

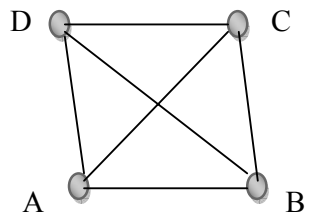
$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

Atau

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

Contoh 2.33

Perhatikan graf di bawah ini.



Gambar 2.14 graf dengan 3 simpul dan 6 sisi

Jumlah semua derajat simpul pada graf di atas adalah

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2.6 = 12$$

Teorema 2.9

Banyaknya sisi dalam suatu graf lengkap dengan n simpul adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ buah.

Bukti:

Jelas untuk setiap simpul pada suatu graf lengkap memiliki derajat masing-masing $d(v) = n - 1, \forall\, v \in V(K_n)$.

Sehingga jumlah derajat graf legkap tersebut adalah:

$$\sum_{v \in V(K_n)} d(v) = n(n-1)$$

Bedasarkan Lemma Jabat Tangan kita juga ketahui

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

Sehingga

$$2|E(K_n)| = \sum_{v \in V(K_n)} d(v) \Leftrightarrow |E(K_n)| = \frac{\sum_{v \in V(K_n)} d(v)}{2}$$

$$\Leftrightarrow |E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

Jadi banyaknya sisi dalam suatu graf lengkap dengan *n* simpul adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ buah.

Contoh 2.34

Perhatikan Contoh 2.31 di atas.

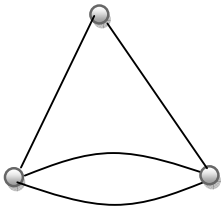
Jelas pada contoh di atas merupakan graf lengkap yang mempunyai lima simpul. Sehingga banyak sisi pada graf tersebut adalah

$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = 10$ sisi.

Definisi 2.26

Multigraf adalah suatu graf di mana sisi rangkap diperbolehkan ada tetapi sisi loop tidak diperbolehkan ada dalam graf tersebut.

Contoh 2.35



Gambar 2.15 Multigraf

Definisi 2.27

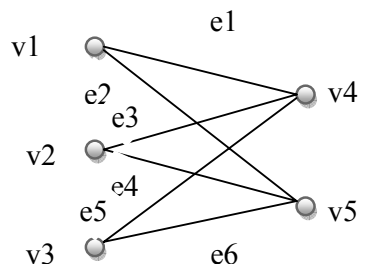
Suatu graf G disebut Graf Bipartisi apabila V(G) merupakan gabungan dari dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 yang saling asing, dan setiap sisi dalam G menghubungkan suatu simpul dalam V_1 dengan simpul dalam V_2.

Apabila dalam graf bipartisi setiap simpul dalam V_1 berhubungan dengan setiap simpul dalam V_2, maka grafnya disebut Graf Bipartisi Lengkap.

Jika V_1 terdiri dari m simpul dan V_2 terdiri dari n simpul, maka graf bipartisi lengkap diberi simbol $K_{m,n}$.

Contoh 2.36

Apakah graf K di bawah ini merupakan graf bipartisi lengkap?



Gambar 2.16 graf G

Penyelesaian:

Jelas bahwa simpul-simpul graf G terbagi menjadi 2 bagian yaitu

$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $V_2 = \{v_4, v_5\}$. Setiap simpul dalam V_1 dihubungkan dengan setiap simpul dalam V_2. Sehingga graf G merupakan graf bipartisi lengkap. Disimbolkan $K_{3,2}$.

2.2.4 Isomorfisma Graf

Dalam geometri, dua gambar disebut kongruen jika keduanya mempunyai sifat-sifat geometri yang sama. Dengan cara yang sama, dua graf disebut isomorfis jika keduanya menunjukkan “bentuk” yang sama. Kedua graf hanya berbeda dalam hal pemberian label simpul dan sisinya saja. Secara metematis, isomorfisma dua graf didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.28

Misalkan G adalah suatu graf dengan himpunan simpul V(G) dan himpunan sisi E(G).

G' adalah graf dengan himpunan simpul V(G') dan himpunan sisi E(G')

G isomorfis dengan G' bila dan hanya bila ada korespondensi satu-satu

g : V(G) → V(G') dan

h : E(G) → E(G')

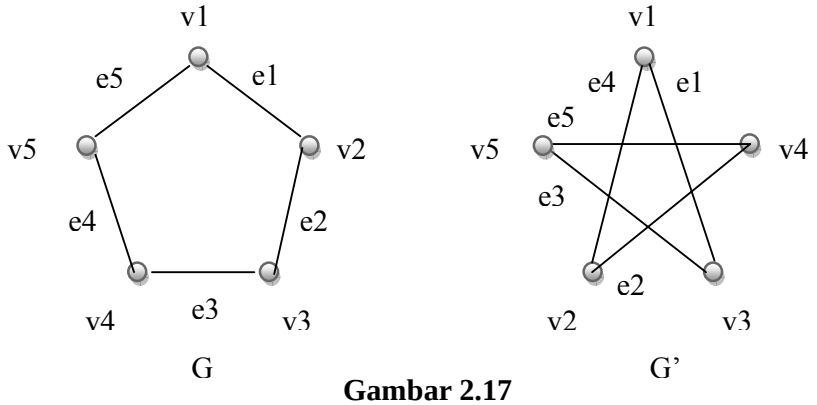
sedemikian hingga

$(\forall\, v, w \in \mathrm{V(G)}$dan $e \in \mathrm{E(G)})$

$(v, w) \in E(G) \Leftrightarrow (g(v), g(w)) \in E(G')$

Contoh 2.37

Akan ditunjukkan bahwa graf G dan G' gambar di bawah ini adalah isomorfis.

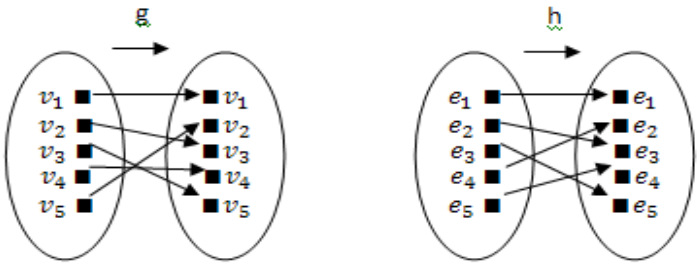


Gambar 2.17

Untuk menunjukkan bahwa G isomorfis dengan G', kita harus berusaha menentukan korespondensi satu-satu simpul dan sisi kedua graf.

Dalam G, v_1 berhubungan dengan v_2 dan v_5, sedangkan dalam G', v_1 behubungan dengan v_3 dan v_2. Maka fungsi g : V(G) → V(G') didefinisikan

dengan $g(v_1) = v_1$; $g(v_2) = v_3$; $g(v_5) = v_2$. Cara yang sama dilakukan untuk semua simpul yang lain. Didapatkan fungsi g pada gambar berikut



Gambar 2.18

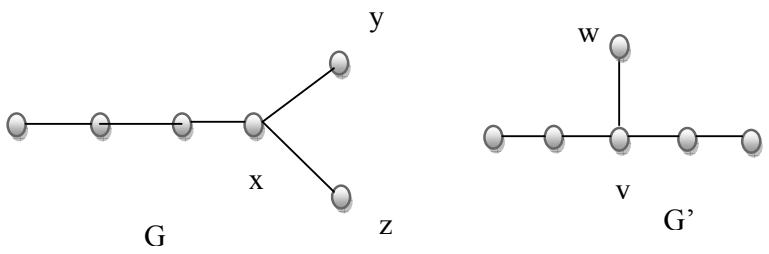
$e_2 \in E(G)$ menghubungkan simpul v_2 dan $v_3 \in G$. Fungsi g memetakan $v_2 \in G$ ke $v_3 \in G'$. Dalam G' sisi yang menghubungkan v_3 dan v_5 adalah $e_3 \in G'$. Jadi dalam pembuatan fungsi h, $e_2 \in G$) dikawankan dengan $e_3 \in G'$. Hal yang sama dilakukan pada semua simpul yang lain.

Hingga saat ini belum ada teori yang dapat dipakai untuk menentukan apakah dua graf G dan G' isomorfis. Akan tetapi, jika G dan G' isomorfis, maka terdapat beberapa hal yang pasti dipenuhi:

1) Jumlah simpul G = jumlah simpul G'
2) Jumlah sisi G = jumlah sisi G'
3) Jumlah sisi dengan derajat tertentu dalam G dan G' sama

(Siank 2004)

Masalahnya, implikasi tersebut tidak berlaku dua arah. Ada dua graf yang memenuhi ketiga syarat tersebut tetapi keduanya tidak isomorfis. Sebagai contoh adalah graf G dan G' di bawah



Gambar 2.19

Dalam G, satu-satunya simpul yang berderajad 3 adalah simpul x. Simpul x dihubungkan dengan 2 simpul lainnya yang berderajad 1 (simpul y dan z). Sebaliknya, dalam graf G', satu-satunya simpul berderajad 3 adalah v. Satu-satunya simpul berderajad 1 yang dihubungkan dengan v hanyalah simpul w, sehingga G tidak mungkin Isomorfis dengan G'.

Meskipun implikasi syarat isomorfis hanya berlaku satu arah, paling tidak kontraposisi dari implikasi tersebut bisa dipakai untuk menentukan bahwa dua buah graf tidak isomorfis. Jika salah satu dari ketiga syarat tidak terpenuhi, mak graf G dan G' tidak isomorfis.

BAB III

METODE PENELITIAN

Studi pustaka adalah metode yang digunakan dalam penelitian penulisan skripsi, dimana langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut

3.1 Identifikasi Masalah

Dalam tahap menentukan masalah peneliti mencari berbagai macam sumber pustaka dan menyeleksi untuk ditetapkan sebagai suatu masalah yang harus diselesaikan.

3.2 Perumusan Masalah

Berbagai macam masalah yang ditentukan selanjutnya dirumuskan dalam beberapa pertanyaan yang harus diselesaikan, yaitu:

1. Bagaimana hasil enumerasi graf n simpul dengan menggunakan Teorema Polya?
2. Bagaimana perbandingan hasil penyelesaian masalah enumerasi graf yang diselesaikan dengan menggunakan Teorema Polya dan dengan menggunakan software The Graph Isomorphism Algorithm Demonstration Program?

3.3 Studi Pustaka

Dalam langkah ini peneliti melakukan kajian pustaka dari berbagai sumber dengan cara mengumpulkan berbagai masalah yang sudah diteliti dan informasi yang berkaitan dengan penelitian yang penulis lakukan. Mengumpulkan berbagai referensi pendukung, seperti definisi dan teorema untuk menyelesaikan masalah yang diteliti sehingga didapat suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah.

3.4 Pemecahan Masalah

Metode penelitian yang digunakan adalah studi pustaka. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari kajian teori tentang grup, indeks siklik dari suatu grup, persediaan pola, graf, isomorfisma graf, sampai dengan Teorema Polya I dan II dengan menggunakan definisi-definisi dan teorema-teorema yang bersumber dari buku-buku dan referensi yang ada.
2. Mencari indeks siklik dari suatu grup dimana anggotanya adalah simpul-simpul dalam suatu graf dengan bantuan program *Maple*.
3. Mencari indeks siklik dari suatu grup di mana anggotanya adalah sisi-sisi dalam suatu graf.
4. Menerapkan Teorema Polya I.
5. Menerapkan Teorema Polya II.
6. Membandingkan hasil yang diperoleh dari Teorema Polya II dengan software The Graph Isomorphism Algorithm Demonstration Program.

3.5 Penarikan Simpulan

Tahap ini merupakan tahap terakhir dalam penelitian. Setelah menganalisis dan memecahkan masalah berdasarkan studi pustaka dan pembahasannya, kemudian dibuat suatu simpulan sebagai jawaban dari permasalahan yang telah dirumuskan sebelumnya.

BAB IV

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

4.1 Aplikasi Teorema Polya pada Graf

Salah satu aplikasi dari Teorema Polya adalah dapat menentukan banyaknya graf dan jenis graf yang terbentuk dan tidak isomorfik dari n simpul. Hasil yang diperoleh dalam penelitian ini berupa proposisi-proposisi tentang enumerasi graf tak isomorfis yang diperoleh dengan mengaplikasikan Teorema Polya untuk $n = 2$ simpul sampai $n = 8$ simpul.

Proposisi 4.1.1.

Banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari dua simpul ada sebanyak tiga.

Bukti:

Diketahui multigraf G dengan himpunan simpul $V = \{1,2\}$. Misal S_2 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan V, maka banyaknya anggota dari S_2 adalah $2! = 1.2 = 2$.

Seluruh bentuk hasil perkalian *cycle* yang saling asing dari grup S_2 yaitu:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2)$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12)$$

Tipe untai dan indeks siklik dari bentuk hasil perkalian *cycle* di atas adalah

(1). Untuk g_1 tipe untainya yaitu $[2,0]$ dan indeks sikliknya ${x_1}^2$.

(2). Untuk g_2 tipe untainya yaitu [0,1] dan indeks sikliknya x_2.

Sehingga menurut Definisi 2.12 indeks siklik S_2 yaitu

$$Z(S_2\,; x_1, x_2) = \frac{1}{2}({x_1}^2 + x_2)$$

Pasangan simpul yang mungkin terbentuk dari himpunan V yaitu 12. Misal R_2 adalah himpunan permutasi pasangan simpul di V. Diperoleh hasil kali *cycle* di R_2 adalah sebagai berikut:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2) \rightarrow g_1' = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = (12)$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12) \rightarrow g_2' = \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \end{pmatrix} = (21)$$

Tipe untai dan indeks siklik dari anggota-anggota R_2 yaitu

(1). Untuk g'_1 tipe untainya yaitu [1] dan indeks sikliknya y_1.

(2). Untuk g'_2 tipe untainya yaitu [1] dan indeks sikliknya y_1.

Sehingga indeks siklik dari R_2 adalah

$$Z(R_2; y_1) = \frac{1}{2}[y_1 + y_1]$$

$$= y_1$$

Ada tiga keadaan yang mungkin terjadi diantara dua simpul. Keadaan tersebut diantaranya:

(1). Tidak ada sisi antara dua simpul

(2). Ada sisi antara dua simpul

(3). Ada sisi rangkap antara dua simpul

Jika r adalah keadaan yang mungkin terjadi diantara dua simpul maka, $r = 3$. Dan berdasarkan Teorema Polya I diperoleh

$$Z(R_2; 3) = \frac{1}{2}[3 + 3]$$

$$= 3$$

Jadi banyaknya graf tak isomorfik yang terbentuk dari dua simpul ada sebanyak 3 graf.

Jika keadaan-keadaan diantara dua simpul diberi bobot w, maka

(1). $w(z_0) =$ keadaan tidak ada sisi antara dua simpul.

(2). $w(z_1) =$ keadaan ada sisi antara dua simpul.

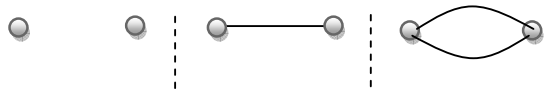
(3). $w(z_2) =$ keadaan ada sisi rangkap antara dua simpul.

Misal $w(z_0) = z^0, w(z_1) = z^1$, dan $w(z_2) = z^2$.

Berdasarkan Teorema Polya II, indeks siklik dari R_2 dengan mensubsitusikan $y_1 = [w(z_0)]^1 + [w(z_1)]^1 + [w(z_2)]^1 = 1 + z + z^2$ menjadi

$$Z(R_2; y_1) = 1 + z + z^2$$

Artinya dari $n = 2$ simpul akan dihasilkan 1 graf tanpa sisi, 1 graf dengan 1 sisi, dan 1 graf dengan 2 sisi.



Gambar 4.1 bentuk-bentuk graf dengan $n = 2$ simpul pada *Multigraph*

Proposisi 4.1.2.

Banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari dua simpul ada sebanyak enam.

Bukti:

Diketahui graf G dengan himpunan simpul $V = \{1,2\}$

Dari proposisi 4.1.1 indeks siklik dari S_2 adalah

$$Z(S_2\,; x_1, x_2) = \frac{1}{2}({x_1}^2 + x_2)$$

Karena dalam graf G sisi loop diperbolehkan, maka pasangan simpul yang mungkin terbentuk dari himpunan V yaitu $11, 12, 22$. Misal R_2 adalah himpunan permutasi pasangan simpul di V. Hasil kali *cycle* yang terbentuk di R_2 adalah sebagai berikut:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow g_1' = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 22 \\ 11 & 12 & 22 \end{pmatrix} = (11)(12)(22)$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow g_2' = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 22 \\ 22 & 21 & 11 \end{pmatrix} = (11\ 22)(12)$$

Diperoleh tipe untai dan indeks siklik dari anggota-anggota R_2 yaitu

(1). Untuk ${g'}_1$ tipe untainya yaitu $[3,0,0]$ dan indeks sikliknya ${y_1}^3$.

(2). Untuk ${g'}_2$ tipe untainya yaitu $[1,1,0]$ dan indeks sikliknya $y_1 y_2$.

Sehingga indeks siklik dari R_2 adalah

$$Z(R_2; y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2}[{y_1}^3 + y_1 y_2]$$

Diantara dua simpul terdapat 2 keadaaan yang mungkin terjadi. Keadaan tersebut yaitu:

(1). Tidak ada sisi antara dua simpul

(2). Ada sisi antara dua simpul

Jika r adalah keadaan yang mungkin terjadi diantara dua simpul maka, $r = 2$.

Berdasarkan Teorema Polya I diperoleh:

$$Z(R_2; 2,2,2) = \frac{1}{2}[2^3 + 2.2]$$

$$= 6$$

Jadi banyaknya graf tak isomorfik yang terbentuk dari dua simpul ada sebanyak 6 graf.

Jika keadaan-keadaan diantara dua simpul diberi bobot w, maka

(1). $w(z_0) =$ keadaan tidak ada sisi antara dua simpul.

(2). $w(z_1) =$ ada sisi antara dua simpul.

Misal $w(z_0) = z^0$ dan $w(z_1) = z^1$.

Berdasarkan Teorema Polya II dengan mensubsitusikan

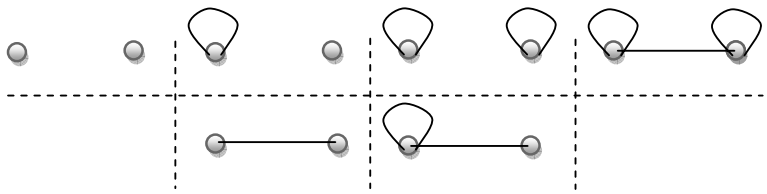
$y_1 = [w(z_0)]^1 + [w(z_1)]^1 = 1 + z,$ $\quad y_2 = [w(z_0)]^2 + [w(z_1)]^2 = 1^2 + z^2$

dan $y_3 = [w(z_0)]^3 + [w(z_1)]^3 = 1^3 + z^3$ indeks siklik dari R_2 menjadi

$$Z(R_2; y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2}[(1+z)^3 + (1+z)(1+z^2)]$$

$$= 1 + 2z + 2z^2 + z^3$$

Artinya dari $n = 2$ simpul akan dihasilkan 1 graf tanpa sisi, 2 graf dengan 1 sisi, 2 graf dengan 2 sisi, dan 1 graf dengan 3 sisi.



Gambar 4.2 bentuk-bentuk graf dengan $n = 2$ simpul pada graf ber-loop

Proposisi 4.1.3.

Banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari tiga simpul ada sebanyak sepuluh.

Bukti:

Diketahui multigraf G dengan himpunan simpul $V = \{1,2,3\}$. Misal S_3 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan V, maka banyaknya anggota dari S_3 adalah $3! = 1.2.3 = 6$.

Seluruh bentuk hasil perkalian *cycle* yang saling asing dari grup S_3 yaitu:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23)$$

$$g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)(2) \qquad g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)(3)$$

$$g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123) \qquad g_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$$

Tipe untai dan indeks siklik dari bentuk hasil perkalian *cycle* di atas adalah:

(1). Untuk g_1 tipe untainya yaitu $[3,0,0]$ dan indeks sikliknya ${x_1}^3$.

(2). Untuk g_2 tipe untainya yaitu $[1,1,0]$ dan indeks sikliknya x_1x_2.

(3). Untuk g_3 tipe untainya yaitu $[1,1,0]$ dan indeks sikliknya x_1x_2.

(4). Untuk g_4 tipe untainya yaitu $[1,1,0]$ dan indeks sikliknya x_1x_2.

(5). Untuk g_5 tipe untainya yaitu $[0,0,1]$ dan indeks sikliknya x_3.

(6). Untuk g_6 tipe untainya yaitu $[0,0,1]$ dan indeks sikliknya x_3.

Sehingga menurut Definisi 2.12 indeks siklik S_3 yaitu

$$Z(S_3\,; x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}({x_1}^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$$

Pasangan simpul yang mungkin terbentuk dari himpunan V yaitu $12, 13, 23$. Misal R_3 adalah himpunan permutasi pasangan simpul di V. Diperoleh hasil kali *cycle* di R_3 adalah sebagai berikut:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) \rightarrow g_1' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 23 \\ 12 & 13 & 23 \end{pmatrix} = (12)(13)(23)$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23) \rightarrow g_2' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 23 \\ 13 & 12 & 32 \end{pmatrix} = (12\ 13)(23)$$

$$g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)(2) \rightarrow g_3' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 23 \\ 32 & 31 & 21 \end{pmatrix} = (12\ 23)(13)$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)(3) \rightarrow g_4' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 23 \\ 21 & 23 & 13 \end{pmatrix} = (12)(13\ 23)$$

$$g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123) \rightarrow g_5' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 23 \\ 23 & 21 & 31 \end{pmatrix} = (12\ 23\ 13)$$

$$g_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132) \rightarrow g_6' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 23 \\ 31 & 32 & 12 \end{pmatrix} = (13\ 13\ 23)$$

Tipe untai dan indeks siklik dari anggota-anggota R_3 yaitu

(1). Untuk g_1' mempunyai tipe untai [3,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^3$.

(2). Untuk g_2' mempunyai tipe untai [1,1,0] dengan indeks siklik $y_1 y_2$.

(3). Untuk g_3' mempunyai tipe untai [1,1,0] dengan indeks siklik $y_1 y_2$.

(4). Untuk g_4' mempunyai tipe untai [1,1,0] dengan indeks siklik $y_1 y_2$.

(5). Untuk g_5' mempunyai tipe untai [0,0,1] dengan indeks siklik y_3.

(6). Untuk g_6' mempunyai tipe untai [0,0,1] dengan indeks siklik y_3.

Jelas terlihat bahwa anggota-anggota S_3 yang mempunyai tipe untai dan indeks siklik yang sama akan dirubah ke anggota-anggota R_3 yang mempunyai tipe untai dan indeks siklik yang sama pula.

Sehingga indeks siklik dari R_3 adalah

$$Z(R_3; y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{6}[{y_1}^3 + 3y_1y_2 + 2y_3]$$

Berdasarkan Teorema Polya I untuk $r = 3$ diperoleh

$$Z(R_3; 3,3,3) = \frac{1}{6}[3^3 + 3.3.3 + 2.3]$$

$$= 10$$

Jadi banyaknya graf tak isomorfik yang terbentuk dari tiga simpul ada sebanyak 10 graf.

Keadaan-keadaan yang mungkin terjadi diantara dua simpul yaitu:

(1). z^0: tidak ada sisi antara dua simpul.

(2). z^1: ada sisi antara dua simpul.

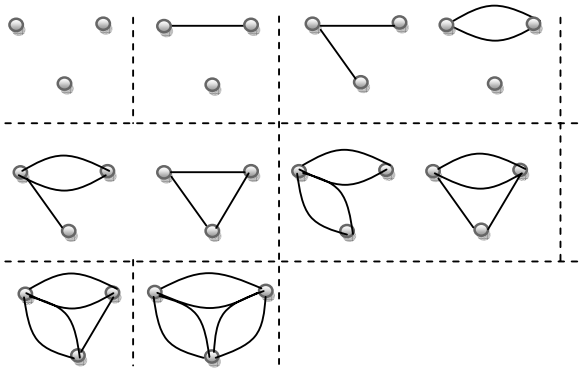
(3). z^2: ada sisi rangkap antara dua simpul.

Dan berdasarkan Teorema Polya II dengan mensubsitusikan $y_1 = 1 + z + z^2$, $y_2 = 1^2 + z^2 + (z^2)^2$, dan $y_3 = 1^3 + z^3 + (z^2)^3$ diperoleh indeks siklik R_3

$$Z(R_3; y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{6}[(1 + z + z^2)^3 + 3(1 + z + z^2)(1 + z^2 + z^4) + 2(1 + z^3 + z^6)]$$

$$= 1 + z + 2z^2 + 2z^3 + 2z^4 + z^5 + z^6$$

Artinya dari $n = 3$ simpul akan dihasilkan 1 graf tanpa sisi, 1 graf dengan 1 sisi, 2 graf dengan 2 sisi, 2 graf dengan 3 sisi, 2 graf dengan 4 sisi, 1 graf dengan 5 sisi, dan 1 graf dengan 6 sisi.



Gambar 4.3 bentuk-bentuk graf dengan $n = 3$ simpul pada *Multigraph*

Proposisi 4.1.4.

Banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari tiga simpul ada sebanyak 20.

Bukti:

Diketahui graf G dengan himpunan simpul $V = \{1,2,3\}$.

Dari proposisi 4.1.3 indeks siklik dari S_3 adalah

$$Z(S_3\,; x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}({x_1}^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$$

Karena dalam graf G sisi loop diperbolehkan, maka pasangan simpul yang mungkin terbentuk dari himpunan V yaitu $11, 12, 13, 22, 23, 33$. Misal R_3 adalah himpunan permutasi pasangan simpul di V. Hasil kali *cycle* yang terbentuk di R_3 adalah sebagai berikut:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) \rightarrow g_1' = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 22 & 23 & 33 \\ 11 & 12 & 13 & 22 & 23 & 33 \end{pmatrix}$$

$$= (11)(12)(13)(22)(23)(33)$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23) \rightarrow g_2' = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 22 & 23 & 33 \\ 11 & 13 & 12 & 33 & 32 & 22 \end{pmatrix}$$

$$= (11)(12\ 13)(22\ 33)(23)$$

$$g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)(2) \rightarrow g_3' = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 22 & 23 & 33 \\ 33 & 32 & 31 & 22 & 21 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= (11\ 33)(12\ 32)(13)(22)$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)(3) \rightarrow g_4' = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 22 & 23 & 33 \\ 22 & 21 & 23 & 11 & 13 & 33 \end{pmatrix}$$

$$= (11\ 22)(12)(13\ 23)(33)$$

$$g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123) \rightarrow g_5' = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 22 & 23 & 33 \\ 22 & 23 & 21 & 33 & 31 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= (11\ 22\ 33)(12\ 23\ 31)$$

$$g_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132) \rightarrow g_6' = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 22 & 23 & 33 \\ 33 & 31 & 32 & 11 & 12 & 22 \end{pmatrix}$$

$$= (11\ 33\ 22)(12\ 31\ 32)$$

Jelas terlihat bahwa anggota-anggota S_3 yang mempunyai tipe untai dan indeks siklik sama akan dibentuk menjadi anggota-anggota R_3 yang mempunyai tipe untai dan indeks siklik yang sama pula. Sehingga tipe untai dan indeks siklik dari anggota-anggota R_3 yaitu:

(1). Tipe untai $[6,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^6$ ada sebanyak 1 anggota.

(2). Tipe untai $[2,2,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^2{y_2}^2$ ada sebanyak 3 anggota.

(3). Tipe untai $[0,0,2,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_3}^2$ ada sebanyak 2 anggota.

Dengan demikian indeks siklik dari R_3 adalah

$$Z(R_3; y_1, y_2, \dots, y_6) = \frac{1}{6}[{y_1}^6 + 3{y_1}^2{y_2}^2 + 2{y_3}^2]$$

Berdasarkan Teorema Polya I untuk $r = 2$ diperoleh

$$Z(R_3; 2,2, \dots, 2) = \frac{1}{6}[2^6 + 3.2^2.2^2 + 2.2^2]$$

$$= 20$$

Jadi banyaknya graf tak isomorfik yang terbentuk dari tiga simpul ada sebanyak 20 graf.

Keadaan-keadaan yang mungkin terjadi diantara dua simpul yaitu:

(1). z^0: tidak ada sisi antara dua simpul.

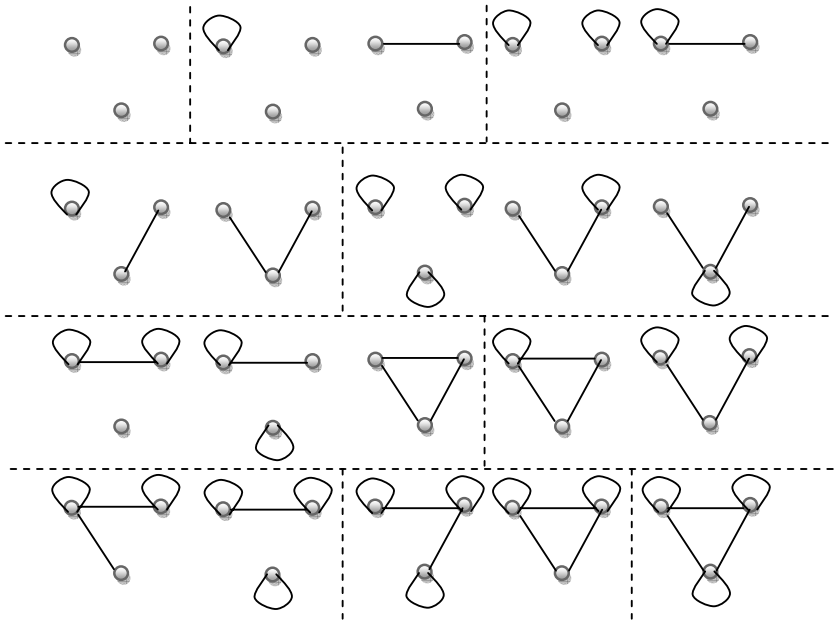
(2). z^1: ada sisi antara dua simpul.

Dan berdasarkan Teorema Polya II dengan mensubsitusikan $y_1 = 1 + z$, $y_2 = 1^2 + z^2$, dan $y_3 = 1^3 + z^3$ diperoleh indeks siklik R_3 sebagai beikut

$$Z(R_3; y_1, y_2, \dots, y_6) = \frac{1}{6}[(1+z)^6 + 3(1+z)^2(1+z^2)^2 + 2(1+z^3)^2]$$

$$= 1 + 2z + 4z^2 + 6z^3 + 4z^4 + 2z^5 + z^6$$

Artinya dari $n = 3$ simpul akan dihasilkan 1 graf tanpa sisi, 2 graf dengan 1 sisi, 4 graf dengan 2 sisi, 6 graf dengan 3 sisi, 4 graf dengan 4 sisi, 2 graf dengan 5 sisi, dan 1 graf dengan 6 sisi.



Gambar 4.4 bentuk-bentuk graf dengan $n = 3$ simpul pada graf ber-loop

Proposisi 4.1.5.

Banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari empat simpul ada sebanyak 66.

Bukti:

Diketahui multigraf G dengan himpunan simpul $V = \{1,2,3,4\}$. Misal S_4 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan V, maka banyaknya anggota dari S_4 adalah $4! = 1.2.3.4 = 24$.

Seluruh bentuk hasil perkalian *cycle* yang saling asing dari grup S_4 yaitu:

$g_1 = (1)(2)(3)(4)$	$g_9 = (142)(3)$	$g_{17} = (1)(23)(4)$
$g_2 = (14)(2)(3)$	$g_{10} = (12)(34)$	$g_{18} = (14)(23)$
$g_3 = (1)(24)(3)$	$g_{11} = (13)(2)(4)$	$g_{19} = (1)(234)$
$g_4 = (1)(2)(34)$	$g_{12} = (143)(2)$	$g_{20} = (1)(243)$
$g_5 = (12)(3)(4)$	$g_{13} = (134)(2)$	$g_{21} = (123)(4)$
$g_6 = (124)(3)$	$g_{14} = (13)(24)$	$g_{22} = (1423)$
$g_7 = (1243)$	$g_{15} = (1234)$	$g_{23} = (132)(4)$
$g_8 = (1432)$	$g_{16} = (1342)$	$g_{24} = (1324)$

Terlihat bahwa ada anggota-anggota S_4 yang mempunyai tipe untai yang sama. Sehingga tipe untai dan indeks siklik dari bentuk-bentuk hasil perkalian *cycle* di atas adalah:

(1). Untuk tipe untai $[4,0,0,0]$ ada sebanyak 1 anggota dengan indeks siklik ${x_1}^4$.

(2). Untuk tipe untai $[2,1,0,0]$ ada sebanyak 6 anggota dengan indeks siklik ${x_1}^2 x_2$.

(3). Untuk tipe untai $[1,0,1,0]$ ada sebanyak 8 anggota dengan indeks siklik $x_1 x_3$.

(4). Untuk tipe untai $[0,2,0,0]$ ada sebanyak 3 anggota dengan indeks siklik ${x_2}^2$.

(5). Untuk tipe untai $[0,0,0,1]$ ada sebanyak 6 anggota dengan indeks siklik x_4.

Dengan demikian menurut Definisi 2.12 indeks siklik dari S_4 yaitu

$$Z(S_4\,; x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}({x_1}^4 + 6{x_1}^2 x_2 + 8x_1x_3 + 3{x_2}^2 + 6x_4)$$

Pasangan simpul yang mungkin terbentuk dari himpunan V yaitu $12, 13, 14, 23, 24, 34$. Misal R_4 adalah himpunan permutasi pasangan simpul di V. Diperoleh hasil kali *cycle* di R_4 adalah sebagai berikut:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4) \rightarrow$$

$$g_1' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \end{pmatrix} = (12)(13)(14)(23)(24)(34)$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (14)(2)(3) \rightarrow$$

$$g_2' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 42 & 43 & 41 & 23 & 21 & 31 \end{pmatrix} = (12\ 24)(13\ 34)(14)(23)$$

$$g_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (124)(3) \rightarrow$$

$$g_6' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 24 & 23 & 21 & 43 & 41 & 31 \end{pmatrix} = (12\ 24\ 14)(13\ 23\ 34)$$

$$g_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(34) \rightarrow$$

$$g_6' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 21 & 24 & 23 & 14 & 13 & 43 \end{pmatrix} = (12\ )(13\ 24\ )(14\ 23)(34)$$

$$g_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1243) \rightarrow$$

$$g_6' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 24 & 21 & 23 & 41 & 43 & 13 \end{pmatrix} = (12\ 24\ 34\ 13)(14\ 23)$$

Tipe untai dan indeks siklik dari anggota-anggota R_4 yaitu

(1). Tipe untai $[6,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^6$ ada sebanyak 1 anggota.

(2). Tipe untai $[2,2,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^2{y_2}^2$ ada sebanyak 6 anggota.

(3). Tipe untai $[0,0,2,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_3}^2$ ada sebanyak 8 anggota.

(4). Tipe untai [2,2,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^2{y_2}^2$ ada sebanyak 3 anggota.

(5). Tipe untai [0,1,0,1,0,0] dengan indeks siklik y_2y_4 ada sebanyak 2 anggota.

Sehingga indeks siklik dari gup R_4 adalah

$$Z(R_4; y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = \frac{1}{24}\left[{y_1}^6 + 6{y_1}^2{y_2}^2 + 8{y_3}^2 + 3{y_1}^2{y_2}^2 + 6y_2y_4\right]$$

$$= \frac{1}{24}\left[{y_1}^6 + 9{y_1}^2{y_2}^2 + 8{y_3}^2 + 6y_2y_4\right]$$

Berdasarkan Teorema Polya I untuk $r = 3$ diperoleh

$$Z(R_4; 3,3,3,3,3,3) = \frac{1}{24}[3^6 + 9.3^2.3^2 + 8.3^2 + 6.3.3]$$

$$= 66$$

Jadi banyaknya graf tak isomorfik yang terbentuk dari empat simpul ada sebanyak 66 graf.

Keadaan-keadaan yang mungkin terjadi diantara dua simpul yaitu:

(1). z^0: tidak ada sisi antara dua simpul.

(2). z^1: ada sisi antara dua simpul.

(3). z^2: ada sisi rangkap antara dua simpul.

Dan berdasarkan Teorema Polya II dengan mensubsitusikan $y_1 = 1 + z + z^2$, $y_2 = 1^2 + z^2 + (z^2)^2$, $y_3 = 1^3 + z^3 + (z^2)^3$,dan $y_4 = 1^4 + z^4 + (z^2)^4$ diperoleh indeks siklik R_4

$$Z(R_4; y_1, y_2, y_3, \dots, y_6) = \frac{1}{24}[(1 + z + z^2)^6 + 9(1 + z + z^2)^2(1 + z^2 + z^4)^2$$

$$8(1 + z^3 + z^6)^2 + 6(1 + z^2 + z^4)(1 + z^4 + z^8)]$$

$$= 1 + z + 3z^2 + 5z^3 + 8z^4 + 9z^5 + 12z^6 + 9z^7 +$$

$$8z^8 + 5z^9 + 3z^{10} + z^{11} + z^{12}$$

Artinya dari $n = 4$ simpul akan dihasilkan 1 graf tanpa sisi, 1 graf dengan 1 sisi, 3 graf dengan 2 sisi, 5 graf dengan 3 sisi, 8 graf dengan 4 sisi, 9 graf dengan 5 sisi, 12 graf dengan 6 sisi, 9 graf dengan 7 sisi, 8 graf dengan 8 sisi, 5 graf dengan 9 sisi, 3 graf dengan 10 sisi, 1 graf dengan 11 sisi, dan 1 graf dengan 12 sisi.

Proposisi 4.1.6.

Banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari empat simpul ada sebanyak 90.

Bukti:

Diketahui graf *G* dengan himpunan simpul $V = \{1,2,3,4\}$.

Dari proposisi 4.1.5 indeks siklik dari S_4 adalah

$$Z(S_4\,; x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}({x_1}^4 + 6{x_1}^2 x_2 + 8x_1 x_3 + 3{x_2}^2 + 6x_4)$$

Karena dalam graf *G* sisi loop diperbolehkan, maka pasangan simpul yang mungkin terbentuk dari himpunan V yaitu $11, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 33, 34, 44$. Misal R_4 adalah himpunan permutasi pasangan simpul di V. Hasil kali *cycle* yang terbentuk di R_4 adalah sebagai berikut:

a). $(1)(2)(3)(4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 22 & 23 & 24 & 33 & 34 & 44 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 22 & 23 & 24 & 33 & 34 & 44 \end{pmatrix}$$

$$= (11)(12)(13)(14)(22)(23)(24)(33)(34)(44)$$

b). $(14)(2)(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 22 & 23 & 24 & 33 & 34 & 44 \\ 44 & 42 & 43 & 41 & 22 & 23 & 21 & 33 & 31 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= (11\ 44)(12\ 42)(13\ 43)(14)(22)(23)(33)$$

c). $(124)(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 22 & 23 & 24 & 33 & 34 & 44 \\ 22 & 24 & 23 & 21 & 44 & 43 & 41 & 33 & 31 & 11 \end{pmatrix}$$

$= (11\ 22\ 44)(12\ 24\ 14)(13\ 23\ 43)(33)$

d). $(12)(34) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 22 & 23 & 24 & 33 & 34 & 44 \\ 22 & 21 & 24 & 23 & 11 & 14 & 13 & 44 & 43 & 33 \end{pmatrix}$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24)(14\ 23)(33\ 44)(34)$

e). $(1243) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 22 & 23 & 24 & 33 & 34 & 44 \\ 22 & 24 & 21 & 23 & 44 & 41 & 43 & 11 & 13 & 33 \end{pmatrix}$$

$= (11\ 22\ 44\ 33)(12\ 24\ 43\ 13)(14\ 23)$

Sehingga tipe untai dan indeks siklik dari anggota-anggota R_4, yaitu

(1). Tipe untai $[10,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^{10}$ ada sebanyak 1 anggota.

(2). Tipe untai $[4,3,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^4{y_2}^3$ ada sebanyak 6 anggota.

(3). Tipe untai $[1,0,3,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik $y_1{y_3}^3$ ada sebanyak 8 anggota.

(4). Tipe untai $[2,4,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks sikliknya ${y_1}^2{y_2}^4$ ada sebanyak 3 anggota.

(5). Tipe untai $[0,1,0,2,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks sikliknya $y_2{y_4}^2$ ada sebanyak 6 anggota.

Dengan demikian indeks siklik dari R_4 adalah

$$Z(R_4; y_1, y_2, \dots, y_{10}) = \frac{1}{24}[{y_1}^{10} + 6{y_1}^4{y_2}^3 + 8y_1{y_3}^3 + 3{y_1}^2{y_2}^4 + 6y_2{y_4}^2]$$

Berdasarkan Teorema Polya I untuk $r = 2$ diperoleh

$$Z(R_4; 2,2, \dots ,2) = \frac{1}{24}[2^{10} + 6.2^4.2^3 + 8.2.2^3 + 3.2^2.2^4 + 6.2.2^2]$$

$$= 90$$

Jadi banyaknya graf tak isomorfik yang terbentuk dari empat simpul ada sebanyak 90 graf.

Keadaan-keadaan yang mungkin terjadi diantara dua simpul yaitu:

(1). z^0: tidak ada sisi antara dua simpul.

(2). z^1: ada sisi antara dua simpul.

Dan berdasarkan Teorema Polya II dengan mensubsitusikan $y_1 = 1 + z$, $y_2 = 1^2 + z^2$, $y_3 = 1^3 + z^3$, dan $y_4 = 1^4 + z^4$ diperoleh indeks siklik R_4 sebagai berikut

$$\begin{aligned} Z(R_4; y_1, y_2, \dots, y_{10}) = \frac{1}{24}[&(1+z)^{10} + 6(1+z)^4(1+z^2)^3 + \\ &8(1+z)(1+z^3)^3 + 3(1+z)^2(1+z^2)^4 + \\ &6(1+z^2)(1+z^4)^2] \\ = 1 + 2z + 5z^2 + 11z^3 &+ 17z^4 + 18z^5 + 17z^6 + 11z^7 \\ &+5z^8 + 2z^9 + z^{10} \end{aligned}$$

Artinya dari $n = 4$ simpul akan dihasilkan 1 graf tanpa sisi, 2 graf dengan 1 sisi, 5 graf dengan 2 sisi, 11 graf dengan 3 sisi, 17 graf dengan 4 sisi, 18 graf dengan 5 sisi, 17 graf dengan 6 sisi, 11 graf dengan 7 sisi, 5 graf dengan 8 sisi, 2 graf dengan 9 sisi, dan 1 graf dengan 10 sisi.

Proposisi 4.1.7.

Banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari lima simpul ada sebanyak 792.

Bukti:

Diketahui multigraf G dengan himpunan simpul $V = \{1,2,3,4,5\}$. Misal S_5 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan V, maka banyaknya anggota dari S_5 adalah $5! = 1.2.3.4.5 = 120$.

Dengan bantuan program *maple* diperoleh bentuk-bentuk hasil kali *cycle* yang saling asing dari grup S_5 beserta banyak anggota yang sejenis, yaitu:

(1). Bentuk $(1)(2)(3)(4)(5)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 1 buah.
(2). Bentuk $(12)(3)(4)(5)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 10 buah.
(3). Bentuk $(123)(4)(5)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 20 buah.
(4). Bentuk $(1234)(5)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 30 buah.
(5). Bentuk (12345) dengan banyak anggota yang sejenis ada 24 buah.
(6). Bentuk $(12)(34)(5)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 15 buah.
(7). Bentuk $(12)(345)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 20 buah.

Sehingga tipe untai dan indeks siklik dari bentuk-bentuk hasil perkalian *cycle* di atas adalah:

(1). Untuk tipe untai $[5,0,0,0,0]$ ada sebanyak 1 anggota dengan indeks siklik ${x_1}^5$.

(2). Untuk tipe untai $[3,1,0,0,0]$ ada sebanyak 10 anggota dengan indeks siklik ${x_1}^3 x_2$.

(3). Untuk tipe untai $[2,0,1,0,0]$ ada sebanyak 20 anggota dengan indeks siklik ${x_1}^2 x_3$.

(4). Untuk tipe untai $[1,0,0,1,0]$ ada sebanyak 30 anggota dengan indeks siklik $x_1 x_4$.

(5). Untuk tipe untai [0,0,0,0,1] ada sebanyak 24 anggota dengan indeks siklik x_5.

(6). Untuk tipe untai [1,2,0,0,0] ada sebanyak 15 anggota dengan indeks siklik $x_1{x_2}^2$.

(7). Untuk tipe untai [0,1,1,0,0] ada sebanyak 20 anggota dengan indeks siklik x_2x_3.

Dengan demikian menurut Definisi 2.12 indeks siklik dari S_5 yaitu

$$Z(S_5\,; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{120}({x_1}^5 + 10{x_1}^3x_2 + 20{x_1}^2x_3 + 30x_1x_4 + 24x_5 + 15x_1{x_2}^2 + 20x_2x_3)$$

Pasangan simpul yang mungkin terbentuk dari himpunan V yaitu $12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45$. Misal R_5 adalah himpunan permutasi pasangan simpul di V. Diperoleh hasil kali *cycle* di R_5 adalah sebagai berikut:

a). $(1)(2)(3)(4)(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \end{pmatrix}$$

$= (12)(13)(14)(15)(23)(24)(25)(34)(35)(45)$

b). $(12)(3)(4)(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 21 & 23 & 24 & 25 & 13 & 14 & 15 & 34 & 35 & 45 \end{pmatrix}$$

$= (12)(13\ 23)(14\ 24)(15\ 25)(34)(35)(45)$

c). $(123)(4)(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 23 & 21 & 24 & 25 & 31 & 34 & 35 & 14 & 15 & 45 \end{pmatrix}$$

$$= (12\ 23\ 13)(14\ 24\ 34)(15\ 25\ 35)(45)$$

d). $(1234)(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 23 & 24 & 21 & 25 & 34 & 31 & 35 & 41 & 45 & 15 \end{pmatrix}$$

$$= (12\ 23\ 34\ 14)(13\ 24)(15\ 25\ 35\ 45)$$

e). $(12345) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 23 & 24 & 25 & 21 & 34 & 35 & 31 & 45 & 41 & 51 \end{pmatrix}$$

$$= (12\ 23\ 34\ 45\ 15)(13\ 24\ 35\ 14\ 25)$$

f). $(12)(34)(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 21 & 24 & 23 & 25 & 14 & 13 & 15 & 43 & 45 & 35 \end{pmatrix}$$

$$= (12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 25)(34)(35\ 45)$$

g). $(12)(345) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 21 & 24 & 25 & 23 & 14 & 15 & 13 & 45 & 43 & 53 \end{pmatrix}$$

$$= (12)(13\ 24\ 15\ 23\ 14\ 25)(34\ 45\ 35)$$

Tipe untai dan indeks siklik dari anggota-anggota R_5 yaitu

(1). Tipe untai $[10,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^{10}$ ada sebanyak 1 anggota.

(2). Tipe untai $[4,3,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^4{y_2}^3$ ada sebanyak 10 anggota.

(3). Tipe untai $[1,0,3,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik $y_1{y_3}^3$ ada sebanyak 20 anggota.

(4). Tipe untai $[0,1,0,2,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik $y_2{y_4}^2$ ada sebanyak 30 anggota.

(5). Tipe untai $[0,0,0,0,2,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_5}^2$ ada sebanyak 24 anggota.

(6). Tipe untai $[2,4,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^2{y_2}^4$ ada sebanyak 15 anggota.

(7). Tipe untai $[1,0,1,0,0,1,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik $y_1y_3y_6$ ada sebanyak 20 anggota.

Sehingga indeks siklik dari R_5 adalah

$$Z(R_5; y_1, y_2, \dots, y_{10}) = \frac{1}{120}[{y_1}^{10} + 10{y_1}^4{y_2}^3 + 20y_1{y_3}^3 + 30y_2{y_4}^2 + 24{y_5}^2$$
$$+15{y_1}^2{y_2}^4 + 20y_1y_3y_6]$$

Berdasarkan Teorema Polya I untuk $r = 3$ diperoleh

$$Z(R_5; 3,3,3, \dots ,3) = \frac{1}{120}[3^{10} + 10.3^4.3^3 + 20.3.3^3 + 30.3.3^2 + 24.3^2$$
$$+15.3^2.3^4 + 20.3.3.3]$$
$$= 792$$

Jadi banyaknya graf tak isomorfik yang terbentuk dari lima simpul ada sebanyak 792 graf.

Keadaan-keadaan yang mungkin terjadi diantara dua simpul yaitu:

(1). z^0: tidak ada sisi antara dua simpul.

(2). z^1: ada sisi antara dua simpul.

(3). z^2: ada sisi rangkap antara dua simpul.

Dan berdasarkan Teorema Polya II dengan mensubsitusikan $y_1 = 1 + z + z^2$, $y_2 = 1^2 + z^2 + (z^2)^2$, $y_3 = 1^3 + z^3 + (z^2)^3$, $y_4 = 1^4 + z^4 + (z^2)^4$, $y_5 = 1^5 + z^5 + (z^2)^5$, dan $y_6 = 1^6 + z^6 + (z^2)^6$ diperoleh indeks siklik R_5:

$$\begin{aligned}
Z(R_5; y_1, y_2, \dots, y_{10}) = \frac{1}{120}[&(1+z+z^2)^{10} + 10(1+z+z^2)^4(1+z^2+z^4)^3 \\
&+20(1+z+z^2)(1+z^3+z^6)^3 + \\
&30(1+z^2+z^4)(1+z^4+z^8)^2 + 24(1+z^5+z^{10})^2 \\
&+15(1+z+z^2)^2(1+z^2+z^4)^4 + \\
&20(1+z+z^2)(1+z^3+z^6)(1+z^6+z^{12})] \\
= 1 &+ z + 3z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 24z^5 + 43z^6 + 62z^7 + \\
&87z^8 + 100z^9 + 110z^{10} + 100z^{11} + 87z^{12} + 62z^{13} + \\
&43z^{14} + 24z^{15} + 14z^{16} + 6z^{17} + 3z^{18} + z^{19} + z^{20}
\end{aligned}$$

Artinya dari $n = 5$ simpul akan dihasilkan 1 graf tanpa sisi, 1 graf dengan 1 sisi, 3 graf dengan 2 sisi, 6 graf dengan 3 sisi, 14 graf dengan 4 sisi, 24 graf dengan 5 sisi, 43 graf dengan 6 sisi, 62 graf dengan 7 sisi, 87 graf dengan 8 sisi, 100 graf dengan 9 sisi, 110 graf dengan 10 sisi, 100 graf dengan 11 sisi, 87 graf dengan 12 sisi, 62 graf dengan 13 sisi, 43 graf dengan 14 sisi, 24 graf dengan 15 sisi, 14 graf dengan 16 sisi, 6 graf dengan 17 sisi, 3 graf dengan 18 sisi, 1 graf dengan 19 sisi, dan 1 graf dengan 20 sisi.

Proposisi 4.1.8.

Banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari lima simpul ada sebanyak 544.

Bukti:

Diketahui graf G dengan himpunan simpul $V = \{1,2,3,4,5\}$.

Dari proposisi 4.1.7 indeks siklik dari S_5 adalah

$$Z(S_5\,; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{120}({x_1}^5 + 10{x_1}^3 x_2 + 20{x_1}^2 x_3 + 30 x_1 x_4 + 24 x_5 + 15 x_1 {x_2}^2 + 20 x_2 x_3)$$

Karena dalam graf G sisi loop diperbolehkan, maka pasangan simpul yang mungkin terbentuk dari himpunan V yaitu $11, 12, 13, 14, 15, 22, 23, 24, 25, 33, 34, 35, 44, 45, 55$. Misal R_5 adalah himpunan permutasi pasangan simpul di V. Hasil kali *cycle* yang terbentuk di R_5 adalah:

a). $(1)(2)(3)(4)(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 22 & 23 & 24 & 25 & 33 & 34 & 35 & 44 & 45 & 55 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 22 & 23 & 24 & 25 & 33 & 34 & 35 & 44 & 45 & 55 \end{pmatrix}$$

$$= (11)(12)(13)(14)(15)(22)(23)(24)(25)(33)(34)(35)(44)(45)(55)$$

b). $(12)(3)(4)(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 22 & 23 & 24 & 25 & 33 & 34 & 35 & 44 & 45 & 55 \\ 22 & 21 & 23 & 24 & 25 & 11 & 13 & 14 & 15 & 33 & 34 & 35 & 44 & 45 & 55 \end{pmatrix}$$

$$= (11\ 22)(12)(13\ 23)(14\ 24)(15\ 25)(33)(34)(35)(44)(45)(55)$$

c). $(123)(4)(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 22 & 23 & 24 & 25 & 33 & 34 & 35 & 44 & 45 & 55 \\ 22 & 23 & 21 & 24 & 25 & 33 & 31 & 34 & 35 & 11 & 14 & 15 & 44 & 45 & 55 \end{pmatrix}$$

$$= (11\ 22\ 33)(12\ 23\ 31)(14\ 24\ 34)(15\ 25\ 35)(44)(45)(55)$$

d). $(1234)(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 22 & 23 & 24 & 25 & 33 & 34 & 35 & 44 & 45 & 55 \\ 22 & 23 & 24 & 21 & 25 & 33 & 34 & 31 & 35 & 44 & 41 & 45 & 11 & 15 & 55 \end{pmatrix}$$

$$= (11\ 22\ 33\ 44)(12\ 23\ 34\ 14)(13\ 24)(15\ 25\ 35\ 45)(55)$$

e). $(12345) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 22 & 23 & 24 & 25 & 33 & 34 & 35 & 44 & 45 & 55 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 21 & 33 & 34 & 35 & 31 & 44 & 45 & 41 & 55 & 51 & 11 \end{pmatrix}$$

$= (11\ 22\ 33\ 44\ 55)(12\ 23\ 34\ 45\ 15)(13\ 24\ 35\ 14\ 25)$

f). $(12)(34)(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 22 & 23 & 24 & 25 & 33 & 34 & 35 & 44 & 45 & 55 \\ 22 & 21 & 24 & 23 & 25 & 11 & 14 & 13 & 15 & 44 & 43 & 45 & 33 & 35 & 55 \end{pmatrix}$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 25)(33\ 44)(34)(35\ 45)(55)$

g). $(12)(345) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 22 & 23 & 24 & 25 & 33 & 34 & 35 & 44 & 45 & 55 \\ 22 & 21 & 24 & 25 & 23 & 11 & 14 & 15 & 13 & 44 & 45 & 43 & 55 & 53 & 33 \end{pmatrix}$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24\ 15\ 23\ 14\ 25)(33\ 44\ 55)(34\ 45\ 53)$

Sehingga tipe untai dan indeks siklik dari anggota-anggota R_5, yaitu

(1). Tipe untai $[15,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^{15}$ ada sebanyak 1 anggota.

(2). Tipe untai $[7,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^{7}{y_2}^{4}$ ada sebanyak 10 anggota.

(3). Tipe untai $[3,0,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^{3}{y_3}^{4}$ ada sebanyak 20 anggota.

(4). Tipe untai $[1,1,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik $y_1 y_2 {y_4}^{3}$ ada sebanyak 30 anggota.

(5). Tipe untai $[0,0,0,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_5}^{3}$ dimana ada sebanyak 24 anggota.

(6). Tipe untai [3,6,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^3{y_2}^6$ ada sebanyak 15 anggota.

(7). Tipe untai [1,1,2,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_1y_2{y_3}^2y_6$ ada sebanyak 20 anggota.

Dengan demikian indeks siklik dari R_5 adalah

$$Z(R_5; y_1, y_2, \dots, y_{15}) = \frac{1}{120}[{y_1}^{15} + 10{y_1}^7{y_2}^4 + 20{y_1}^3{y_3}^4 + 30y_1y_2{y_4}^3 + 24{y_5}^3 + 15{y_1}^3{y_2}^6 + 20y_1y_2{y_3}^2y_6]$$

Berdasarkan Teorema Polya I untuk $r = 2$ diperoleh

$$Z(R_5; 2,2, \dots, 2) = \frac{1}{120}[2^{15} + 10.2^7.2^4 + 20.2^3.2^4 + 30.2.2.2^3 + 24.2^3 + 15.2^3.2^6 + 20.2.2.2^2.2]$$

$$= 544$$

Jadi banyaknya graf tak isomorfik yang terbentuk dari lima simpul ada sebanyak 544 graf.

Keadaan-keadaan yang mungkin terjadi diantara dua simpul yaitu:

(1). z^0: tidak ada sisi antara dua simpul.

(2). z^1: ada sisi antara dua simpul.

Dan berdasarkan Teorema Polya II dengan mensubsitusikan $y_1 = 1 + z$, $y_2 = 1^2 + z^2$, $y_3 = 1^3 + z^3$, $y_4 = 1^4 + z^4$, $y_5 = 1^5 + z^5$, dan $y_6 = 1^6 + z^6$ diperoleh indeks siklik R_5 sebagai berikut

$$Z(R_5; y_1, y_2, \dots, y_{15}) = \frac{1}{120}[(1+z)^{15} + 10(1+z)^7(1+z^2)^4 + 20(1+z)^3(1+z^3)^4 + 30(1+z)(1+z^2)(1+z^4)^3 + 24(1+z^5)^3 + 15(1+z)^3(1+z^2)^6$$

$$+20(1+z)(1+z^2)(1+z^3)^2(1+z^6)]$$

$$= 1 + 2z + 5z^2 + 13z^3 + 29z^4 + 52z^5 + 76z^6 + 94z^7 +$$

$$94z^8 + 76z^9 + 52z^{10} + 29z^{11} + 13z^{12} + 5z^{13} +$$

$$2z^{14} + 1z^{15}$$

Artinya dari $n = 5$ simpul akan dihasilkan 1 graf tanpa sisi, 2 graf dengan 1 sisi, 5 graf dengan 2 sisi, 13 graf dengan 3 sisi, 29 graf dengan 4 sisi, 52 graf dengan 5 sisi, 76 graf dengan 6 sisi, 94 graf dengan 7 sisi, 94 graf dengan 8 sisi, 76 graf dengan 9 sisi, 52 graf dengan 10 sisi, 29 graf dengan 11 sisi, 13 graf dengan 12 sisi, 5 graf dengan 13 sisi, 2 graf dengan 14 sisi, dan 1 graf dengan 15 sisi.

Proposisi 4.1.9.

Banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari enam simpul ada sebanyak 25.506.

Bukti:

Diketahui multigraf *G* dengan himpunan simpul $V = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Misal S_6 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan V, maka banyaknya anggota dari S_6 adalah $6! = 1.2.3.4.5.6 = 720$

Dengan bantuan program *maple* diperoleh bentuk-bentuk hasil kali *cycle* yang saling asing dari grup S_6 beserta banyak anggota yang sejenis, yaitu:

(1). Bentuk $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 1 buah.

(2). Bentuk $(12)(3)(4)(5)(6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 15 buah.

(3). Bentuk $(123)(4)(5)(6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 40 buah.

(4). Bentuk $(1234)(5)(6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 90 buah.

(5). Bentuk $(12345)(6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 144 buah.

(6). Bentuk (123456) dengan banyak anggota yang sejenis ada 120 buah.

(7). Bentuk $(12)(34)(5)(6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 45 buah.

(8). Bentuk $(12)(345)(6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 120 buah.

(9). Bentuk $(12)(3456)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 90 buah.

(10). Bentuk $(123)(456)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 40 buah.

(11). Bentuk $(12)(34)(56)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 15 buah.

Sehingga tipe untai dan indeks siklik dari bentuk-bentuk hasil perkalian *cycle* di atas adalah:

(1). Untuk tipe untai $[6,0,0,0,0,0]$ ada sebanyak 1 anggota dengan indeks siklik ${x_1}^6$.

(2). Untuk tipe untai $[4,1,0,0,0,0]$ ada sebanyak 15 anggota dengan indeks siklik ${x_1}^4 x_2$.

(3). Untuk tipe untai $[3,0,1,0,0,0]$ada sebanyak 40 anggota dengan indeks siklik ${x_1}^3 x_3$.

(4). Untuk tipe untai $[2,0,0,1,0,0]$ ada sebanyak 90 anggota dengan indeks siklik ${x_1}^2 x_4$.

(5). Untuk tipe untai $[1,0,0,0,1,0]$ ada sebanyak 144 anggota dengan indeks siklik $x_1 x_5$.

(6). Untuk tipe untai $[0,0,0,0,0,1]$ ada sebanyak 120 anggota dengan indeks siklik x_6.

(7). Untuk tipe untai $[2,2,0,0,0,0]$ ada sebanyak 45 anggota dengan indeks siklik ${x_1}^2 {x_2}^2$.

(8). Untuk tipe untai $[1,1,1,0,0,0]$ ada sebanyak 120 anggota dengan indeks siklik $x_1 x_2 x_3$.

(9). Untuk tipe untai $[0,1,0,1,0,0]$ ada sebanyak 90 anggota dengan indeks siklik x_2x_4.

(10). Untuk tipe untai $[0,0,2,0,0,0]$ ada sebanyak 40 anggota dengan indeks siklik ${x_3}^2$.

(11). Untuk tipe untai $[0,3,0,0,0,0]$ ada sebanyak 15 anggota dengan indeks siklik ${x_2}^3$.

Dengan demikian menurut Definisi 2.12 indeks siklik dari S_6 yaitu

$$Z(S_6\,; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{720}({x_1}^6 + 15{x_1}^4x_2 + 40{x_1}^3x_3 + 90{x_1}^2x_4 + 144x_1x_5 + 120x_6 + 45{x_1}^2{x_2}^2 + 120x_1x_2x_3 + 90x_2x_4 + 40{x_3}^2 + 15{x_2}^3)$$

Pasangan simpul yang mungkin terbentuk dari himpunan V yaitu $12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 26, 45, 46, 56$. Misal R_6 adalah himpunan permutasi pasangan simpul di V. Diperoleh hasil kali *cycle* di R_6 adalah sebagai berikut:

a). $(1)(2)(3)(4)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \end{pmatrix}$$

$$= (12)(13)(14)(15)(16)(23)(24)(25)(26)(34)(35)(36)(45)(46)(56)$$

b). $(12)(3)(4)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 21 & 23 & 24 & 25 & 26 & 13 & 14 & 15 & 16 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \end{pmatrix}$$

$$= (12)(13\ 23)(14\ 24)(15\ 25)(16\ 26)(34)(35)(36)(45)(46)(56)$$

c). $(123)(4)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 23 & 21 & 24 & 25 & 26 & 31 & 34 & 35 & 36 & 14 & 15 & 16 & 45 & 46 & 56 \end{pmatrix}$$

$= (12\ 23\ 13)(14\ 24\ 34)(15\ 25\ 35)(16\ 26\ 36)(45)(46)(56)$

d). $(1234)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 23 & 24 & 21 & 25 & 26 & 34 & 31 & 35 & 36 & 41 & 45 & 46 & 15 & 16 & 56 \end{pmatrix}$$

$= (12\ 23\ 34\ 14)(13\ 24)(15\ 25\ 35\ 45)(16\ 26\ 36\ 46)(56)$

e). $(12345)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 23 & 24 & 25 & 21 & 26 & 34 & 35 & 31 & 36 & 45 & 41 & 46 & 51 & 56 & 16 \end{pmatrix}$$

$= (12\ 23\ 34\ 45\ 15)(13\ 24\ 35\ 14\ 25)(16\ 26\ 36\ 46\ 56)$

f). $(123456) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 23 & 24 & 25 & 26 & 21 & 34 & 35 & 36 & 31 & 45 & 46 & 41 & 56 & 51 & 61 \end{pmatrix}$$

$= (12\ 23\ 34\ 45\ 56\ 16)(13\ 24\ 35\ 46\ 15\ 26)(14\ 25\ 36)$

g). $(12)(34)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 21 & 24 & 23 & 25 & 26 & 14 & 13 & 15 & 16 & 43 & 45 & 46 & 35 & 36 & 56 \end{pmatrix}$$

$= (12)(13\ 24)(15\ 25)(16\ 26)(14\ 23)(34)(35\ 45)(36\ 46)(56)$

h). $(12)(345)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 21 & 24 & 25 & 23 & 26 & 14 & 15 & 13 & 16 & 45 & 43 & 46 & 53 & 56 & 36 \end{pmatrix}$$

$= (12)(13\ 24\ 15\ 23\ 14\ 25)(16\ 26)(34\ 45\ 35)(36\ 46\ 56)$

i). $(12)(3456) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 21 & 24 & 25 & 26 & 23 & 14 & 15 & 16 & 13 & 45 & 46 & 43 & 56 & 53 & 63 \end{pmatrix}$$

$= (12)(13\ 24\ 15\ 26)(14\ 25\ 16\ 23)(34\ 45\ 56\ 36)(35\ 46)$

j). $(123)(456) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 23 & 21 & 25 & 26 & 24 & 31 & 35 & 36 & 34 & 15 & 16 & 14 & 56 & 54 & 64 \end{pmatrix}$$

$= (12\ 23\ 13)(14\ 25\ 36)(15\ 26\ 34)(16\ 24\ 35)(45\ 56\ 46)$

k). $(12)(34)(56) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 21 & 24 & 23 & 26 & 25 & 14 & 13 & 16 & 15 & 43 & 46 & 45 & 36 & 35 & 65 \end{pmatrix}$$

$= (12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 26)(16\ 25)(34)(35\ 46)(36\ 45)(56)$

Tipe untai dan indeks siklik dari anggota-anggota R_6 yaitu

(1). Tipe untai $[15,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^{15}$ ada sebanyak 1 anggota.

(2). Tipe untai $[7,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^{7}{y_2}^{4}$ ada sebanyak 15 anggota.

(3). Tipe untai $[3,0,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$dengan indeks siklik ${y_1}^{3}{y_3}^{4}$ ada sebanyak 40 anggota.

(4). Tipe untai $[1,1,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik $y_1y_2{y_4}^{3}$ ada sebanyak 90 anggota.

(5). Tipe untai $[0,0,0,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_5}^{3}$ ada sebanyak 144 anggota.

(6). Tipe untai [0,0,1,0,0,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_3}{y_6}^2$ ada sebanyak 120 anggota.

(7). Tipe untai [3,6,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]dengan indeks siklik ${y_1}^3{y_2}^6$ ada sebanyak 45 anggota.

(8). Tipe untai [1,1,2,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}{y_2}{y_3}^2{y_6}$ ada sebanyak 120 anggota.

(9). Tipe untai [1,1,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}{y_2}{y_4}^3$ ada sebanyak 90 anggota.

(10). Tipe untai [0,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_3}^5$ ada sebanyak 40 anggota.

(11). Tipe untai [3,6,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^3{y_2}^6$ ada sebanyak 15 anggota.

Sehingga indeks siklik dari R_6 adalah

$$Z(R_6; y_1, y_2, y_3, \dots, y_{15}) = \frac{1}{720}[{y_1}^{15} + 15{y_1}^7{y_2}^4 + 40{y_1}^3{y_3}^4 + 90{y_1}{y_2}{y_4}^3 + 144{y_5}^3 + 120{y_3}{y_6}^2 + 45{y_1}^3{y_2}^6 + 120{y_1}{y_2}{y_3}^2{y_6} + 90{y_1}{y_2}{y_4}^3 + 40{y_3}^5 + 15{y_1}^3{y_2}^6].$$

Berdasarkan Teorema Polya I untuk $r = 3$ diperoleh

$$Z(R_6; 3,3,3, \dots ,3) = \frac{1}{720}[3^{15} + 15.3^7.3^4 + 40.3^3.3^4 + 90.3.3.3^3 + 144.3^3 + 120.3.3^2 + 45.3^3.3^6 + 120.3.3.3^2.3 + 90.3.3.3^3 + 40.3^5 + 15.3^3.3^6].$$

$$= 25506.$$

Jadi banyaknya graf tak isomorfik yang terbentuk dari enam simpul ada sebanyak 25.506 graf.

Keadaan-keadaan yang mungkin terjadi diantara dua simpul yaitu:

(1). z^0: tidak ada sisi antara dua simpul.

(2). z^1: ada sisi antara dua simpul.

(3). z^2: ada sisi rangkap antara dua simpul.

Dan berdasarkan Teorema Polya II dengan mensubsitusikan $y_1 = 1 + x + x^2$, $y_2 = 1^2 + z^2 + (z^2)^2$, $y_3 = 1^3 + z^3 + (z^2)^3$, $y_4 = 1^4 + z^4 + (z^2)^4$, $y_5 = 1^5 + z^5 + (z^2)^5$, dan $y_6 = 1^6 + z^6 + (z^2)^6$ diperoleh indeks siklik R_6:

$$
\begin{aligned}
Z(R_6; y_1, y_2, \dots, y_{15}) = \frac{1}{720}[&(1+z+z^2)^{15} + 15(1+z+z^2)^7(1+z^2+z^4)^4 \\
&+40(1+z+z^2)^3(1+z^3+z^6)^4 + \\
&90(1+z+z^2)(1+z^2+z^4)(1+z^4+z^8)^3 + \\
&144(1+z^5+z^{10})^3 + \\
&120(1+z^3+z^6)(1+z^6+z^{12})^2 + \\
&45(1+z+z^2)^3(1+z^2+z^4)^6 + \\
&120(1+z+z^2)(1+z^2+z^4)(1+z^3+z^6)^2 \\
&(1+z^6+z^{12}) + 40(1+z^3+z^6)^5 \\
&90(1+z+z^2)(1+z^2+z^4)(1+z^4+z^8)^3 + \\
&15(1+z+z^2)^3(1+z^2+z^4)^6] \\
= 1 + z + 3z^2 + 7z^3 + 18z^4 &+ 40z^5 + 91z^6 + 180z^7 + \\
352z^8 + 616z^9 &+ 1006z^{10} + 1483z^{11} + 2036z^{12} + \\
2522z^{13} + 2891z^{14} &+ 3012z^{15} + 2891z^{16} + 2522z^{17}
\end{aligned}
$$

$$+2036z^{18} + 1483z^{19} + 1006z^{20} + 616z^{21} + 352z^{22}$$
$$+180z^{23} + 91z^{24} + 40z^{25} + 18z^{26} + 7z^{27} + 3z^{28}$$
$$+z^{29} + z^{30}.$$

Artinya dari $n = 6$ simpul akan dihasilkan 1 graf tanpa sisi, 1 graf dengan 1 sisi, 3 graf dengan 2 sisi, 7 graf dengan 3 sisi, 18 graf dengan 4 sisi, 40 graf dengan 5 sisi, 91 graf dengan 6 sisi, 180 graf dengan 7 sisi, 352 graf dengan 8 sisi, 616 graf dengan 9 sisi, 1006 graf dengan 10 sisi, 1483 graf dengan 11 sisi, 2036 graf dengan 12 sisi, 2522 graf dengan 13 sisi, 2891 graf dengan 14 sisi, 3012 graf dengan 15 sisi, 2891 graf dengan 16 sisi, 2522 graf dengan 17 sisi, 2036 graf dengan 18 sisi, 1483 graf dengan 19 sisi, 1006 graf dengan 20 sisi, 616 graf dengan 21 sisi, 352 graf dengan 22 sisi, 180 graf dengan 23 sisi, 91 graf dengan 24 sisi, 40 graf dengan 25 sisi, 18 graf dengan 26 sisi, 7 graf dengan 27 sisi, 3 graf dengan 28 sisi, 1 graf dengan 29 sisi, dan 1 graf dengan 30 sisi.

Proposisi 4.1.10.

Banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari enam simpul ada sebanyak 5.096.

Bukti:

Diketahui graf G dengan himpunan simpul $V = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Dari proposisi 4.1.9 indeks siklik dari S_6 adalah

$$Z(S_6\,; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{720}(x_1{}^6 + 15x_1{}^4x_2 + 40x_1{}^3x_3 + 90x_1{}^2x_4 +$$
$$144x_1x_5 + 120x_6 + 45x_1{}^2x_2{}^2 + 120x_1x_2x_3$$
$$+90x_2x_4 + 40x_3{}^2 + 15x_2{}^3).$$

Karena dalam graf G sisi loop diperbolehkan, maka pasangan simpul yang mungkin terbentuk dari himpunan V yaitu $11, 12, 13, 14, 15, 16, 22, 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 55, 56, 66$.

Misal R_6 adalah himpunan permutasi pasangan simpul di V. Hasil kali *cycle* yang terbentuk di R_6 adalah:

a). $(1)(2)(3)(4)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 33 & 34 & 35 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 33 & 34 & 35 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 36 & 44 & 45 & 46 & 55 & 56 & 66 \\ 36 & 44 & 45 & 46 & 55 & 56 & 66 \end{matrix}\Big)$$

$= (11)(12)(13)(14)(15)(16)(22)(23)(24)(25)(26)(33)(34)(35)(36)$

$(44)(45)(46)(55)(56)(66)$

b). $(12)(3)(4)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 33 & 34 & 35 \\ 22 & 21 & 23 & 24 & 25 & 26 & 11 & 13 & 14 & 15 & 16 & 33 & 34 & 35 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 36 & 44 & 45 & 46 & 55 & 56 & 66 \\ 36 & 44 & 45 & 46 & 55 & 56 & 66 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 23)(14\ 24)(15\ 25)(16\ 26)(33)(34)(35)(36)(44)$

$(45)(46)(55)(56)(66)$

c). $(123)(4)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 33 & 34 & 35 \\ 22 & 23 & 21 & 24 & 25 & 26 & 33 & 31 & 34 & 35 & 36 & 11 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 36 & 44 & 45 & 46 & 55 & 56 & 66 \\ 16 & 44 & 45 & 46 & 55 & 56 & 66 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33)(12\ 23\ 31)(14\ 24\ 34)(15\ 25\ 35)(16\ 26\ 36)(44)(45)(46)$

$(55)(56)(66)$

d). $(1234)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 33 & 34 & 35 \\ 22 & 23 & 24 & 21 & 25 & 26 & 33 & 34 & 31 & 35 & 36 & 44 & 41 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 36 & 44 & 45 & 46 & 55 & 56 & 66 \\ 46 & 11 & 15 & 16 & 55 & 56 & 66 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33\ 44)(12\ 23\ 34\ 14)(13\ 24)(15\ 25\ 35\ 45)(16\ 26\ 36\ 46)$

$(55)(56)(66)$

e). $(12345)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 33 & 34 & 35 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 21 & 26 & 33 & 34 & 35 & 31 & 36 & 44 & 45 & 41 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 36 & 44 & 45 & 46 & 55 & 56 & 66 \\ 46 & 55 & 51 & 56 & 11 & 16 & 66 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33\ 44\ 55)(12\ 23\ 34\ 45\ 15)(13\ 24\ 35\ 14\ 25)$

$(16\ 26\ 36\ 46\ 56)(16)$

f). $(123456) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 33 & 34 & 35 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 21 & 33 & 34 & 35 & 36 & 31 & 44 & 45 & 46 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 36 & 44 & 45 & 46 & 55 & 56 & 66 \\ 41 & 55 & 56 & 51 & 66 & 61 & 11 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33\ 44\ 55\ 66)(12\ 23\ 34\ 45\ 56\ 16\ )(13\ 24\ 35\ 46\ 15\ 26)$

$(14\ 25\ 36)$

g). $(12)(34)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 33 & 34 & 35 \\ 22 & 21 & 24 & 23 & 25 & 26 & 11 & 14 & 13 & 15 & 16 & 44 & 43 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 36 & 44 & 45 & 46 & 55 & 56 & 66 \\ 46 & 33 & 35 & 36 & 55 & 56 & 66 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 25)(16\ 26)(33\ 44)(34)(35\ 45)$

$(36\ 46)(55)(56)(66)$

h). $(12)(345)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 33 & 34 & 35 \\ 22 & 21 & 24 & 25 & 23 & 26 & 11 & 14 & 15 & 13 & 16 & 44 & 45 & 43 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 36 & 44 & 45 & 46 & 55 & 56 & 66 \\ 46 & 55 & 53 & 56 & 33 & 36 & 66 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24\ 15\ 23\ 14\ 25)(16\ 26)(33\ 44\ 55)(34\ 45\ 53)$

$(36\ 46\ 56)(66)$

i). $(12)(3456) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 33 & 34 & 35 \\ 22 & 21 & 24 & 25 & 26 & 23 & 11 & 14 & 15 & 16 & 13 & 44 & 45 & 46 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 36 & 44 & 45 & 46 & 55 & 56 & 66 \\ 43 & 55 & 56 & 53 & 66 & 63 & 33 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24\ 15\ 26)(14\ 25\ 16\ 23)(33\ 44\ 55\ 66)(34\ 45\ 56\ 36)$

$(35\ 46)$

j). $(123)(456) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 33 & 34 & 35 \\ 22 & 23 & 21 & 25 & 26 & 24 & 33 & 31 & 35 & 36 & 34 & 11 & 15 & 16 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 36 & 44 & 45 & 46 & 55 & 56 & 66 \\ 14 & 55 & 56 & 54 & 66 & 64 & 44 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33)(12\ 23\ 13)(14\ 25\ 36)(15\ 26\ 34)(16\ 24\ 35)(44\ 55\ 66)$

$(45\ 56\ 64)$

k). $(12)(34)(56) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 33 & 34 & 35 \\ 22 & 21 & 24 & 23 & 26 & 25 & 11 & 14 & 13 & 16 & 15 & 44 & 43 & 46 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 36 & 44 & 45 & 46 & 55 & 56 & 66 \\ 45 & 33 & 36 & 35 & 66 & 65 & 55 \end{matrix}\Big)$$

$$= (11\ 22)(12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 26)(16\ 25)(33\ 44)(34)(35\ 46)$$

$$(36\ 45)(55\ 66)(65)$$

Sehingga tipe untai dan indeks siklik dari anggota-anggota R_6, yaitu

(1). Tipe untai $[21,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^{21}$ ada sebanyak 1 anggota.

(2). Tipe untai $[11,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^{11}{y_2}^{5}$ ada sebanyak 15 anggota.

(3). Tipe untai $[6,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^{6}{y_3}^{5}$ ada sebanyak 40 anggota.

(4). Tipe untai $[3,1,0,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^{3}y_2{y_4}^{4}$ ada sebanyak 90 anggota.

(5). Tipe untai $[1,0,0,0,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik $y_1{y_5}^{4}$ ada sebanyak 144 anggota.

(6). Tipe untai $[0,0,1,0,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik $y_3{y_6}^{3}$ ada sebanyak 120 anggota.

(7). Tipe untai $[5,8,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^{5}{y_2}^{8}$ ada sebanyak 45 anggota.

(8). Tipe untai $[2,2,3,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^{2}{y_2}^{2}{y_3}^{3}y_6$ ada sebanyak 120 anggota.

(9). Tipe untai [1,2,0,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_1{y_2}^2{y_4}^4$ ada sebanyak 90 anggota.

(10). Tipe untai [0,0,7,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_3}^7$ ada sebanyak 40 anggota.

(11). Tipe untai [3,9,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^3{y_2}^9$ ada sebanyak 15 anggota.

Dengan demikian indeks siklik dari R_6 adalah

$$Z(R_6; y_1, y_2, \dots, y_{21}) = \frac{1}{720}[{y_1}^{21} + 15{y_1}^{11}{y_2}^5 + 40{y_1}^6{y_3}^5 + 90{y_1}^3y_2{y_4}^4 + 144y_1{y_5}^4 + 120y_3{y_6}^3 + 45{y_1}^5{y_2}^8 + 120{y_1}^2{y_2}^2{y_3}^3y_6 + 90y_1{y_2}^2{y_4}^4 + 40{y_3}^7 + 15{y_1}^3{y_2}^9]$$

Berdasarkan Teorema Polya I untuk $r = 2$ diperoleh

$$Z(R_6; 2,2, \dots ,2) = \frac{1}{720}[2^{21} + 15.2^{11}.2^5 + 40.2^6.2^5 + 90.2^3.2.2^4 + 144.2.2^4 + 120.2.2^3 + 45.2^5.2^8 + 120.2^2.2^2.2^3.2 + 90.2.2^2.2^4 + 40.2^7 + 15.2^3.2^9]$$

$$= 5096$$

Jadi banyaknya graf tak isomorfik yang terbentuk dari enam simpul ada sebanyak 5096 graf.

Keadaan-keadaan yang mungkin terjadi diantara dua simpul yaitu:

(1). z^0: tidak ada sisi antara dua simpul.

(2). z^1: ada sisi antara dua simpul.

Dan berdasarkan Teorema Polya II dengan mensubsitusikan $y_1 = 1 + z$, $y_2 = 1^2 + z^2$, $y_3 = 1^3 + z^3$, $y_4 = 1^4 + z^4$, $y_5 = 1^5 + z^5$, dan $y_6 = 1^6 + z^6$ diperoleh indeks siklik R_6 sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
Z(R_6; y_1, y_2, \dots, y_{21}) = \frac{1}{720}[&(1+z)^{21} + 15(1+z)^{11}(1+z^2)^5 + \\
&40(1+z)^6(1+z^3)^5 + 90(1+z)^3(1+z^2)(1+z^4)^4 \\
&+144(1+z)(1+z^5)^4 + 120(1+z^3)(1+z^6)^3 + \\
&45(1+z)^5(1+z^2)^8 + 120(1+z)^2(1+z^2)^2 \\
&(1+z^3)^3(1+z^6) + 90(1+z)(1+z^2)^2(1+z^4)^4 \\
&+40(1+z^3)^7 + 15(1+z)^3(1+z^2)^9] \\
= 1 &+ 2z + 5z^2 + 14z^3 + 35z^4 + 83z^5 + 173z^6 + \\
&308z^7 + 487z^8 + 666z^9 + 774z^{10} + 774z^{11} + \\
&666z^{12} + 487z^{13} + 308z^{14} + 173z^{15} + 83z^{16} + \\
&35z^{17} + 14z^{18} + 5z^{19} + 2z^{20} + z^{21}
\end{aligned}
$$

Artinya dari $n = 6$ simpul akan dihasilkan 1 graf tanpa sisi, 2 graf dengan 1 sisi, 5 graf dengan 2 sisi, 14 graf dengan 3 sisi, 35 graf dengan 4 sisi, 83 graf dengan 5 sisi, 173 graf dengan 6 sisi, 308 graf dengan 7 sisi, 487 graf dengan 8 sisi, 666 graf dengan 9 sisi, 774 graf dengan 10 sisi, 774 graf dengan 11 sisi, 666 graf dengan 12 sisi, 487 graf dengan 13 sisi, 308 graf dengan 14 sisi, 173 graf dengan 15 sisi, 83 graf dengan 16 sisi, 35 graf dengan 17 sisi, 14 graf dengan 18 sisi, 5 graf dengan 19 sisi, 2 graf dengan 20 sisi, dan 1 graf dengan 21 sisi.

Proposisi 4.1.11.

Banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari tujuh simpul ada sebanyak 2.302.938.

Bukti:

Diketahui multigraf G dengan himpunan simpul $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Misal S_7 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan V, maka banyaknya anggota dari S_7 adalah $7! = 1.2.3.4.5.6.7 = 5040$

Dengan bantuan program *maple* diperoleh bentuk-bentuk hasil kali *cycle* yang saling asing dari grup S_7 beserta banyak anggota yang sejenis, yaitu:

(1). Bentuk $(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 1 buah.

(2). Bentuk $(12)(3)(4)(5)(6)(7)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 21 buah.

(3). Bentuk $(123)(4)(5)(6)(7)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 70 buah.

(4). Bentuk $(1234)(5)(6)(7)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 210 buah.

(5). Bentuk $(12345)(6)(7)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 504 buah.

(6). Bentuk $(123456)(7)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 840 buah.

(7). Bentuk (1234567) dengan banyak anggota yang sejenis ada 720 buah.

(8). Bentuk $(12)(34)(5)(6)(7)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 105 buah.

(9). Bentuk $(12)(34)(56)(7)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 105 buah.

(10). Bentuk $(12)(34)(567)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 210 buah.

(11). Bentuk $(12)(345)(6)(7)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 420 buah.

(12). Bentuk $(12)(3456)(7)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 630 buah.

(13). Bentuk $(12)(34567)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 504 buah.

(14). Bentuk $(123)(456)(7)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 280 buah.

(15). Bentuk $(123)(4567)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 420 buah.

Sehingga tipe untai dan indeks siklik dari bentuk-bentuk hasil perkalian *cycle* di atas adalah:

(1). Untuk tipe untai $[7,0,0,0,0,0,0]$ ada sebanyak 1 buah dengan indeks siklik ${x_1}^7$.

(2). Untuk tipe untai$[5,1,0,0,0,0,0]$ ada sebanyak 21 buah dengan indeks siklik ${x_1}^5 x_2$.

(3). Untuk tipe untai $[4,0,1,0,0,0,0]$ ada sebanyak 70 buah dengan indeks siklik ${x_1}^4 x_3$.

(4). Untuk tipe untai $[3,0,0,1,0,0,0]$ ada sebanyak 210 buah dengan indeks siklik ${x_1}^3 x_4$.

(5). Untuk tipe untai $[2,0,0,0,1,0,0]$ ada sebanyak 504 buah dengan indeks siklik ${x_1}^2 x_5$.

(6). Untuk tipe untai $[1,0,0,0,0,1,0]$ ada sebanyak 840 buah dengan indeks siklik $x_1 x_6$.

(7). Untuk tipe untai $[0,0,0,0,0,0,1]$ ada sebanyak 720 buah dengan indeks siklik x_7.

(8). Untuk tipe untai $[3,2,0,0,0,0,0]$ ada sebanyak 105 buah dengan indeks siklik ${x_1}^3 {x_2}^2$.

(9). Untuk tipe untai $[1,3,0,0,0,0,0]$ ada sebanyak 105 buah dengan indeks siklik $x_1 {x_2}^3$.

(10). Untuk tipe untai $[0,2,1,0,0,0,0]$ ada sebanyak 210 buah dengan indeks siklik $x_2{}^2x_3$.

(11). Untuk tipe untai $[2,1,1,0,0,0,0]$ ada sebanyak 420 buah dengan indeks siklik $x_1{}^2x_2x_3$.

(12). Untuk tipe untai $[1,1,0,1,0,0,0]$ ada sebanyak 630 buah dengan indeks siklik $x_1x_2x_4$.

(13). Untuk tipe untai $[0,1,0,0,1,0,0]$ ada sebanyak 504 buah dengan indeks siklik x_2x_5.

(14). Untuk tipe untai $[1,0,2,0,0,0,0]$ ada sebanyak 280 buah dengan indeks siklik $x_1x_3{}^2$.

(15). Untuk tipe untai $[0,0,1,1,0,0,0]$ ada sebanyak 420 buah dengan indeks siklik x_3x_4.

Dengan demikian menurut Definisi 2.12 indeks siklik dari S_7 yaitu

$$Z(S_7\,;x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_7) = \frac{1}{5040}(x_1{}^7 + 21x_1{}^5x_2 + 70x_1{}^4x_3 + 210x_1{}^3x_4 + 504x_1{}^2x_5 + 840x_1x_6 + 720x_7 + 105x_1{}^3x_2{}^2 + 105x_1x_2{}^3 + 210x_2{}^2x_3 + 420x_1{}^2x_2x_3 + 630x_1x_2x_4 + 504x_2x_5 + 280x_1x_3{}^2 + 420x_3x_4)$$

Pasangan simpul yang mungkin terbentuk dari himpunan V yaitu $12, 13, 14, 15, 16, 17, 23, 24, 25, 26, 27, 34, 35, 26, 37, 45, 46, 47, 56, 57, 67$.

Misal R_7 adalah himpunan permutasi pasangan simpul di V. Diperoleh hasil kali *cycle* di R_7 adalah sebagai berikut:

a). $(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 34 & 35 & 36 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 34 & 35 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 37 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \\ 37 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \end{matrix}\Big) = (12)(13)(14)(15)(16)(17)(23)$$

$$(24)(25)(26)(27)(34)(35)(36)(37)(45)(46)(47)(56)(57)(67)$$

b). $(12)(3)(4)(5)(6)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 34 & 35 & 36 \\ 21 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 34 & 35 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 37 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \\ 37 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \end{matrix}\Big) = (12)(13\ 23)(14\ 24)(15\ 25)$$

$$(16\ 26)(17\ 27)(34)(35)(36)(37)(45)(46)(47)(56)(57)(67)$$

c). $(123)(4)(5)(6)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 34 & 35 & 36 \\ 23 & 21 & 24 & 25 & 26 & 27 & 31 & 34 & 35 & 36 & 37 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 37 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \\ 17 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \end{matrix}\Big) = (12\ 23\ 13)(14\ 24\ 34)(15\ 25\ 35)$$

$$(16\ 26\ 36)(17\ 27\ 37)(45)(46)(47)(56)(57)(67)$$

d). $(1234)(5)(6)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 34 & 35 & 36 \\ 23 & 24 & 21 & 25 & 26 & 27 & 34 & 31 & 35 & 36 & 37 & 41 & 45 & 46 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 37 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \\ 47 & 15 & 16 & 17 & 56 & 57 & 67 \end{matrix}\Big) = (12\ 23\ 34\ 14)(13\ 24)$$

$$(15\ 25\ 35\ 45)(16\ 26\ 36\ 46)(17\ 27\ 37\ 47)(56)(57)(67)$$

e). $(12345)(6)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 34 & 35 & 36 \\ 23 & 24 & 25 & 21 & 26 & 27 & 34 & 35 & 31 & 36 & 37 & 45 & 41 & 46 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 37 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \\ 47 & 51 & 56 & 57 & 16 & 17 & 67 \end{matrix}\Big) = (12\ 23\ 34\ 45\ 15)(13\ 24\ 35\ 14\ 25)$$

$(16\ 26\ 36\ 46\ 56)(17\ 27\ 37\ 47\ 57)(67)$

f). $(123456)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 34 & 35 & 36 \\ 23 & 24 & 25 & 26 & 21 & 27 & 34 & 35 & 36 & 31 & 37 & 45 & 46 & 41 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 37 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \\ 47 & 56 & 51 & 57 & 61 & 67 & 17 \end{matrix}\Big) = (12\ 23\ 34\ 45\ 56\ 16)$$

$(13\ 24\ 35\ 46\ 15\ 26)(14\ 25\ 36)(17\ 27\ 37\ 47\ 57\ 67)$

g). $(1234567) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 34 & 35 & 36 \\ 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 21 & 34 & 35 & 36 & 37 & 31 & 45 & 46 & 47 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 37 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \\ 41 & 56 & 57 & 51 & 67 & 61 & 71 \end{matrix}\Big) = (12\ 23\ 34\ 45\ 56\ 67\ 17)$$

$(13\ 24\ 35\ 46\ 57\ 16\ 27)(14\ 25\ 36\ 47\ 15\ 26\ 37)$

h). $(12)(34)(5)(6)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 34 & 35 & 36 \\ 21 & 24 & 23 & 25 & 26 & 27 & 14 & 13 & 15 & 16 & 17 & 43 & 45 & 46 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 37 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \\ 47 & 35 & 36 & 37 & 56 & 57 & 67 \end{matrix}\Big) = (12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 25)$$

$(16\ 26)(17\ 27)(34)(35\ 45)(36\ 46)(37\ 47)(56)(57)(67)$

i). $(12)(3\ 4)(5\ 6)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 34 & 35 & 36 \\ 21 & 24 & 23 & 26 & 25 & 27 & 14 & 13 & 16 & 15 & 17 & 43 & 46 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 37 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \\ 47 & 36 & 35 & 37 & 65 & 67 & 57 \end{matrix}\Big) = (12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 26)$$

$(16\ 25)(17\ 27)(34)(35\ 46)(36\ 45)(37\ 47)(56)(57\ 67)$

j). $(12)(34)(567) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\Big(\begin{matrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 34 & 35 & 36 \\ 21 & 24 & 23 & 26 & 27 & 25 & 14 & 13 & 16 & 17 & 15 & 43 & 46 & 47 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 37 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \\ 45 & 36 & 37 & 35 & 67 & 65 & 75 \end{matrix}\Big) = (12)(13\ 24)(14\ 23)$$

$(15\ 26\ 17\ 25\ 16\ 27)(34)(35\ 46\ 37\ 45\ 36\ 47)(56\ 67\ 57)$

k). $(12)(345)(6)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\Big(\begin{matrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 34 & 35 & 36 \\ 21 & 24 & 25 & 23 & 26 & 27 & 14 & 15 & 13 & 16 & 17 & 45 & 43 & 46 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 37 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \\ 47 & 53 & 56 & 57 & 36 & 37 & 67 \end{matrix}\Big) = (12)(13\ 24\ 15\ 23\ 14\ 25)(16\ 26)$$

$(17\ 27)(34\ 45\ 35)(36\ 46\ 56)(37\ 47\ 57)(67)$

l). $(12)(3456)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\Big(\begin{matrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 34 & 35 & 36 \\ 21 & 24 & 25 & 26 & 23 & 27 & 14 & 15 & 16 & 13 & 17 & 45 & 46 & 43 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 37 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \\ 47 & 56 & 53 & 57 & 63 & 67 & 37 \end{matrix}\Big) = (12)(13\ 24\ 15\ 26)(14\ 25\ 16\ 23)$$

$(17\ 27)(34\ 45\ 56\ 36)(35\ 46)(37\ 47\ 57\ 67)$

m). $(12)(34567) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\Big(\begin{matrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 34 & 35 & 36 \\ 21 & 24 & 25 & 26 & 27 & 23 & 14 & 15 & 16 & 17 & 13 & 45 & 46 & 47 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 37 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \\ 43 & 56 & 57 & 53 & 67 & 63 & 73 \end{matrix}\Big) =$$

$(12)(13\ 24\ 15\ 26\ 17\ 23\ 14\ 25\ 16\ 27)(34\ 45\ 56\ 67\ 37)(35\ 46\ 57\ 36\ 47)$

n). $(123)(456)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 34 & 35 & 36 \\ 23 & 21 & 25 & 26 & 24 & 27 & 31 & 35 & 36 & 34 & 37 & 15 & 16 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 37 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \\ 17 & 56 & 54 & 57 & 64 & 67 & 47 \end{matrix}\Big) = (12\ 23\ 13)(14\ 25\ 36)(15\ 26\ 34)$$

$(16\ 24\ 35)(17\ 27\ 37)(45\ 56\ 46)(47\ 57\ 67)$

o). $(123)(4567) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 34 & 35 & 36 \\ 23 & 21 & 25 & 26 & 27 & 24 & 31 & 35 & 36 & 37 & 34 & 15 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 37 & 45 & 46 & 47 & 56 & 57 & 67 \\ 14 & 56 & 57 & 54 & 67 & 64 & 74 \end{matrix}\Big) = (12\ 23\ 13)$$

$(14\ 25\ 36\ 17\ 24\ 35\ 16\ 27\ 34\ 15\ 26\ 37)(45\ 56\ 67\ 47)(46\ 57)$

Tipe untai dan indeks siklik dari anggota-anggota R_7 yaitu

(1). Tipe untai $[21,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^{21}$ ada sebanyak 1 anggota.

(2). Tipe untai $[11,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^{11}{y_2}^{5}$ ada sebanyak 21 anggota.

(3). Tipe untai $[6,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^{6}{y_3}^{5}$ ada sebanyak 70 anggota.

(4). Tipe untai $[3,1,0,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik ${y_1}^{3}y_2{y_4}^{4}$ ada sebanyak 210 anggota.

(5). Tipe untai $[1,0,0,0,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$ dengan indeks siklik $y_1{y_5}^{4}$ ada sebanyak 504 anggota.

(6). Tipe untai [0,0,1,0,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_3{y_6}^3$ ada sebanyak 840 anggota.

(7). Tipe untai [0,0,0,0,0,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_7}^3$ ada sebanyak 720 anggota.

(8). Tipe untai [5,8,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^5{y_2}^8$ ada sebanyak 105 anggota.

(9). Tipe untai [3,9,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^3{y_2}^9$ ada sebanyak 105 anggota.

(10). Tipe untai [2,2,1,0,0,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^2{y_2}^2y_3{y_6}^2$ ada sebanyak 210 anggota.

(11). Tipe untai [2,2,3,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^2{y_2}^2{y_3}^3y_6$ ada sebanyak 420 anggota.

(12). Tipe untai [1,2,0,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_1{y_2}^2{y_4}^4$ ada sebanyak 630 anggota.

(13). Tipe untai [1,0,0,0,2,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_1{y_5}^2y_{10}$ ada sebanyak 504 anggota.

(14). Tipe untai [0,0,7,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_3}^7$ ada sebanyak 280 anggota.

(15). Tipe untai [0,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_2y_3y_4y_{12}$ ada sebanyak 420 anggota.

Jadi indeks siklik dari R_7 adalah

$$Z(R_7; y_1, y_2, \dots, y_{21}) = \frac{1}{5040}[{y_1}^{21} + 21{y_1}^{11}{y_2}^5 + 70{y_1}^6{y_3}^5 + 210{y_1}^3y_2{y_4}^4 +$$

$$504y_1{y_5}^4 + 840y_3{y_6}^3 + 720{y_7}^3 + 105{y_1}^5{y_2}^8 +$$

$$105{y_1}^3{y_2}^9 + 210{y_1}^2{y_2}^2y_3{y_6}^2 +$$

$$420{y_1}^2{y_2}^2{y_3}^3y_6 + 630y_1{y_2}^2{y_4}^4 +$$

$$504y_1{y_5}^2y_{10} + 280{y_3}^7 + 420y_2y_3y_4y_{12}].$$

Berdasarkan Teorema Polya I untuk $r = 3$ diperoleh

$$Z(R_7; 3,3,\dots,3) = \frac{1}{5040}[3^{21} + 21.3^{11}.3^5 + 70.3^6.3^5 + 210.3^3.3.3^4 +$$

$$504.3.3^4 + 840.3.3^3 + 720.3^3 + 105.3^5.3^8 +$$

$$105.3^3.3^9 + 210.3^2.3^2.3.3^2 + 420.3^2.3^2.3^3.3 +$$

$$630.3.3^2.3^4 + 504.3.3^2.3 + 280.3^7 + 420.3.3.3.3]$$

$$= 2302938$$

Jadi banyaknya graf tak isomorfik yang terbentuk dari tujuh simpul ada sebanyak 2.302.938 graf.

Keadaan-keadaan yang mungkin terjadi diantara dua simpul yaitu:

(1). z^0: tidak ada sisi antara dua simpul.

(2). z^1: ada sisi antara dua simpul.

(3). z^2: ada sisi rangkap antara dua simpul.

Dan berdasarkan Teorema Polya II dengan mensubsitusikan $y_1 = 1 + z + z^2$, $y_2 = 1^2 + z^2 + (z^2)^2$, $y_3 = 1^3 + z^3 + (z^2)^3$, $y_4 = 1^4 + z^4 + (z^2)^4$, $y_5 = 1^5 + z^5 + (z^2)^5$, $y_6 = 1^6 + z^6 + (z^2)^6$, $y_7 = 1^7 + z^7 + (z^2)^7$, $y_{10} = 1^{10} + z^{10} + (z^2)^{10}$, $y_{12} = 1^{12} + z^{12} + (z^2)^{12}$ diperoleh indeks siklik R_7:

$$Z(R_7; y_1, \dots, y_{21}) = \frac{1}{5040}[(1 + z + z^2)^{21} + 21(1 + z + z^2)^{11}(1 + z^2 + z^4)^5$$

$$+70(1 + z + z^2)^6(1 + z^3 + z^6)^5 +$$

$$210(1+z+z^2)^3(1+z^2+z^4)^3(1+z^4+z^8)^4 +$$
$$504(1+z+z^2)(1+z^5+z^{10})^4 +$$
$$840(1+z^3+z^6)(1+z^6+z^{12})^3 + 720(1+z^7+z^{14})^3$$
$$+105(1+z+z^2)^5(1+z^2+z^4)^8 +$$
$$105(1+z+z^2)^3(1+z^2+z^4)^9 + 210(1+z+z^2)^2$$
$$(1+z^2+z^4)^2(1+z^3+z^6)(1+z^6+z^{12})^2 +$$
$$420(1+z+z^2)^2(1+z^2+z^4)^2(1+z^3+z^6)^3$$
$$(1+z^6+z^{12}) + 630(1+z+z^2)(1+z^2+z^4)^2$$
$$(1+z^4+z^8)^4 + 504(1+z+z^2)(1+z^5+z^{10})^2$$
$$(1+z^{10}+z^{20}) + 280(1+z^3+z^6)^7 + 420(1+z^2+z^4)$$
$$(1+z^3+z^6)(1+z^4+z^4)(1+z^{12}+z^{24})].$$
$$= 1+z+3z^2+7z^3+19z^4+48z^5+130z^6+316z^7+$$
$$776z^8+1786z^9+3909z^{10}+7980z^{11}+15329z^{12}+$$
$$27342z^{13}+45641z^{14}+70931z^{15}+102962z^{16}+$$
$$139385z^{17}+176460z^{18}+208549z^{19}+230670z^{20}+$$
$$238448z^{21}+230670z^{22}+208549z^{23}+176460z^{24}+$$
$$139385z^{25}+102962z^{26}+70931z^{27}+45641z^{28}+$$
$$27342z^{29}+15329z^{30}+7980z^{31}+3909z^{32}+1786z^{33}$$
$$+776z^{34}+316z^{35}+130z^{36}+48z^{37}+19z^{38}+7z^{39}+$$
$$3z^{40}+z^{41}+z^{42}.$$

Artinya dari $n = 7$ simpul akan dihasilkan 1 graf tanpa sisi, 1 graf dengan 1 sisi, 3 graf dengan 2 sisi, 7 graf dengan 3 sisi, 19 graf dengan 4 sisi, 48 graf dengan 5 sisi, 130 graf dengan 6 sisi, 316 graf dengan 7 sisi, 776 graf dengan 8 sisi, 1786

graf dengan 9 sisi, 3909 graf dengan 10 sisi, 7980 graf dengan 11 sisi, 15239 graf dengan 12 sisi, 27342 graf dengan 13 sisi, 45641 graf dengan 14 sisi, 70931 graf dengan 15 sisi, 102962 graf dengan 16 sisi, 139385 graf dengan 17 sisi, 176460 graf dengan 18 sisi, 208549 graf dengan 19 sisi, 230670 graf dengan 20 sisi, 238448 graf dengan 21 sisi, 230670 graf dengan 22 sisi, 208549 graf dengan 23 sisi, 176460 graf dengan 24 sisi, 139385 graf dengan 25 sisi, 102962 graf dengan 26 sisi, 70931 graf dengan 27 sisi, 45641 graf dengan 28 sisi, 27342 graf dengan 29 sisi, 15329 graf dengan 30 sisi, 7980 graf dengan 31 sisi, 3909 graf dengan 32 sisi, 1786 graf dengan 33 sisi, 776 graf dengan 34 sisi, 316 graf dengan 35 sisi, 130 graf dengan 36 sisi, 48 graf dengan 37 sisi, 19 graf dengan 38 sisi, 7 graf dengan 39 sisi, 3 graf dengan 40 sisi, 1 graf dengan 41 sisi, dan 1 graf dengan 42 sisi.

Proposisi 4.1.12.

Banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari tujuh simpul ada sebanyak 79.264.

Bukti:

Diketahui graf G dengan himpunan simpul $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Dari proposisi 4.1.11 indeks siklik dari S_7 adalah

$$Z(S_7\,; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7) = \frac{1}{5040}(x_1{}^7 + 21x_1{}^5x_2 + 70x_1{}^4x_3 + 210x_1{}^3x_4 + 504x_1{}^2x_5 + 840x_1x_6 + 720x_7 + 105x_1{}^3x_2{}^2 + 105x_1x_2{}^3 + 210x_2{}^2x_3 + 420x_1{}^2x_2x_3 + 630x_1x_2x_4 + 504x_2x_5 + 280x_1x_3{}^2 + 420x_3x_4)$$

Karena dalam graf G sisi loop diperbolehkan, maka pasangan simpul yang mungkin terbentuk dari himpunan V yaitu $11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 33, 34, 35, 36, 37, 44, 45, 46, 47, 55, 56, 57, 66, 67, 77$. Misal R_7 adalah himpunan permutasi pasangan simpul di V. Hasil kali *cycle* yang terbentuk di R_7 adalah:

a). $(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 33 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 34 & 35 & 36 & 37 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \\ 34 & 35 & 36 & 37 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \end{matrix}\Big)$$

$$= (11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(22)(23)(24)(25)(26)(27)(33)(34)$$

$$(35)(36)(37)(44)(45)(46)(47)(55)(56)(57)(66)(67)(77)$$

b). $(12)(3)(4)(5)(6)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 33 \\ 22 & 21 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 11 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 34 & 35 & 36 & 37 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \\ 34 & 35 & 36 & 37 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \end{matrix}\Big)$$

$$= (11\ 22)(12)(13\ 23)(14\ 24)(15\ 25)(16\ 26)(17\ 27)(33)(34)(35)$$

$$(36)(37)(44)(45)(46)(47)(55)(56)(57)(66)(67)(77)$$

c). $(123)(4)(5)(6)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 33 \\ 22 & 23 & 21 & 24 & 25 & 26 & 27 & 33 & 31 & 34 & 35 & 36 & 37 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 34 & 35 & 36 & 37 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \\ 14 & 15 & 16 & 17 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \end{matrix}\Big)$$

$$= (11\ 22\ 33)(12\ 23\ 31)(14\ 24\ 34)(15\ 25\ 35)(16\ 26\ 36)(17\ 27\ 37)$$

$$(44)(45)(46)(47)(55)(56)(57)(66)(67)(77)$$

d). $(1234)(5)(6)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 33 \\ 22 & 23 & 24 & 21 & 25 & 26 & 27 & 33 & 34 & 31 & 35 & 36 & 37 & 44 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 34 & 35 & 36 & 37 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \\ 41 & 45 & 46 & 47 & 11 & 15 & 16 & 17 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33\ 44)(12\ 23\ 34\ 41)(13\ 24\ )(15\ 25\ 35\ 45)(16\ 26\ 36\ 46)$

$(17\ 27\ 37\ 47)(55)(56)(57)(66)(67)(77)$

e). $(12345)(6)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 33 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 21 & 26 & 27 & 33 & 34 & 35 & 31 & 36 & 37 & 44 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 34 & 35 & 36 & 37 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \\ 45 & 41 & 46 & 47 & 55 & 51 & 56 & 57 & 11 & 16 & 17 & 66 & 67 & 77 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33\ 44\ 55)(12\ 23\ 34\ 45\ 51\ )(13\ 24\ 35\ 41\ 25)(16\ 26\ 36\ 46\ 56)$

$(17\ 27\ 37\ 47\ 57)(66)(67)(77)$

f). $(123456)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 33 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 21 & 27 & 33 & 34 & 35 & 36 & 31 & 37 & 44 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 34 & 35 & 36 & 37 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \\ 45 & 46 & 41 & 47 & 55 & 56 & 51 & 57 & 66 & 61 & 67 & 11 & 17 & 77 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33\ 44\ 55\ 66)(12\ 23\ 34\ 45\ 56\ 16)(13\ 24\ 35\ 46\ 15\ 26)$

$(14\ 25\ 36)(17\ 27\ 37\ 47\ 57\ 67)(77)$

g). $(1234567) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 33 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 21 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 31 & 44 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 34 & 35 & 36 & 37 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \\ 45 & 46 & 47 & 41 & 55 & 56 & 57 & 51 & 66 & 67 & 61 & 77 & 71 & 11 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33\ 44\ 55\ 66\ 77)(12\ 23\ 34\ 45\ 56\ 67\ 17)(13\ 24\ 35\ 46\ 57\ 16\ 27)$

$(14\ 25\ 36\ 47\ 15\ 26\ 37)$

h). $(12)(34)(5)(6)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\Big(\begin{matrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 33 \\ 22 & 21 & 24 & 23 & 25 & 26 & 27 & 11 & 14 & 13 & 15 & 16 & 17 & 44 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 34 & 35 & 36 & 37 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \\ 43 & 45 & 46 & 47 & 33 & 35 & 36 & 37 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 25)(16\ 26)(17\ 27)(33\ 44)(34)$

$(35\ 45)(36\ 46)(37\ 47)(55)(56)(57)(66)(67)(77)$

i). $(12)(3\ 4)(5\ 6)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\Big(\begin{matrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 33 \\ 22 & 21 & 24 & 23 & 26 & 25 & 27 & 11 & 14 & 13 & 16 & 15 & 17 & 44 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 34 & 35 & 36 & 37 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \\ 43 & 46 & 45 & 47 & 33 & 36 & 35 & 37 & 66 & 65 & 67 & 55 & 57 & 77 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 26)(16\ 25)(17\ 27)(33\ 44)(34)$

$(35\ 46)(36\ 45)(37\ 47)(55\ 66)(56)(57\ 67)(77)$

j). $(12)(34)(567) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\Big(\begin{matrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 33 \\ 22 & 21 & 24 & 23 & 26 & 27 & 25 & 11 & 14 & 13 & 16 & 17 & 15 & 44 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 34 & 35 & 36 & 37 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \\ 43 & 46 & 47 & 45 & 33 & 36 & 37 & 35 & 66 & 67 & 65 & 77 & 75 & 55 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 26\ 17\ 25\ 16\ 27)(33\ 44)(34)$

$(35\ 46\ 37\ 45\ 36\ 47)(55\ 66\ 77)(56\ 67\ 57)$

k). $(12)(345)(6)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 33 \\ 22 & 21 & 24 & 25 & 23 & 26 & 27 & 11 & 14 & 15 & 13 & 16 & 17 & 44 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 34 & 35 & 36 & 37 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \\ 45 & 43 & 46 & 47 & 55 & 53 & 56 & 57 & 33 & 36 & 37 & 66 & 67 & 77 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24\ 15\ 23\ 14\ 25)(16\ 26)(17\ 27)(33\ 44\ 55)(34\ 45\ 35)$

$(36\ 46\ 56)(37\ 47\ 57)(66)(67)(77)$

l). $(12)(3456)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 33 \\ 22 & 21 & 24 & 25 & 26 & 23 & 27 & 11 & 14 & 15 & 16 & 13 & 17 & 44 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 34 & 35 & 36 & 37 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \\ 45 & 46 & 43 & 47 & 55 & 56 & 53 & 57 & 66 & 63 & 67 & 33 & 37 & 77 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24\ 15\ 26)(14\ 25\ 16\ 23)(17\ 27)(33\ 44\ 55\ 66)$

$(34\ 45\ 56\ 36)(35\ 46)(37\ 47\ 57\ 67)(77)$

m). $(12)(34567) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 33 \\ 22 & 21 & 24 & 25 & 26 & 27 & 23 & 11 & 14 & 15 & 16 & 17 & 13 & 44 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 34 & 35 & 36 & 37 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \\ 45 & 46 & 47 & 43 & 55 & 56 & 57 & 53 & 66 & 67 & 63 & 77 & 73 & 33 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24\ 15\ 26\ 17\ 23\ 14\ 25\ 16\ 27)(33\ 44\ 55\ 66\ 77)$

$(34\ 45\ 56\ 67\ 37)(35\ 46\ 57\ 36\ 47)$

n). $(123)(456)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 33 \\ 22 & 23 & 21 & 25 & 26 & 24 & 27 & 33 & 31 & 35 & 36 & 34 & 37 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 34 & 35 & 36 & 37 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \\ 15 & 16 & 14 & 17 & 55 & 56 & 54 & 57 & 66 & 64 & 67 & 44 & 47 & 77 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33)(12\ 23\ 13)(14\ 25\ 36)(15\ 26\ 34)(16\ 24\ 35)(17\ 27\ 37)$

$(44\ 55\ 66)(45\ 56\ 46)(47\ 57\ 67)(77)$

o). $(123)(4567) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 33 \\ 22 & 23 & 21 & 25 & 26 & 27 & 24 & 33 & 31 & 35 & 36 & 37 & 34 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 34 & 35 & 36 & 37 & 44 & 45 & 46 & 47 & 55 & 56 & 57 & 66 & 67 & 77 \\ 15 & 16 & 17 & 14 & 55 & 56 & 57 & 54 & 66 & 67 & 64 & 77 & 74 & 44 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33)(12\ 23\ 13)(14\ 25\ 36\ 17\ 24\ 35\ 16\ 27\ 34\ 15\ 26\ 37)$

$(44\ 55\ \ 66\ 77)(45\ 56\ 67\ 47)(46\ 57)$

Sehingga tipe untai dan indeks siklik dari anggota-anggota R_7, yaitu

(1). Tipe untai [28,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^{28}$ ada sebanyak 1 anggota.

(2). Tipe untai [16,6,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^{16}{y_2}^{6}$ ada sebanyak 21 anggota.

(3). Tipe untai [10,0,6,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^{10}{y_3}^{6}$ ada sebanyak 70 anggota.

(4). Tipe untai [6,1,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^{6}y_2{y_4}^{5}$ ada sebanyak 210 anggota.

(5). Tipe untai [3,0,0,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^{3}{y_5}^{5}$ ada sebanyak 504 anggota.

(6). Tipe untai [1,0,1,0,0,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_1y_3{y_6}^{4}$ ada sebanyak 840 anggota.

(7). Tipe untai [0,0,0,0,0,0,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_7}^{4}$ ada sebanyak 720 anggota.

(8). Tipe untai [8,10,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^8{y_2}^{10}$ ada sebanyak 105 anggota.

(9). Tipe untai [4,12,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^4{y_2}^{12}$ ada sebanyak 105 anggota.

(10). Tipe untai [2,4,2,0,0,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^2{y_2}^4{y_3}^2{y_6}^2$ ada sebanyak 210 anggota.

(11). Tipe untai [4,3,4,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^4{y_2}^3{y_3}^4y_6$ ada sebanyak 420 anggota.

(12). Tipe untai [2,3,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^2{y_2}^3{y_4}^5$ ada sebanyak 630 anggota.

(13). Tipe untai [1,1,0,0,3,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_1y_2{y_5}^3y_{10}$ ada sebanyak 504 anggota.

(14). Tipe untai [1,0,9,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_1{y_3}^9$ ada sebanyak 280 anggota.

(15). Tipe untai [0,1,2,2,0,0,0,0,0,0,0,12,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_2{y_3}^2{y_4}^2y_{12}$ ada sebanyak 420 anggota.

Dengan demikian indeks siklik dari R_7 adalah

$$Z(R_7; y_1, y_2, \dots, y_{28}) = \frac{1}{5040}[{y_1}^{28} + 21{y_1}^{16}{y_2}^6 + 70{y_1}^{10}{y_3}^6 + 210{y_1}^6y_2{y_4}^5 + 504{y_1}^3{y_5}^5 + 840y_1y_3{y_6}^4 + 720{y_7}^4 + 105{y_1}^8{y_2}^{10} + 105{y_1}^4{y_2}^{12} + 210{y_1}^2{y_2}^4{y_3}^2{y_6}^2 + 420{y_1}^4{y_2}^3{y_3}^4y_6 + 630{y_1}^2{y_2}^3{y_4}^5 + 504y_1y_2{y_5}^3y_{10} + 280y_1{y_3}^9 + 420y_2{y_3}^2{y_4}^2y_{12}]$$

Berdasarkan Teorema Polya I untuk $r = 2$ diperoleh

$$Z(R_7; 2,2,\dots,2) = \frac{1}{5040}[2^{28} + 21.2^{16}.2^6 + 70.2^{10}.2^6 + 210.2^6.2.2^5 + 504.2^3.2^5 + 840.2.2.2^4 + 720.2^4 + 105.2^8.2^{10} + 105.2^4.2^{12} + 210.2^2.2^4.2^2.2^2 + 420.2^4.2^3.2^4.2 + 630.2^2.2^3.2^5 + 504.2.2.2^3.2 + 280.2.2^9 + 420.2.2^2.2^2.2]$$

$$= 79264$$

Jadi banyaknya graf tak isomorfik yang terbentuk dari tujuh simpul ada sebanyak 79.264 graf.

Keadaan-keadaan yang mungkin terjadi diantara dua simpul yaitu:

(1). z^0: tidak ada sisi antara dua simpul.

(2). z^1: ada sisi antara dua simpul.

Dan berdasarkan Teorema Polya II dengan mensubsitusikan $y_1 = 1 + z$,

$y_2 = 1^2 + z^2$, $y_3 = 1^3 + z^3$, $y_4 = 1^4 + z^4$, $y_5 = 1^5 + z^5$, $y_6 = 1^6 + z^6$

$y_7 = 1^7 + z^7$, $y_{10} = 1^{10} + z^{10}$, dan $y_{12} = 1^{12} + z^{12}$

diperoleh indeks siklik R_7 sebagai berikut:

$$Z(R_7; y_1, y_2, \dots, y_{28}) = \frac{1}{5040}[(1+z)^{28} + 21(1+z)^{16}(1+z^2)^6 + 70(1+z)^{10}(1+z^3)^6 + 210(1+z)^6(1+z^2)(1+z^4)^5 + 504(1+z)^3(1+z^5)^5 + 840(1+z)(1+z^2)(1+z^6)^4 + 720(1+z^7)^4 + 105(1+z)^8(1+z^2)^{10} + 105(1+z)^4(1+z^2)^{12} + 210(1+z)^2(1+z^2)^4(1+z^3)^2(1+z^6)^2 + 420(1+z)^4(1+z^2)^3$$

$$(1+z^3)^4(1+z^6)+630(1+z)^2(1+z^2)^3(1+z^4)^5$$
$$+504(1+z)(1+z^2)(1+z^5)^3(1+z^{10})+$$
$$280(1+z)(1+z^3)^9+420(1+z^2)(1+z^3)^2$$
$$(1+z^4)^2(1+z^{12})]$$
$$=1+2z+5z^2+14z^3+37z^4+98z^5+252z^6+585z^7$$
$$+1239z^8+2396z^9+4135z^{10}+6340z^{11}+8630z^{12}$$
$$+10381z^{13}+11034z^{14}+10381z^{15}+8630z^{16}+$$
$$6340z^{17}+4135z^{18}+2396z^{19}+1239z^{20}+585z^{21}+$$
$$252z^{22}+98z^{23}+37z^{24}+14z^{25}+5z^{26}+2z^{27}+z^{28}.$$

Artinya dari $n=7$ simpul akan dihasilkan 1 graf tanpa sisi, 2 graf dengan 1 sisi, 5 graf dengan 2 sisi, 14 graf dengan 3 sisi, 37 graf dengan 4 sisi, 98 graf dengan 5 sisi, 252 graf dengan 6 sisi, 585 graf dengan 7 sisi, 1239 graf dengan 8 sisi, 2396 graf dengan 9 sisi, 4135 graf dengan 10 sisi, 6340 graf dengan 11 sisi, 8630 graf dengan 12 sisi, 10381 graf dengan 13 sisi, 11034 graf dengan 14 sisi, 10381 graf dengan 15 sisi, 8630 graf dengan 16 sisi, 6340 graf dengan 17 sisi, 4135 graf dengan 18 sisi, 2396 graf dengan 19 sisi, 1239 graf dengan 20 sisi, 585 graf dengan 21 sisi, 252 graf dengan 22 sisi, 98 graf dengan 23 sisi, 37 graf dengan 24 sisi, 14 graf dengan 25 sisi, 5 graf dengan 26 sisi, 2 graf dengan 27 sisi, dan 1 graf dengan 28 sisi.

Proposisi 4.1.13.

Banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari delapan simpul ada sebanyak 591.901.884.

Bukti:

Diketahui multigraf G dengan himpunan simpul $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Misal S_8 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan V, maka banyaknya anggota dari S_8 adalah $8! = 1.2.3.4.5.6.7.8 = 40320$

Dengan bantuan program *maple* diperoleh bentuk-bentuk hasil kali *cycle* yang saling asing dari grup S_8 beserta banyak anggota yang sejenis, yaitu:

(1). Bentuk $(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 1 buah.

(2). Bentuk $(12)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 28 buah.

(3). Bentuk $(123)(4)(5)(6)(7)(8)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 112 buah.

(4). Bentuk $(1234)(5)(6)(7)(8)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 420 buah.

(5). Bentuk $(12345)(6)(7)(8)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 1344 buah.

(6). Bentuk $(123456)(7)(8)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 3360 buah.

(7). Bentuk $(1234567)(8)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 5760 buah.

(8). Bentuk (12345678) dengan banyak anggota yang sejenis ada 5040 buah.

(9). Bentuk $(12)(34)(5)(6)(7)(8)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 210 buah.

(10). Bentuk $(12)(345)(6)(7)(8)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 1120 buah.

(11). Bentuk $(12)(3456)(7)(8)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 2520 buah.

(12). Bentuk $(12)(34567)(8)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 4032 buah.

(13). Bentuk $(12)(345678)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 3360 buah.

(14). Bentuk $(123)(456)(7)(8)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 1120 buah.

(15). Bentuk $(123)(4567)(8)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 3360 buah.

(16). Bentuk $(123)(45678)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 2688 buah.

(17). Bentuk $(1234)(5678)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 1260 buah.

(18). Bentuk $(12)(34)(56)(7)(8)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 420 buah.

(19). Bentuk $(12)(34)(56)(78)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 105 buah.

(20). Bentuk $(12)(34)(567)(8)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 1680 buah.

(21). Bentuk $(12)(34)(5678)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 1260 buah.

(22). Bentuk $(12)(345)(678)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 1120 buah.

Sehingga tipe untai dan indeks siklik dari bentuk-bentuk hasil perkalian *cycle* di atas adalah:

(1). Untuk tipe untai $[8,0,0,0,0,0,0,0]$ ada sebanyak 1 buah dengan indeks siklik ${x_1}^8$.

(2). Untuk tipe untai $[6,1,0,0,0,0,0,0]$ ada sebanyak 28 buah dengan indeks siklik ${x_1}^6 x_2$.

(3). Untuk tipe untai $[5,0,1,0,0,0,0,0]$ ada sebanyak 112 buah dengan indeks siklik ${x_1}^5 x_3$.

(4). Untuk tipe untai $[4,0,0,1,0,0,0,0]$ ada sebanyak 420 buah dengan indeks siklik ${x_1}^4 x_4$.

(5). Untuk tipe untai $[3,0,0,0,1,0,0,0]$ ada sebanyak 1344 buah dengan indeks siklik ${x_1}^3 x_5$.

(6). Untuk tipe untai $[2,0,0,0,0,1,0,0]$ ada sebanyak 3360 buah dengan indeks siklik ${x_1}^2 x_6$.

(7). Untuk tipe untai $[1,0,0,0,0,0,1,0]$ ada sebanyak 5760 buah dengan indeks siklik $x_1 x_7$.

(8). Untuk tipe untai $[0,0,0,0,0,0,0,1]$ ada sebanyak 5040 buah dengan indeks siklik x_8.

(9). Untuk tipe untai $[4,2,0,0,0,0,0,0]$ ada sebanyak 210 buah dengan indeks siklik ${x_1}^4 {x_2}^2$.

(10). Untuk tipe untai $[3,1,1,0,0,0,0,0]$ ada sebanyak 1120 buah dengan indeks siklik ${x_1}^3 x_2 x_3$.

(11). Untuk tipe untai $[2,1,0,1,0,0,0,0]$ ada sebanyak 2520 buah dengan indeks siklik ${x_1}^2 x_2 x_4$.

(12). Untuk tipe untai $[1,1,0,0,1,0,0,0]$ ada sebanyak 4032 buah dengan indeks siklik $x_1 x_2 x_5$.

(13). Untuk tipe untai $[0,1,0,0,0,1,0,0]$ ada sebanyak 3360 buah dengan indeks siklik $x_2 x_6$.

(14). Untuk tipe untai $[2,0,2,0,0,0,0,0]$ ada sebanyak 1120 buah dengan indeks siklik ${x_1}^2 {x_3}^2$.

(15). Untuk tipe untai $[1,0,1,1,0,0,0,0]$ ada sebanyak 3360 buah dengan indeks siklik $x_1 x_3 x_4$.

(16). Untuk tipe untai $[0,0,1,0,1,0,0,0]$ ada sebanyak 2688 buah dengan indeks siklik x_3x_5.

(17). Untuk tipe untai $[0,0,0,2,0,0,0,0]$ ada sebanyak 1260 buah dengan indeks siklik ${x_4}^2$.

(18). Untuk tipe untai $[2,3,0,0,0,0,0,0]$ ada sebanyak 420 buah dengan indeks siklik ${x_1}^2{x_2}^3$.

(19). Untuk tipe untai $[0,4,0,0,0,0,0,0]$ ada sebanyak 105 buah dengan indeks siklik ${x_2}^4$.

(20). Untuk tipe untai $[1,2,1,0,0,0,0,0]$ ada sebanyak 1680 buah dengan indeks siklik $x_1{x_2}^2x_3$.

(21). Untuk tipe untai $[0,2,0,1,0,0,0,0]$ ada sebanyak 1260 buah dengan indeks siklik ${x_2}^2x_4$.

(22). Untuk tipe untai $[0,1,2,0,0,0,0,0]$ ada sebanyak 1120 buah dengan indeks siklik $x_2{x_3}^2$.

Dengan demikian menurut Definisi 2.12 indeks siklik dari S_8 yaitu

$$\begin{aligned} Z(S_8\,; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8) = \frac{1}{40320}(&{x_1}^8 + 28{x_1}^6x_2 + 112{x_1}^5x_3 + 420{x_1}^4x_4 \\ &+1344{x_1}^3x_5 + 3360{x_1}^2x_6 + 5760x_1x_7 + \\ &5040x_8 + 210{x_1}^4{x_2}^2 + 1120{x_1}^3x_2x_3 + \\ &2520{x_1}^2x_2x_4 + 4032x_1x_2x_5 + 3360x_2x_6 + \\ &1120{x_1}^2{x_3}^2 + 3360x_1x_3x_4 + 2688x_3x_5 + \\ &1260{x_4}^2 + 420{x_1}^2{x_2}^3 + 105{x_2}^4 + \\ &1680x_1{x_2}^2x_3 + 1260{x_2}^2x_4 + 1120x_2{x_3}^2) \end{aligned}$$

Pasangan simpul yang mungkin terbentuk dari himpunan V yaitu $12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 34, 35, 36, 37, 38, 45, 46, 47, 48, 56, 57, 58, 67, 68, 78$. Misal R_8 adalah himpunan permutasi pasangan simpul di V. Diperoleh hasil kali *cycle* di R_8 adalah sebagai berikut:

a). $(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \end{matrix}\Big)$$

$$= (12)(13)(14)(15)(16)(17)(18)(23)(24)(25)(26)(27)(28)(34)(35)$$

$$(36)(37)(38)(45)(46)(47)(48)(56)(57)(58)(67)(68)(78)$$

b). $(12)(3)(4)(5)(6)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 21 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \end{matrix}\Big)$$

$$= (12)(13\ 23)(14\ 24)(15\ 25)(16\ 26)(17\ 27)(18\ 28)(34)(35)(36)(37)$$

$$(38)(45)(46)(47)(48)(56)(57)(58)(67)(68)(78)$$

c). $(123)(4)(5)(6)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 23 & 21 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 31 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \end{matrix}\Big)$$

$$= (12\ 23\ 13)(14\ 24\ 34)(15\ 25\ 35)(16\ 26\ 36)(17\ 27\ 37)(18\ 28\ 38)$$

$$(45)(46)(47)(48)(56)(57)(58)(67)(68)(78)$$

d). $(1234)(5)(6)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 23 & 24 & 21 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 & 31 & 35 & 36 & 37 & 38 & 41 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 45 & 46 & 47 & 48 & 15 & 16 & 17 & 18 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \end{matrix}\Big)$$

$= (12\ 23\ 34\ 14)(13\ 24)(15\ 25\ 35\ 45)(16\ 26\ 36\ 46)(17\ 27\ 37\ 47)$

$(18\ 28\ 38\ 48)(56)(57)(58)(67)(68)(78)$

e). $(12345)(6)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 23 & 24 & 25 & 21 & 26 & 27 & 28 & 34 & 35 & 31 & 36 & 37 & 38 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 41 & 46 & 47 & 48 & 51 & 56 & 57 & 58 & 16 & 17 & 18 & 67 & 68 & 78 \end{matrix}\Big)$$

$= (12\ 23\ 34\ 45\ 15)(13\ 24\ 35\ 14\ 25)(16\ 26\ 36\ 46\ 56)(17\ 27\ 37\ 47\ 57)$

$(18\ 28\ 38\ 48\ 58)(67)(68)(78)$

f). $(123456)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 23 & 24 & 25 & 26 & 21 & 27 & 28 & 34 & 35 & 36 & 31 & 37 & 38 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 46 & 41 & 47 & 48 & 56 & 51 & 57 & 58 & 61 & 67 & 68 & 17 & 18 & 78 \end{matrix}\Big)$$

$= (12\ 23\ 34\ 45\ 56\ 16)(13\ 24\ 35\ 46\ 15\ 26)(14\ 25\ 36)$

$(17\ 27\ 37\ 47\ 57\ 67)(18\ 28\ 38\ 48\ 58\ 68)(78)$

g). $(1234567)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 21 & 28 & 34 & 35 & 36 & 37 & 31 & 38 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 46 & 47 & 41 & 48 & 56 & 57 & 51 & 58 & 67 & 61 & 68 & 71 & 78 & 18 \end{matrix}\Big)$$

$= (12\ 23\ 34\ 45\ 56\ 67\ 17)(13\ 24\ 35\ 46\ 57\ 16\ 27)$

$(14\ 25\ 36\ 47\ 15\ 26\ 37)(18\ 28\ 38\ 48\ 58\ 68\ 78)$

h). $(12345678) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 21 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 31 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 46 & 47 & 48 & 41 & 56 & 57 & 58 & 51 & 67 & 68 & 61 & 78 & 71 & 81 \end{matrix}\Big)$$

$= (12\ 23\ 34\ 45\ 56\ 67\ 78\ 18)(13\ 24\ 35\ 46\ 57\ 68\ 17\ 28)$

$(14\ 25\ 36\ 47\ 58\ 16\ 27\ 38)(15\ 26\ 37\ 48\ )$

i). $(12)(34)(5)(6)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 21 & 24 & 23 & 25 & 26 & 27 & 28 & 14 & 13 & 15 & 16 & 17 & 18 & 43 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 45 & 46 & 47 & 48 & 35 & 36 & 37 & 38 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \end{matrix}\Big)$$

$= (12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 25)(16\ 26)(17\ 27)(18\ 28)(34)(35\ 45)$

$(36\ 46)(37\ 47)(38\ 48)(56)(57)(58)(67)(68)(78)$

j). $(12)(345)(6)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 21 & 24 & 25 & 23 & 26 & 27 & 28 & 14 & 15 & 13 & 16 & 17 & 18 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 43 & 46 & 47 & 48 & 53 & 56 & 57 & 58 & 36 & 37 & 38 & 67 & 68 & 78 \end{matrix}\Big)$$

$= (12)(13\ 24\ 15\ 23\ 14\ 25)(16\ 26)(17\ 27)(18\ 28)(34\ 45\ 35)$

$(36\ 46\ 56)(37\ 47\ 57)(38\ 48\ 58)(67)(68)(78)$

k). $(12)(3456)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 21 & 24 & 25 & 26 & 23 & 27 & 28 & 14 & 15 & 16 & 13 & 17 & 18 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 46 & 43 & 47 & 48 & 56 & 53 & 57 & 58 & 63 & 67 & 68 & 37 & 38 & 78 \end{matrix}\Big)$$

$= (12)(13\ 24\ 15\ 26)(14\ 25\ 16\ 23)(17\ 27)(18\ 28)(34\ 45\ 56\ 36)$

$(35\ 46)(37\ 47\ 57\ 67)(38\ 48\ 58\ 68)(78)$

l). $(12)(34567)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 21 & 24 & 25 & 26 & 27 & 23 & 28 & 14 & 15 & 16 & 17 & 13 & 18 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 46 & 47 & 43 & 48 & 56 & 57 & 53 & 58 & 67 & 63 & 68 & 73 & 78 & 38 \end{matrix}\Big)$$

$= (12)(13\ 24\ 15\ 26\ 17\ 23\ 14\ 25\ 16\ 27)(18\ 28)(34\ 45\ 56\ 67\ 37)$

$(35\ 46\ 57\ 36\ 47)(38\ 48\ 58\ 68\ 78)$

m). $(12)(345678) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 21 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 23 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 13 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 46 & 47 & 48 & 43 & 56 & 57 & 58 & 53 & 67 & 68 & 63 & 78 & 73 & 83 \end{matrix}\Big)$$

$= (12)(13\ 24\ 15\ 26\ 17\ 28)(14\ 25\ 16\ 27\ 18\ 23)(34\ 45\ 56\ 67\ 78\ 38)$

$(35\ 46\ 57\ 68\ 37\ 48)(36\ 47\ 58)$

n). $(123)(456)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 23 & 21 & 25 & 26 & 24 & 27 & 28 & 31 & 35 & 36 & 34 & 37 & 38 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 16 & 14 & 17 & 18 & 56 & 54 & 57 & 58 & 64 & 67 & 68 & 47 & 48 & 78 \end{matrix}\Big)$$

$= (12\ 23\ 13)(14\ 25\ 36)(15\ 26\ 34)(16\ 24\ 35)(17\ 27\ 37)(18\ 28\ 38)$

(45 56 46)(47 57 67)(48 58 68)(78)

o). $(123)(4567)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 23 & 21 & 25 & 26 & 27 & 24 & 28 & 31 & 35 & 36 & 37 & 34 & 38 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 16 & 17 & 14 & 18 & 56 & 57 & 54 & 58 & 67 & 64 & 68 & 74 & 78 & 48 \end{matrix}\Big)$$

$= (12\ 23\ 13)(14\ 25\ 36\ 17\ 24\ 35\ 16\ 27\ 34\ 15\ 26\ 37)(18\ 28\ 38)$

(45 56 67 47)(46 57)(48 58 68 78)

p). $(123)(45678) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 23 & 21 & 25 & 26 & 27 & 28 & 24 & 31 & 35 & 36 & 37 & 38 & 34 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 16 & 17 & 18 & 14 & 56 & 57 & 58 & 54 & 67 & 68 & 64 & 78 & 74 & 84 \end{matrix}\Big)$$

$= (12\ 23\ 13)(14\ 25\ 36\ 17\ 28\ 34\ 15\ 26\ 37\ 18\ 24\ 35\ 16\ 27\ 38)$

(45 56 67 78 48)(46 57 68 47 58)

q). $(1234)(5678)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 23 & 24 & 21 & 26 & 27 & 28 & 25 & 34 & 31 & 36 & 37 & 38 & 35 & 41 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 46 & 47 & 48 & 45 & 16 & 17 & 18 & 15 & 67 & 68 & 65 & 78 & 75 & 85 \end{matrix}\Big)$$

$= (12\ 23\ 34\ 14)(13\ 24)(15\ 26\ 37\ 48)(16\ 27\ 38\ 45)(17\ 28\ 35\ 46)$

(18 25 36 47)(56 67 78 58)(57 68)

r). $(12)(34)(56)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 21 & 24 & 23 & 26 & 25 & 27 & 28 & 14 & 13 & 16 & 15 & 17 & 18 & 43 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 46 & 45 & 47 & 48 & 36 & 35 & 37 & 38 & 65 & 67 & 68 & 57 & 58 & 78 \end{matrix}\Bigg)$$

$= (12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 26)(16\ 25)(17\ 27)(18\ 28)(34)(35\ 46)$

$(36\ 45)(37\ 47)(38\ 48)(56)(57\ 67)(58\ 68)(78)$

s). $(12)(34)(56)(78) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\Bigg(\begin{matrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 21 & 24 & 23 & 26 & 25 & 28 & 27 & 14 & 13 & 16 & 15 & 18 & 17 & 43 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 46 & 45 & 48 & 47 & 36 & 35 & 38 & 37 & 65 & 68 & 67 & 58 & 57 & 87 \end{matrix}\Bigg)$$

$= (12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 26)(16\ 25)(17\ 28)(18\ 27)(34)(35\ 46)$

$(36\ 45)(37\ 48)(38\ 47)(56)(57\ 68)(58\ 67)(78)$

t). $(12)(34)(567)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\Bigg(\begin{matrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 21 & 24 & 23 & 26 & 27 & 25 & 28 & 14 & 13 & 16 & 17 & 15 & 18 & 43 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 46 & 47 & 45 & 48 & 36 & 37 & 35 & 38 & 67 & 65 & 68 & 75 & 78 & 58 \end{matrix}\Bigg)$$

$= (12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 26\ 17\ 25\ 16\ 27)(18\ 28)(34)$

$(35\ 46\ 37\ 45\ 36\ 47)(38\ 48)(56\ 67\ 57)(58\ 68\ 78)$

u). $(12)(34)(5678) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\Bigg(\begin{matrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 21 & 24 & 23 & 26 & 27 & 28 & 25 & 14 & 13 & 16 & 17 & 18 & 15 & 43 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 46 & 47 & 48 & 45 & 36 & 37 & 38 & 35 & 67 & 68 & 65 & 78 & 75 & 85 \end{matrix}\Bigg)$$

$= (12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 26\ 17\ 28\ )(16\ 27\ 18\ 25)(34)(35\ 46\ 37\ 48)$

$(36\ 47\ 38\ 45)(56\ 67\ 78\ 58)(57\ 68)$

v). $(12)(345)(678) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 34 \\ 21 & 24 & 25 & 23 & 27 & 28 & 26 & 14 & 15 & 13 & 17 & 18 & 16 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 35 & 36 & 37 & 38 & 45 & 46 & 47 & 48 & 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78 \\ 43 & 47 & 48 & 46 & 53 & 57 & 58 & 56 & 37 & 38 & 36 & 78 & 76 & 86 \end{matrix}\Big)$$

$$= (12)(13\ 24\ 15\ 23\ 14\ 25)(16\ 27\ 18\ 26\ 17\ 28)(34\ 45\ 35)(36\ 47\ 58)$$

$$(37\ 48\ 56)(38\ 46\ 57)(67\ 78\ 68)$$

Tipe untai dan indeks siklik dari anggota-anggota R_8 yaitu

(1). Tipe untai [28,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^{28}$ ada sebanyak 1 buah.

(2). Tipe untai [16,6,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^{16}{y_2}^{6}$ ada sebanyak 28 buah.

(3). Tipe untai [10,0,6,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^{10}{y_3}^{6}$ ada sebanyak 112 buah.

(4). Tipe untai [6,1,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^{6}y_2{y_4}^{5}$ ada sebanyak 420 buah.

(5). Tipe untai [3,0,0,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^{3}{y_5}^{5}$ ada sebanyak 1344 buah.

(6). Tipe untai [0,0,1,0,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_3{y_6}^{3}$ ada sebanyak 3360 buah.

(7). Tipe untai [0,0,0,0,0,0,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_7}^{4}$ ada sebanyak 5760 buah.

(8). Tipe untai [0,0,0,1,0,0,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_4{y_8}^3$ ada sebanyak 5040 buah.

(9). Tipe untai [8,10,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^8{y_2}^{10}$ ada sebanyak 210 buah.

(10). Tipe untai [4,3,4,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^4{y_2}^3{y_3}^4y_6$ ada sebanyak 1120 buah.

(11). Tipe untai [2,3,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^2{y_2}^3{y_4}^5$ ada sebanyak 2520 buah.

(12). Tipe untai [1,1,0,0,3,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_1y_2{y_5}^3y_{10}$ ada sebanyak 4032 buah.

(13). Tipe untai [1,0,1,0,0,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_1y_3{y_6}^4$ ada sebanyak 3360 buah.

(14). Tipe untai [1,0,0,0,0,0,0,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_1{y_9}^3$ ada sebanyak 1120 buah.

(15). Tipe untai [0,1,2,0,2,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_2{y_3}^2{y_4}^2y_{12}$ ada sebanyak 3360 buah.

(16). Tipe untai [0,0,1,0,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_3{y_5}^2y_{15}$ ada sebanyak 2688 buah.

(17). Tipe untai [0,2,0,6,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_2}^2{y_4}^6$ ada sebanyak 1260 buah.

(18). Tipe untai [4,12,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^4{y_2}^{12}$ ada sebanyak 420 buah.

(19). Tipe untai [4,12,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^4{y_2}^{12}$ ada sebanyak 105 buah.

(20). Tipe untai [2,4,2,0,0,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^2{y_2}^4{y_3}^2{y_6}^2$ ada sebanyak 1680 buah.

(21). Tipe untai [2,3,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik ${y_1}^2{y_2}^3{y_4}^5$ ada sebanyak 1260 buah.

(22). Tipe untai [1,0,5,0,0,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] dengan indeks siklik $y_1{y_3}^5{y_6}^2$ ada sebanyak 1120 buah.

Jadi indeks siklik dari R_8 adalah

$$Z(R_8; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = \frac{1}{40320}[1{x_1}^{28} + 28{x_1}^{16}{x_2}^6 + 112{x_1}^{10}{x_3}^6 + 420{x_1}^6x_2{x_4}^5 + 1344{x_1}^3{x_5}^5 + 3360x_1x_3{x_6}^4 + 5760{x_7}^4 + 5040x_4{x_8}^3 + 210{x_1}^8{x_2}^{10} + 1120{x_1}^4{x_2}^3{x_3}^4x_6 + 2520{x_1}^2{x_2}^3{x_4}^5 + 4032x_1x_2{x_5}^3x_{10} + 3360x_1x_3{x_6}^4 + 1120x_1{x_3}^9 + 3360x_2{x_3}^2{x_4}^2x_{12} + 2688x_3{x_5}^2x_{15} + 1260{x_2}^2{x_4}^6 + 420{x_1}^4{x_2}^{12} + 105{x_1}^4{x_2}^{12} + 1680{x_1}^2{x_2}^4{x_3}^2{x_6}^2 + 1260{x_1}^2{x_2}^3{x_4}^5 + 1120x_1{x_3}^5{x_6}^2].$$

Berdasarkan Teorema Polya I untuk $r = 3$ diperoleh

$$Z(R_8; 3,3,3,\dots,3) = \frac{1}{40320}[3^{28} + 28.3^{16}.3^6 + 112.3^{10}.3^6 + 420.3^6.3.3^5 +$$

$$1344.3^3.3^5 + 3360.3.3.3^4 + 5760.3^4 + 5040.3.3^3$$

$$+210.3^8.3^{10} + 1120.3^4.3^3.3^4.3 + 2520.3^2.3^3.3^5$$

$$+4032.3.3.3^3.3 + 3360.3.3.3^4 + 1120.3.3^9$$

$$+3360.3.3^2.3^2.3 + 2688.3.3^2.3 + 1260.3^2.3^6$$

$$+420.3^4.3^{12} + 105.3^4.3^{12} + 1680.3^2.3^4.3^2.3^2$$

$$+1260.3^2.3^3.3^5 + 1120.3.3^5.3^2]$$

$$= 591901884$$

Jadi banyaknya graf tak isomorfik yang terbentuk dari delapan simpul ada sebanyak 591.901.884 graf.

Keadaan-keadaan yang mungkin terjadi diantara dua simpul yaitu:

(1). z^0: tidak ada sisi antara dua simpul.

(2). z^1: ada sisi antara dua simpul.

(3). z^2: ada sisi rangkap antara dua simpul.

Dan berdasarkan Teorema Polya II dengan mensubsitusikan $y_1 = 1 + z + z^2$, $y_2 = 1^2 + z + (z^2)^2$, $y_3 = 1^3 + z^3 + (z^2)^3$, $y_4 = 1^4 + z^4 + (z^2)^4$, $y_5 = 1^5 + z^5 + (z^2)^5$, $y_6 = 1^6 + z^6 + (z^2)^6$, $y_7 = 1^7 + z^7 + (z^2)^7$, $y_8 = 1^8 + z^8 + (z^2)^8$, $y_{10} = 1^{10} + z^{10} + (z^2)^{10}$, $y_{12} = 1^{12} + z^{12} + (z^2)^{12}$, $y_{15} = 1^{15} + z^{15} + (z^2)^{15}$ diperoleh indeks siklik R_8:

$$Z(R_8; x_1, x_2, \dots, x_8) = \frac{1}{40320}[(1 + z + z^2)^{28} + 28(1 + z + z^2)^{16}(1 + z^2 + z^4)^6$$

$$112(1 + z + z^2)^{10}(1 + z^3 + z^6)^6 + 420(1 + z + z^2)^6$$

$$(1 + z^2 + z^4)(1 + z^4 + z^8)^5 + 1344(1 + z + z^2)^3$$

$$(1 + z^5 + z^{10})^5 + 3360(1 + z + z^2)(1 + z^3 + z^6)$$

$$(1+z^6+z^{12})^4+5760(1+z^7+z^{14})^4+$$
$$5040(1+z^4+z^8)(1+z^8+z^{16})^3+210(1+z+z^2)^8$$
$$(1+z^2+z^4)^{10}+1120(1+z+z^2)^4(1+z^2+z^4)^3$$
$$(1+z^3+z^6)^4(1+z^6+x^{12})+2520(1+z+z^2)^2$$
$$(1+z^2+z^4)^3(1+z^4+z^8)^5+4032(1+z+z^2)$$
$$(1+z^2+z^4)(1+z^5+z^{10})^3(1+z^{10}+z^{20})+3360$$
$$(1+z+z^2)(1+z^2+z^4)(1+z^6+z^{12})^4+$$
$$1120(1+z+z^2)(1+z^3+z^6)^9+$$
$$3360(1+z^2+z^4)(1+z^3+z^6)^2(1+z^4+z^8)^2$$
$$(1+z^{12}+z^{24})+2688(1+z^3+z^6)(1+z^5+z^{10})^2$$
$$(1+z^{15}+z^{30})+1260(1+z^2+z^4)^2(1+z^4+z^8)^6$$
$$+420(1+z+z^2)^4(1+z^2+z^4)^{12}+105(1+z+z^2)^4$$
$$(1+z^2+z^4)^{12}+1680(1+z+z^2)^2(1+z^2+z^4)^4$$
$$(1+z^3+z^6)^2(1+z^6+z^{12})^2+1260(1+z+z^2)^2$$
$$(1+z^2+z^4)^3(1+z^4+z^8)^5+$$
$$1120(1+z+z^2)(1+z^3+z^6)^5(1+z^6+z^{12})^2]$$
$$=1+z+3z^2+7z^3+20z^4+52z^5+153z^6+424z^7+$$
$$1206z^8+3323z^9+8958z^{10}+23072z^{11}+56843z^{12}$$
$$+132555z^{13}+292714z^{14}+609989z^{15}+1200319z^{16}$$
$$+2228801z^{17}+3909244z^{18}+6478634z^{19}+$$
$$10155654z^{20}+15066553z^{21}+21173825z^{22}+$$
$$28203364z^{23}+35630890z^{24}+42711759z^{25}+$$
$$48603852z^{26}+52514907z^{27}+53887638z^{28}+$$

$$52514907z^{29} + 48603852z^{30} + 42711759z^{31} +$$
$$35630890z^{32} + 28203364z^{33} + 21173825z^{34} +$$
$$15066553z^{35} + 10155654z^{36} + 6478634z^{37} +$$
$$3909244z^{38} + 2228801z^{39} + 1200319z^{40} +$$
$$609989z^{41} + 292714z^{42} + 132555z^{43} + 56843z^{44} +$$
$$23072z^{45} + 8958z^{46} + 3323z^{47} + 1206z^{48} + 424z^{49}$$
$$+153z^{50} + 52z^{51} + 20z^{52} + 7z^{53} + 3z^{54} + z^{55} + z^{56}$$

Artinya dari $n = 8$ simpul akan dihasilkan 1 graf tanpa sisi, 1 graf dengan 1 sisi, 3 graf dengan 2 sisi, 7 graf dengan 3 sisi, 20 graf dengan 4 sisi, 52 graf dengan 5 sisi, 153 graf dengan 6 sisi, 424 graf dengan 7 sisi, 1206 graf dengan 8 sisi, 3323 graf dengan 9 sisi, 8958 graf dengan 10 sisi, 23072 graf dengan 11 sisi, 56843 graf dengan 12 sisi, 132555 graf dengan 13 sisi, 292714 graf dengan 14 sisi, 609989 graf dengan 15 sisi, 1200319 graf dengan 16 sisi, 2228801 graf dengan 17 sisi, 3909244 graf dengan 18 sisi, 6478634 graf dengan 19 sisi, 10155654 graf dengan 20 sisi, 15066553 graf dengan 21 sisi, 21173825 graf dengan 22 sisi, 28203364 graf dengan 23 sisi, 35630890 graf dengan 24 sisi, 42711759 graf dengan 25 sisi, 48603852 graf dengan 26 sisi, 52514907 graf dengan 27 sisi, 53887638 graf dengan 28 sisi, 52514907 graf dengan 29 sisi, 48603852 graf dengan 30 sisi, 42711759 graf dengan 31 sisi, 35630890 graf dengan 32 sisi, 28203364 graf dengan 33 sisi, 21173825 graf dengan 34 sisi, 15066553 graf dengan 35 sisi, 10155654 graf dengan 36 sisi, 6478634 graf dengan 37 sisi, 3909244 graf dengan 38 sisi, 2228801 graf dengan 39 sisi, 1200319 graf dengan 40 sisi, 609989 graf dengan 41 sisi, 292714 graf dengan 42 sisi, 132555 graf

dengan 43 sisi, 56843 graf dengan 44 sisi, 23072 graf dengan 45 sisi, 8958 graf dengan 46 sisi, 3323 graf dengan 47 sisi, 1206 graf dengan 48 sisi, 424 graf dengan 49 sisi, 153 graf dengan 50 sisi, 52 graf dengan 51 sisi, 20 graf dengan 52 sisi, 7 graf dengan 53 sisi, 3 graf dengan 54 sisi, 1 graf dengan 55 sisi, dan 1 graf dengan 56 sisi.

Proposisi 4.1.14.

Banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari delapan simpul ada sebanyak 2.208.612.

Bukti:

Diketahui graf *G* dengan himpunan simpul $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Dari proposisi 4.1.13 indeks siklik dari S_8 adalah

$$\begin{aligned} Z(S_8\,; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8) = \frac{1}{40320}(&{x_1}^8 + 28{x_1}^6x_2 + 112{x_1}^5x_3 + 420{x_1}^4x_4 \\ &+1344{x_1}^3x_5 + 3360{x_1}^2x_6 + 5760x_1x_7 + \\ &5040x_8 + 210{x_1}^4{x_2}^2 + 1120{x_1}^3x_2x_3 + \\ &2520{x_1}^2x_2x_4 + 4032x_1x_2x_5 + 3360x_2x_6 + \\ &1120{x_1}^2{x_3}^2 + 3360x_1x_3x_4 + 2688x_3x_5 + \\ &1260{x_4}^2 + 420{x_1}^2{x_2}^3 + 105{x_2}^4 + \\ &1680x_1{x_2}^2x_3 + 1260{x_2}^2x_4 + 1120x_2{x_3}^2) \end{aligned}$$

Karena dalam graf *G* sisi loop diperbolehkan, maka pasangan simpul yang mungkin terbentuk dari himpunan V yaitu $11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 44, 45, 46, 47, 48, 55, 56, 57, 58, 66, 67, 68, 77, 78, 88$. Misal R_8 adalah himpunan permutasi pasangan simpul di V. Hasil kali *cycle* yang terbentuk di R_8 adalah:

a). $(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \end{matrix}\Big)$$

$= (11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(18)(22)(23)(24)(25)(26)(27)(28)$

$(33)(34)(35)(36)(37)(38)(44)(45)(46)(47)(48)(55)(56)(57)(58)$

$(66)(67)(68)(77)(78)(88)$

b). $(12)(3)(4)(5)(6)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 21 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 11 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 18 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 23)(14\ 24)(15\ 25)(16\ 26)(17\ 27)(18\ 28)(33)(34)$

$(35)(36)(37)(38)(44)(45)(46)(47)(48)(55)(56)(57)(58)(66)(67)$

$(68)(77)(78)(88)$

c). $(123)(4)(5)(6)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 23 & 21 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 33 & 31 & 34 & 35 & 36 & 37 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 38 & 11 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33)(12\ 23\ 13)(14\ 24\ 34)(15\ 25\ 35)(16\ 26\ 36)(17\ 27\ 37)$

$(18\ 28\ 38)(44)(45)(46)(47)(48)(55)(56)(57)(58)(66)(67)(68)$

$(77)(78)(88)$

d). $(1234)(5)(6)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 23 & 24 & 21 & 25 & 26 & 27 & 28 & 33 & 34 & 31 & 35 & 36 & 37 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 38 & 44 & 41 & 45 & 46 & 47 & 48 & 11 & 15 & 16 & 17 & 18 & 55 & 56 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33\ 44)(12\ 23\ 34\ 14)(13\ 24)(15\ 25\ 35\ 45)(16\ 26\ 36\ 46)$

$(17\ 27\ 37\ 47)(18\ 28\ 38\ 48)(55)(56)(57)(58)(66)(67)(68)$

$(77)(78)(88)$

e). $(12345)(6)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 21 & 26 & 27 & 28 & 33 & 34 & 35 & 31 & 36 & 37 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 38 & 44 & 45 & 41 & 46 & 47 & 48 & 55 & 51 & 56 & 57 & 58 & 11 & 16 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 17 & 18 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33\ 44\ 55)(12\ 23\ 34\ 45\ 15)(13\ 24\ 35\ 14\ 25)(16\ 26\ 36\ 46\ 56)$

$(17\ 27\ 37\ 47\ 57)(18\ 28\ 38\ 48\ 58)(66)(67)(68)(77)(78)(88)$

f). $(123456)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 21 & 27 & 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 31 & 37 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 38 & 44 & 45 & 46 & 41 & 47 & 48 & 55 & 56 & 51 & 57 & 58 & 66 & 61 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 67 & 68 & 11 & 17 & 18 & 77 & 78 & 88 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33\ 44\ 55\ 66)(12\ 23\ 34\ 45\ 56\ 16)(13\ 24\ 35\ 46\ 15\ 26)$

$(14\ 25\ 36)(17\ 27\ 37\ 47\ 57\ 67)(18\ 28\ 38\ 48\ 58\ 68)(77)(78)(88)$

g). $(1234567)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\Big(\begin{matrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 21 & 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 31 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 41 & 48 & 55 & 56 & 57 & 51 & 58 & 66 & 67 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 61 & 68 & 77 & 71 & 78 & 11 & 18 & 88 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33\ 44\ 55\ 66\ 77)(12\ 23\ 34\ 45\ 56\ 67\ 17)(13\ 24\ 35\ 46\ 57\ 16\ 27)$

$(14\ 25\ 36\ 47\ 15\ 26\ 37\ )(18\ 28\ 38\ 48\ 58\ 68\ 78)(88)$

h). $(12345678) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\Big(\begin{matrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 21 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 31 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 41 & 55 & 56 & 57 & 58 & 51 & 66 & 67 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 68 & 61 & 77 & 78 & 71 & 88 & 81 & 11 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33\ 44\ 55\ 66\ 77\ 88)(12\ 23\ 34\ 45\ 56\ 67\ 78\ 18)$

$(13\ 24\ 35\ 46\ 57\ 68\ 1728\ )(14\ 25\ 36\ 47\ 58\ 16\ 27\ 38)(15\ 26\ 37\ 48)$

i). $(12)(34)(5)(6)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\Big(\begin{matrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 21 & 24 & 23 & 25 & 26 & 27 & 28 & 11 & 14 & 13 & 15 & 16 & 17 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 18 & 44 & 43 & 45 & 46 & 47 & 48 & 33 & 35 & 36 & 37 & 38 & 55 & 56 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 25)(16\ 26)(17\ 27)(18\ 28)(33\ 44)(34)$

$(35\ 45)(36\ 46)(37\ 47)(38\ 48)(55)(56)(57)(58)(66)(67)(68)(77)$

$(78)(88)$

j). $(12)(345)(6)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\Big(\begin{matrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 21 & 24 & 25 & 23 & 26 & 27 & 28 & 11 & 14 & 15 & 13 & 16 & 17 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 18 & 44 & 45 & 43 & 46 & 47 & 48 & 55 & 53 & 56 & 57 & 58 & 33 & 36 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 37 & 38 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24\ 15\ 23\ 14\ 25)(16\ 26)(17\ 27)(18\ 28)(33\ 44\ 55)$

$(34\ 45\ 35)(36\ 46\ 56)(37\ 47\ 57)(38\ 48\ 58)(66)(67)(68)(77)(78)(88)$

k). $(12)(3456)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\Big(\begin{matrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 21 & 24 & 25 & 26 & 23 & 27 & 28 & 11 & 14 & 15 & 16 & 13 & 17 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 18 & 44 & 45 & 46 & 43 & 47 & 48 & 55 & 56 & 53 & 57 & 58 & 66 & 63 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 67 & 68 & 33 & 37 & 38 & 77 & 78 & 88 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24\ 15\ 26)(14\ 25\ 16\ 23)(17\ 27)(18\ 28)(33\ 44\ 55\ 66)$

$(34\ 45\ 56\ 36)(35\ 46)(37\ 47\ 57\ 67)(38\ 48\ 58\ 68)(77)(78)(88)$

l). $(12)(34567)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 21 & 24 & 25 & 26 & 27 & 23 & 28 & 11 & 14 & 15 & 16 & 17 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 18 & 44 & 45 & 46 & 47 & 43 & 48 & 55 & 56 & 57 & 53 & 58 & 66 & 67 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 63 & 68 & 77 & 73 & 78 & 33 & 38 & 88 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24\ 15\ 26\ 17\ 23\ 14\ 25\ 16\ 27)(18\ 28)(33\ 44\ 55\ 66\ 77)$

$(34\ 45\ 56\ 67\ 37)(35\ 46\ 57\ 36\ 47)(38\ 48\ 58\ 68\ 78)(88)$

m). $(12)(345678) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 21 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 23 & 11 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 13 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 43 & 55 & 56 & 57 & 58 & 53 & 66 & 67 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 68 & 63 & 77 & 78 & 73 & 88 & 83 & 33 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24\ 15\ 26\ 17\ 28)(14\ 25\ 16\ 27\ 18\ 23)(33\ 44\ 55\ 66\ 77\ 88)$

$(34\ 45\ 56\ 67\ 78\ 38)(35\ 46\ 57\ 68\ 37\ 48)(36\ 47\ 58)$

n). $(123)(456)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 23 & 21 & 25 & 26 & 24 & 27 & 28 & 33 & 31 & 35 & 36 & 34 & 37 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 38 & 11 & 15 & 16 & 14 & 17 & 18 & 55 & 56 & 54 & 57 & 58 & 66 & 64 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 67 & 68 & 44 & 47 & 48 & 77 & 78 & 88 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33)(12\ 23\ 13)(14\ 25\ 36)(15\ 26\ 34)(16\ 24\ 35)(17\ 27\ 37)$

$(18\ 28\ 38)(44\ 55\ 66)(45\ 56\ 46)(47\ 57\ 67)(48\ 58\ 68)(77)(78)(88)$

o). $(123)(4567)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 23 & 21 & 25 & 26 & 27 & 24 & 28 & 33 & 31 & 35 & 36 & 37 & 34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 38 & 11 & 15 & 16 & 17 & 14 & 18 & 55 & 56 & 57 & 54 & 58 & 66 & 67 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 64 & 68 & 77 & 74 & 78 & 44 & 48 & 88 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33)(12\ 23\ 13)(14\ 25\ 36\ 17\ 24\ 35\ 16\ 27\ 34\ 15\ 26\ 37)$

$(18\ 28\ 38)(44\ 55\ 66\ 77)(45\ 56\ 67\ 47)(46\ 57)(48\ 58\ 68\ 78)(88)$

p). $(123)(45678) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 23 & 21 & 25 & 26 & 27 & 28 & 24 & 33 & 31 & 35 & 36 & 37 & 38 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 34 & 11 & 15 & 16 & 17 & 18 & 14 & 55 & 56 & 57 & 58 & 54 & 66 & 67 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 68 & 64 & 77 & 78 & 74 & 88 & 84 & 44 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33)(12\ 23\ 13)(14\ 25\ 36\ 17\ 28\ 34\ 15\ 26\ 37\ 18\ 24\ 35\ 16\ 27\ 38)$

$(44\ 55\ 66\ 77\ 88)(45\ 56\ 67\ 78\ 48)(46\ 57\ 68\ 47\ 58)$

q). $(1234)(5678)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 23 & 24 & 21 & 26 & 27 & 28 & 25 & 33 & 34 & 31 & 36 & 37 & 38 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 35 & 44 & 41 & 46 & 47 & 48 & 45 & 11 & 16 & 17 & 18 & 15 & 66 & 67 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 68 & 65 & 77 & 78 & 75 & 88 & 85 & 55 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22\ 33\ 44)(12\ 23\ 34\ 14)(13\ 24)(15\ 26\ 37\ 48)(16\ 27\ 38\ 45)$

$(17\ 28\ 35\ 46)(18\ 25\ 36\ 47)(55\ 66\ 77\ 88)(56\ 67\ 78\ 58)(57\ 68)$

r). $(12)(34)(56)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 21 & 24 & 23 & 26 & 25 & 27 & 28 & 11 & 14 & 13 & 16 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 18 & 44 & 43 & 46 & 45 & 47 & 48 & 33 & 36 & 35 & 37 & 38 & 66 & 65 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 67 & 68 & 55 & 57 & 58 & 77 & 78 & 88 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 26)(16\ 25)(17\ 27)(18\ 28)(33\ 44)$

$(34)(35\ 46)(36\ 45)(37\ 47)(38\ 48)(55\ 66)(56)(57\ 67)(58\ 68)$

$(77)(78)(88)$

s). $(12)(34)(56)(78) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 21 & 24 & 23 & 26 & 25 & 28 & 27 & 11 & 14 & 13 & 16 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 17 & 44 & 43 & 46 & 45 & 48 & 47 & 33 & 36 & 35 & 38 & 37 & 66 & 65 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 68 & 67 & 55 & 58 & 57 & 88 & 87 & 77 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 26)(16\ 25)(17\ 28)(18\ 27)(33\ 44)(34)$

$(35\ 46)(36\ 45)(37\ 48)(38\ 47)(55\ 66)(56)(57\ 68)(58\ 67)(77\ 88)(78)$

t). $(12)(34)(567)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 21 & 24 & 23 & 26 & 27 & 25 & 28 & 11 & 14 & 13 & 16 & 17 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 18 & 44 & 43 & 46 & 47 & 45 & 48 & 33 & 36 & 37 & 35 & 38 & 66 & 67 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 65 & 68 & 77 & 75 & 78 & 55 & 58 & 88 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 26\ 17\ 25\ 16\ 27)(18\ 28)(33\ 44)(34)$

$(35\ 46\ 37\ 45\ 36\ 47)(38\ 48)(55\ 66\ 77)(56\ 67\ 57)(58\ 68\ 78)(88)$

u). $(12)(34)(5678) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 21 & 24 & 23 & 26 & 27 & 28 & 25 & 11 & 14 & 13 & 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 15 & 44 & 43 & 46 & 47 & 48 & 45 & 33 & 36 & 37 & 38 & 35 & 66 & 67 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 68 & 65 & 77 & 78 & 75 & 88 & 85 & 55 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 26\ 17\ 28)(16\ 27\ 18\ 25)(33\ 44)(34)$

$(35\ 46\ 37\ 48)(36\ 47\ 38\ 45)(55\ 66\ 77\ 88)(56\ 67\ 78\ 58)(57\ 68)$

v). $(12)(345)(678) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 22 & 21 & 24 & 25 & 23 & 27 & 28 & 26 & 11 & 14 & 15 & 13 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 28 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 55 & 56 \\ 16 & 44 & 45 & 43 & 47 & 48 & 46 & 55 & 53 & 57 & 58 & 56 & 33 & 37 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 57 & 58 & 66 & 67 & 68 & 77 & 78 & 88 \\ 38 & 36 & 77 & 78 & 76 & 88 & 86 & 66 \end{matrix}\Big)$$

$= (11\ 22)(12)(13\ 24\ 15\ 23\ 14\ 25)(16\ 27\ 18\ 26\ 17\ 28)(33\ 44\ 55)$

$(34\ 45\ 35)(36\ 47\ 58)(37\ 48\ 56)(38\ 46\ 57)(66\ 77\ 88)(67\ 78\ 68)$

Sehingga tipe untai dan indeks siklik dari anggota-anggota R_8, yaitu

(1). Tipe untai

$[36,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$

dengan indeks sikliknya ${y_1}^{36}$ ada sebanyak 1 anggota.

(2). Tipe untai

$[22,7,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$

dengan indeks sikliknya ${y_1}^{22}{y_2}^{7}$ ada sebanyak 28 anggota.

(3). Tipe untai

[15,0,7,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya ${y_1}^{15}{y_3}^{7}$ ada sebanyak 112 anggota.

(4). Tipe untai

[10,1,0,6,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya ${y_1}^{10}y_2{y_4}^{6}$ ada sebanyak 420 anggota.

(5). Tipe untai

[6,0,0,0,6,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya ${y_1}^{6}{y_5}^{6}$ ada sebanyak 1344 anggota.

(6). Tipe untai

[3,0,1,0,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya ${y_1}^{3}y_3{y_6}^{5}$ ada sebanyak 3360 anggota.

(7). Tipe untai

[1,0,0,0,0,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya $y_1{y_7}^{5}$ ada sebanyak 5760 anggota.

(8). Tipe untai

[0,0,0,1,0,0,0,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya $y_4{y_8}^{4}$ ada sebanyak 5040 anggota.

(9). Tipe untai

[12,12,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya ${y_1}^{12}{y_2}^{12}$ ada sebanyak 210 anggota.

(10). Tipe untai

[7,4,5,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya ${y_1}^7{y_2}^4{y_3}^5y_6$ ada sebanyak 1120 anggota.

(11). Tipe untai

[4,4,0,6,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya ${y_1}^4{y_2}^4{y_4}^6$ ada sebanyak 2520 anggota.

(12). Tipe untai

[2,2,0,0,4,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya ${y_1}^2{y_2}^2{y_5}^4y_{10}$ ada sebanyak 4032 anggota.

(13). Tipe untai

[1,1,1,0,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya $y_1y_2y_3{y_6}^5$ ada sebanyak 3360 anggota.

(14). Tipe untai

[3,0,11,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya ${y_1}^3{y_3}^{11}$ ada sebanyak 1120 anggota.

(15). Tipe untai

[1,1,3,3,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya $y_1y_2{y_3}^3{y_4}^3y_{12}$ ada sebanyak 3360 anggota.

(16). Tipe untai

[0,0,2,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya ${y_3}^2{y_5}^3y_{15}$ ada sebanyak 2688 anggota.

(17). Tipe untai

[0,2,0,8,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya ${y_2}^2{y_4}^8$ ada sebanyak 1260 anggota.

(18). Tipe untai

[6,15,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya ${y_1}^6{y_2}^{15}$ ada sebanyak 420 anggota.

(19). Tipe untai

[4,16,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya ${y_1}^4{y_2}^{16}$ ada sebanyak 105 anggota.

(20). Tipe untai

[3,6,3,0,0,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya ${y_1}^3{y_2}^6{y_3}^3{y_6}^2$ ada sebanyak 1680 anggota.

(21). Tipe untai

[2,5,0,6,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya ${y_1}^2{y_2}^5{y_4}^6$ ada sebanyak 1260 anggota.

(22). Tipe untai

[1,1,7,0,0,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

dengan indeks sikliknya $y_1y_2{y_3}^7{y_6}^2$ ada sebanyak 1120 anggota.

Dengan demikian indeks siklik dari R_8 adalah

$$Z(R_8; y_1, y_2, \dots, y_{36}) = \frac{1}{40320}[{y_1}^{36} + 28{y_1}^{22}{y_2}^7 + 112{y_1}^{15}{y_3}^7 + 420{y_1}^{10}y_2{y_4}^6$$
$$+1344{y_1}^6{y_5}^6 + 3360{y_1}^3y_3{y_6}^5 + 5760y_1{y_7}^5 +$$
$$5040y_4{y_8}^4 + 210{y_1}^{12}{y_2}^{12} + 1120{y_1}^7{y_2}^4{y_3}^5y_6$$
$$+2520{y_1}^4{y_2}^4{y_4}^6 + 4032{y_1}^2{y_2}^2{y_5}^4y_{10} +$$
$$3360y_1y_2y_3{y_6}^5 + 1120{y_1}^3{y_3}^{11} +$$

$$3360y_1y_2{y_3}^3{y_4}^3y_{12} + 2688{y_3}^2{y_5}^3y_{15} +$$

$$1260{y_2}^2{y_4}^8 + 420{y_1}^6{y_2}^{15} + 105{y_1}^4{y_2}^{16} +$$

$$1680{y_1}^3{y_2}^6{y_3}^3{y_6}^2 + 1260{y_1}^2{y_2}^5{y_4}^6 +$$

$$1120y_1y_2{y_3}^7{y_6}^2]$$

Berdasarkan Teorema Polya I untuk $r = 2$ diperoleh

$$Z(R_8; 2,2,\dots,2) = \frac{1}{40320}[2^{36} + 28.2^{22}.2^7 + 112.2^{15}.2^7 + 420.2^{10}.2.2^6$$

$$+1344.2^6.2^6 + 3360.2^3.2.2^5 + 5760.2.2^5 +$$

$$5040.2.2^4 + 210.2^{12}.2^{12} + 1120.2^7.2^4.2^5.2$$

$$+2520.2^4.2^4.2^6 + 4032.2^2.2^2.2^4.2 +$$

$$3360.2.2.2.2^5 + 1120.2^3.2^{11} +$$

$$3360.2.2.2^3.2^3.2 + 2688.2^2.2^3.2 +$$

$$1260.2^2.2^8 + 420.2^6.2^{15} + 105.2^4.2^{16} +$$

$$1680.2^3.2^6.2^3.2^2 + 1260.2^2.2^5.2^6 +$$

$$1120.2.2.2^7.2^2]$$

$$= 2208612$$

Jadi banyaknya graf tak isomorfik yang terbentuk dari delapan simpul ada sebanyak 2.208.612 graf.

Keadaan-keadaan yang mungkin terjadi diantara dua simpul yaitu:

(1). z^0: tidak ada sisi antara dua simpul.

(2). z^1: ada sisi antara dua simpul.

Dan berdasarkan Teorema Polya II dengan mensubsitusikan $y_1 = 1 + z$,

$y_2 = 1^2 + z^2$, $y_3 = 1^3 + z^3$, $y_4 = 1^4 + z^4$, $y_5 = 1^5 + z^5$, $y_6 = 1^6 + z^6$

$y_7 = 1^7 + z^7,\ y_{10} = 1^{10} + z^{10},\ y_{12} = 1^{12} + z^{12}$ dan $y_{15} = 1^{15} + z^{15}$

diperoleh indeks siklik R_8 sebagai berikut:

$$Z(R_8; y_1, y_2, \dots, y_{36}) = \frac{1}{40320}[(1+z)^{36} + 28(1+z)^{22}(1+z^2)^7 +$$
$$112(1+z)^{15}(1+z^3)^7 + 420(1+z)^{10}(1+z^2)$$
$$(1+z^4)^6 + 1344(1+z)^6(1+z^5)^6$$
$$+3360(1+z)^3(1+z^3)(1+z^6)^5 + 5760(1+z)$$
$$(1+z^7)^5 + 5040(1+z^4)(1+z^8)^4 + +210(1+z)^{12}$$
$$(1+z^2)^{12} + 1120(1+z)^7(1+z^2)^4(1+z^3)^5(1+z^6)$$
$$+2520(1+z)^4(1+z^2)^4(1+z^4)^6 + 4032(1+z)^2$$
$$(1+z^2)^2(1+z^5)^4(1+z^{10}) + 3360(1+z)(1+z^2)$$
$$(1+z^3)(1+z^6)^5 + 1120(1+z)^3(1+z^3)^{11} +$$
$$3360(1+z)(1+z^2)(1+z^3)^3(1+z^4)^3(1+z^{12}) +$$
$$2688(1+z^3)^2(1+z^5)^3(1+z^{15}) + 1260(1+z^2)^2$$
$$(1+z^4)^8 + 420(1+z)^6(1+z^2)^{15} + 105(1+z)^4$$
$$(1+z^2)^{16} + 1680(1+z)^3(1+z^2)^6(1+z^3)^3$$
$$(1+z^6)^2 + 1260(1+z)^2(1+z^2)^5(1+z^4)^6 +$$
$$1120(1+z)(1+z^2)(1+z^3)^7(1+z^6)^2]$$
$$= 1 + 2z + 5z^2 + 14\,z^3 + 38z^4 + 104z^5 + 293z^6 +$$
$$797z^7 + 2064z^8 + 5034z^9 + 11444z^{10} + 23918z^{11} +$$
$$+45671z^{12} + 79254z^{13} + 124630z^{14} + 177365z^{15} +$$
$$228308z^{16} + 265656z^{17} + 279416z^{18} + 265656z^{19}$$
$$+228308z^{20} + 177365z^{21} + 124630z^{22} + 79254z^{23}$$

$$+45671z^{24} + 23918z^{25} + 11444z^{26} + 5034z^{27} +$$
$$2064z^{28} + 797z^{29} + 293z^{30} + 104z^{31} + 38z^{32} +$$
$$14z + 5z^{34} + 2z^{35} + 1z^{36}$$

Artinya dari $n = 8$ simpul akan dihasilkan 1 graf tanpa sisi, 2 graf dengan 1 sisi, 5 graf dengan 2 sisi, 14 graf dengan 3 sisi, 38 graf dengan 4 sisi, 104 graf dengan 5 sisi, 293 graf dengan 6 sisi, 797 graf dengan 7 sisi, 2064 graf dengan 8 sisi, 5034 graf dengan 9 sisi, 11444 graf dengan 10 sisi, 23918 graf dengan 11 sisi, 45671 graf dengan 12 sisi, 79254 graf dengan 13 sisi, 124630 graf dengan 14 sisi, 177365 graf dengan 15 sisi, 228308 graf dengan 16 sisi, 265656 graf dengan 17 sisi, 279416 graf dengan 18 sisi, 265656 graf dengan 19 sisi, 228308 graf dengan 20 sisi, 177365 graf dengan 21 sisi, 124630 graf dengan 22 sisi, 79254 graf dengan 23 sisi, 45671 graf dengan 24 sisi, 23918 graf dengan 25 sisi, 11444 graf dengan 26 sisi, 5034 graf dengan 27 sisi, 2064 graf dengan 28 sisi, 797 graf dengan 29 sisi, 293 graf dengan 30 sisi, 104 graf dengan 31 sisi, 38 graf dengan 32 sisi, 14 graf dengan 33 sisi, 5 graf dengan 34 sisi, 2 graf dengan 35 sisi, dan 1 graf dengan 36 sisi.

4.2 Membandingkan Ketakisomorfikan Graf yang Diperoleh dari Teorema Polya dengan Software

Jelas untuk graf dengan banyak sisi yang berbeda pastilah tak isomorfik satu dengan yang lainnya. Sehingga yang dibandingkan dengan software hanyalah graf dengan banyak sisi yang sama yang terbentuk dari $n = 2$ dan $n = 3$ simpul.

Untuk n simpul lainnya cara yang sama dapat dilakukan untuk menunjukkan ketakisomorfikan graf.

4.2.1 Multigraf dengan $n = 2$ simpul

Berdasarkan Proposisi 4.1.1 banyaknya multigraf yang terbentuk dari $n = 2$ simpul ada sebanyak 3 graf, dimana jenis-jenisnya yaitu: 1 graf tanpa sisi, 1 graf dengan 1 sisi, dan 1 graf dengan 2 sisi.

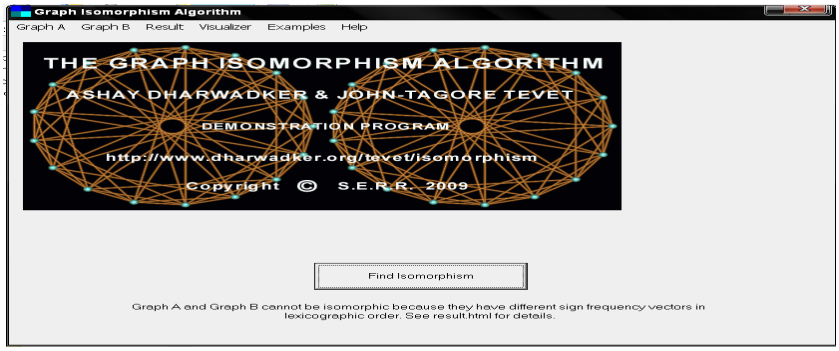
G1 G2 G3

Gambar 4.5 jenis-jenis multigraf yang terbentuk dari $n = 2$ simpul

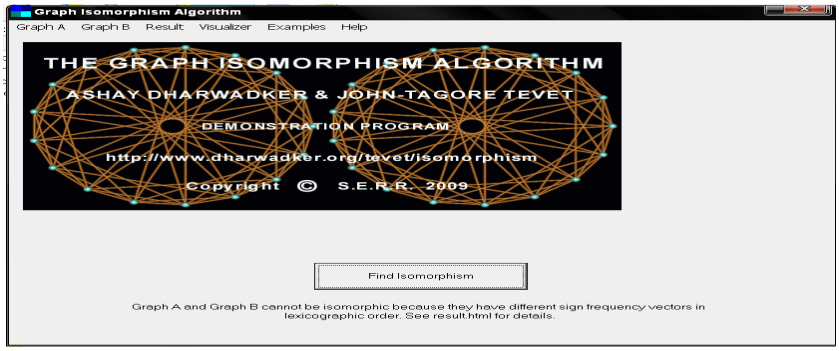
Dengan software *The Graph Isomorphism Algorithm Demonstration Program* diperoleh:

$$Graf\ 1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Graf\ 2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Graf\ 3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

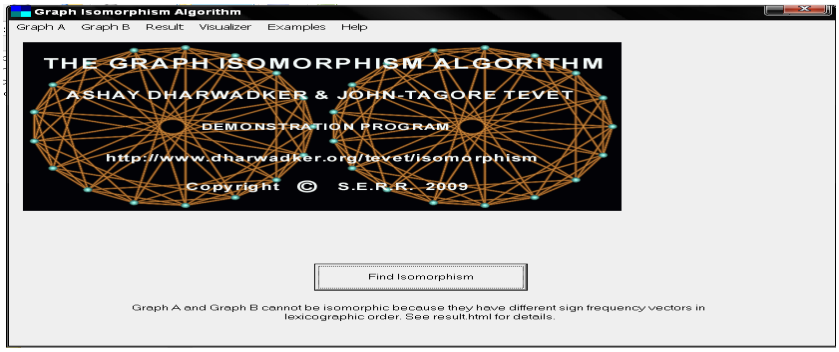
$$Graph\ A = Graf\ 1 \qquad Graph\ B = Graf\ 2$$



$Graph\ A = Graf\ 1$ $\qquad$ $Graph\ B = Graf\ 3$



$Graph\ A = Graf\ 2$ $\qquad$ $Graph\ B = Graf\ 3$



Jadi 3 multigraf yang terbentuk dari $n = 2$ simpul tak isomorfis satu dengan lainnya.

4.2.2 Graf dengan $n = 2$ simpul

Berdasarkan Proposisi 4.1.2 banyaknya graf yang terbentuk dari $n = 2$ simpul ada sebanyak 6 graf, dimana jenis-jenisnya yaitu: 1 graf tanpa sisi, 2 graf dengan 1 sisi, 2 graf dengan 2 sisi, dan 1 graf dengan 3 sisi.

G1 G2 G4 G6

G3 G5

Gambar 4.6 jenis-jenis graf yang terbentuk dari $n = 2$ simpul

Dengan software *Maple* diperoleh:

```
> G2 := Graph([1, 2], Trail(1, 1)) :
> AdjacencyMatrix(G2)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> G3 := Graph([1, 2], Trail(1, 2)) :
> AdjacencyMatrix(G3)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> IsIsomorphic(G2, G3,'mp')
```

false

```
> G4 := Graph([1, 2], Trail(1, 1 ), Trail(2, 2 )) :
> AdjacencyMatrix(G4)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> G5 := Graph([1, 2], Trail(1, 1 ), Trail(1, 2 )) :
> AdjacencyMatrix(G5)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

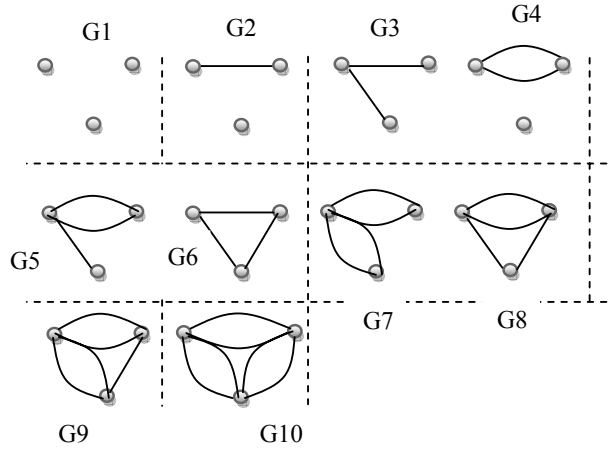
```
> IsIsomorphic(G4, G5,'mp')
```

false

Jadi 6 graf yang terbentuk dari $n = 2$ tak isomorfis satu dengan yang lainnya.

4.2.3 Multigraf dengan $n = 3$ simpul

Berdasarkan Proposisi 4.1.3 banyaknya multigraf yang terbentuk dari $n = 3$ simpul ada sebanyak 10 graf, dimana jenis-jenisnya yaitu: 1 graf tanpa sisi, 1 graf dengan 1 sisi, 2 graf dengan 2 sisi , 2 graf dengan 3 sisi , 2 graf dengan 4 sisi , 1 graf dengan 5 sisi, dan 1 graf dengan 6 sisi.



Gambar 4.7 jenis-jenis multigraf yang terbentuk dari $n = 3$ simpul

Dengan software *The Graph Isomorphism Algorithm Demonstration Program* diperoleh:

$$Graf\ 1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Graf\ 2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

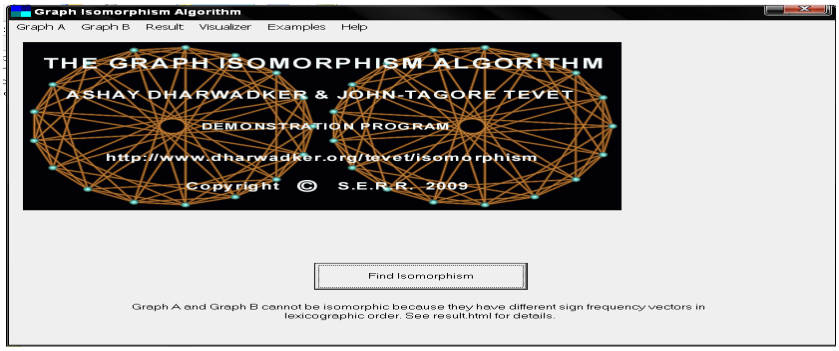
$$Graf\ 3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Graf\ 4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Graf\ 5 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Graf\ 6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

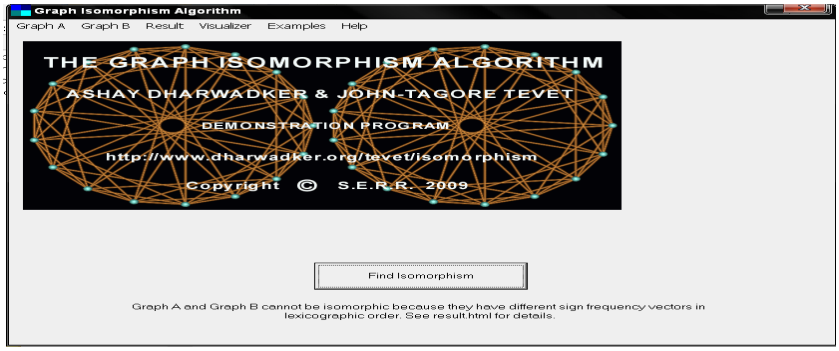
$$Graf\ 7 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Graf\ 8 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Graf\ 9 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Graf\ 10 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

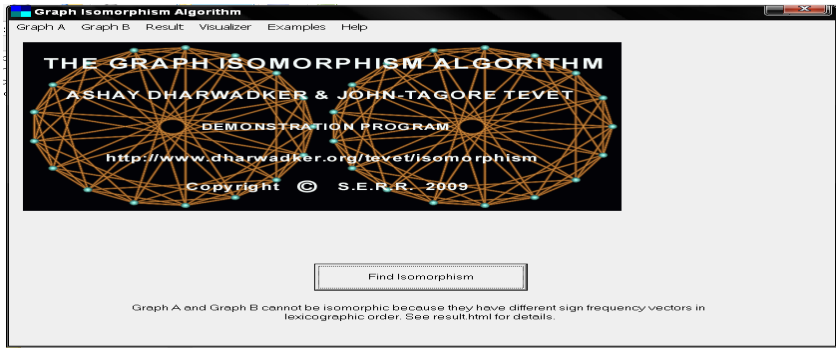
$Graph\ A = Graf\ 3$ $\qquad$ $Graph\ B = Graf\ 4$



$Graph\ A = Graf\ 5$ $\qquad$ $Graph\ B = Graf\ 6$



$Graph\ A = Graf\ 7$ $\qquad$ $Graph\ B = Graf\ 8$



Jadi 10 multigraf yang terbentuk dari $n = 3$ simpul tak isomorfis satu dengan lainnya.

4.2.4 Graf dengan $n = 3$ simpul

Berdasarkan Proposisi 4.1.4 banyaknya graf sembarang yang terbentuk dari $n = 2$ simpul ada sebanyak 20 graf, dimana jenis-jenisnya yaitu: 1 graf tanpa sisi, 2 graf dengan 1 sisi, 4 graf dengan 2 sisi, 6 graf dengan 3 sisi, 4 graf dengan 4 sisi, 2 graf dengan 5 sisi, dan 1 graf dengan 6 sisi.

Gambar 4.6 jenis-jenis graf yang terbentuk dari $n = 3$ simpul

Dengan software *Maple* diperoleh:

```
> H2 := Graph([1, 2, 3], Trail(1, 1)) :
> AdjacencyMatrix(H2)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> H3 := Graph([1, 2, 3], Trail(1, 2)) :
> AdjacencyMatrix(H3)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> IsIsomorphic(H2, H3,'mp')
```

$$false$$

```
> H4 := Graph([1, 2, 3], Trail(1, 1), Trail(3, 3)) :
> AdjacencyMatrix(H4)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> H5 := Graph([1, 2, 3], Trail(1, 1), Trail(1, 2)) :
> AdjacencyMatrix(H5)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> H6 := Graph([1, 2, 3], Trail(1, 1), Trail(2, 3)) :
> AdjacencyMatrix(H6)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> H7 := Graph([1, 2, 3], Trail(1, 3, 2)) :
> AdjacencyMatrix(H7)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> IsIsomorphic(H4, H5,'mp')
```

$$false$$

```
> IsIsomorphic(H4, H6,'mp')
```

$$false$$

```
> IsIsomorphic(H4, H7,'mp')
```

$$false$$

```
> IsIsomorphic(H5, H6,'mp')
```

$$false$$

```
> IsIsomorphic(H5, H7,'mp')
```

$$false$$

```
> IsIsomorphic(H6, H7,'mp')
```

$$false$$

```
> H8 := Graph([1, 2, 3], Trail(1, 1), Trail(2, 2),
      Trail(3, 3)) :
> AdjacencyMatrix(H8)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> $H9 := Graph([1, 2, 3], Trail(1, 3, 2), Trail(2, 2)) :$

> $AdjacencyMatrix(H9)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

> $H10 := Graph([1, 2, 3], Trail(1, 3, 2), Trail(3, 3)) :$

> $AdjacencyMatrix(H10)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> $H11 := Graph([1, 2, 3], Trail(1, 2), Trail(1, 1), Trail(2, 2)) :$

> $AdjacencyMatrix(H11)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> $H12 := Graph([1, 2, 3], Trail(1, 2), Trail(1, 1), Trail(3, 3)) :$

> $AdjacencyMatrix(H12)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> $H13 := Graph([1, 2, 3], Trail(1, 2, 3, 1)) :$

> $AdjacencyMatrix(H13)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

> $IsIsomorphic(H8, H9, 'mp')$

false

> $IsIsomorphic(H8, H10, 'mp')$

false

> $IsIsomorphic(H8, H11, 'mp')$

false

> $IsIsomorphic(H8, H12, 'mp')$

false

> *IsIsomorphic*(*H8*, *H13*,'*mp*')

false

> *IsIsomorphic*(*H9*, *H10*,'*mp*')

false

> *IsIsomorphic*(*H9*, *H11*,'*mp*')

false

> *IsIsomorphic*(*H9*, *H12*,'*mp*')

false

> *IsIsomorphic*(*H9*, *H13*,'*mp*')

false

> *IsIsomorphic*(*H10*, *H11*,'*mp*')

false

> *IsIsomorphic*(*H10*, *H12*,'*mp*')

false

> *IsIsomorphic*(*H10*, *H13*,'*mp*')

false

> *IsIsomorphic*(*H11*, *H12*,'*mp*')

false

> *IsIsomorphic*(*H11*, *H13*,'*mp*')

false

> *IsIsomorphic*(*H12*, *H13*,'*mp*')

false

> $H14 := Graph([1, 2, 3], Trail(1, 2, 3, 1), Trail(1, 1)) :$

> *AdjacencyMatrix*(*H14*)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

> $H15 := Graph([1, 2, 3], Trail(1, 3, 2), Trail(1, 1), Trail(2, 2)) :$

> *AdjacencyMatrix*(*H15*)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

> $H16 := Graph([1, 2, 3], Trail(2, 1, 3), Trail(1, 1), Trail(2, 2)) :$

> *AdjacencyMatrix*(*H16*)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> H17 := Graph([1, 2, 3], Trail(1, 2), Trail(1, 1),
      Trail(2, 2), Trail(3, 3)) :
> AdjacencyMatrix(H17)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> IsIsomorphic(H14, H15,'mp')
```

false

```
> IsIsomorphic(H14, H16,'mp')
```

false

```
> IsIsomorphic(H14, H17,'mp')
```

false

```
> IsIsomorphic(H15, H16,'mp')
```

false

```
> IsIsomorphic(H15, H17,'mp')
```

false

```
> IsIsomorphic(H16, H17,'mp')
```

false

```
> H18 := Graph([1, 2, 3], Trail(1, 2, 3), Trail(1,
      1), Trail(2, 2), Trail(3, 3)) :
> AdjacencyMatrix(H18)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> H19 := Graph([1, 2, 3], Trail(1, 2, 3, 1), Trail(1,
      1), Trail(2, 2)) :
> AdjacencyMatrix(H19)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> IsIsomorphic(H18, H19,'mp')
```

false

Jadi 20 graf yang terbentuk dari $n = 3$ simpul tak isomorfis satu dengan yang lainnya.

BAB V

PENUTUP

5.1 Simpulan

Dari pembahasan yang ada di depan, diperoleh simpulan sebagai berikut:

(1). Hasil enumerasi graf n simpul dengan menggunakan Teorema Polya dinyatakan dalam proposisi 1 sampai dengan 14 sebagai berikut:

(a). Banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari dua simpul ada sebanyak tiga.

(b). Banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari dua simpul ada sebanyak enam.

(c). Banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari tiga simpul ada sebanyak sepuluh.

(d). Banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari tiga simpul ada sebanyak 20.

(e). Banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari empat simpul ada sebanyak 66.

(f). Banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari empat simpul ada sebanyak 90.

(g). Banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari lima simpul ada sebanyak 792.

(h). Banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari lima simpul ada sebanyak 544.

(i). Banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari enam simpul ada sebanyak 25.506.

(j). Banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari enam simpul ada sebanyak 5.096.

(k). Banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari tujuh simpul ada sebanyak 2.302.938.

(l). Banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari tujuh simpul ada sebanyak 79.264.

(m). Banyaknya multigraf tak isomorfis yang terbentuk dari delapan simpul ada sebanyak 591.901.884.

(n). Banyaknya graf tak isomorfis yang terbentuk dari delapan simpul ada sebanyak 2.208.612.

(2). Dengan bantuan program *Maple* dan *The Graph Isomorphism Algorithm Demonstration Program* diperoleh bahwa graf dengan n simpul yang terbentuk dari Teorema Polya tak isomorfik satu dengan yang lainnya.

5.2 Saran

Pada kesempatan kali ini penulis baru mengkaji tentang penggunaan Teorema Polya dalam enumerasi multigraf dan graf tanpa loop. Penelitian mengenai Teorema Polya masih dapat dikembangkan lagi pada pewarnaan graf dan enumerasi graf berarah.

DAFTAR PUSTAKA

Dharwadker, Ashay. 2009. *The Graph Isomorphism Algorithm Program*. Tersedia di: http://www.dharwadker.org/tevet/isomorphism/ [7 Mei 2010].

Dixon, Jhon D. 1973. *Problem In Group Theory*. Massachusetts: Blaisdell Publishing Company.

Fraleigh, John B. 1994. *A First Course In Abstract Algebra* (5th ed.). Rhode Island: Addison-Wesley Publishing Company.

Gross, Jonathan L. 2008. *Combinatorial Methods with Computer Applications*. New York: Chapman & Hall/CRC.

Maple Isomorphism Online Help. Tersedia di: http://www.maplesoft.com/help/discrete-mathematics/graphtheory/graph-packages/IsIsomorphic. [28 Oktober 2010].

Pinter, Charles C. 1982. *Abstract Algebra*. New York: McGraw-Hill Inc.

Santosa, Gunawan. 2002. *Aplikasi Teorema Polya pada Enumerasi Graf Sederhana*. 8(1): 1-10. Tersedia di: http://santosa.ukdw.ac.id. [18 Maret 2010].

Siang, J. J. 2002. *Matematika Disrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Andioffset.

Sutarno, H., dkk. 2003. *Common text book (Edisi Revisi) Matematika Diskrit*. Bandung: ITB.

Tomakin, Ferdinand Yap. 2009. *The Polya Theory And Permutation Group*. 1(2): 1-23. Tersedia di: http://www.math.ac.chula.ac.th/cjm [5 Mei 2010].

Vasudev, C. 2007. *Combinatorics and Graph Theory*. New Delhi: New Age International (P) Ltd.

Wihikanwijna. 2006. *Burnside Lemma Intoduksi Enumerasi Polya*. Tersedia di: http://himatika.mipa.ugm.ac.id/down/kul/BurnsidePolya.pdf. [7 Mei 2010].

Lampiran 1

```
> with(group):
```

BENTUK-BENTUK CYCLE DI S3:

```
> grouporder(permgroup(3,{a=[[1,2]], b=[[1,2,3]]}));
```

$$6$$

```
> pg3 := permgroup(3,{a=[[1,2]], b=[[1,2,3]]}):
elements(pg3);
```

$$\{[], [[1, 2]], [[1, 2, 3]], [[1, 3, 2]], [[1, 3]], [[2, 3]]\}$$

```
> SnConjugates(pg3,[]);
```

$$1$$

```
> SnConjugates(pg3,[[1,2]]);
```

$$3$$

```
> SnConjugates(pg3,[[1,2,3]]);
```

$$2$$

BENTUK-BENTUK CYCLE DI S4:

```
> grouporder(permgroup(4,{a=[[1,2]], b=[[1,2,3,4]]}));
```

$$24$$

```
> pg4 := permgroup(4,{a=[[1,2]], b=[[1,2,3,4]]}):
elements(pg4);
```

$$\{[], [[1, 2]], [[1, 2, 3]], [[1, 3, 2]], [[1, 3]], [[2, 3]], [[1, 2, 3, 4]], [[1, 3, 4, 2]], [[1, 4, 2, 3]], [[1, 3, 2, 4]], [[1, 2, 4, 3]], [[1, 4, 3, 2]], [[2, 3, 4]], [[2, 4, 3]], [[1, 3, 4]], [[1, 2, 4]], [[1, 3], [2, 4]], [[3, 4]], [[1, 4, 3]], [[1, 4], [2, 3]], [[1, 2], [3, 4]], [[1, 4, 2]], [[2, 4]], [[1, 4]]\}$$

```
> SnConjugates(pg4,[]);
```

$$1$$

```
> SnConjugates(pg4,[[1,2]]);
```

$$6$$

```
> SnConjugates(pg4,[[1,2],[3,4]]);
```

$$3$$

```
> SnConjugates(pg4,[[1,2,3]]);
```

$$8$$

```
> SnConjugates(pg4,[[1,2,3,4]]);
```

$$6$$

BENTUK-BENTUK CYCLE DI S5:

```
> grouporder(permgroup(5,{a=[[1,2]],
b=[[1,2,3,4,5]]}));
```

120

```
> pg5 := permgroup(5,{a=[[1,2]], b=[[1,2,3,4,5]]}):
elements(pg5);
```

{[], [[1, 2]], [[1, 2, 3]], [[1, 3, 2]], [[1, 3]], [[2, 3]], [[1, 2, 3, 4]], [[1, 3, 4, 2]], [[1, 4, 2, 3]], [[1, 3, 2, 4]], [[1, 2, 4, 3]], [[1, 4, 3, 2]], [[2, 3, 4]], [[2, 4, 3]], [[1, 3, 4]], [[1, 2, 4]], [[1, 3], [2, 4]], [[3, 4]], [[1, 4, 3]], [[1, 4], [2, 3]], [[1, 2], [3, 4]], [[1, 4, 2]], [[2, 4]], [[1, 4]], [[1, 2, 3, 4, 5]], [[1, 4, 3, 2, 5]], [[1, 2, 5, 4, 3]], [[1, 4, 3, 5, 2]], [[1, 3, 4, 2, 5]], [[1, 3, 5, 4, 2]], [[1, 3, 4, 5, 2]], [[1, 4, 2, 3, 5]], [[1, 2, 5, 3, 4]], [[1, 5, 4, 3, 2]], [[1, 4, 2, 5, 3]], [[1, 2, 3, 5, 4]], [[1, 5, 3, 2, 4]], [[1, 5, 4, 2, 3]], [[1, 5, 2, 4, 3]], [[1, 3, 5, 2, 4]], [[1, 4, 5, 2, 3]], [[1, 5, 3, 4, 2]], [[1, 5, 2, 3, 4]], [[1, 3, 2, 5, 4]], [[1, 4, 5, 3, 2]], [[1, 2, 4, 5, 3]], [[1, 3, 2, 4, 5]], [[1, 2, 4, 3, 5]], [[1, 3, 2, 5]], [[1, 5, 4]], [[3, 5]], [[1, 2], [3, 5]], [[1, 3], [2, 4, 5]], [[2, 4, 5]], [[1, 4], [2, 3, 5]], [[1, 3, 5, 2]], [[1, 5]], [[1, 3, 5]], [[1, 5, 3], [2, 4]], [[2, 3, 5]], [[1, 3, 5, 4]], [[1, 2, 5]], [[1, 4, 5, 2]], [[2, 3, 4, 5]], [[1, 3], [2, 5]], [[1, 2, 4, 5]], [[3, 5, 4]], [[1, 4, 2], [3, 5]], [[1, 5, 4, 3]], [[2, 5], [3, 4]], [[2, 4, 5, 3]], [[1, 2, 5], [3, 4]], [[4, 5]], [[2, 5, 4]], [[2, 5, 3, 4]], [[2, 5, 3]], [[1, 4, 5, 3]], [[1, 5], [2, 3]], [[1, 5, 2, 4]], [[2, 3, 5, 4]], [[1, 5, 4], [2, 3]], [[1, 5, 3, 2]], [[2, 4], [3, 5]], [[1, 5, 2], [3, 4]], [[1, 5, 2, 3]], [[1, 4, 3, 5]], [[2, 5]], [[1, 5], [2, 4, 3]], [[1, 4, 5]], [[1, 2, 3], [4, 5]], [[1, 3, 5], [2, 4]], [[2, 5, 4, 3]], [[1, 3, 2], [4, 5]], [[1, 2, 4], [3, 5]], [[1, 4, 2, 5]], [[1, 2, 3, 5]], [[1, 4], [2, 5, 3]], [[1, 2, 5, 3]], [[1, 5, 3]], [[1, 3], [2, 5, 4]], [[1, 4, 5], [2, 3]], [[1, 3, 4, 5]], [[1, 5, 2]], [[1, 5, 3, 4]], [[1, 2], [3, 5, 4]], [[1, 2, 5, 4]], [[1, 4, 3], [2, 5]], [[1, 5], [2, 4]], [[2, 3], [4, 5]], [[1, 2], [4, 5]], [[1, 4], [3, 5]], [[1, 5], [3, 4]], [[1, 3, 4], [2, 5]], [[1, 5], [2, 3, 4]], [[1, 3], [4, 5]], [[2, 4, 3, 5]], [[3, 4, 5]], [[1, 5, 4, 2]], [[1, 2], [3, 4, 5]], [[1, 4], [2, 5]]}

```
> SnConjugates(pg5,[]);
```

1

```
> SnConjugates(pg5,[[1,2]]);
```

10

```
> SnConjugates(pg5,[[1,2,3]]);
```

20

```
> SnConjugates(pg5,[[1,2,3,4]]);
```

30

```
> SnConjugates(pg5,[[1,2,3,4,5]]);
```

24

```
> SnConjugates(pg5,[[1,2],[3,4]]);
```

15

```
> SnConjugates(pg5,[[1,2],[3,4,5]]);
```

20

BENTUK-BENTUK CYCLE DI S6:

```
> grouporder(permgroup(6,{a=[[1,2]],
b=[[1,2,3,4,5,6]]}));
```

720

```
> pg6 := permgroup(6,{a=[[1,2]], b=[[1,2,3,4,5,6]]}):
elements(pg6);
```

{[], [[1, 2]], [[1, 2, 3]], [[1, 3, 2]], [[1, 3]], [[2, 3]], [[1, 2, 3, 4]], [[1, 6, 4], [2, 5, 3]], [[1, 3, 4, 2]], [[1, 4, 2, 3]], [[1, 3, 2, 4]], [[1, 2, 4, 3]], [[1, 4, 3, 2]], [[2, 3, 4]], [[2, 4, 3]], [[1, 3, 4]], [[1, 2, 4]], [[1, 3], [2, 4]], [[3, 4]], [[1, 4, 3]], [[1, 4], [2, 3]], [[1, 2], [3, 4]], [[1, 4, 2]], [[2, 4]], [[1, 4]], [[1, 2, 3, 4, 5]], [[1, 5, 3], [2, 6]], [[1, 6], [2, 4, 5, 3]], [[1, 4, 3, 2, 5]], [[1, 2, 5, 4, 3]], [[1, 4, 3, 5, 2]], [[1, 3, 4, 2, 5]], [[1, 3, 5, 4, 2]], [[1, 3, 4, 5, 2]], [[1, 4, 2, 3, 5]], [[1, 2, 5, 3, 4]], [[1, 5, 4, 3, 2]], [[1, 4, 2, 5, 3]], [[1, 2, 3, 5, 4]], [[1, 5, 3, 2, 4]], [[1, 5, 4, 2, 3]], [[1, 5, 2, 4, 3]], [[1, 3, 5, 2, 4]], [[1, 4, 5, 2, 3]], [[1, 5, 3, 4, 2]], [[1, 5, 2, 3, 4]], [[1, 3, 2, 5, 4]], [[1, 4, 5, 3, 2]], [[1, 2, 4, 5, 3]], [[1, 3, 2, 4, 5]], [[1, 2, 4, 3, 5]], [[1, 3, 2, 5]], [[1, 5, 4]], [[3, 5]], [[1, 2], [3, 5]], [[1, 3], [2, 4, 5]], [[2, 4, 5]], [[1, 4], [2, 3, 5]], [[1, 3, 5, 2]], [[1, 5]], [[1, 3, 5]], [[1, 5, 3], [2, 4]], [[2, 3, 5]], [[1, 3, 5, 4]], [[1, 2, 5]], [[1, 4, 5, 2]], [[2, 3, 4, 5]], [[1, 3], [2, 5]], [[1, 2, 4, 5]], [[3, 5, 4]], [[1, 4, 2], [3, 5]], [[1, 5, 4, 3]], [[2, 5], [3, 4]], [[2, 4, 5, 3]], [[1, 2, 5], [3, 4]], [[4, 5]], [[2, 5, 4]], [[2, 5, 3, 4]], [[2, 5, 3]], [[1, 4, 5, 3]], [[1, 5], [2, 3]], [[1, 5, 2, 4]], [[2, 3, 5, 4]], [[1, 5, 4], [2, 3]], [[1, 5, 3, 2]], [[2, 4], [3, 5]], [[1, 5, 2], [3, 4]], [[1, 5, 2, 3]], [[1, 4, 3, 5]], [[2, 5]], [[1, 5], [2, 4, 3]], [[1, 4, 5]], [[1, 2, 3], [4, 5]], [[1, 3, 5], [2, 4]], [[2, 5, 4, 3]], [[1, 3, 2], [4, 5]], [[1, 2, 4], [3, 5]], [[1, 4, 2, 5]], [[1, 2, 3, 5]], [[1, 4], [2, 5, 3]], [[1, 2, 5, 3]], [[1, 5, 3]], [[1, 3], [2, 5, 4]], [[1, 4, 5], [2, 3]], [[1, 3, 4, 5]], [[1, 5, 2]], [[1, 5, 3, 4]], [[1, 2], [3, 5, 4]], [[1, 2, 5, 4]], [[1, 4, 3], [2, 5]], [[1, 5], [2, 4]], [[2, 3], [4, 5]], [[1, 2], [4, 5]], [[1, 4], [3, 5]], [[1, 5], [3, 4]], [[1, 3, 4], [2, 5]], [[1, 5], [2, 3, 4]], [[2, 6, 5, 3]], [[1, 3], [4, 5]], [[2, 4, 3, 5]], [[3, 4, 5]], [[1, 5, 4, 2]], [[1, 2], [3, 4, 5]], [[1, 4], [2, 5]], [[1, 2, 3, 4, 5, 6]], [[1, 6, 5, 3], [2, 4]], [[1, 2], [5, 6]], [[1, 4, 5, 6, 2, 3]], [[1, 3, 6, 4, 5, 2]], [[1, 5, 3, 2, 6, 4]], [[1, 4, 2, 3, 6, 5]], [[1, 5, 6, 4, 3, 2]], [[1, 2, 5, 4, 3, 6]], [[1, 4, 6, 2, 5, 3]], [[1, 5, 4, 3, 2, 6]], [[1, 3, 2, 5, 4, 6]], [[1, 6, 4, 3, 5, 2]], [[1, 5, 4, 3, 6, 2]], [[1, 3, 6, 2, 4, 5]], [[1, 4, 6, 5, 3, 2]], [[1, 6, 3, 2, 5, 4]], [[1, 4, 3, 5, 2, 6]], [[1, 3, 4, 6, 2, 5]], [[1, 3, 4, 2, 6, 5]], [[1, 3, 4, 5, 6, 2]], [[1, 2, 3, 6, 5, 4]], [[1, 6, 2, 4, 3, 5]], [[1, 2, 4, 3, 6, 5]], [[1, 5, 2, 3, 6, 4]], [[1, 6, 5, 2, 4, 3]], [[1, 6, 4, 5, 3, 2]], [[1, 6, 3, 5, 2, 4]], [[1, 2, 3, 5, 6, 4]], [[1, 6, 5, 3, 4, 2]], [[1, 2, 6, 5, 3, 4]], [[1, 4, 3, 6, 5, 2]], [[1, 3, 6, 2, 5, 4]], [[1, 3, 6, 4, 2, 5]], [[1, 2, 6, 3, 4, 5]], [[1, 5, 3, 6, 2, 4]], [[1, 4, 2, 6, 5, 3]], [[1, 6, 3, 4, 2, 5]], [[1, 4, 6, 5, 2, 3]],

[[1, 6, 2, 3, 5, 4]], [[1, 5, 4, 2, 6, 3]], [[1, 5, 4, 6, 3, 2]], [[1, 2, 4, 6, 3, 5]], [[1, 5, 3, 4, 2, 6]],
[[1, 2, 6, 3, 5, 4]], [[1, 2, 5, 3, 4, 6]], [[1, 3, 4, 2, 5, 6]], [[1, 4, 2, 6, 3, 5]], [[1, 4, 3, 2, 5, 6]],
[[1, 6, 4, 2, 5, 3]], [[1, 3, 5, 2, 6, 4]], [[1, 5, 4, 2, 3, 6]], [[1, 6, 5, 3, 2, 4]], [[1, 6, 4, 2, 3, 5]],
[[1, 3, 5, 6, 4, 2]], [[1, 2, 4, 3, 5, 6]], [[1, 3, 6, 5, 4, 2]], [[1, 6, 2, 3, 4, 5]], [[1, 2, 6, 4, 5, 3]],
[[1, 4, 6, 3, 2, 5]], [[1, 6, 5, 4, 2, 3]], [[1, 5, 6, 2, 4, 3]], [[1, 4, 5, 2, 3, 6]], [[1, 2, 3, 6, 4, 5]],
[[1, 3, 5, 6, 2, 4]], [[1, 6, 5, 4, 3, 2]], [[1, 5, 2, 4, 3, 6]], [[1, 4, 5, 6, 3, 2]], [[1, 2, 5, 6, 4, 3]],
[[1, 3, 4, 6, 5, 2]], [[1, 3, 5, 2, 4, 6]], [[1, 5, 6, 2, 3, 4]], [[1, 2, 4, 6, 5, 3]], [[1, 2, 3, 5, 4, 6]],
[[1, 5, 2, 6, 4, 3]], [[1, 2, 4, 5, 3, 6]], [[1, 5, 6, 3, 4, 2]], [[1, 5, 6, 4, 2, 3]], [[1, 2, 5, 4, 6, 3]],
[[1, 3, 2, 4, 6, 5]], [[1, 4, 5, 3, 6, 2]], [[1, 3, 2, 4, 5, 6]], [[1, 4, 6, 3, 5, 2]], [[1, 5, 3, 6, 4, 2]],
[[1, 4, 3, 6, 2, 5]], [[1, 5, 4, 6, 2, 3]], [[1, 3, 6, 5, 2, 4]], [[1, 5, 2, 4, 6, 3]], [[1, 2, 6, 5, 4, 3]],
[[1, 5, 2, 3, 4, 6]], [[1, 6, 4, 5, 2, 3]], [[1, 4, 2, 3, 5, 6]], [[1, 5, 6, 3, 2, 4]], [[1, 4, 3, 2, 6, 5]],
[[1, 3, 5, 4, 6, 2]], [[1, 2, 3, 4, 6, 5]], [[1, 6, 4, 3, 2, 5]], [[1, 2, 4, 5, 6, 3]], [[1, 6, 3, 5, 4, 2]],
[[1, 4, 6, 2, 3, 5]], [[1, 6, 2, 5, 3, 4]], [[1, 6, 3, 2, 4, 5]], [[1, 4, 2, 5, 6, 3]], [[1, 3, 4, 5, 2, 6]],
[[1, 5, 2, 6, 3, 4]], [[1, 6, 2, 5, 4, 3]], [[1, 6, 2, 4, 5, 3]], [[1, 6, 3, 4, 5, 2]], [[1, 5, 3, 4, 6, 2]],
[[1, 4, 5, 3, 2, 6]], [[1, 4, 2, 5, 3, 6]], [[1, 4, 3, 5, 6, 2]], [[1, 2, 5, 6, 3, 4]], [[1, 3, 2, 6, 5, 4]],
[[1, 2, 5, 3, 6, 4]], [[1, 3, 2, 6, 4, 5]], [[1, 4, 5, 2, 6, 3]], [[1, 6, 5, 2, 3, 4]], [[1, 2, 6, 4, 3, 5]],
[[1, 5, 3, 2, 4, 6]], [[1, 3, 2, 5, 6, 4]], [[1, 3, 5, 4, 2, 6]], [[1, 2, 5, 6]], [[1, 2, 6], [3, 4]], [[1, 2, 3], [4, 5, 6]],
[[1, 6, 3, 5]], [[1, 2, 4], [3, 6, 5]], [[2, 4, 6, 3, 5]], [[2, 3, 6]], [[1, 6, 3, 4]], [[1, 6, 3, 4, 5]],
[[1, 4], [3, 6, 5]], [[1, 2, 6, 4]], [[1, 2, 3, 4, 6]], [[1, 5, 6, 2], [3, 4]], [[1, 5], [3, 4, 6]], [[1, 3, 5, 2], [4, 6]],
[[1, 6, 4], [3, 5]], [[1, 6, 3, 5, 4]], [[1, 6, 5], [2, 3]], [[1, 4, 3, 5], [2, 6]], [[1, 6, 3, 4], [2, 5]], [[2, 5, 6, 4]],
[[1, 5, 6], [3, 4]], [[1, 6], [2, 4, 5]], [[1, 6, 4], [2, 5]], [[1, 5], [2, 3, 6, 4]], [[1, 3], [2, 6], [4, 5]],
[[1, 4, 5, 3, 6]], [[1, 5, 4], [2, 3, 6]], [[1, 4, 2, 5, 6]], [[1, 6], [2, 3, 5, 4]], [[2, 4, 3], [5, 6]], [[1, 6]],
[[1, 5, 2, 3], [4, 6]], [[2, 5, 3, 6]], [[1, 2, 3, 4], [5, 6]], [[1, 6, 3, 5, 2]], [[1, 3, 4, 6, 2]], [[1, 5, 2, 6, 4]],
[[1, 5, 4, 6], [2, 3]], [[1, 2], [3, 6, 4]], [[1, 6, 5, 4], [2, 3]], [[1, 6, 2, 3], [4, 5]], [[1, 6, 3], [2, 4]],
[[1, 4, 3], [5, 6]], [[1, 2, 6]], [[1, 6, 5, 4]], [[1, 3, 6, 4, 5]], [[1, 5, 3, 6, 2]], [[1, 2], [3, 4, 6]],
[[1, 4, 6], [3, 5]], [[1, 5, 4], [2, 6]], [[1, 4, 3], [2, 6, 5]], [[1, 2, 4, 6, 3]], [[1, 6, 2, 3, 4]], [[1, 6], [3, 4]],
[[1, 3, 5, 6], [2, 4]], [[2, 4], [3, 6]], [[1, 2, 6, 3, 4]], [[1, 6, 2, 4, 5]], [[2, 6], [3, 4]], [[2, 5, 6], [3, 4]],
[[2, 3, 6, 5, 4]], [[1, 6, 5], [2, 4]], [[1, 5], [2, 4, 6, 3]], [[1, 4, 6]], [[1, 5], [2, 3], [4, 6]], [[1, 6, 5], [2, 4, 3]],
[[1, 3], [2, 5, 6]], [[1, 2], [3, 4], [5, 6]], [[2, 4, 5, 3, 6]], [[1, 6], [3, 5, 4]], [[2, 6, 4]], [[1, 6], [2, 4, 3, 5]],
[[2, 3, 4, 6, 5]], [[1, 4], [2, 5, 6]], [[1, 3, 4, 2], [5, 6]], [[1, 4], [2, 6, 3, 5]], [[1, 2, 4, 5, 6]],
[[1, 5, 3, 2], [4, 6]], [[1, 4], [2, 6], [3, 5]], [[1, 4, 6, 2, 3]], [[1, 5, 2], [4, 6]], [[1, 5, 2, 6], [3, 4]],
[[1, 4, 3, 2, 6]], [[1, 4], [2, 3, 5, 6]], [[1, 6, 4, 5, 3]], [[2, 3, 4], [5, 6]], [[1, 4, 6, 2]], [[2, 3, 4, 5, 6]],
[[1, 5], [2, 4, 3, 6]], [[1, 5, 4, 6]], [[1, 6, 3, 4, 2]], [[1, 5, 3], [2, 4, 6]], [[1, 4, 5], [2, 3, 6]],
[[1, 5], [3, 6, 4]], [[1, 5, 4, 2], [3, 6]], [[1, 5], [2, 6], [3, 4]], [[1, 2, 6], [4, 5]], [[1, 6, 2, 3, 5]], [[1, 6, 5]],

[[1, 2, 5], [3, 6]], [[1, 6, 4, 2], [3, 5]], [[1, 5, 3, 4], [2, 6]], [[1, 2], [3, 6, 4, 5]], [[1, 5, 4], [2, 6, 3]], [[4, 6]],
[[1, 3, 2, 6, 4]], [[1, 3, 5, 2, 6]], [[1, 6], [2, 4]], [[3, 4], [5, 6]], [[2, 5, 6, 4, 3]], [[1, 6, 4, 5, 2]],
[[1, 6, 3, 2]], [[1, 3, 2, 6]], [[1, 5, 6, 2]], [[1, 5, 6, 3, 4]], [[1, 3, 2], [4, 6, 5]], [[1, 3, 2], [4, 6]],
[[1, 5, 4, 2, 6]], [[1, 3, 6], [2, 5, 4]], [[1, 3], [4, 6]], [[1, 2, 4], [3, 6]], [[2, 6, 3, 5, 4]], [[1, 2, 4, 3, 6]],
[[2, 6], [3, 4, 5]], [[1, 5, 3], [4, 6]], [[1, 4, 2], [3, 6, 5]], [[2, 6, 4, 5]], [[1, 4], [2, 6]], [[1, 6, 2], [4, 5]],
[[1, 3], [2, 6]], [[1, 6], [2, 5, 4]], [[1, 2, 6, 4, 3]], [[1, 5, 4, 3, 6]], [[1, 2, 4, 5], [3, 6]], [[1, 4], [3, 6]],
[[1, 4, 3, 6]], [[4, 5, 6]], [[2, 6], [3, 5, 4]], [[1, 5, 2, 4, 6]], [[1, 2, 5], [3, 6, 4]], [[1, 6, 2, 5], [3, 4]],
[[1, 5, 6, 3, 2]], [[1, 2, 6, 5]], [[3, 6, 4, 5]], [[2, 4, 6]], [[2, 3, 6, 4]], [[2, 3, 6, 5]], [[3, 6, 5, 4]],
[[1, 4, 6], [2, 3, 5]], [[1, 5, 6, 3], [2, 4]], [[1, 4, 2, 5], [3, 6]], [[1, 3, 6], [2, 5]], [[1, 3], [2, 4, 6]],
[[2, 5], [4, 6]], [[1, 4, 3], [2, 6]], [[1, 6, 5, 2], [3, 4]], [[1, 5, 2, 4], [3, 6]], [[1, 3, 5, 6, 4]],
[[1, 6, 5], [2, 3, 4]], [[1, 2, 5, 3, 6]], [[1, 3, 4], [2, 5, 6]], [[1, 3, 4, 6], [2, 5]], [[1, 4, 6, 3, 5]],
[[1, 6, 5, 4, 2]], [[1, 5, 6], [2, 3]], [[2, 4, 6, 3]], [[2, 6, 5]], [[1, 2, 3, 5, 6]], [[1, 2, 6], [3, 4, 5]],
[[1, 2, 6], [3, 5, 4]], [[1, 4, 3, 5, 6]], [[1, 6], [2, 4], [3, 5]], [[2, 4, 5], [3, 6]], [[1, 3, 5, 4], [2, 6]],
[[1, 2, 3, 6, 5]], [[1, 5, 6, 2, 4]], [[1, 6], [2, 5, 3]], [[1, 4, 6, 5], [2, 3]], [[1, 6, 5, 2, 4]], [[1, 2, 4], [5, 6]],
[[2, 6, 4, 3]], [[1, 6, 2, 4], [3, 5]], [[1, 4], [2, 3], [5, 6]], [[1, 5], [2, 6]], [[1, 6], [2, 4, 3]], [[1, 4, 6, 5, 2]],
[[1, 4, 2], [3, 6]], [[2, 5, 6, 3, 4]], [[1, 5, 2, 6]], [[1, 5], [4, 6]], [[1, 6, 2], [3, 4]], [[2, 5, 3, 4, 6]],
[[1, 4, 3, 6], [2, 5]], [[1, 2, 5, 4, 6]], [[3, 4, 6, 5]], [[1, 2, 5, 6], [3, 4]], [[1, 5, 6], [2, 3, 4]], [[3, 6, 4]],
[[1, 4, 2, 6, 3]], [[1, 5], [2, 6, 4]], [[1, 4, 6, 5, 3]], [[1, 2], [3, 5], [4, 6]], [[1, 6, 5, 3, 4]], [[1, 3], [2, 6, 4]],
[[1, 3, 6], [4, 5]], [[1, 5, 2], [3, 6, 4]], [[1, 4, 2, 3], [5, 6]], [[1, 6, 5, 4, 3]], [[2, 4, 6, 5, 3]],
[[1, 4], [2, 6, 5, 3]], [[1, 4, 5, 6], [2, 3]], [[1, 5, 6], [2, 4]], [[1, 4, 3, 2], [5, 6]], [[1, 5, 2], [3, 6]],
[[1, 3, 5], [2, 4, 6]], [[1, 2], [3, 5, 6]], [[2, 6, 3, 4]], [[1, 2], [4, 6, 5]], [[1, 3], [2, 4, 5, 6]], [[2, 3, 5, 6, 4]],
[[2, 6, 4, 3, 5]], [[2, 6, 5, 3, 4]], [[1, 3, 5], [2, 6]], [[1, 4, 5], [2, 6, 3]], [[1, 5], [3, 6]], [[2, 3, 5, 4, 6]],
[[1, 3], [2, 6, 5]], [[1, 4], [2, 6, 3]], [[1, 3, 4, 6]], [[1, 3, 2, 6, 5]], [[2, 3, 6], [4, 5]], [[1, 6], [2, 5, 4, 3]],
[[1, 2, 6, 3]], [[1, 5, 6, 4, 2]], [[2, 6, 5, 4, 3]], [[3, 6]], [[1, 6], [2, 3, 4]], [[1, 4, 5, 2, 6]],
[[1, 4, 3], [2, 5, 6]], [[2, 4, 3, 6, 5]], [[1, 5], [2, 6, 3]], [[1, 3], [2, 5], [4, 6]], [[1, 3], [2, 5, 4, 6]],
[[1, 2, 3, 6]], [[1, 2, 4], [3, 5, 6]], [[1, 3, 4], [5, 6]], [[1, 3, 6, 2, 4]], [[1, 5, 4, 6, 3]], [[2, 6, 3, 5]],
[[1, 5, 6]], [[2, 5, 4], [3, 6]], [[1, 3, 6], [2, 4, 5]], [[4, 6, 5]], [[1, 3, 4, 2, 6]], [[1, 3], [4, 5, 6]],
[[1, 2, 6, 3, 5]], [[1, 3, 6, 2]], [[1, 6, 4], [2, 3, 5]], [[1, 6, 4]], [[1, 2, 5], [3, 4, 6]], [[1, 2, 6, 4], [3, 5]],
[[2, 3, 5], [4, 6]], [[2, 6], [3, 5]], [[1, 3, 4, 5, 6]], [[1, 4, 5, 6, 3]], [[1, 4, 6, 3]], [[1, 2, 6], [3, 5]],
[[1, 3, 4], [2, 6]], [[1, 4], [2, 5, 3, 6]], [[1, 5, 6, 3]], [[1, 5, 3], [2, 6, 4]], [[1, 4, 5], [2, 6]],
[[1, 2, 5, 4], [3, 6]], [[1, 6, 2]], [[1, 2, 3, 5], [4, 6]], [[2, 4, 6], [3, 5]], [[1, 4, 2, 6, 5]], [[1, 3, 4, 5], [2, 6]],
[[3, 5, 4, 6]], [[1, 2, 4, 6]], [[1, 4, 6, 2], [3, 5]], [[1, 3, 5], [2, 6, 4]], [[1, 3, 2, 5], [4, 6]], [[1, 6, 2], [3, 5]],
[[2, 3, 4, 6]], [[1, 4, 5, 6, 2]], [[1, 5], [2, 3, 4, 6]], [[1, 6], [2, 3, 4, 5]], [[1, 6, 3, 2], [4, 5]],
[[1, 3], [2, 4, 6, 5]], [[1, 4, 6], [2, 5, 3]], [[1, 6, 3, 2, 5]], [[1, 2, 4, 3], [5, 6]], [[1, 2, 6, 5, 4]], [[1, 3, 6]],

[[2, 5, 3, 6, 4]], [[3, 4, 6]], [[1, 6, 2, 5, 4]], [[1, 3], [4, 6, 5]], [[1, 3], [2, 6, 4, 5]], [[1, 6, 4, 2, 5]], [[1, 4, 6], [2, 3]], [[1, 6, 5, 2, 3]], [[1, 6, 3, 2, 4]], [[2, 5, 4, 6, 3]], [[1, 6, 5], [3, 4]], [[1, 4, 2], [5, 6]], [[1, 6, 4, 3, 2]], [[1, 6], [2, 3], [4, 5]], [[1, 3, 5, 6, 2]], [[1, 3], [5, 6]], [[1, 6, 2, 5]], [[1, 6, 3], [4, 5]], [[1, 2, 5], [4, 6]], [[1, 3, 6], [2, 4]], [[1, 4], [2, 5, 6, 3]], [[2, 5, 4, 3, 6]], [[1, 2, 6, 5], [3, 4]], [[2, 5], [3, 6]], [[3, 5, 6]], [[1, 2], [3, 5, 4, 6]], [[2, 3], [5, 6]], [[1, 6, 2, 5, 3]], [[1, 2, 6, 4, 5]], [[1, 5, 3, 6, 4]], [[1, 2, 6, 5, 3]], [[1, 3, 2], [4, 5, 6]], [[1, 4], [2, 3, 6, 5]], [[1, 3, 6, 4]], [[1, 2, 5, 6, 4]], [[1, 6], [3, 4, 5]], [[2, 4, 3, 5, 6]], [[1, 3, 6, 2, 5]], [[1, 6, 4, 2, 3]], [[1, 2, 3, 6], [4, 5]], [[1, 3, 6, 2], [4, 5]], [[1, 6, 3]], [[1, 2, 4, 6, 5]], [[1, 5], [2, 4, 6]], [[1, 3], [2, 4], [5, 6]], [[1, 2], [3, 6]], [[1, 6, 3], [2, 5]], [[2, 4, 3, 6]], [[2, 5, 4, 6]], [[1, 6, 3], [2, 5, 4]], [[1, 6, 4, 3, 5]], [[2, 4, 6, 5]], [[1, 6], [2, 5]], [[2, 5], [3, 4, 6]], [[1, 2], [3, 5, 6, 4]], [[1, 2], [3, 4, 6, 5]], [[1, 6, 5, 3, 2]], [[1, 4, 2], [3, 5, 6]], [[1, 2], [3, 6], [4, 5]], [[1, 5, 2, 6, 3]], [[1, 2], [3, 6, 5]], [[1, 6, 5, 2]], [[2, 3, 6, 4, 5]], [[1, 6, 2], [3, 5, 4]], [[1, 4, 6], [2, 5]], [[1, 2], [3, 6, 5, 4]], [[1, 4, 5, 2], [3, 6]], [[2, 5, 6, 3]], [[1, 6, 3, 5], [2, 4]], [[1, 3, 6, 5, 4]], [[1, 3, 6, 4, 2]], [[1, 5, 6], [2, 4, 3]], [[1, 4], [2, 6, 5]], [[3, 6], [4, 5]], [[1, 6, 2], [3, 4, 5]], [[1, 3, 2], [5, 6]], [[2, 6, 3, 4, 5]], [[1, 5, 2, 3, 6]], [[1, 2, 5, 3], [4, 6]], [[1, 4], [2, 5], [3, 6]], [[1, 4], [5, 6]], [[1, 6, 2, 3]], [[1, 5, 6, 4]], [[1, 6, 4, 3]], [[1, 5], [2, 3, 6]], [[1, 5, 3, 6], [2, 4]], [[1, 2, 4, 6], [3, 5]], [[1, 4, 6, 2, 5]], [[1, 4, 5], [3, 6]], [[2, 5], [3, 6, 4]], [[2, 4], [5, 6]], [[1, 3, 5, 6]], [[2, 3, 5, 6]], [[1, 2, 3], [5, 6]], [[1, 6, 4, 3], [2, 5]], [[1, 6, 4, 2]], [[5, 6]], [[1, 4, 2, 6], [3, 5]], [[1, 2, 6, 3], [4, 5]], [[1, 4, 3, 6, 5]], [[1, 3, 6, 5]], [[1, 5, 3, 2, 6]], [[1, 5], [2, 6, 3, 4]], [[1, 5, 6, 4, 3]], [[1, 3, 6, 5, 2]], [[1, 5, 4, 3], [2, 6]], [[1, 5, 3, 4, 6]], [[1, 6, 2, 4, 3]], [[2, 6, 5], [3, 4]], [[1, 5], [2, 6, 4, 3]], [[3, 4, 5, 6]], [[1, 5, 3, 6]], [[2, 6], [4, 5]], [[1, 3, 4, 6, 5]], [[1, 4, 6, 3], [2, 5]], [[2, 4], [3, 6, 5]], [[2, 6, 4, 5, 3]], [[2, 6, 5, 4]], [[1, 3, 2, 5, 6]], [[2, 4, 5, 6, 3]], [[1, 4, 6, 3, 2]], [[1, 6, 2, 4]], [[1, 4, 5, 6]], [[2, 5, 3], [4, 6]], [[1, 3, 2, 6], [4, 5]], [[2, 6, 3], [4, 5]], [[2, 6, 3]], [[2, 6]], [[1, 2], [4, 5, 6]], [[2, 5, 6]], [[1, 4, 2, 3, 6]], [[1, 3, 6, 5], [2, 4]], [[1, 2, 3], [4, 6, 5]], [[1, 5, 6, 2, 3]], [[1, 6], [3, 5]], [[1, 6], [2, 5, 3, 4]], [[1, 6], [4, 5]], [[2, 4, 5, 6]], [[1, 4, 5, 3], [2, 6]], [[1, 5, 6, 4], [2, 3]], [[1, 2, 5, 6, 3]], [[1, 2], [3, 4, 5, 6]], [[1, 3, 2, 4, 6]], [[1, 5, 4], [3, 6]], [[1, 5], [2, 4], [3, 6]], [[1, 3, 5], [4, 6]], [[1, 6, 4], [2, 3]], [[1, 6], [2, 3, 5]], [[1, 3], [2, 5, 6, 4]], [[1, 3, 5, 4, 6]], [[3, 5], [4, 6]], [[1, 4, 2, 6]], [[1, 6], [2, 5], [3, 4]], [[1, 4, 3, 6, 2]], [[1, 5, 4, 6, 2]], [[1, 6], [2, 3]], [[1, 6, 3], [2, 4, 5]], [[1, 6, 4, 5], [2, 3]], [[2, 3], [4, 6]], [[1, 2], [4, 6]], [[1, 5, 2], [3, 4, 6]], [[3, 5, 6, 4]], [[2, 3], [4, 6, 5]], [[1, 2, 3], [4, 6]], [[2, 4], [3, 5, 6]], [[1, 3, 2, 4], [5, 6]], [[1, 3, 4], [2, 6, 5]], [[1, 3, 6, 4], [2, 5]], [[2, 6, 4], [3, 5]], [[3, 6, 5]], [[1, 6, 4, 5]], [[1, 6, 5, 3]], [[2, 3], [4, 5, 6]], [[1, 4], [3, 5, 6]], [[1, 4], [2, 3, 6]], [[1, 2, 3, 6, 4]], [[1, 4, 6, 5]], [[1, 3], [2, 6, 5, 4]]}

```
> SnConjugates(pg6,[]);
```

1

```
> SnConjugates(pg6,[[1,2]]);
```

15

```
> SnConjugates(pg6,[[1,2,3]]);
```

40

```
> SnConjugates(pg6,[[1,2,3,4]]);
```

90

```
> SnConjugates(pg6,[[1,2,3,4,5]]);
```

144

```
> SnConjugates(pg6,[[1,2,3,4,5,6]]);
```

120

```
> SnConjugates(pg6,[[1,2],[3,4]]);
```

45

```
> SnConjugates(pg6,[[1,2],[3,4,5]]);
```

120

```
> SnConjugates(pg6,[[1,2],[3,4,5,6]]);
```

90

```
> SnConjugates(pg6,[[1,2,3],[4,5,6]]);
```

40

```
> SnConjugates(pg6,[[1,2],[3,4],[5,6]]);
```

15

BENTUK-BENTUK CYCLE DI S7:

```
> grouporder(permgroup(7,{a=[[1,2]],
b=[[1,2,3,4,5,6,7]]}));
```

5040

```
> pg7 := permgroup(7,{a=[[1,2]], b=[[1,2,3,4,5,6,7]]}):
elements(pg7);
```

{[], [[1, 4, 6, 3, 5, 7]], [[1, 5, 7, 4, 2, 3]], [[1, 6], [2, 7, 5], [3, 4]], [[1, 7, 6], [2, 4, 3, 5]], [[1, 2], [3, 7, 4, 6, 5]], [[1, 4], [2, 7, 3, 6, 5]], [[1, 3, 5, 6], [4, 7]], [[1, 6, 7, 4, 2, 5]], [[1, 7, 5], [2, 3, 6, 4]], *[...5020 terms...]*, [[1, 2, 6, 4], [3, 7, 5]], [[2, 7, 5, 4, 3]], [[1, 7], [5, 6]], [[1, 4, 7], [3, 5, 6]], [[1, 7, 3, 5, 4, 6]], [[1, 2, 4, 5, 7, 3]], [[1, 6], [2, 3, 7, 4, 5]], [[1, 4, 3], [2, 6, 5, 7]], [[1, 7, 2, 4, 3], [5, 6]], [[2, 3, 7, 4]]}

```
> SnConjugates(pg7,[]);
```

1

```
> SnConjugates(pg7,[[1,2]]);
```

21

```
> SnConjugates(pg7,[[1,2,3]]);
```

70

```
> SnConjugates(pg7,[[1,2,3,4]]);
                                210

> SnConjugates(pg7,[[1,2,3,4,5]]);
                                504

> SnConjugates(pg7,[[1,2,3,4,5,6]]);
                                840

> SnConjugates(pg7,[[1,2,3,4,5,6,7]]);
                                720

> SnConjugates(pg7,[[1,2],[3,4]]);
                                105

> SnConjugates(pg7,[[1,2],[3,4],[5,6]]);
                                105

> SnConjugates(pg7,[[1,2],[3,4],[5,6,7]]);
                                210

> SnConjugates(pg7,[[1,2],[3,4,5]]);
                                420

> SnConjugates(pg7,[[1,2],[3,4,5,6]]);
                                630

> SnConjugates(pg7,[[1,2],[3,4,5,6,7]]);
                                504

> SnConjugates(pg7,[[1,2,3],[4,5,6]]);
                                280

> SnConjugates(pg7,[[1,2,3],[4,5,6,7]]);
                                420
```

BENTUK-BENTUK CYCLE DI S8:

```
> grouporder(permgroup(8,{a=[[1,2]],
b=[[1,2,3,4,5,6,7,8]]}));
                                40320

> pg8 := permgroup(8,{a=[[1,2]],
b=[[1,2,3,4,5,6,7,8]]}):
elements(pg8);
```

{[], [[1, 2, 3, 4], [6, 8]], [[1, 8, 5, 3], [2, 7, 4]], [[1, 8], [2, 4, 7, 3, 5]], [[1, 4, 6, 7, 2, 8, 3]], [[1, 8, 2, 4, 7, 5, 6]], [[1, 4, 6, 3, 5, 7]], [[1, 4], [3, 7], [6, 8]], [[1, 8, 5, 2], [3, 6, 7, 4]], [[1, 7], [2, 5, 4, 3, 8, 6]], *[...40300 terms...]*, [[1, 5, 7, 8, 4], [2, 6]], [[1, 4, 7, 5, 8, 6], [2, 3]], [[1, 6], [2, 3, 8], [4, 7]],

[[1, 6, 2, 3, 8, 5, 7]], [[1, 8, 7, 3, 2, 4, 6]], [[1, 7, 4], [2, 5, 6], [3, 8]], [[1, 4, 7, 3, 5], [6, 8]], [[1, 4, 3, 5, 8], [2, 7]], [[1, 8, 6, 4], [2, 7, 5, 3]], [[1, 4, 7, 5, 8]]}

```
> SnConjugates(pg8,[]);
```

1

```
> SnConjugates(pg8,[[1,2]]);
```

28

```
> SnConjugates(pg8,[[1,2,3]]);
```

112

```
> SnConjugates(pg8,[[1,2,3,4]]);
```

420

```
> SnConjugates(pg8,[[1,2,3,4,5]]);
```

1344

```
> SnConjugates(pg8,[[1,2,3,4,5,6]]);
```

3360

```
> SnConjugates(pg8,[[1,2,3,4,5,6,7]]);
```

5760

```
> SnConjugates(pg8,[[1,2,3,4,5,6,7,8]]);
```

5040

```
> SnConjugates(pg8,[[1,2],[3,4]]);
```

210

```
> SnConjugates(pg8,[[1,2],[3,4,5]]);
```

1120

```
> SnConjugates(pg8,[[1,2],[3,4,5,6]]);
```

2520

```
> SnConjugates(pg8,[[1,2],[3,4,5,6,7]]);
```

4032

```
> SnConjugates(pg8,[[1,2],[3,4,5,6,7,8]]);
```

3360

```
> SnConjugates(pg8,[[1,2,3],[4,5,6]]);
```

1120

```
> SnConjugates(pg8,[[1,2,3],[4,5,6,7]]);
```

3360

```
> SnConjugates(pg8,[[1,2,3],[4,5,6,7,8]]);
                                2688

> SnConjugates(pg8,[[1,2,3,4],[5,6,7,8]]);
                                1260

> SnConjugates(pg8,[[1,2],[3,4],[5,6]]);
                                420

> SnConjugates(pg8,[[1,2],[3,4],[5,6],[7,8]]);
                                105

> SnConjugates(pg8,[[1,2],[3,4],[5,6,7]]);
                                1680

> SnConjugates(pg8,[[1,2],[3,4],[5,6,7,8]]);
                                1260

> SnConjugates(pg8,[[1,2],[3,4,5],[6,7,8]]);
                                1120
```