



MODEL PERPINDAHAN KALOR PADA MESIN PENGERING PADI

skripsi

disajikan sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika

oleh

Ninik Rahayu

4150407027

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

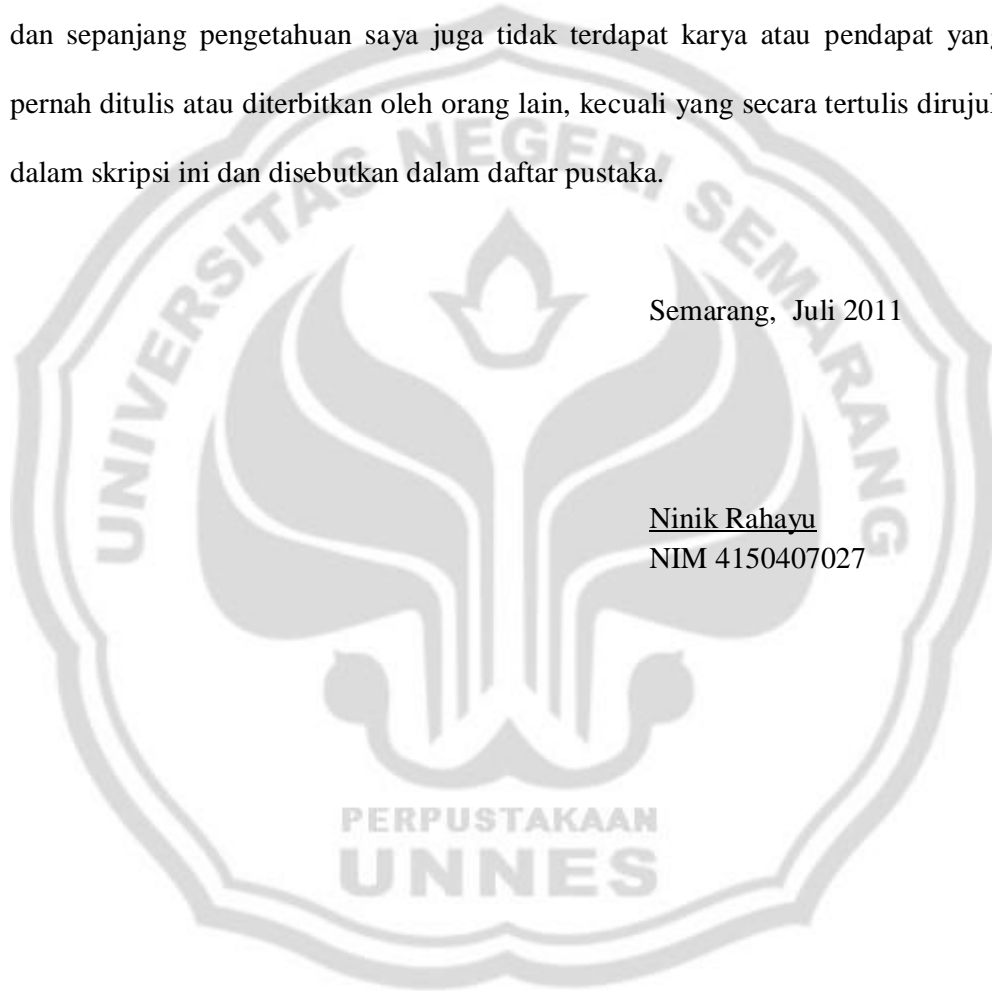
2011

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa dalam isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dirujuk dalam skripsi ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Semarang, Juli 2011

Ninik Rahayu
NIM 4150407027



PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Model Perpindahan Kalor pada Mesin Pengering Padi

disusun oleh

Ninik Rahayu

4150407027

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES pada
tanggal 9 Agustus 2011.

Panitia:

Ketua

Sekretaris

Dr. Kasmadi Imam S., M.S.
195111151979031001

Drs. Edy Soedjoko, M.Pd
195604191987031001

Ketua Penguji

Muhammad Kharis, S.Si, M.Sc
195604191987031001

Anggota Penguji/
Pembimbing Utama

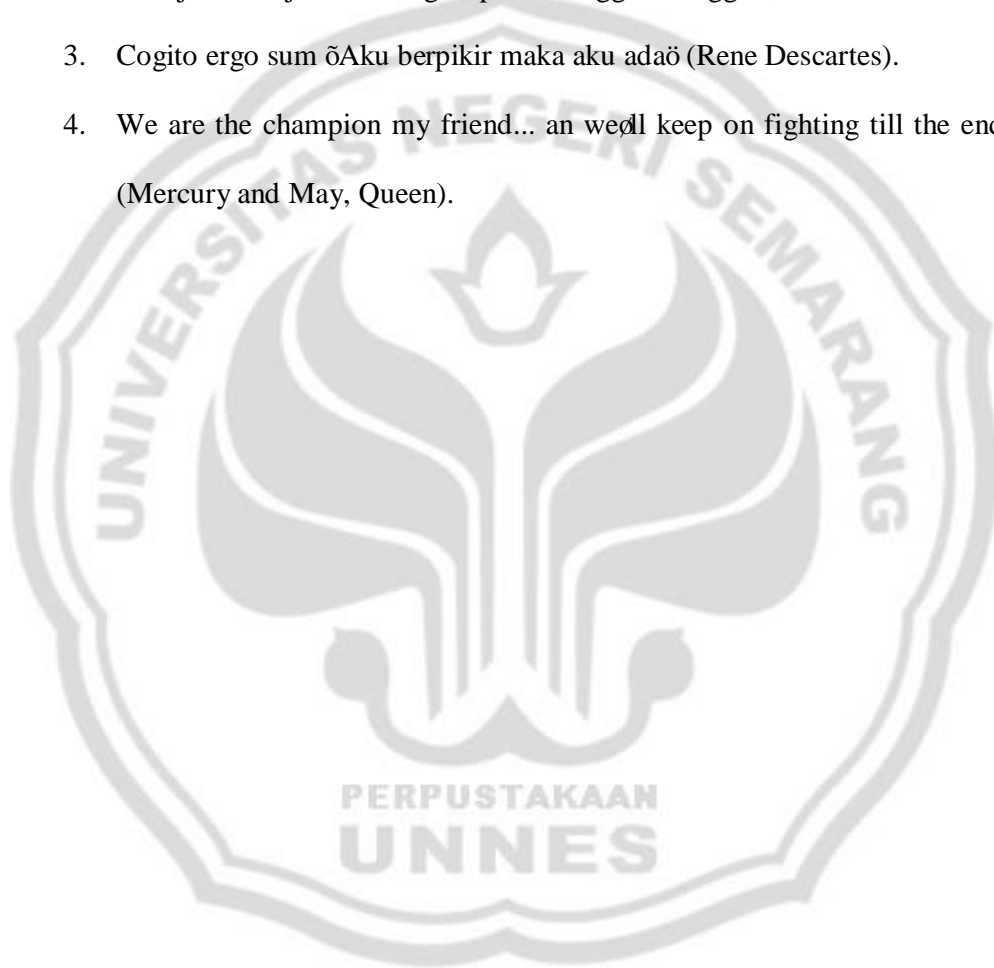
Anggota Penguji/
Pembimbing Pendamping

Drs. St. Budi Waluya, M.Si, Ph.D
19680907199303100

Drs. Wuryanto, M.Si.
195302051983031003

MOTTO

1. Bermimpilah, karena Tuhan akan memeluk mimpi-mimpimu (Arai, dalam Novel Sang Pemimpi, Andrea Hirata).
2. Man jadda wajada obarang siapa bersungguh-sungguh, akan suksesö.
3. Cogito ergo sum öAku berpikir maka aku adaö (Rene Descartes).
4. We are the champion my friend... an weöll keep on fighting till the end (Mercury and May, Queen).



PERSEMBAHAN

Skripsi ini untuk sebuah gelar S.Si, capaian untuk menggapai mimpi-mimpi yang lebih tinggi, persembahkan untuk mereka yang kucintai karena-Nya, dan mereka yang mencintaiku karena mencintai-Nya

1. Bapak dan Ibuku tercinta, atas semua kasih sayang dan motivasi sepanjang nafasku berhembus
2. Orang tua keduaku yang senantiasa memberikan motivasi dan pendidikan (Kadarustamaji, Heru Dwi Parwati)
3. Kakak-kakakku (Prihatiningsih, Nugroho, Suharto, Diah) yang selalu memberi motivasi
4. Semua dosen yang memberikan sebagian ilmunya
5. Nita, Endah, Indah, ani, Anis, Tennis, Wita, Meita, Ian, Mas Susi, Mas Fajar, Wayan yang selalu memberi kebahagiaan dan motivasi
6. Teman-temanku Mat07 yang tak hanya memberiku kebahagiaan dan kenyamanan ketika aku belajar, tetapi juga membuka mataku betapa indahnya kebersamaan
7. Almamater.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Model Perpindahan kalor Pada Mesin Pengering Padi". Penulisan skripsi ini sebagai syarat mutlak yang harus dipenuhi oleh penulis untuk memperoleh gelar sarjana sains di Universitas Negeri Semarang.

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan karena adanya bimbingan, bantuan, dan dukungan dari berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Sudijono Sastroatmodjo, M.Si, Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Dr. Kasmadi Imam S, M.S, Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Edy Soedjoko, M.Pd, Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
4. Drs. St. Budi Waluya, M.Si, Ph.D Pembimbing Utama yang telah memberikan bimbingan, motivasi, dan pengarahan.
5. Drs. Wuryanto, M.Si, Pembimbing Pendamping yang telah memberikan bimbingan, motivasi, dan pengarahan.
6. Ayah dan Ibu tercinta yang senantiasa mendoakan serta memberikan dukungan baik secara moral maupun spiritual.
7. Anak Matematika 2007 yang telah memberikan dorongan dan motivasi hingga terselesaikannya penulisan skripsi ini.
8. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya penulisan skripsi ini.

Penulis sadar dengan apa yang telah disusun dan disampaikan masih banyak kekurangan dan jauh dari sempurna. Untuk itu penulis menerima segala kritik dan saran yang sifatnya membangun untuk skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Semarang,

Penulis



ABSTRAK

Rahayu, N. 2011. *Model Perpindahan kalor pada Mesin pengering padi*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Pembimbing Utama Dr. St. Budi Waluya, M.S. dan Pembimbing Pendamping Drs. Wuryanto, M.Si.

Kata kunci: Persamaan Kalor, Metode Pemisahan Variabel, Keadaan *Steady* dan *Unsteady*.

Matematika merupakan salah satu sarana untuk menyelesaikan suatu permasalahan. Salah satu kajian matematika yang konsep-konsepnya banyak diterapkan dalam bidang lain adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial muncul dalam berbagai bidang sains dan teknologi, bilamana hubungan deterministik yang melibatkan besaran yang berubah secara kontinu (dimodelkan oleh fungsi matematika) dan laju perubahannya (dinyatakan sebagai turunan) diketahui atau dipostulatkan. Ini terlihat misalnya pada masalah perpindahan kalor.

Permasalahan yang diangkat pada penelitian ini adalah bagaimana permodelan persamaan kalor dan bagaimana solusi model persamaan kalor. Langkah-langkah yang dilakukan adalah menentukan masalah, merumuskan masalah, studi pustaka, analisis pemecahan masalah, dan penarikan simpulan.

Pembahasan dilakukan untuk menemukan model persamaan kalor pada mesin pengering padi dan menyelesaikan persamaan kalor dengan metode pemisahan variabel. Pembahasan ini dilakukan dalam dua keadaan, yaitu keadaan *steady* (waktu konstan) dan *unsteady* (waktu berubah-ubah). Pada pembahasan

diperoleh model $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$. Pada Persamaan kalor keadaan *steady* $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ diperoleh solusi $T(x) = C_1 x + C_2$

sedangkan untuk keadaan *unsteady* Persamaan kalor $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$ diperoleh solusi $T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi t}{L^2}$

Solusi-solusi tersebut kemudian divisualisasikan dengan menggunakan *Maple*.

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN	ii
PENGESAHAN	iii
MOTTO.....	iv
PERSEMBAHAN.....	v
PRAKATA	vi
ABSTRAK	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR LAMPIRAN	xii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	4
1.3. Pembatasan Masalah	4
1.4. Tujuan Penelitian	5
1.5. Manfaat Penelitian	5
1.6. Sistematika Penulisan Skripsi	6
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	8
2.1. Persamaan Diferensial Biasa	8
2.2. Persamaan Diferensial Parsial	9
2.3. Kalor	11

2.4. Konsep Turunan Kedua Fungsi Real	17
2.5. Persamaan Difusi	17
2.6. Deret Fourier	18
2.7. <i>Maple</i>	20
2.8. Masalah Syarat Batas	21
2.9. Keadaan Setimbang (<i>Steady State</i>) dan Keadaan Tak Setimbang (<i>Unsteady State</i>) Termodinamika	22
BAB III METODE PENELITIAN	24
3.1. Menentukan Masalah	24
3.2. Merumuskan Masalah	24
3.3. Studi Pustaka	25
3.4. Analisis Pemecahan Masalah	25
3.5. Penarikan Kesimpulan	26
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	27
4.1. Permodelan Persamaan Kalor	27
4.2. Solusi Persamaan Kalor	39
4.3. Variasi Nilai Awal	53
BAB V PENUTUP	74
5.1. Simpulan	74
5.2. Saran	75
DAFTAR PUSTAKA	76
LAMPIRAN	78

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1. Laju Aliran Kalor pada Penampang Kubus	16
Gambar 4.1. Penampang Balok Tiga Dimensi	28
Gambar 4.2. Aliran Konduksi Kalor pada Balok Tiga Dimensi	29
Gambar 4.3. Analisis Konduksi Kalor Tiga Dimensi dalam Koordinat Tabung	33
Gambar 4.4. Plot Solusi Model Keadaan <i>Steady</i> dengan Variasi Nilai Awal Fungsi Trigonometri dan $\theta = 1$	57
Gambar 4.5. Plot Solusi Model Keadaan <i>Steady</i> dengan Variasi Nilai Awal Fungsi Trigonometri dan $\theta = 1,2,3$	57
Gambar 4.6. Plot Solusi Model Persamaan Kalor pada Keadaan <i>Steady</i> dengan $\theta = 100$	58
Gambar 4.7. Plot Solusi Persamaan Kalor pada Keadaan <i>Unsteady</i> dengan $\theta = 100$ (Persamaan θ terhadap θ)	68
Gambar 4.8. Plot Solusi Persamaan Kalor pada Keadaan <i>Unsteady</i> dengan $\theta = 100$ (Persamaan θ terhadap θ)	70

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1. Plot Solusi Model Perpindahan Kalor Pada Keadaan <i>Steady</i>	78
Lampiran 2. Plot Solusi Model Perpindahan Kalor Pada Keadaan <i>Unsteady</i> ...	81
Lampiran 3. Plot Solusi Model pada Keadaan <i>Steady</i> dengan Variasi Nilai Awal Fungsi Trigonometri	81



BAB I

PENDAHULUAN

1.1. LATAR BELAKANG

Persamaan Diferensial (PD) merupakan cabang dari matematika yang sudah berkembang sejak jaman Isaac Newton dan Leibnitz dan hingga saat ini memiliki peran yang besar serta banyak diterapkan pada berbagai bidang ilmu seperti fisika, teknik, biologi, kimia, ekologi, ekonomi dan ilmu-ilmu lainnya. Persamaan differensial digunakan untuk menyatakan hubungan yang kompleks antara satu variabel tak bebas dengan satu atau beberapa variabel bebas lainnya. Melalui penggunaan simbol-simbol dalam persamaan differensial ini, hubungan antar variabel yang sebelumnya masih kurang jelas akan menjadi semakin mudah dipahami. Dengan demikian penggunaan persamaan differensial untuk menyusun suatu model tentang fenomena dari suatu sistem yang ada di dunia nyata merupakan suatu cara yang sering ditempuh guna membantu mencari solusi dari permasalahan yang ada. Pesatnya perkembangan teknologi komputer juga membantu dalam menemukan penyelesaian persamaan differensial secara numeris, terutama bentuk-bentuk persamaan differensial nonlinear dan parsial yang biasanya tidak dapat diselesaikan secara analitis (Andriani, 2005).

Persamaan diferensial muncul dalam berbagai bidang sains dan teknologi, bilamana hubungan deterministik yang melibatkan besaran yang berubah secara kontinu (dimodelkan oleh fungsi matematika) dan laju perubahannya (dinyatakan

sebagai turunan) diketahui atau dipostulatkan. Ini terlihat misalnya pada masalah perpindahan kalor.

Kalor merupakan bentuk energi yang berpindah dari suhu tinggi ke suhu rendah. Jika suatu benda menerima / melepaskan kalor maka suhu benda itu akan naik/turun atau wujud benda berubah. Dalam dunia kalor di kenal masalah perpindahan kalor yang dapat digunakan untuk menentukan perubahan suhu dan waktu pendinginan. Perpindahan kalor (*Heat Transfer*) adalah transisi energi termal dari suhu panas ke suhu yang lebih dingin. Ketika sebuah objek mempunyai suhu yang berbeda dibandingkan dengan lingkungan atau objek lain, transfer energi panas, juga dikenal sebagai aliran panas, atau pertukaran panas, terjadi sedemikian rupa sehingga tubuh dan sekitarnya mencapai kesetimbangan termal; ini berarti bahwa lingkungan berada pada suhu yang sama. Perpindahan panas selalu terjadi dari temperatur yang lebih tinggi ke temperatur yang lebih dingin seperti yang dijelaskan oleh hukum kedua termodinamika atau pernyataan Clausius (Ruwanto, 2004).

Pada masa sekarang dimana ilmu pengetahuan dan teknologi telah berkembang pesat, ilmu perpindahan kalorbanyak diterapkan dalam kehidupan sehari ó hari maupun dalam bidang industri, misalnya memasak air, proses radiasi, pembuatan benda ó benda tajam, proses pengeringan padi, proses pengeringan kain dan lain ó lain. Misalnya pada proses pengeringan padi, ilmu perpindahan kalor sangat penting pada proses ini. Hal ini dikarenakan cuaca yang tidak menentu sehingga proses pengeringan padi tidak dapat dilakukan secara manual. Untuk petani partai besar proses pengeringan padi dengan menggunakan mesin

sangat efektif dikarenakan dapat menghemat waktu dan meningkatkan harga jual padi.

Permasalahan perubahan suhu terhadap waktu untuk menentukan lama waktu yang dibutuhkan untuk mencapai suhu yang diinginkan ini dapat diekspresikan ke dalam model matematika sebagai persamaan diferensial parsial, Persamaan diferensial parsial dijumpai dalam kaitan dengan berbagai masalah fisik dan geometris bila fungsi yang terlibat tergantung pada dua atau lebih peubah bebas. Tidak berlebihan jika dikatakan bahwa hanya sistem fisik yang paling sederhana yang dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial biasa mekanika fluida dan mekanika padat, transfer panas, teori elektromagnetik dan berbagai bidang fisika lainnya penuh dengan masalah-masalah yang harus dimodelkan dengan persamaan differensial parsial. Yang sesungguhnya, kisaran penerapan persamaan diferensial parsial sangatlah besar, dibandingkan dengan kisaran penerapan persamaan diferensial biasa. Peubah-peubah bebas dapat berupa waktu dan satu atau lebih koordinat di dalam ruang.

Ketika memperoleh suatu model matematika dalam bentuk persamaan diferensial, langkah selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan diferensial tersebut dengan menentukan solusinya. Solusi persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial tersebut. Artinya, jika fungsi itu dan turunan-turunannya disubstitusikan kedalam persamaan diferensial tersebut, diperoleh suatu pernyataan yang benar. Permasalahan perubahan suhu terhadap waktu untuk menentukan lama waktu yang dibutuhkan untuk mencapai suhu yang diinginkan ini harus diekspresikan ke dalam pemodelan matematika khususnya

persamaan diferensial biasa orde satu. Setelah diperoleh pemodelan matematika selanjutnya dapat dicari solusi model. Solusi model tersebut kemudian dikembangkan dan diinterpretasikan untuk memperoleh solusi masalah.

Berangkat dari latar belakang tersebut, penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan mengangkat judul "MODEL PERPINDAHAN KALOR PADA MESIN PENGERING PADI".

1.2. RUMUSAN MASALAH

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

- 1) bagaimana memodelkan permasalahan waktu yang dibutuhkan untuk mengeringkan padi sampai kadar air dalam padi berkurang secara maksimal,
- 2) bagaimana menemukan solusi model permasalahan waktu yang dibutuhkan untuk mengeringkan padi sampai kadar air dalam padi berkurang secara maksimal jika mesin dalam keadaan *steady* (suhu konstan terhadap waktu) dan *unsteady* (suhu berubah-ubah terhadap waktu), dan
- 3) bagaimana simulasi solusi model persamaan kalor pada mesin pengering padi dengan menggunakan program Maple pada keadaan *steady* (suhu konstan terhadap waktu) dan *unsteady* (suhu berubah-ubah terhadap waktu).

1.3. PEMBATAAN MASALAH

Dalam hal ini penulis membatasi pembahasan masalah hanya pada perpindahan panas pada mesin pengering padi yang berbentuk tabung dimana mesin dalam keadaan *steady* (suhu konstan terhadap waktu) dan *unsteady* (suhu

berubah-ubah terhadap waktu). Pada akhirnya dapat ditemukan perubahan suhunya, serta analisisnya menggunakan persamaan diferensial parsial dengan melalui penurunan energi kalor sampai diperoleh persamaan difusi.

1.4. TUJUAN PENELITIAN

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

- 1) mengetahui bagaimana model waktu yang dibutuhkan untuk mengeringkan padi sampai kadar air dalam padi berkurang secara maksimal,
- 2) mengetahui solusi model permasalahan waktu yang dibutuhkan untuk mengeringkan padi sampai kadar air dalam padi berkurang secara maksimal jika mesin dalam keadaan *steady* (suhu konstan terhadap waktu) dan *unsteady* (suhu berubah-ubah terhadap waktu), dan
- 3) mengetahui simulasi pemodelan persamaan kalor pada mesin pengering padi dengan program Maple.

1.5. MANFAAT PENELITIAN

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

- 1) penelitian yang dilakukan merupakan hasil dari penerapan teori-teori yang telah didapat diperkuliahan kedalam praktik yang sebenarnya,
- 2) hasil penelitian diharapkan dapat dijadikan sebagai salah satu referensi penelitian terhadap aplikasi persamaan diferensial biasa khususnya pada masalah perpindahan panas.

1.6. SISTEMATIKA PENULISAN SKRIPSI

Penulisan skripsi disusun dalam tiga bagian utama, yaitu bagian awal, bagian inti, dan bagian akhir skripsi.

1.6.1. Bagian Awal Skripsi

Bagian awal skripsi terdiri dari halaman sampul, halaman judul, halaman persetujuan, pernyataan, motto dan persembahan, kata pengantar, abstrak, daftar isi, daftar gambar, dan daftar lampiran.

1.6.2. Bagian Inti Skripsi

Bagian inti skripsi dibagi menjadi lima bab yaitu:

BAB I : PENDAHULUAN

Bab ini memuat gambaran singkat tentang isi skripsi dan membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan skripsi.

BAB II : TINJAUAN PUSTAKA

Landasan teori berisi mengenai teori-teori yang mendukung dan berkaitan dengan pembahasan skripsi sehingga dapat membantu penulis maupun pembaca dalam memahami isi skripsi. Bab ini terdiri dari persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial, kalor, konsep turunan kedua fungsi real, persamaan difusi, deret Fourier, *Maple*, dan masalah syarat bata.

BAB III : METODE PENELITIAN

Metode penelitian berisi tentang proses atau langkah penelitian. Bab ini meliputi menentukan masalah, merumuskan masalah, studi pustaka, analisis pemecahan masalah, dan penarikan simpulan.

BAB IV : PEMBAHASAN

Pada bab ini berisi permodelan persamaan kalor dan solusi persamaan kalor pada keadaan *Steady* dan *Unsteady* , serta visualisasinya menggunakan *Maple*.

BAB V: PENUTUP

Bab ini berisi tentang simpulan dan saran yang diperoleh dari pembahasan.

1.6.3. Bagian Akhir Skripsi

Bagian akhir skripsi berisi daftar pustaka sebagai acuan untuk memberikan informasi tentang buku dan literatur lain yang digunakan dalam penulisan skripsi serta lampiran yang mendukung kelengkapan skripsi.



BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Diferensial Biasa

2.1.1. Definisi

Persamaan Diferensial Biasa (PDB) adalah persamaan diferensial di mana fungsi yang tidak diketahui (variabel terikat) adalah fungsi dari variabel bebas tunggal. Dalam bentuk paling sederhana fungsi yang tidak diketahui ini adalah fungsi riil atau fungsi kompleks, namun secara umum bisa juga berupa fungsi vector maupun matriks. Lebih jauh lagi, persamaan diferensial biasa digolongkan berdasarkan orde tertinggi dari turunan terhadap variabel terikat yang muncul dalam persamaan tersebut (Rochmad, 2005).

2.1.2. Persamaan Diferensial Order Satu

Persamaan difrensial order satu yang mempunyai bentuk umum

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Dimana y adalah fungsi dalam dua variable yang diberikan. Sebarang fungsi terturunkan $y = f(x)$ yang memenuhi persamaan ini untuk semua x dalam suatu interval disebut solusi. Pada persamaan diferensial biasa order satu, untuk sebarang fungsi y tidak terdapat metode umum yang dapat dipakai untuk menyelesaikannya dalam bentuk fungsi-fungsi sederhana. Beberapa metode tersebut adalah persamaan linear, persamaan terpisah, persamaan diferensial

Bernoulli, persamaan diferensial eksak, persamaan diferensial homogeny (Waluya, 2006).

2.1.3. Aplikasi Persamaan Diferensial Order Satu

Dalam kehidupan sehari-hari banyak fenomena yang dalam menyelesaikannya menggunakan persamaan diferensial order satu. Contoh penerapan persamaan diferensial order satu sering dijumpai dalam masalah pencairan atau pemekata suatu cairan, masalah suku bunga bank, masalah pembelahan dan pertumbuhan sel, masalah mekanika klasik, masalah perubahan suhu, *radiative cooling time* dan lain sebagainya (Waluya, 2006).

2.2. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan parsial suatu fungsi (yang diketahui) dengan dua atau lebih peubah bebas dinamakan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial dijumpai dalam kaitan dengan berbagai masalah fisik dan geometris bila fungsi yang terlibat tergantung pada dua atau lebih peubah bebas. Tidak berlebihan jika dikatakan bahwa hanya sistem fisik yang paling sederhana yang dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial biasa mekanika fluida dan mekanika padat, transfer panas, teori elektromagnetik dan berbagai bidang fisika lainnya penuh dengan masalah-masalah harus dimodelkan dengan persamaan *diferensial parsial*. Kisaran penerapan persamaan diferensial parsial sangatlah besar, dibandingkan dengan kisaran penerapan persamaan diferensial biasa. Peubah-peubah bebas dapat berupa waktu dan satu atau lebih koordinat di dalam ruang.

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

Persamaan diferensial parsial linear ordo kedua yang penting,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{untuk } 0 < x < a, 0 < y < b$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{untuk } x = 0, y = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{untuk } x = a, y = b$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{untuk } x = 0, y = b$$

dalam hal ini u adalah konstanta, t adalah waktu, x dan y adalah koordinat Kartesius (Awang)

Contoh :

Solve the equation $u_{xx} = 4u_{yy}$ for $0 < x < 2$ with the boundary conditions $u(0, y) = 0$, $u(2, y) = 0$, $u_x(2, y) = 0$ (Dirichlet at the right and Neumann at the left)

Penyelesaian :

$$u_{xx} = 4u_{yy}$$

Tulis $u(x, y) = X(x)Y(y)$

Jadi $X'' = -\lambda X$ dan $Y'' = \lambda Y$

Jadi persamaan $u_{xx} = 4u_{yy}$ menjadi

$$X'' = -\lambda X \quad \text{dan} \quad Y'' = \lambda Y$$

Diperoleh $\frac{X''}{X} = -\lambda = \frac{Y''}{Y} = \lambda$, dengan $X(0) = 0$, $X(2) = 0$

- $X'' = -\lambda X$
 $X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$
- $X'' = \lambda X$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta = 0$$

$$2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta = 0$$

$$\text{Jelas } 2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta = 0$$

$$2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta = 0$$

$$2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta = 0$$

$$2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta = 0$$

$$2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta = 0$$

$$2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta = 0$$

Solusi $2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta = 0$

$$2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta = 0$$

Jadi solusi persamaan di atas adalah

$$2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta = 0$$

(Strauss,1992)

2.3. Kalor

2.3.1. Definisi

Kalor adalah bentuk energi yang berpindah dari suhu tinggi ke suhu rendah. Jika suatu benda menerima / melepaskan kalor maka suhu benda itu akan naik/turun atau wujud benda berubah.

[Click Here to upgrade to
Unlimited Pages and Expanded Features](#)

1 kalori adalah kalor yang dibutuhkan untuk menaikkan suhu 1 gram air sebesar 1°C.

1 kalori = 4.18 joule

1 joule = 0.24 kalori

Kapasitas kalor (H) adalah banyaknya kalor yang dibutuhkan oleh zat untuk menaikkan suhunya 1°C (satuan kalori/°C).

Kalor jenis (c) adalah banyaknya kalor yang dibutuhkan untuk menaikkan 1 gram atau 1 kg zat sebesar 1°C (satuan kalori/gram.°C atau kkal/kg °C).

Kalor yang digunakan untuk menaikkan/menurunkan suhu tanpa mengubah wujud zat:

$$Q = H \cdot \Delta T$$

$$Q = H \cdot m \cdot \Delta T$$

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$$

Q = kalor yang di lepas/diterima

H = kapasitas kalor

ΔT = kenaikan/penurunan suhu

m = massa benda

c = kalor jenis

Kalor yang diserap/dilepaskan (Q) dalam proses perubahan wujud benda:

$$Q = m \cdot L$$

[Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features](#)

m = massa benda $[kg]$

Q = kalor laten (kalor lebur, kalor beku, kalor uap, kalor embun, kalor sublim, kalor lenyap) $[J]$

Jadi kalor yang diserap ($+$) atau yang dilepas ($-$) pada saat terjadi perubahan wujud benda tidak menyebabkan perubahan suhu benda (suhu benda konstan).

2.3.2. Perpindahan Kalor

Perpindahan kalor adalah transisi energi termal dari suhu panas ke suhu yang lebih dingin. Ketika sebuah objek mempunyai suhu yang berbeda dibandingkan dengan lingkungan atau objek lain, transfer energi panas, juga dikenal sebagai aliran panas, atau pertukaran panas, terjadi sedemikian rupa sehingga tubuh dan sekitarnya mencapai kesetimbangan termal; ini berarti bahwa lingkungan berada pada suhu yang sama. Perpindahan panas selalu terjadi dari temperatur yang lebih tinggi ke temperatur yang lebih dingin seperti yang dijelaskan oleh hukum kedua termodinamika atau pernyataan Clausius (Ruwanto, 2004).

Kalor dapat berpindah melalui tiga macam cara yaitu:

2.3.2.1. Konduksi

Perambatan kalor tanpa disertai perpindahan bagian-bagian zat perantaranya, biasanya terjadi pada benda padat.

$$Q = k \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{l} \cdot t$$

Q = jumlah kalor yang merambat per satuan waktu

$\Delta T/l$ = gradien temperatur $[K/m]$

[Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features](#)

k = koefisien konduksi

A = luas penampang A^2

L = panjang benda L^2

2.3.2.2. Konveksi

Perambatan kalor yang disertai perpindahan bagian-bagian zat, karena perbedaan massa jenis.

$$Q = k A \frac{\Delta T}{L}$$

Q = jumlah kalor yang merambat per satuan waktu

k = koefisien konveksi

ΔT = kenaikan suhu $T^{\circ}C$

2.3.2.3. Radiasi

Perambatan kalor dengan pancaran berupa gelombang-gelombang elektromagnetik.

Pancaran kalor secara radiasi mengikuti **Hukum Stefan Boltzmann**:

$$I = \sigma T^4$$

I = intensitas/energi radiasi yang dipancarkan per satuan luas per satuan waktu

σ = konstanta Boltzman $5,672 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$

T = emisivitas ϵ $T_0 = 1 \text{ K} = \text{suhu mutlak } 273 \text{ K}$

Benda yang dipanaskan sampai pijar, selain memancarkan radiasi kalor juga memancarkan energi radiasi dalam bentuk gelombang elektromagnetik dengan panjang gelombang $10^6 \text{ m} / 10^5 \text{ m}$. Untuk benda ini berlaku hukum PERGESERAN WIEN, yaitu:

$$\lambda_m T = b$$

$\sigma = \text{konstanta Wien} = 2.9 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

2.3.2.4. Hukum – hukum dasar perpindahan kalor

Untuk memperoleh analisa teknik kuantitatif dalam masalah perpindahan kalor, perlu diselidiki hukum-hukum fisik dan hubungan ó hubungan yang mengatur berbagai mekanisme aliran kalor.

Pada perpindahan kalor secara konduksi, hubungan dasar untuk perpindahan kalor dengan cara konduksi diusulkan oleh ilmuwan Perancis, J. B. J. Fourier pada tahun 1822. Hubungan ini menyatakan bahwa Q , laju aliran kalor dengan cara konduksi dalam suatu bahan sama dengan hasil kali tiga besaran berikut :

- 1) k , konduktivitas termal bahan,
- 2) A , luas penampang bahan (kalor mengalir dengan cara konduksi yang harus diukur tegak lurus terhadap arah aliran kalor),
- 3) $\frac{dT}{dx}$, gradien suhu pada penampang, yaitu laju perubahan suhu T terhadap jarak dalam arah aliran kalor x .

Menurut hukum kedua termodinamika, kalor akan mengalir secara otomatis dari titik yang bersuhu lebih tinggi ke titik yang bersuhu lebih rendah, maka aliran kalor akan menjadi positif bila gradien suhu bernilai negatif., sehingga persamaan dasar konduksi dalam keadaan *steady* ditulis

$$Q = -k A \frac{dT}{dx}$$

Laju konduksi kalor

Menurut hukum konservasi energi, laju aliran kalor dapat ditulis

$$\dot{Q}_{\text{aliran kalor masuk}} + \dot{Q}_{\text{pembangkitan panas oleh sumber-sumber dalam}} = \dot{Q}_{\text{aliran kalor keluar}} + \dot{Q}_{\text{laju perubahan energi dalam}}$$

atau secara aljabar

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

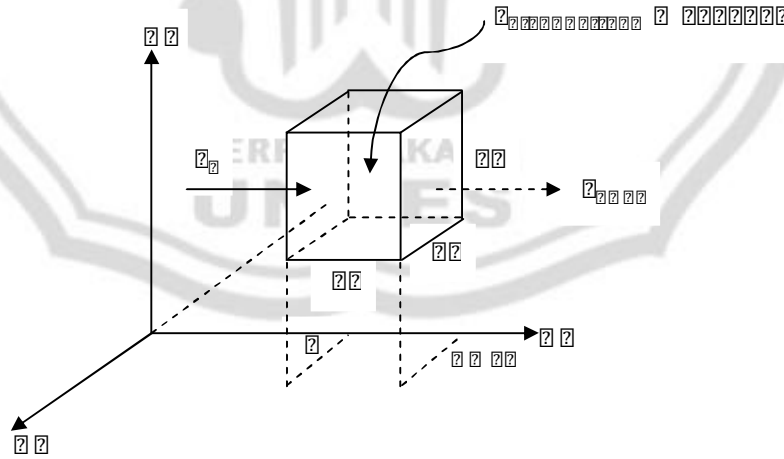
Di mana laju pembangkitan kalor per volume satuan \dot{q} dan suhu T pada umumnya merupakan fungsi atas x , y dan z maupun waktu t .

Laju konduksi kalor yang masuk ke dalam elemen melalui permukaan kiri dalam arah x yaitu q_x , dapat ditulis

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Delta y \Delta z$$

gradien suhu dinyatakan sebagai koefisien diferensial parsial karena tidak hanya fungsi x tetapi juga fungsi y , z dan t . Laju konduksi kalor yang keluar dari elemen yang melalui permukaan kanan pada $x + \Delta x$ yaitu $q_{x+\Delta x}$ adalah

$$q_{x+\Delta x} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Delta y \Delta z$$



Gambar 2.1 Laju aliran kalor pada penampang kubus

(Kreith, 1991)

2.4. Konsep Turunan Kedua Fungsi Real

Misalkan suatu fungsi $f(x, y)$, dan substitusi $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ membuat f hanya bergantung pada variabel t dan misalkan semua syarat cukup agar turunan f terhadap t ada dan dipenuhi, artinya mempunyai kondisi berikut,

$$\frac{dx}{dt} \neq 0 \quad \frac{dy}{dt} \neq 0 \quad \frac{d^2x}{dt^2} \neq 0$$

Dan misalkan turunan kedua f terhadap t ada, maka

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2y}{dt^2}$$

dan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2y}{dt^2}$$

sehingga diperoleh,

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2y}{dt^2}$$

atau

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2y}{dt^2}$$

(Wuryanto, 2002)

2.5. Persamaan Difusi

Persamaan difusi atau persamaan aliran kalor adalah persamaan differensial parsial yang mempunyai bentuk:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

[Click Here to upgrade to
Unlimited Pages and Expanded Features](#)

di mana $u(x, y, z, t)$ menyatakan karakteristik medium terjadinya proses difusi (aliran kalor). u menyatakan fungsi yang mempunyai variabel ruang dan waktu (misalnya temperatur pada medium).

Untuk menyelesaikannya, diasumsikan solusi yang berbentuk $u(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$. Substitusikan bentuk solusi tersebut ke persamaan difusi akan menghasilkan

$$T''(t) = -\lambda T(t) \quad X''(x) = -\mu X(x) \quad Y''(y) = -\nu Y(y) \quad Z''(z) = -\rho Z(z)$$

Ruas kiri persamaan tersebut hanyalah fungsi dengan variabel ruang, sementara ruas kanan hanyalah fungsi dengan variabel waktu. Artinya kedua ruas haruslah sama dengan suatu konstanta, misalkan $-\lambda$. Maka dapat dinyatakan

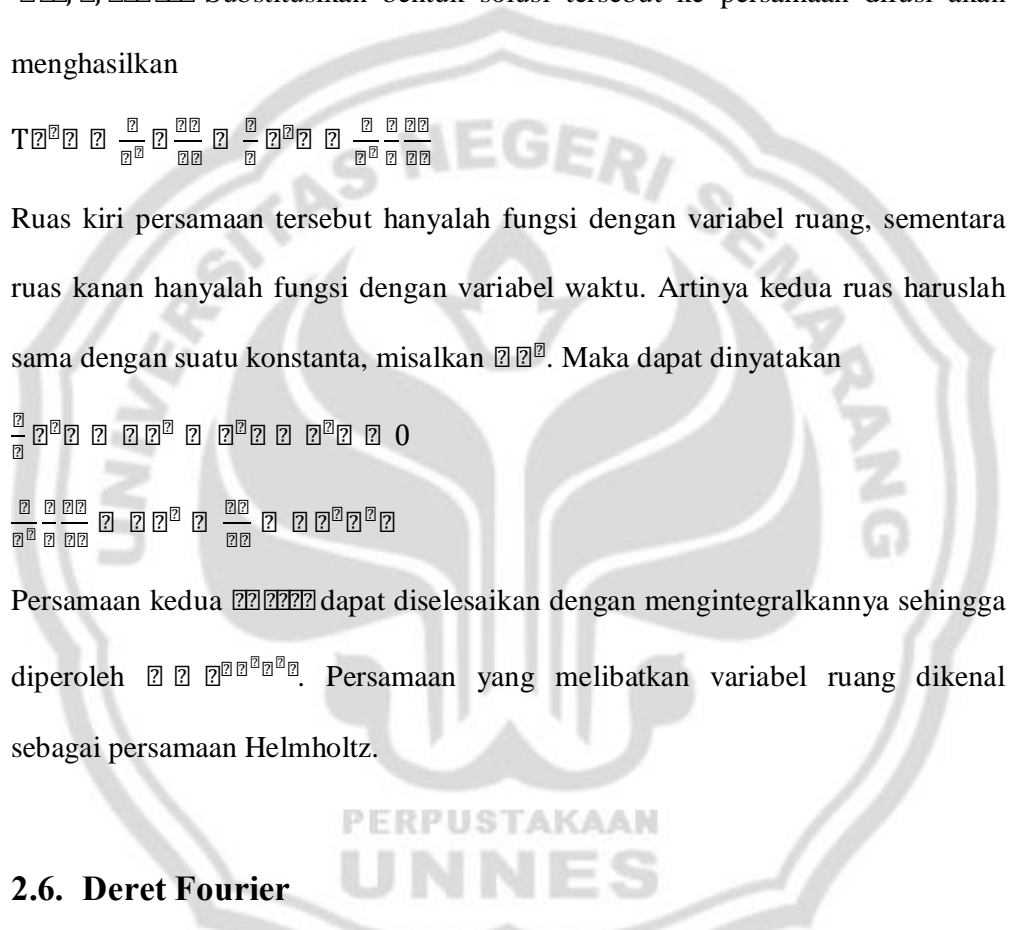
$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\lambda$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\mu \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\nu \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\rho$$

Persamaan kedua $\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\mu$ dapat diselesaikan dengan mengintegalkannya sehingga diperoleh $X(x) = A \cos(\sqrt{\mu}x) + B \sin(\sqrt{\mu}x)$. Persamaan yang melibatkan variabel ruang dikenal sebagai persamaan Helmholtz.

2.6. Deret Fourier

Deret ini pertama sekali ditemukan oleh seorang ilmuwan Perancis Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Deret yang selanjutnya dikenal sebagai Deret Fourier ini merupakan deret dalam bentuk sinusoidal (sinus dan cosinus) yang digunakan untuk merepresentasikan fungsi-fungsi periodik secara umum. Selain itu, deret ini sering dijadikan sebagai alat bantu dalam menyelesaikan



persamaan diferensial, baik persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial. Teori dasar dari deret Fourier cukup rumit. Meskipun demikian, aplikasinya sangat sederhana. Deret Fourier ini lebih umum dibandingkan dengan deret Taylor. Hal ini disebabkan karena dalam banyak permasalahan praktis yang terkait dengan fungsi periodik tak kontinu dapat diselesaikan dengan menggunakan deret ini dan tidak ditemukan pada Deret Taylor.

Teorema Fourier:

Suatu fungsi periodik terhadap waktu, $f(t)$ dengan perioda dasar T , dapat dinyatakan sebagai jumlahan tak hingga dari gelombang-gelombang sinusoidal.

Fungsi periodik: $f(t)$

dapat dinyatakan dalam bentuk Deret Fourier sebagai berikut:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T}]$$

Dimana a_n dan b_n koefisien fourier

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt, n = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \left(\frac{\pi}{2^n} \right), n = 1, 2, \dots$$

2.7. Maple

Maple merupakan salah satu perangkat lunak yang dikembangkan oleh Waterloo. Inc. Kanada untuk keperluan *Computer Algebraic System(CAS)*. Maple juga sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial dan aplikasinya, karena maple mempunyai kemampuan menyederhanakan persamaan diferensial sehingga solusi ó solusi persamaan diferensial dapat dipahami dengan baik.

Keunggulan dari maple sebagai aplikasi persamaan diferensial adalah kemampuan melakukan animasi grafik dari suatu fenomena gerakan yang dimodelkan ke dalam persamaan diferensial yang mempunyai nilai awal.

Menu ó menu yang terdapat di dalam tampilan maple terdiri atas File, Edit, View, Insert, Format, Spreadsheet, Option, Window dan help yang merupakan menu standar untuk aplikasi pada sistem windows. Bahasa yang digunakan maple adalah bahasa aplikasi sebab pernyataan yang merupakan masukan (*input*) pada maple merupakan deklarasi pada bahasa program dan perintah (*comand*) yang sering digunakan pada bahasa aplikasi.

(Kartono, 2001)

2.8. Masalah Syarat Batas

Persamaan Diferensial Parsial dapat diselesaikan secara analitik dan numerik. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan Persamaan diferensial parsial secara analitik adalah pemisahan variable (*separation variables*) Metode ini merupakan metode yang efektif dan sering dipakai dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Proses penyelesaian dengan metode ini sebagai berikut.

Andaikan solusi dari suatu persamaan diferensial parsial adalah fungsi dua peubah $z = z(x, y)$ yang merupakan kombinasi linear tak terbatas dari komponen fungsi sederhana $z = z(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x, y)$ yang memenuhi persamaan diferensial parsial dan kondisi ó kondisi yang diberikan. Untuk mendefinisikan komponen solusi $z = z(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x, y)$ diasumsikan bahwa $z = z(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x, y)$ dapat dipisahkan menjadi dua fungsi $z = z(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x, y)$ dan $z = z(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x, y)$ sehingga $z = z(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x, y)$ $z = z(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x, y)$ $z = z(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x, y)$ pada persamaan diferensial parsial dan dengan menggunakan kondisi ó kondisi yang diberikan maka akan diperoleh dua persamaan diferensial biasa yaitu $z = z(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x, y)$ dan $z = z(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x, y)$ Metode ini mereduksi masalah penyelesaian persamaan diferensial parsial menjadi masalah penyelesaian persamaan diferensial biasa dan dengan kondisi ó kondisi yang diberikan, diperoleh penyelesaian $z = z(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x, y)$ dan $z = z(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x, y)$

Pada masalah fisis, kondisi batas dan kondisi awal diperlukan untuk mendapatkan solusi khusus dari persamaan diferensial. Kondisi ó kondisi tersebut dibangun dari keadaan fisis yang dimodelkan.

2.8.1. Kondisi Batas

2.8.1.1. Dirichlet

Kondisi dirichlet merupakan kondisi yang diberikan untuk peubah bebas pada tapal batas ∂V . Kondisi ini berupa nilai yang ditentukan untuk peubah bebas pada tapal batas ∂V . Nilai peubah tak bebas pada peubah bebas ini $\psi|_{\partial V}$ yaitu ψ_1, ψ_2 dan ψ_3, ψ_4 diberikan.

2.8.1.2. Neumann

Kondisi neumann merupakan kondisi yang diberikan untuk turunan tingkat pertama dari peubah bebas pada tapal batas ∂V . Kondisi ini berupa nilai yang diberikan untuk turunan pertama dari peubah bebas pada tapal batas ∂V . Nilai turunan pertama pada peubah bebas ini $\frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\partial V}$ yaitu $\frac{\partial \psi_1}{\partial n}, \frac{\partial \psi_2}{\partial n}$ dan $\frac{\partial \psi_3}{\partial n}, \frac{\partial \psi_4}{\partial n}$ diberikan.

2.8.1.3. Kondisi Awal

Jika waktu t adalah salah satu peubah bebas, maka kondisi awal merupakan nilai yang ditentukan bagi peubah tak bebas ψ dan turunan $\dot{\psi}$ turunannya pada saat t_0 . Dengan kata lain, kondisi awal adalah kondisi pada saat t_0 .

2.9. Keadaan Setimbang (*Steady State*) dan Keadaan Tak Setimbang (*Unsteady State*) Termodinamika

Dalam termodinamika, suatu system termodinamik disebut berada dalam keadaan setimbang (*steady state*) jika system tersebut berada dalam keadaan setimbang mekanis, setimbang termal, dan setimbang secara kimia. Dalam

kesetimbangan termodinamik, tidak ada kecenderungan untuk terjadi perubahan keadaan, baik untuk system maupun lingkungan.

Kesetimbangan mekanis terjadi apabila tidak ada gaya yang tak berimbang di dalam sistem, dan antar sistem dan lingkungannya. Kesetimbangan termal terjadi jika semua bagian sistem bertemperatur sama dan sistem mempunyai suhu sama dengan lingkungannya.

Kesetimbangan kimia terjadi apabila suatu sistem tidak mengalami perubahan spontan dalam struktur internalnya, seperti reaksi kimia. Sistem dalam kesetimbangan kimia tidak mengalami perpindahan materi dari satu bagian system ke bagian system lainnya, seperti difusi.

Apabila ketiga syarat kesetimbangan tersebut tidak dipenuhi, maka system termodinamik berada dalam keadaan tak setimbang (*unsteady state*).

(Zemansky and Dittman: 1986)

BAB III

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi beberapa tahap sebagai berikut;

3.1. Menentukan Masalah

Pada tahap awal, penulis membaca dan menelaah beberapa sumber pustaka. Dari kajian tersebut, penulis menemukan permasalahan umum yaitu metode perturbasi pada osilator tak linear. Permasalahan ini masih terlalu luas, sehingga diperlukan rumusan permasalahan yang lebih spesifik.

3.2. Merumuskan Masalah

Tahap ini dimaksudkan untuk merumuskan permasalahan dengan jelas sehingga mempermudah pembahasan selanjutnya permasalahan yang dibahas adalah:

- 1) bagaimana memodelkan permasalahan waktu yang dibutuhkan untuk mengeringkan padi sampai kadar air dalam padi berkurang secara maksimal,
- 2) bagaimana menemukan solusi model permasalahan waktu yang dibutuhkan untuk mengeringkan padi sampai kadar air dalam padi berkurang secara maksimal jika mesin dalam keadaan mantap (suhu konstan) dan transien (suhu berubah - ubah),

- 3) bagaimana simulasi pemodelan persamaan kalor pada mesin pengering padi dengan menggunakan program Maple pada keadaan mantap (suhu konstan) dan transien (suhu berubah - ubah).

3.3. Studi Pustaka

Studi pustaka adalah menelaah sumber pustaka yang relevan digunakan untuk mengumpulkan informasi yang diperlukan dalam penelitian. Studi pustaka diambil dengan mengumpulkan sumber pustaka yang dapat berupa buku, teks, makalah dsb. Setelah sumber pustaka terkumpul dilanjutkan dengan penelaahan dari sumber pustaka tersebut. Pada akhirnya sumber pustaka ini dijadikan landasan untuk menganalisis permasalahan.

3.4. Analisis Pemecahan Masalah

Langkah-langkah yang dilakukan dalam menganalisis data sebagai berikut :

3.4.1. Pemodelan

- 1) Mengidentifikasi semua besaran yang terlibat,
- 2) Penegasan lambang pada semua lambang yang terlibat,
- 3) Menentukan satuan besaran yang terlibat,
- 4) Membedakan antara besaran yang merupakan konstanta maupun variabel,
- 5) Menentukan hukum yang mengendalikan,
- 6) Memanfaatkan asumsi ó asumsi dan teori yang ada untuk mendapatkan persamaan,

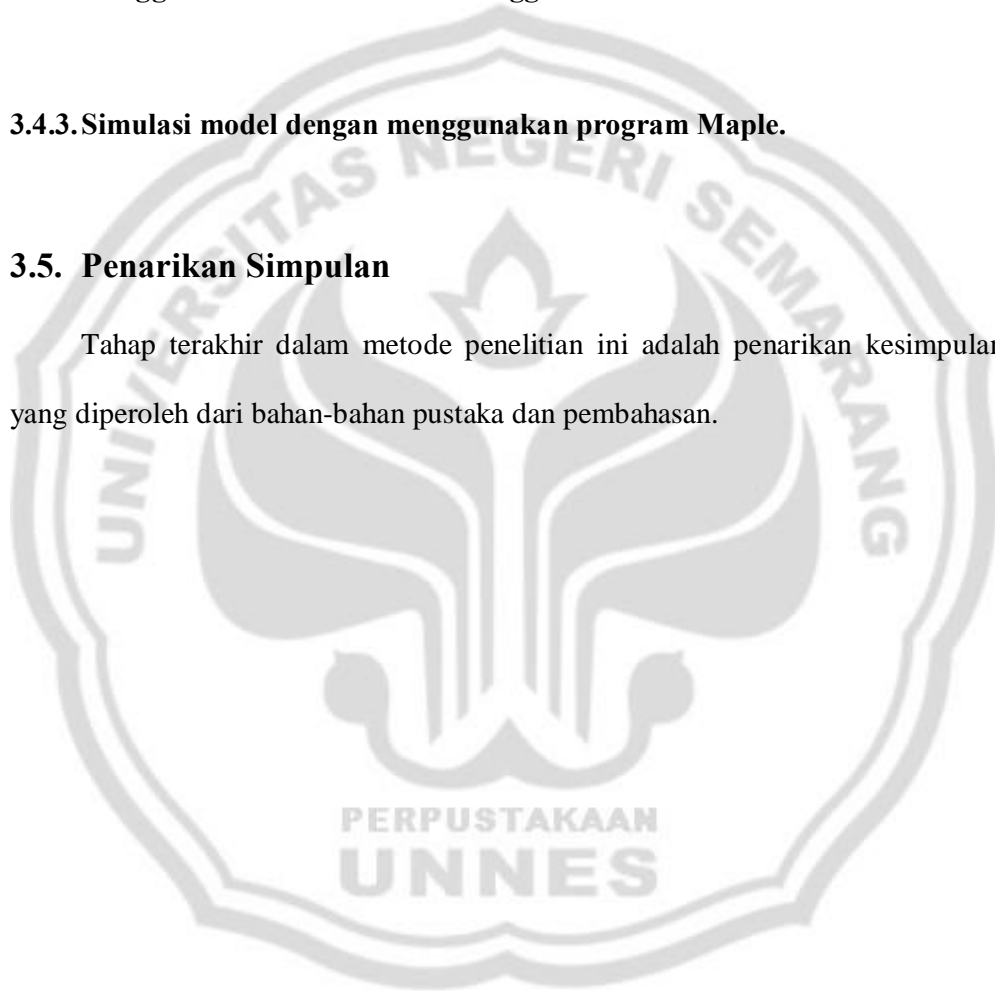
7) Menentukan hubungan konstanta dan variabel sehingga dapat disusun menjadi model matematika.

3.4.2. Menyelesaikan persamaan yang telah dimodelkan dengan menggunakan deret fourier sehingga ditemukan suatu solusi.

3.4.3. Simulasi model dengan menggunakan program Maple.

3.5. Penarikan Simpulan

Tahap terakhir dalam metode penelitian ini adalah penarikan kesimpulan yang diperoleh dari bahan-bahan pustaka dan pembahasan.



BAB IV

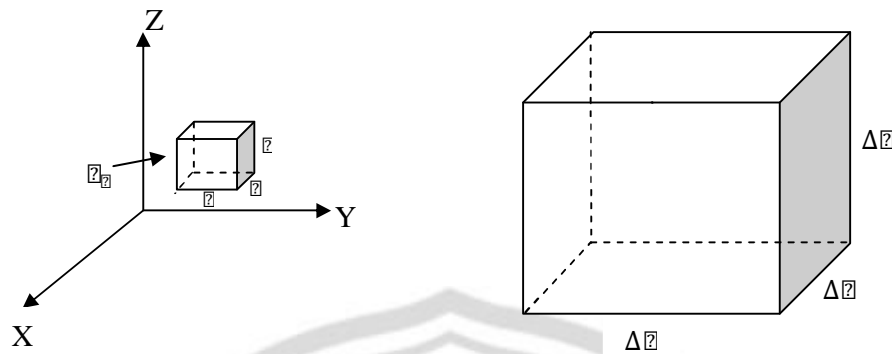
HASIL DAN PEMBAHASAN

Konsep perpindahan kalor pada sistem pengeringan padi dilakukan pada pipa sebagai ruang pengering. Fenomena semacam ini dapat dimodelkan sebuah persamaan kalor pada sebuah pipa. Persamaan kalor pada pipa akan lebih tepat apabila menggunakan koordinat tabung (*cylindrical coordinates*), karena pipa berbentuk tabung.

Tujuan dari pemodelan ini adalah untuk membangun model yang menggambarkan distribusi kalor pada sebuah pipa sebagai fungsi waktu t dan posisi r, θ, z .

4.1. Pemodelan Persamaan Kalor

Persamaan kalor pada sebuah pipa menggunakan koordinat tabung karena pipa berbentuk tabung (*cylindrical coordinates*), sehingga pemodelan dibentuk ke dalam persamaan kalor yang menggunakan koordinat katesius x, y, z yang kemudian diubah kedalam koordinat tabung r, θ, z . Pemodelan perpindahan kalor pada benda berdimensi tiga harus diperhatikan kalor yang dihantarkan ke dalam dan keluar benda dalam ketiga arah koordinat. Perhatikan balok pada gambar 4.1. berikut,



Gambar 4.1. Penampang balok tiga dimensi

Balok berukuran $\Delta x \Delta y \Delta z$

Menurut hukum konservasi energi bahwa tingkat perubahan sejumlah kalor dalam badan harus sama dengan tingkat kalor yang mengalir keluar.

Laju aliran kalor konduksi masuk = Perubahan energi dalam + Laju aliran kalor konduksi keluar

Jelas bahwa volume balok : $\Delta x \Delta y \Delta z$.

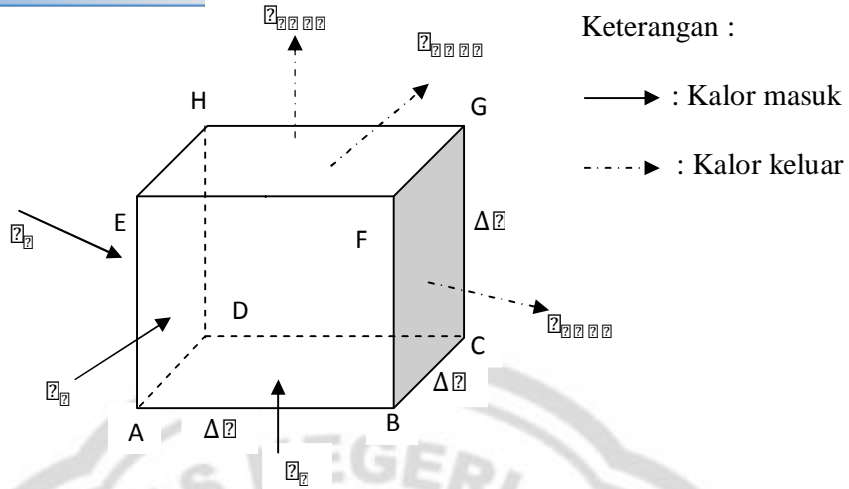
Berdasarkan hukum fisika, hubungan antara massa jenis, massa dan volume adalah sebagai berikut (perhatikan gambar 4.2):

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Sehingga,

$$m = \rho V$$

$$m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$$



Gambar 4.2. Aliran konduksi kalor pada balok tiga dimensi

Pandang ΔT sebagai fungsi yang memuat variable x, y, z pada koordinat kartesius, sehingga untuk memodelkan perpindahan kalor pada mesin pengering padi diperlukan langkah ó langkah sebagai berikut:

Menentukan jumlah kalor persatuan luas persatuan waktu yang masuk kedalam maupun keluar elemen balok adalah sebagai berikut :

1) Dihitung pada posisi x

Kalor masuk melalui bidang ADHE

Jelas laju aliran kalor : $\frac{dQ}{dt} = k \frac{\Delta T}{\Delta x} A$

Luas bidang ADHE : $A = \Delta y \Delta z$

Sehingga jumlah kalor yang masuk melalui bidang ADHE

$$\frac{dQ}{dt} = k \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta y \Delta z$$

$$Q = k \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t$$

$$q_{\text{BCGF}} = k \frac{\Delta T}{\Delta z} \dots\dots\dots(1)$$

Diperoleh jumlah kalor yang keluar melalui bidang BCGF

$$q_{\text{BCGF}} = k \frac{\Delta T}{\Delta z} \Delta y \Delta z$$

Jelas $q_{\text{BCGF}} = k \frac{\Delta T}{\Delta z} \Delta A$

Sehingga

$$q_{\text{BCGF}} = k \frac{\Delta T}{\Delta z} \Delta A \dots\dots\dots(2)$$

2) Dihitung dari posisi x

Kalor masuk melalui bidang ABFE

Jelas laju aliran kalor : $q_{\text{ABFE}} = k \frac{\Delta T}{\Delta z} \Delta A$

Luas bidang ABFE : $\Delta A = \Delta z \Delta x$

Sehingga jumlah kalor yang masuk melalui bidang ABFE

$$q_{\text{ABFE}} = k \frac{\Delta T}{\Delta z} \Delta z \Delta x$$

$$q_{\text{ABFE}} = k \frac{\Delta T}{\Delta z} \Delta A$$

$$q_{\text{ABFE}} = k \frac{\Delta T}{\Delta z} \Delta A \dots\dots\dots(3)$$

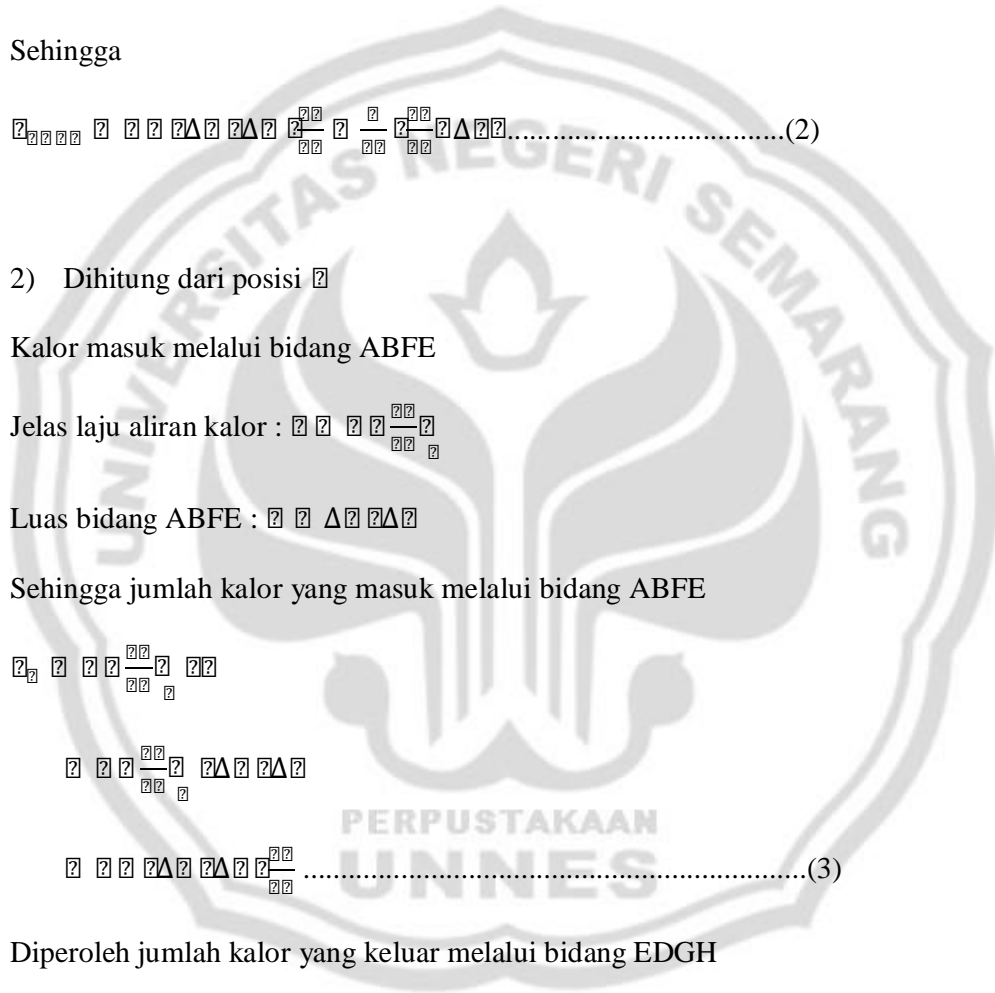
Diperoleh jumlah kalor yang keluar melalui bidang EDGH

$$q_{\text{EDGH}} = k \frac{\Delta T}{\Delta z} \Delta A$$

Sehingga

$$q_{\text{EDGH}} = k \frac{\Delta T}{\Delta z} \Delta A \dots\dots\dots(4)$$

3) Dihitung dari posisi z



Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

Kalor masuk melalui bidang ABCD

$$\text{Jelas laju aliran kalor : } \xi = k \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\text{Luas bidang ABCD : } A = \Delta x \Delta y$$

Sehingga jumlah kalor yang masuk melalui bidang ABCD

$$q_{in} = \int k \frac{\partial T}{\partial x} A$$

$$= \int k \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

$$= k \Delta x \Delta y \frac{\partial T}{\partial x} \dots \dots \dots (5)$$

Diperoleh jumlah kalor yang keluar melalui bidang EDGH

$$q_{out} = \int k \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

Sehingga

$$q_{out} = k \Delta x \Delta y \frac{\partial T}{\partial x} \dots \dots \dots (6)$$

Jumlah total kalor dalam elemen balok pada waktu t adalah

$$Q = \int \rho c \Delta T \Delta x \Delta y \Delta z$$

Sehingga perubahan kalor pada elemen balok adalah

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (7)$$

Dari persamaan (1) sampai (7) diperoleh

$$\rho c \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta x \Delta y \frac{\partial T}{\partial x} - k \Delta x \Delta y \frac{\partial T}{\partial x}$$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\Delta y}{2} \right) + \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\Delta z}{2} \right) \\ & \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Delta z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ & \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\Delta y}{2} \right) + \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\Delta z}{2} \right) \\ & \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Delta z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ & \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\Delta y}{2} \right) + \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\Delta z}{2} \right) \\ & \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Delta z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Kedua ruas dibagi dengan $\Delta x \Delta y \Delta z$, sehingga diperoleh

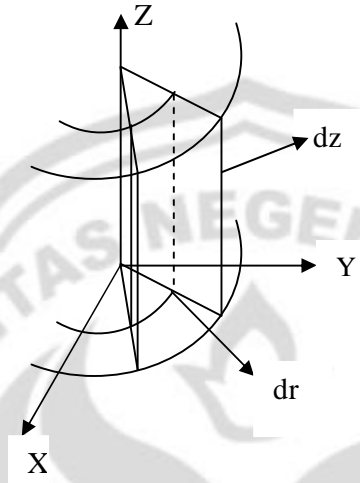
$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \\ & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Dari uraian di atas, diperoleh model matematika persamaan kalor pada koordinat kartesius sebagai berikut :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dots \dots \dots (8)$$

Di mana $\frac{\partial u}{\partial x}$ yaitu difusivitas termal (*thermal divisivity*).

Persamaan kalor (8) akan diubah ke dalam koorsinat tabung karena wadah pada mesin pengering padi berbentuk tabung, sehingga persamaan kalor yang menggunakan koordinat di atas dapat diubah ke dalam koordinat tabung dimana



Gambar 4.3. Analisis konduksi kalor tiga dimensi dalam koordinat tabung

Jelas bahwa $\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial T}{\partial r} \cos \theta$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial r} \sin \theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z}$$

dimana $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r} \cos \theta$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial r} \sin \theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z}$$

dengan aturan rantai diperoleh

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial \theta} \sin \theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial T}{\partial \theta} \cos \theta$$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

sehingga

$$\frac{2^2 2}{2^2 2} \cdot \frac{2}{2^2} \frac{2^2}{2^2}$$

$$2 \frac{2}{2^2} \frac{2^2 2^2}{2^2 2^2} \cdot \frac{2^2 2^2}{2^2 2^2}$$

$$2 \frac{2}{2^2} \frac{2^2 2}{2^2 2} \cdot \frac{2^2 2}{2^2 2^2}$$

$$2 \frac{2}{2^2 2} \frac{2^2}{2^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{2^2}{2^2} \cdot \frac{2}{2^2} \frac{2^2}{2^2} \cdot \frac{2^2 2^2}{2^2 2^2}$$

$$2 \frac{2 \cos 2}{2} \frac{2}{2^2} \frac{2^2}{2^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{2^2}{2^2} \cdot \frac{2 \sin 2}{2^2} \frac{2}{2^2} \frac{2^2}{2^2} \cdot \frac{2^2 \cos 2}{2^2} \frac{2^2 \sin 2}{2^2}$$

$$2 \cos 2 \frac{2}{2^2} \frac{2^2}{2^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{2^2}{2^2} \cdot \frac{\sin 2}{2} \frac{2}{2^2} \frac{2^2}{2^2} \cdot \frac{2 \sin 2 \cos 2}{2^2} \frac{2^2}{2^2}$$

dengan,

$$\frac{2}{2^2} \frac{2^2}{2^2} \frac{2}{2^2} \frac{2^2}{2^2}$$

$$2 \frac{2}{2^2} \frac{2^2 2^2}{2^2 2^2} \cdot \frac{2^2 2^2}{2^2 2^2}$$

$$2 \frac{2}{2^2} \frac{2^2 2}{2^2 2} \cdot \frac{2^2 2^2}{2^2 2^2}$$

$$2 \frac{2^2 2^2}{2^2 2^2} \cdot \frac{2}{2^2} \frac{2^2}{2^2} \cdot \frac{2}{2^2} \frac{2^2}{2^2} \cdot \frac{2^2 2^2}{2^2 2^2} \cdot \frac{2^2 2^2}{2^2 2^2}$$

$$2 \cos 2 \frac{2^2}{2^2 2^2} \cdot \frac{\cos 2}{2} \frac{2^2}{2^2} \cdot \frac{\sin 2}{2} \frac{2}{2^2} \frac{2^2}{2^2} \cdot \frac{2 \sin 2}{2^2} \frac{2^2}{2^2}$$

$$\frac{2}{2^2} \frac{2^2}{2^2} \frac{2}{2^2} \frac{2^2}{2^2}$$

$$2 \frac{2}{2^2} \frac{2^2 2^2}{2^2 2^2} \cdot \frac{2^2 2^2}{2^2 2^2}$$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

Jadi,

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} \dots \dots \dots (9)$$

dan

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$\frac{1}{2} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{4 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{2} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{4 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{2} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta} = \frac{1}{2} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{4 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{2 \sin^2 \theta}{2} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta} = \frac{1}{2} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{2 \sin^2 \theta}{2} = \frac{1}{2} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta - \frac{1}{2}}{\cos^2 \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{2 \cos^2 \theta}$$

dengan,

$$\frac{1}{2} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{4 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{2} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{4 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{2} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{4 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{2} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{4 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{2 \sin^2 \theta}{2} = \frac{2 \sin^2 \theta}{2} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{2 \sin^2 \theta}{2} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta - \frac{1}{2}}{\cos^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{2} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{4 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{2} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{4 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{2} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{4 \cos^2 \theta}$$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \sin^2 \theta - 1}{2 \sin^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

Jadi,

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{1 - 2 \sin^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} \dots \dots \dots (10)$$

4.2. Solusi Persamaan Kalor

Berdasarkan penurunan model pada pembahasan sebelumnya, diperoleh model matematika untuk persamaan kalor pada mesin pengering padi

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x}$$

dengan batas ó batas sebagai berikut

1. $T(0, t) = T_0$; $T(L, t) = T_0$; $T(x, 0) = T_0$,
2. $T(0, t) = T_0$; $T(L, t) = T_0$; $T(x, 0) = T_0$,
3. $T(0, t) = T_0$; $T(L, t) = T_0$; $T(x, 0) = T_0$,
4. $T(0, t) = T_0$; $T(L, t) = T_0$; $T(x, 0) = T_0$.

Permasalahan:

Mesin pengering padi dengan jari ó jari = 50 cm, panjang pipa = 200 cm, suhu awal pemanasan = 90° dan suhu akhir pemanasan = 75°.

Solusi:

Didefinisikan solusi pemodelan adalah sebagai berikut:

Solusi: $T(x, t)$, $T(x, t)$, $T(x, t)$, $T(x, t)$

dengan,

$T(x, t)$, $T(x, t)$: solusi keadaan mantap / suhu konstan terhadap waktu (*steady state*),

$T(x, t)$, $T(x, t)$ solusi keadaan transien / suhu berubah-ubah terhadap waktu (*unsteady state*)

sehingga diperoleh persamaan:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x}$$

dengan

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

1. $x(0) = 50, x(1) = 250, x(2) = 250, x(3) = 0,$
2. $x(2) = 0, x(3) = 250, x(4) = 0, x(5) = 250, x(6) = 0, x(7) = 90,$
3. $x(2) = 200, x(3) = 250, x(4) = 200, x(5) = 250, x(6) = 200, x(7) = 75,$
4. $x(2) = 2, x(3) = 0, x(4) = 2, x(5) = 2, x(6) = 0, x(7) = 2, x(8) = 2,$

4.2.1. Solusi Keadaan Steady

Persamaan: $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{250} = 0$ (1.1)

dengan batas: $x(0) = 50$ (2.1)

$x(2) = 0, x(3) = 90$; $x(4) = 200, x(5) = 75$ (3.1)

$x(2) = 2, x(3) = 2, x(4) = 2, x(5) = 2, x(6) = 0, x(7) = 2, x(8) = 2$ (4.1)

dengan permisahan variabel (*separation variables*), diasumsikan solusinya berbentuk:

solusi: $x(t) = \frac{250}{1 + Ce^{-t/2}}$

kemudian disubstitusikan ke persamaan (1.1), diperoleh:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{250} = 0$$

$$\frac{2}{x} = \frac{2}{250} + \frac{2}{x^2} \int \frac{1}{x} dx = \frac{2}{250} + \frac{2}{x} \dots$$
 (5.1)

Masing ó masing ruas pada persamaan (5.1) disamakan dengan $\frac{2}{250}$ (konstanta pemisah), sehingga diperoleh:

$$\frac{2}{x} = \frac{2}{250} \int \frac{1}{x} dx = \frac{2}{250} \ln|x| + C$$
 (6.1)

$$\frac{2}{x} = \frac{2}{250} \ln|x| + C$$
 (7.1)

sehingga persamaan (7.1) dapat ditulis

$$\frac{2}{x} = \frac{2}{250} \ln|x| + C$$
 (8.1)

[Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features](#)

Solusi: $Z'''' - B_1 e^{200z} - B_2 e^{-200z}$

Dengan batas: $Z(0) = B_1 + B_2 = 90$

$$Z'(0) = 200B_1 - 200B_2 = 75$$

Z'''' tidak mempunyai solusi.

c. Kasus 2: $\lambda = 0$

Persamaan: $Z'' + \lambda^2 Z = 0$

Solusi: $Z'' + \lambda^2 Z = B_1 \sin \lambda z + B_2 \cos \lambda z$

Dengan batas: $Z(0) = B_1 + B_2 = 90$

$$Z'(0) = 200B_1 - B_2 \sin 200\lambda = 90 \cos 200\lambda = 75$$

Z'' tidak mempunyai solusi.

Sehingga solusi untuk Z yaitu: $Z'' + \lambda^2 Z = \frac{75}{200} z + 90$.

2) Solusi untuk $z > 0$

a. Kasus 1: $\lambda = 0$

Persamaan: $z'''' = 0$

Solusi: $z'''' = B_1 z^3 + B_2 z^2 + B_3 z + B_4$

$$z'''' = B_1 z^3 + B_2 z^2 + B_3 z + B_4$$

Dengan batas: $z(0) = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 90$

$$z'(0) = 3B_1 + 2B_2 + B_3 = 75$$

$$z''(0) = 6B_1 + 2B_2 = 90$$

Jadi solusi $z'''' = 0$

b. Kasus 2: $\lambda = 0$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

Persamaan: $x^{2n} - 2x^n + 1 = 0$

Solusi: $x^n = \cos \theta + i \sin \theta$

$$x^n = \cos \theta + i \sin \theta$$

Dengan batas:

$$x^n = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$x^n = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$x^n = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$x^n = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$x^n = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$x^n = \cos \theta + i \sin \theta$$

Solusi: $x^n = \cos \theta + i \sin \theta$

Jadi solusi untuk x adalah: $x^n = \cos \theta + i \sin \theta$

3) Solusi untuk $x^{2n} - 2x^n + 1 = 0$

a. Kasus 1: $x^n = 1$

Persamaan: $x^{2n} - 2x^n + 1 = 0$

Solusi: $x^n = \cos \theta + i \sin \theta$

$$x^n = \cos \theta + i \sin \theta$$

Dengan batas: $R^n = 1, \theta = 0 \text{ dan } C_n = 1$

Solusi: $x^n = \cos \theta + i \sin \theta$

b. Kasus 2: $x^n = -1$

Persamaan: $x^{2n} - 2x^n + 1 = 0$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

Solusi: $\frac{1}{2} \sin^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2} \cos^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \cos^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2} \sin^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2}$$

Dengan batas:

$$\frac{1}{2} \cos^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2} \sin^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2} = 0$$

Tidak mempunyai solusi.

c. Kasus 3: $\theta = 0$

Persamaan: $\frac{1}{2} \cos^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2} \sin^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2} = 0$

Solusi: $\frac{1}{2} \cos^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2} \sin^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \cos^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2} \sin^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2}$$

Dengan batas: $R \frac{1}{2} C \frac{1}{2} 50 \frac{1}{2} \frac{1}{2} C \frac{1}{2} 50 \frac{1}{2} = 0$

$$\frac{1}{2} 50 \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2} = 0$$

Solusi: $R \frac{1}{2} C \frac{1}{2} r^2$

Jadi solusi: $R \frac{1}{2} C \frac{1}{2} r^2$

Jadi solusi untuk persamaan kalor pada keadaan mantap / suhu konstan terhadap waktu (*steady state*) adalah sebagai berikut:

$$\frac{1}{2} \cos^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2} \sin^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cos^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2} \sin^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cos^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2} \sin^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2}$$

Sehingga,

$$\frac{1}{2} \cos^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2} \sin^2 \theta \ln^2 \frac{1}{2}$$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

Untuk menyelesaikan solusi di atas diperlukan nilai awal,

misal $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = 0$ maka

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos \frac{2^n x}{2} \sin \frac{2^n x}{2}$$

dengan deret fourier diperoleh:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{2^n x}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos \frac{2^n x}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{2^n x}{2}$$

Sehingga solusinya adalah

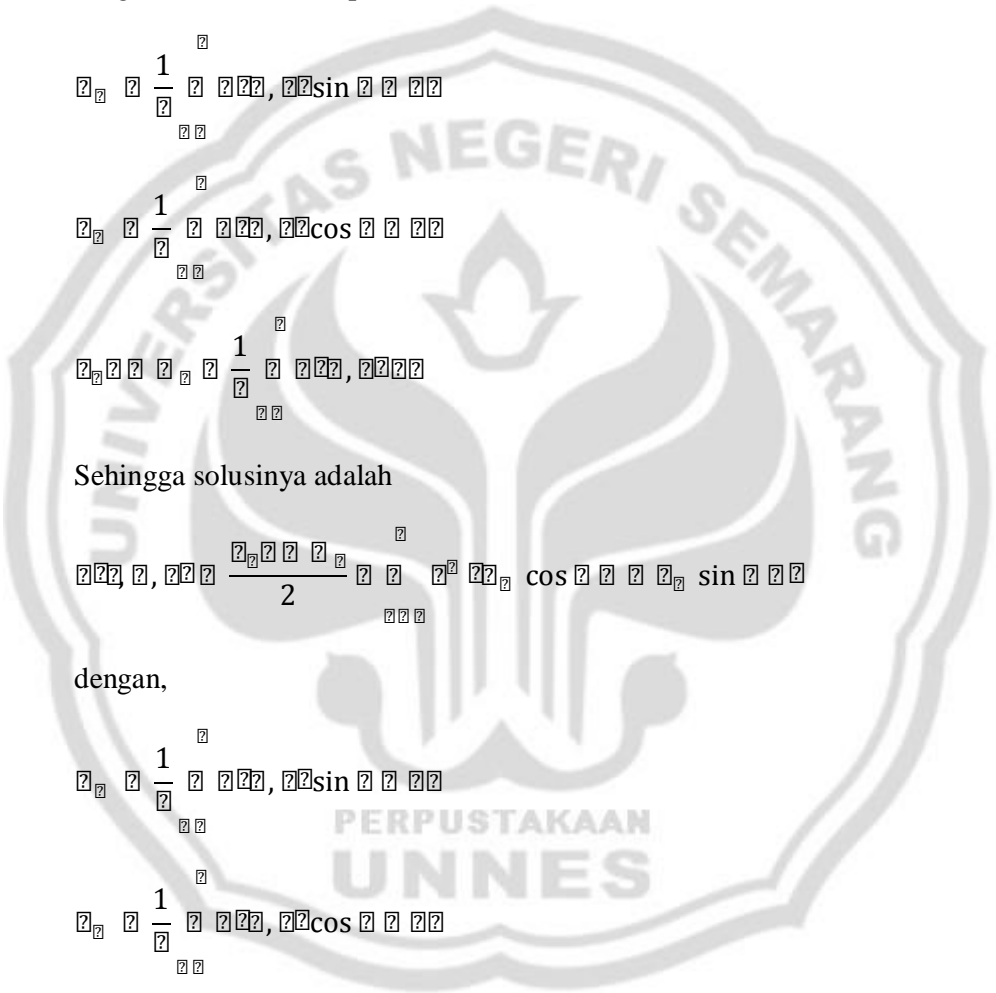
$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos \frac{2^n x}{2} \sin \frac{2^n x}{2}$$

dengan,

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{2^n x}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos \frac{2^n x}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{2^n x}{2}$$



4.2.2. Solusi Keadaan *Unsteady*

$$\text{Persamaan } \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1.2)$$

Dengan batas:

$$\theta(0, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$\theta(L, t) = 0; \quad \theta(x, 0) = 0 \quad (3.2)$$

$$\theta(x, 0) = 0; \quad \theta(x, t) = 0 \quad (4.2)$$

$$\theta(x, 0) = 0; \quad \theta(x, t) = 0 \quad (5.2)$$

Didefinisikan bahwa solusi pada keadaan *unsteady* adalah

$$\text{Solusi: } \theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (6.2)$$

Substitusikan persamaan (6.2) ke persamaan (1.2), diperoleh:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (7.2)$$

Masing ó masing ruas pada persamaan (7.2) disamakan dengan $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ (konstanta pemisah), sehingga diperoleh:

$$\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right) A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = \left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right) A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (8.2)$$

$$\frac{n^2 \pi^2}{L^2} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (9.2)$$

sehingga persamaan (8.2) dapat ditulis

$$\frac{n^2 \pi^2}{L^2} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (10.2)$$

masing ó masing ruas pada persamaan (10.2) disamakan dengan $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, diperoleh:

$$\frac{n^2 \pi^2}{L^2} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (11.2)$$

$$\frac{n^2 \pi^2}{L^2} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (12.2)$$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

Persamaan (11.2) dapat ditulis

$$\frac{y^{(n)} - \sum_{i=1}^n p_i y^{(i-1)}}{y} = \sum_{i=1}^n p_i y^{(i-1)}, \text{ dengan } y^{(0)} = y, y^{(1)} = y', \dots, y^{(n)} = y^{(n)} \quad (13.2)$$

Masing ó masing ruas pada persamaan (13.2) disamakan dengan $y^{(i)}$, diperoleh:

$$y^{(i)} - \sum_{i=1}^n p_i y^{(i-1)} = \sum_{i=1}^n p_i y^{(i-1)}, \quad (14.2)$$

$$\frac{y^{(i)} - \sum_{i=1}^n p_i y^{(i-1)}}{y} = \sum_{i=1}^n p_i y^{(i-1)} \dots \quad (15.2)$$

Dari pemisahan variable di atas, diperoleh persamaan (9.2), (12.2), (14.2), (15.2), yaitu:

- $y^{(i)} - \sum_{i=1}^n p_i y^{(i-1)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \dots \quad (16.2)$

- $y^{(i)} - \sum_{i=1}^n p_i y^{(i-1)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \dots \quad (17.2)$

- $y^{(i)} - \sum_{i=1}^n p_i y^{(i-1)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \dots \quad (18.2)$

- $y^{(i)} - \sum_{i=1}^n p_i y^{(i-1)} = 0, \quad y^{(0)} = y, y^{(1)} = y', \dots, y^{(n)} = y^{(n)} \quad i = 1, 2, \dots, n \dots \quad (19.2)$

Solusi ó solusi particular:

1) Solusi untuk $y^{(i)} - \sum_{i=1}^n p_i y^{(i-1)}$

Persamaan: $y^{(i)} - \sum_{i=1}^n p_i y^{(i-1)} = 0$

a. Kasus 1: $y^{(i)} - \sum_{i=1}^n p_i y^{(i-1)} = 0$

Persamaan: $y^{(i)} - \sum_{i=1}^n p_i y^{(i-1)} = 0$

Solusi: $y^{(i)} - \sum_{i=1}^n p_i y^{(i-1)} = 0$

Dengan nilai batas: $y^{(0)} = y, y^{(1)} = y', \dots, y^{(n)} = y^{(n)}$

$$y^{(i)} - \sum_{i=1}^n p_i y^{(i-1)} = 0 \quad y^{(0)} = y, y^{(1)} = y', \dots, y^{(n)} = y^{(n)}$$

$$y^{(i)} - \sum_{i=1}^n p_i y^{(i-1)} = 0$$

$y^{(i)}$ mempunyai solusi trivial.

Click Here to upgrade to
Unlimited Pages and Expanded Features

b. Kasus 2: $z'' + b^2 z = 0$

Persamaan: $Z'' + b^2 Z = 0$

Solusi: $Z(z) = B_1 \sin bz + B_2 \cos bz$

Dengan nilai batas: $Z(0) = B_2 = 0$

$$z'' + 200^2 z = 0 \Rightarrow z'' + \sin 200z = 0$$

$$z'' + \sin 200z = 0, z_1 = 0$$

$$z'' + \frac{z^2}{200^2}, z'' = 1, 2, \dots$$

Solusi: $Z(z) = B_1 \sin \frac{z}{200}, z = 1, 2, \dots$

c. Kasus 2: $z'' + b^2 z = 0$

Persamaan: $Z'' + b^2 Z = 0$

Solusi: $Z(z) = B_1 e^{ibz} + B_2 e^{-ibz}$

Dengan nilai batas: $Z(0) = B_1 + B_2 = 0 \Rightarrow B_1 = -B_2$

$$z'' + 200^2 z = 0 \Rightarrow z'' + \frac{z^2}{200^2} = 0$$

$$z'' + \frac{z^2}{200^2} = 0$$

$$z'' = 0$$

Z mempunyai solusi trivial.

Jadi solusi untuk Z adalah $Z(z) = B_1 \sin \frac{z}{200}, n = 1, 2, \dots$

2) Solusi untuk $\theta'' + d^2 \theta = 0$

Persamaan: $\theta'' + d^2 \theta = 0$

a. Kasus 1: $\theta'' + d^2 \theta = 0$

Persamaan: $\theta'' + d^2 \theta = 0$

Solusi: $\theta(z) = D_1 \cos dz + D_2 \sin dz$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

Dengan nilai batas: $\theta = \pi$ $\theta = 2\pi$ $\pi D_1 = D_2 = \pi D_1 = D_2$

$$y(2\pi) = 0$$

$$y(\pi) = 0$$

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$$

Solusi: $\theta = \pi$ $D_1 = D_2$

b. Kasus 2: $y'' + y = 0$

Persamaan: $\theta'' + d^2\theta = 0$

Solusi: $\theta = D_1 e^{i\theta} + D_2 e^{-i\theta}$

$$y'' + y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$$

Dengan nilai batas:

$$y'' + y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$$

$$y(\pi) = 0$$

$$y'' + y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$$

$$y'' + y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$$

$$y'' + y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$$

y mempunyai solusi trivial.

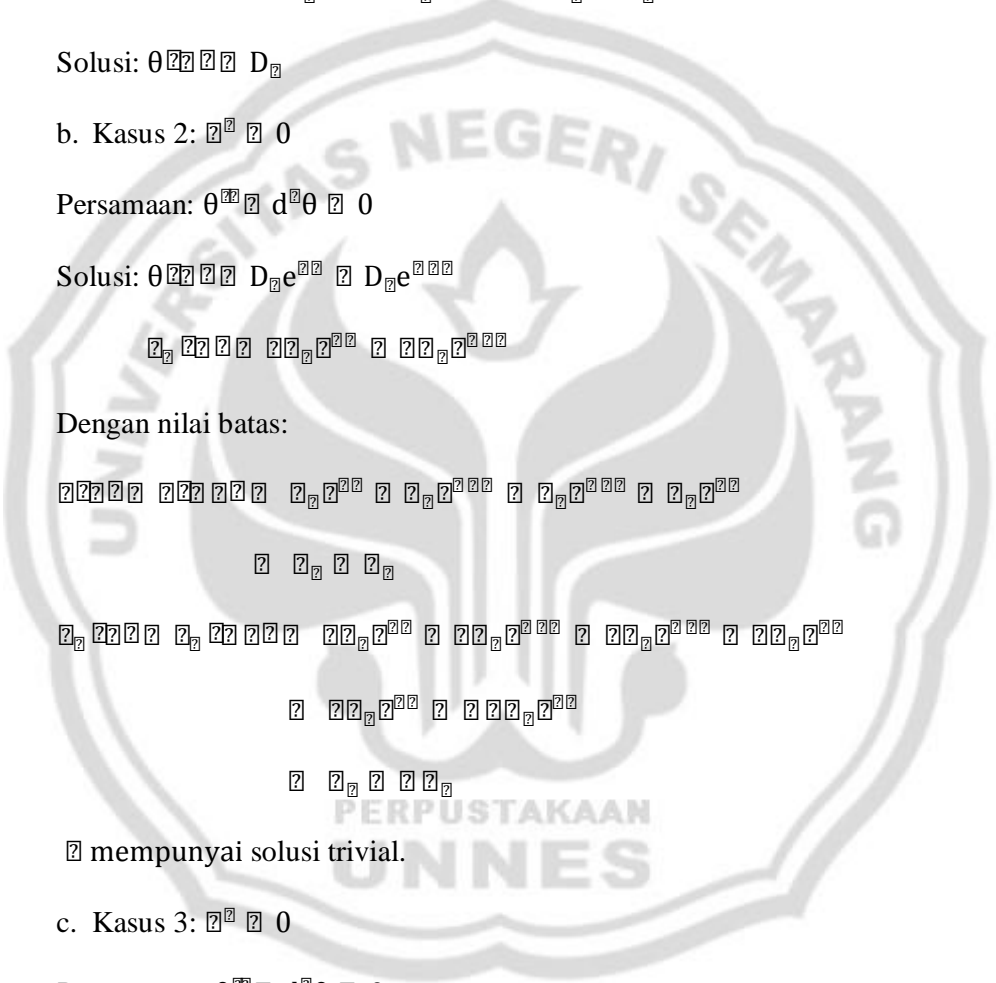
c. Kasus 3: $y'' + y = 0$

Persamaan: $\theta'' + d^2\theta = 0$

Solusi: $y = D_1 \sin \theta + D_2 \cos \theta$

$$y'' + y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$$

Dengan nilai batas:



Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$x^2 \sin x - x^2 \cos x = x^2 \sin x - x^2 \cos x$$

$$2x \sin x - x^2 \cos x = 0$$

$$x \sin x = x^2 \cos x$$

$$x = x^2 \cos x, x = 1, 2, \dots$$

$$x^2 \cos x - x^2 \sin x = x^2 \cos x - x^2 \sin x$$

$$2x \cos x - x^2 \sin x = 0$$

$$x \cos x = x^2 \sin x$$

$$x = x^2 \sin x, x = 1, 2, \dots$$

Solusi: $x^2 \sin x - x^2 \cos x, x = 1, 2, \dots$

Jadi solusi untuk x adalah

$$x^2 \sin x - x^2 \cos x, x = 1, 2, \dots$$

3) Solusi untuk $x^2 - 50x + 50 = 0$

$$\text{Persamaan: } x^2 - 50x + 50 = 0$$

a. Kasus 1: $x^2 = 0$

$$\text{Persamaan: } r^2 - 50r + 50 = 0$$

$$\text{Solusi: } R_1 = 25 + \sqrt{500}, C_1 = C_2 \ln |r - 25 + \sqrt{500}|$$

$$x^2 - 50x + 50 = \frac{50}{x}$$

$$\text{Dengan batas: } R_1 = 25 + \sqrt{500}, \frac{50}{x} = 0, C_1 = 0$$

$$\text{Solusi: } R_1 = 25 + \sqrt{500}, C_1$$

b. Kasus 2: $x^2 = 0$

$$\text{Persamaan: } r^2 - 50r + 50 = m^2 R = 0$$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

Solusi: $R \frac{1}{r^2} C_2 \sin^2 m \ln \frac{1}{r^2} C_2 \cos^2 m \ln \frac{1}{r^2}$

$$\frac{1}{r^2} C_2 \cos^2 m \ln \frac{1}{r^2} C_2 \sin^2 m \ln \frac{1}{r^2}$$

Dengan batas:

$$R \frac{1}{50} C_2 \cos^2 m \ln \frac{1}{50} C_2 \sin^2 m \ln \frac{1}{50} = 0$$

Tidak mempunyai solusi.

c. Kasus 3: $\frac{1}{r^2} = 0$

Persamaan: $r^2 R \frac{1}{r^2} r R \frac{1}{r^2} m^2 R \frac{1}{r^2} = 0$

Solusi: $R \frac{1}{r^2} C_2 r^2 C_2 r^2$

$$\frac{1}{r^2} C_2 r^2 C_2 r^2$$

Dengan batas: $\frac{1}{50} C_2 r^2 C_2 r^2 = 0$

$$\frac{1}{50} C_2 r^2 = 0$$

$$\frac{1}{50} C_2 = 0$$

Solusi: $R \frac{1}{r^2} C_2 r^2$

Jadi solusi: $R \frac{1}{r^2} C_2 r^2$

4) Solusi untuk $\frac{1}{r^2}$

Persamaan: $\frac{1}{r^2} \frac{1}{r^2} \frac{1}{r^2} = 0$

Solusi: $\frac{1}{r^2} \frac{1}{r^2} \frac{1}{r^2}$ dimana $\frac{1}{r^2} \frac{1}{r^2} \frac{1}{r^2}$

Jadi solusi untuk $\frac{1}{r^2}$ adalah

$$\frac{1}{r^2} \frac{1}{r^2} \frac{1}{r^2}$$

Jadi solusi untuk persamaan kalor pada keadaan transien / suhu berubah-ubah terhadap waktu (*unsteady state*) adalah sebagai berikut:

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$w(r, z, t) = \frac{A}{2} e^{-\alpha z} \left[P_m \cos m r + Q_m \sin m r \right] e^{i \omega t} \sin \frac{n \pi}{200} z$$

$$w(r, z, 0) = f(r, z) = v(r, z)$$

$$\frac{A}{2} e^{-\alpha z} \left[P_m \cos m r + Q_m \sin m r \right] \sin \frac{n \pi}{200} z$$

Sehingga,

$$w(r, z, t) = \frac{A}{2} e^{-\alpha z} \left[P_m \cos m r + Q_m \sin m r \right] e^{i \omega t} \sin \frac{n \pi}{200} z$$

Untuk menyelesaikan solusi di atas, diperlukan nilai awal misal:

$$w(r, z, 0) = f(r, z) = v(r, z)$$

Sehingga solusi

dengan,

$$\frac{1}{200} e^{-\alpha z} \left[P_m \cos m r + Q_m \sin m r \right] \sin \frac{n \pi}{200} z$$

$$\frac{1}{200} e^{-\alpha z} \left[P_m \cos m r + Q_m \sin m r \right] \cos \frac{n \pi}{200} z$$

$$\frac{1}{200} e^{-\alpha z} \left[P_m \cos m r + Q_m \sin m r \right] \sin \frac{n \pi}{200} z$$

Jadi solusi untuk persamaan kalor pada mesin pengering padi adalah

$$w(r, z, t) = \frac{A}{2} e^{-\alpha z} \left[P_m \cos m r + Q_m \sin m r \right] e^{i \omega t} \sin \frac{n \pi}{200} z$$

dengan

$$w(r, z, t) = \frac{A}{2} e^{-\alpha z} \left[P_m \cos m r + Q_m \sin m r \right] e^{i \omega t} \sin \frac{n \pi}{200} z$$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$u(t) = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{200\pi}{200} t \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\frac{200\pi}{200} t \right)$$

dimana,

$$u_1(t) = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{200\pi}{200} t \right)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{200\pi}{200} t \right)$$

$$u_3(t) = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{200\pi}{200} t \right)$$

$$u_4(t) = \frac{1}{200} \cos \left(\frac{200\pi}{200} t \right)$$

$$u_5(t) = \frac{1}{200} \sin \left(\frac{200\pi}{200} t \right)$$

$$u_6(t) = \frac{1}{200} \cos \left(\frac{200\pi}{200} t \right)$$

4.3. Variasi Nilai Awal

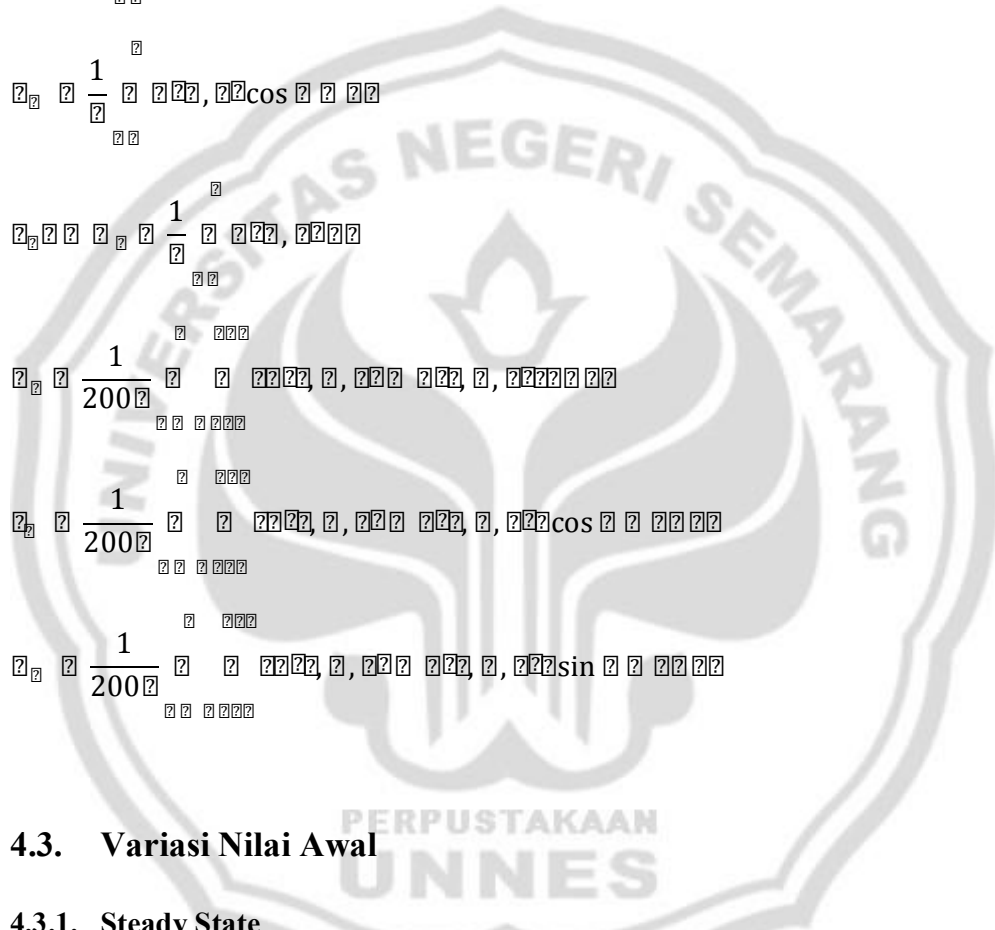
4.3.1. Steady State

4.3.1.1. Fungsi Trigonometri

$$u(t) = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{200\pi}{200} t \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\frac{200\pi}{200} t \right)$$

Untuk menyelesaikan solusi di atas diperlukan nilai awal,

misal $u(0) = 1$, $\dot{u}(0) = 0$ maka



$$f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x$$

Sehingga,

$$f(x) = \cos 2x + \sin 2x$$

dengan deret fourier diperoleh:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{16} \sin 4x$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 6x + \frac{1}{32} \sin 6x$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 6x + \frac{1}{32} \sin 6x + \frac{1}{64} \cos 8x + \frac{1}{128} \sin 8x$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 6x + \frac{1}{32} \sin 6x + \frac{1}{64} \cos 8x + \frac{1}{128} \sin 8x + \frac{1}{256} \cos 10x + \frac{1}{512} \sin 10x$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 6x + \frac{1}{32} \sin 6x + \frac{1}{64} \cos 8x + \frac{1}{128} \sin 8x + \frac{1}{256} \cos 10x + \frac{1}{512} \sin 10x + \frac{1}{1024} \cos 12x + \frac{1}{2048} \sin 12x$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 6x + \frac{1}{32} \sin 6x + \frac{1}{64} \cos 8x + \frac{1}{128} \sin 8x + \frac{1}{256} \cos 10x + \frac{1}{512} \sin 10x + \frac{1}{1024} \cos 12x + \frac{1}{2048} \sin 12x + \frac{1}{4096} \cos 14x + \frac{1}{8192} \sin 14x$$

$$f(x) = \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\cos 6x}{16} + \frac{\sin 6x}{32} + \frac{\cos 8x}{64} + \frac{\sin 8x}{128} + \frac{\cos 10x}{256} + \frac{\sin 10x}{512} + \frac{\cos 12x}{1024} + \frac{\sin 12x}{2048} + \frac{\cos 14x}{4096} + \frac{\sin 14x}{8192} + \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 6x + \frac{1}{32} \sin 6x + \frac{1}{64} \cos 8x + \frac{1}{128} \sin 8x + \frac{1}{256} \cos 10x + \frac{1}{512} \sin 10x + \frac{1}{1024} \cos 12x + \frac{1}{2048} \sin 12x + \frac{1}{4096} \cos 14x + \frac{1}{8192} \sin 14x + \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{\sin 2x}{4}$$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$\frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x) dx + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx$$

$$\frac{\pi}{4}$$

Sehingga solusinya adalah

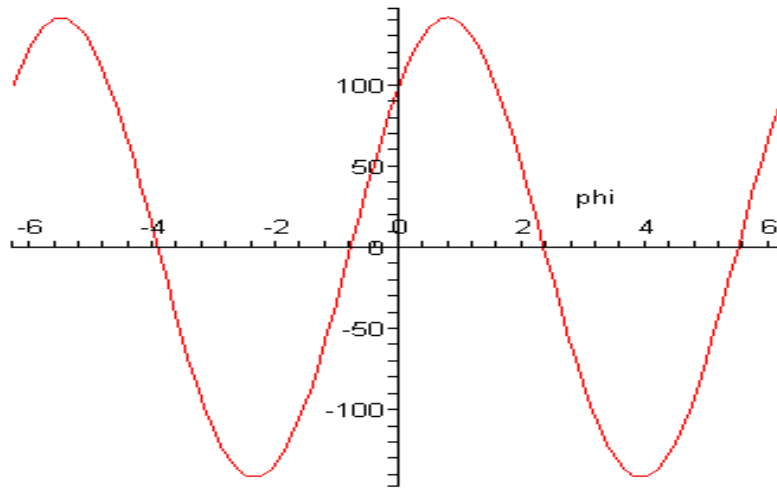
$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}$$

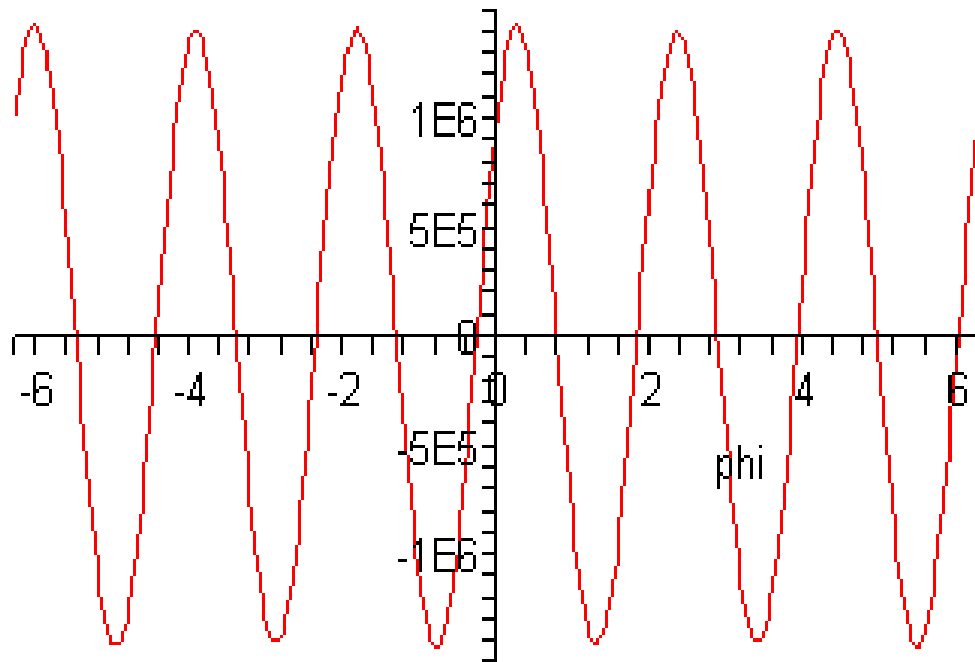
$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}$$

Berikut merupakan plot persamaan $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} (\cos^2 x + \sin^2 x)$ dengan variasi nilai x dan y 100:

PERPUSTAKAAN UNNES



Gambar 4.4. Plot Solusi Model Keadaan *Steady* dengan Variasi Nilai Awal Fungsi Trigonometri dan

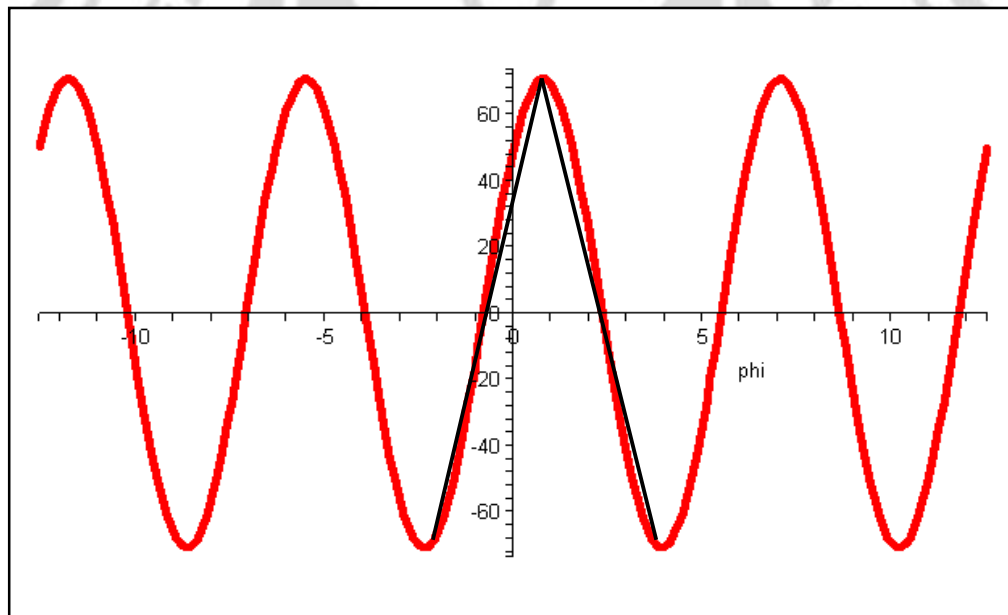


Gambar 4.5. Plot Solusi Model Keadaan *Steady* dengan Variasi Nilai Awal Fungsi Trigonometri dan

[Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features](#)

Berdasarkan Gambar 4.4 dan 4.5, terjadi perbedaan amplitudo yang sangat mencolok. Pada Gambar 4.4 amplitudo tertinggi dicapai angka 140, sedangkan Gambar 4.5 amplitudo tertinggi dicapai angka . Jadi dapat disimpulkan semakin banyak pengambilan rentang nilai riil pada solusi tersebut, akan semakin banyak kalor yang dihasilkan dengan waktu pengeringan yang lebih cepat juga. Ini ditunjukkan pada jumlah gelombang yang meningkat ketika pengambilan rentang nilai riil semakin banyak.

4.3.1.2. Fungsi Polinomial



Gambar 4.6. Plot solusi persamaan kalor pada keadaan *steady* dengan

Pada selang pada gambar diperoleh persamaan sebagai berikut

Pilih titik dan , diperoleh

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$\frac{72 \cdot 0}{72 \cdot 0} = \frac{72 \cdot 0,8}{0,8 \cdot 0,8}$$

$$= \frac{72}{72} = \frac{72 \cdot 0,8}{1,6}$$

$$= 1,6 \cdot 72 = 57,6$$

$$= 45 \cdot 36$$

Pada selang $0,8; 2,2$ pada gambar diperoleh persamaan sebagai berikut

Pilih titik $0,8; 72$ dan $2,2; 0$ diperoleh

$$\frac{72 - 0}{0 - 72} = \frac{0,8 - 2,2}{2,2 - 0,8}$$

$$= \frac{72}{-72} = \frac{0,8 - 2,2}{1,4}$$

$$= 1,4 \cdot 100,8 = 72 \cdot 57,6$$

$$= 1,4 \cdot 72 = 158,4$$

$$= 51,43 = 113,14$$

Sehingga diperoleh

$$45 \cdot 36 ; 2,2 \cdot 0,8$$

$$= 51,43 = 113,14 ; 0,8 \cdot 2,2$$

Sehingga



Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 245 \cdot 36 \sin \frac{1}{2} \cdot 51,43 \cdot 113,14 \sin \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 245 \cdot 36 \sin \frac{1}{2} \cdot 51,43 \cdot 113,14 \sin \frac{1}{2}$$

$$113,14 \sin \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 245 \cdot 36 \sin \frac{1}{2} \cdot 51,43 \cdot 113,14 \sin \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 51,43 \cdot 113,14 \sin \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{245 \cdot 36 \sin \frac{1}{2} \cdot 51,43 \cdot 113,14 \sin \frac{1}{2}}{2}$$

$$\frac{51,43 \cdot 113,14 \sin \frac{1}{2}}{2}$$

$$113,14 \sin \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{51,43 \cdot 113,14 \sin \frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{45}{2} \cdot 149,14 \sin \frac{1}{2}$$

$$\frac{51,43}{2} \cdot 149,14 \sin \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{51,43 \cdot 149,14 \sin \frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{6,43}{2} \cdot 149,14 \sin \frac{1}{2}$$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$\frac{1}{2} \frac{26,43 \cos 22^\circ 36' - 6,43 \cos 51,43^\circ}{2} = \frac{149,14 \cos 113,14^\circ}{2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{26,43 \cos 22^\circ 36' - 6,43 \cos 51,43^\circ}{2} = \frac{149,14 \cos 113,14^\circ}{2}$$

$$\frac{26,43 \cos 22^\circ 36' - 6,43 \cos 51,43^\circ}{2} = \frac{149,14 \cos 113,14^\circ}{2}$$

$$\frac{149,14 \cos 113,14^\circ}{2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{26,43 \cos 22^\circ 36' - 6,43 \cos 51,43^\circ}{2} = 0 \frac{149,14 \cos 113,14^\circ}{2}$$

$$\frac{26,43 \cos 22^\circ 36' - 6,43 \cos 51,43^\circ}{2} = 0 \frac{149,14 \cos 113,14^\circ}{2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{149,14 \cos 113,14^\circ}{2} = \frac{149,14 \cos 113,14^\circ}{2}$$

$$0$$

$$\frac{1}{2} \frac{26,43 \cos 22^\circ 36' - 6,43 \cos 51,43^\circ}{2} = \frac{149,14 \cos 113,14^\circ}{2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{26,43 \cos 22^\circ 36' - 6,43 \cos 51,43^\circ}{2} = \frac{149,14 \cos 113,14^\circ}{2}$$

$$\frac{149,14 \cos 113,14^\circ}{2}$$

$$0$$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{245}{2} \frac{36}{2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{51,43}{2} \frac{113,14}{2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{245}{2} \frac{1}{2} \frac{36}{2}$$

$$\frac{51,43}{2} \frac{1}{2} \frac{51,43}{2}$$

$$\frac{113,14}{2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{26,43}{2} \frac{45}{2} \frac{149,14}{2}$$

$$\frac{51,43}{2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{26,43}{2} \frac{6,43}{2} \frac{149,14}{2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{26,43}{2} \frac{6,43}{2} \frac{149,14}{2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{26,43}{2} \frac{6,43}{2} \frac{149,14}{2}$$

$$\frac{26,43}{2} \frac{6,43}{2}$$

$$\frac{149,14}{2}$$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{6,43}{2} \cdot 0 + \frac{6,43}{2} \cdot 0$$

$$0$$

$$\frac{1}{2} \cdot 45 + 36 + \frac{6,43}{2} \cdot 113,14$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6,43 \cdot 149,14$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{6,43}{2} \cdot 149,14$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{6,43}{2} \cdot 149,14 + \frac{6,43}{2} \cdot 149,14$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6,43$$

$$6,43$$

Sehingga solusinya adalah

$$\frac{6,43}{2} \cos \theta + \frac{6,43}{2} \sin \theta$$

$$6,43 \cdot 0$$

$$6,43$$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

4.3.2 Unsteady State

4.3.2.1 Fungsi Trigonometri

$$T_1(t) = \frac{T_2 - T_1}{2} \left[\cos \omega t + \sin \omega t \right] + T_1 \sin \frac{\omega t}{200}$$

$$T_1(t) = \frac{T_2 - T_1}{2} \left[\cos \omega t + \sin \omega t \right] + T_1 \sin \frac{\omega t}{200}$$

Untuk menyelesaikan solusi di atas, diperlukan nilai awal misal:

$$T_1(0) = T_1, \quad T_1'(0) = T_1'$$

Sehingga solusi

$$T_1(t) = \frac{T_2 - T_1}{2} \left[\cos \omega t + \sin \omega t \right] + T_1 \sin \frac{\omega t}{200}$$

dengan,

$$\frac{1}{200} \left[\cos \omega t + \sin \omega t \right] + \sin \frac{\omega t}{200}$$

$$\frac{1}{200} \left[\cos \omega t + \sin \omega t \right] + \sin \frac{\omega t}{200}$$

$$\frac{1}{200} \left[\cos \omega t + \sin \omega t \right] + \sin \frac{\omega t}{200}$$

$$\frac{1}{200} \left[\cos \omega t + \sin \omega t \right] + \sin \frac{\omega t}{200}$$

$$\sin \omega t \cos \omega t + \sin \frac{\omega t}{200}$$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$\frac{1}{200} \cos \frac{200}{200} \sin \frac{200}{200}$$

$$\cos \frac{200}{200} \sin \frac{200}{200}$$

$$\frac{1}{200} \cos \frac{200}{200} \sin \frac{200}{200} \cos \frac{200}{200} \sin \frac{200}{200}$$

$$0$$

$$\frac{1}{200} \cos \frac{200}{200} \sin \frac{200}{200} \cos \frac{200}{200}$$

$$\frac{1}{200} \cos^2 \frac{200}{200} \sin \frac{200}{200} \cos \frac{200}{200} \sin \frac{200}{200}$$

$$\frac{1}{200} \sin \frac{200}{200} \cos^2 \frac{200}{200} \sin \frac{200}{200} \cos \frac{200}{200}$$

$$\frac{1}{200} \sin \frac{200}{200} \frac{\cos 2 \frac{200}{200} - 1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \sin \frac{200}{200} \sin \frac{200}{200}$$

$$\frac{1}{200} \sin \frac{200}{200} \frac{\sin 2 \frac{200}{200}}{4} - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{200}{200}}{2}$$



Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$\frac{1}{200} \sin \frac{200}{2} = \frac{\sin 200}{4} = \frac{\sin^2 200}{2}$$

$$\frac{\sin 200}{4} = \frac{\sin^2 200}{2}$$

$$\frac{1}{200} \sin \frac{200}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{200}{2}$$

$$\frac{1}{200} \sin \frac{200}{2}$$

$$\frac{1}{200} \cos \frac{200}{2}$$

$$\frac{1}{200} \cos \frac{200}{2}$$

$$0$$

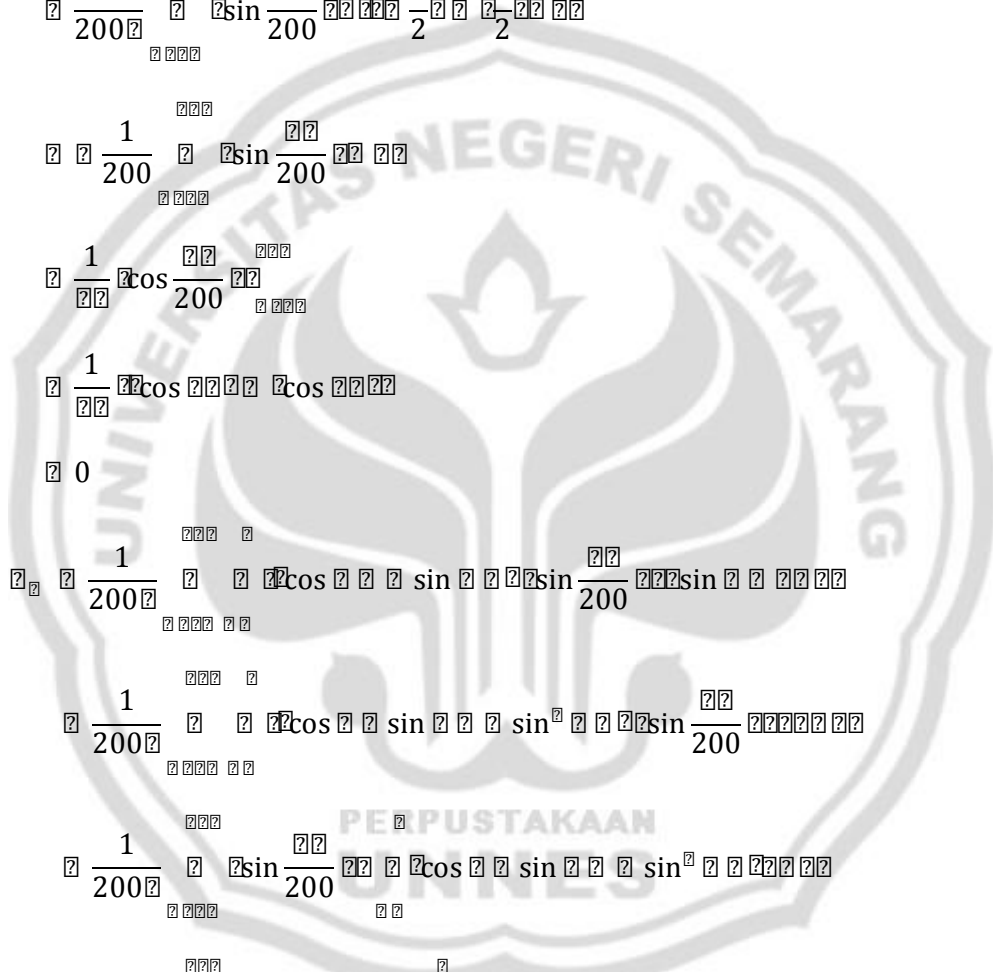
$$\frac{1}{200} \cos \frac{200}{2} \sin \frac{200}{2} = \frac{\sin \frac{200}{2} \cos \frac{200}{2}}{200}$$

$$\frac{1}{200} \cos \frac{200}{2} \sin \frac{200}{2} = \frac{\sin \frac{200}{2} \cos \frac{200}{2}}{200}$$

$$\frac{1}{200} \sin \frac{200}{2} \cos \frac{200}{2} = \frac{\sin \frac{200}{2} \cos \frac{200}{2}}{200}$$

$$\frac{1}{200} \sin \frac{200}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{200}{2}$$

$$\frac{1 - \cos 200}{2}$$



Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$\frac{1}{200} \sin \frac{200t}{200} - \frac{\sin^2 \frac{200t}{200}}{2} + \frac{\sin 200t}{4}$$

$$\frac{1}{200} \sin \frac{200t}{200} - \frac{\sin^2 \frac{200t}{200}}{2} + \frac{\sin 200t}{4}$$

$$\frac{\sin^2 \frac{200t}{200}}{2} - \frac{\sin 200t}{4}$$

$$\frac{1}{200} \sin \frac{200t}{200} - \frac{\sin^2 \frac{200t}{200}}{2} + \frac{\sin 200t}{4}$$

$$\frac{1}{200} \sin \frac{200t}{200}$$

$$\frac{1}{200} \cos \frac{200t}{200}$$

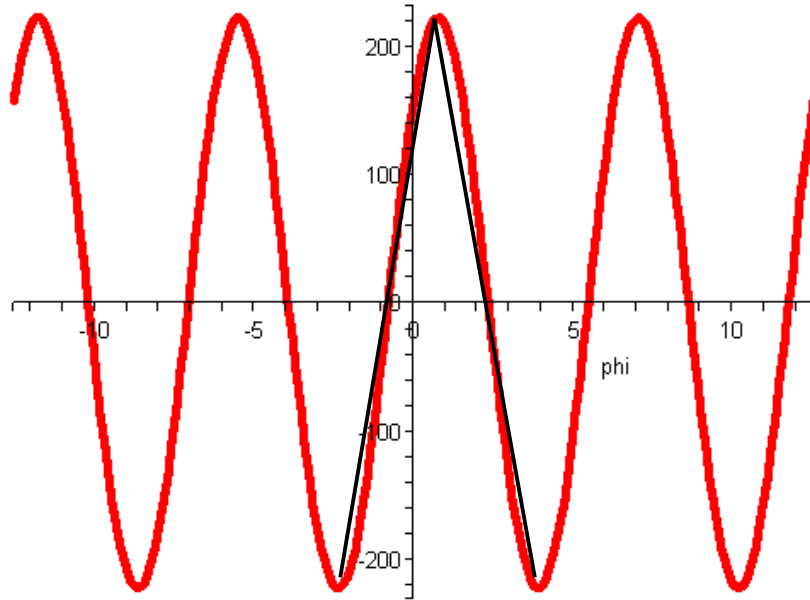
0

Jadi Solusi untuk *unsteady state* adalah

$$\frac{1}{200} \cos \frac{200t}{200} - \frac{\sin^2 \frac{200t}{200}}{2} + \frac{\sin 200t}{4}$$

0

4.3.2.2 Fungsi Polinomial



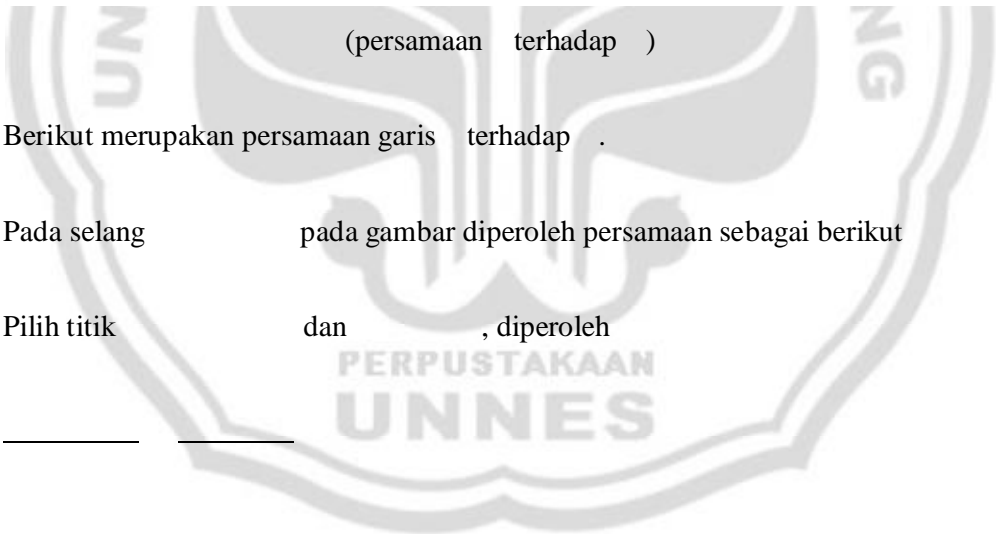
Gambar 4.7. Plot solusi persamaan kalor pada keadaan *unsteady* dengan

(persamaan terhadap)

Berikut merupakan persamaan garis terhadap .

Pada selang pada gambar diperoleh persamaan sebagai berikut

Pilih titik dan , diperoleh



[Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features](#)

$$3x + 4y = 308$$

$$\frac{440}{3} = \frac{308}{3}$$

Pada selang $0,8; 4$ pada gambar diperoleh persamaan sebagai berikut

Pilih titik $0,8; 220$ dan $4; 220$ diperoleh

$$\frac{220 - 220}{220 - 220} = \frac{0,8 - 0,8}{4 - 0,8}$$

$$\frac{220 - 220}{440} = \frac{0,8}{3,2}$$

$$3,2(220 - 220) = 440(0,8 - 0,8)$$

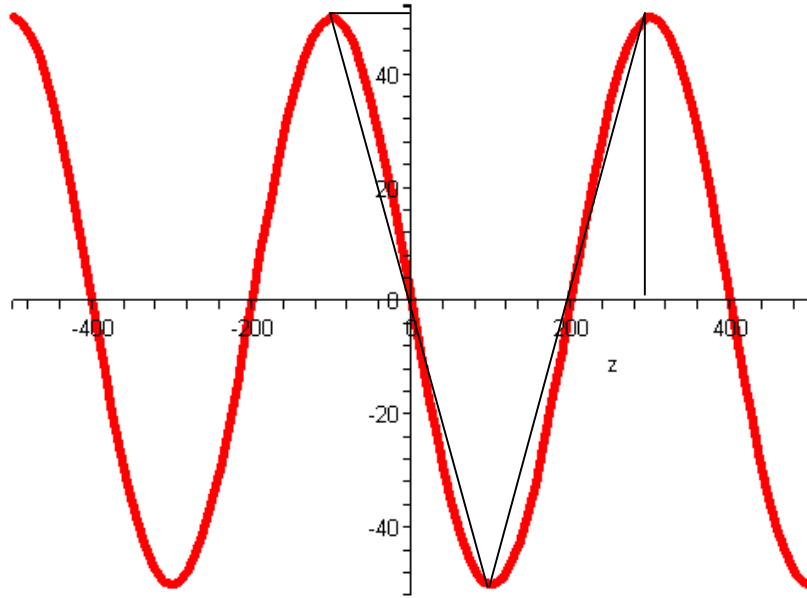
$$3,2(220 - 220) = 440(0,8 - 0,8)$$

$$3,2(220 - 220) = 440(0,8 - 0,8)$$

$$220 - 220 = 137,5 - 110$$



Berikut merupakan persamaan garis terhadap .



Gambar 4.8. Plot solusi persamaan kalor pada keadaan *unsteady* dengan

(persamaan terhadap)

Pada selang pada gambar diperoleh persamaan sebagai berikut

Pilih titik dan , diperoleh

$$\frac{1}{2}$$

Pada selang $100; 300$ pada gambar diperoleh persamaan sebagai berikut

Pilih titik $200; 0$ dan $300; 50$ diperoleh

$$\frac{200 - 0}{50 - 0} = \frac{200 - 200}{300 - 200}$$

$$\frac{200}{50} = \frac{200}{100}$$

$$100 = 50 \cdot 2$$

$$\frac{1}{2} = 100$$

Jadi

$$\frac{440}{3}, \frac{308}{3}, \frac{1}{2}, \frac{440}{3}, \frac{1}{2}, \frac{308}{3}$$

$$137,5, 110, \frac{1}{2}, 100, 137,5, \frac{1}{2}, 10$$

Sehingga,

$$\frac{1}{200} = \frac{1}{200}$$

$$\frac{1}{200} = \frac{440}{3} - \frac{1}{2} - \frac{308}{3} = 137,5 - \frac{1}{2} - 10$$

$$\frac{1}{200} = \frac{1705}{3} - \frac{338}{3}$$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$\frac{1}{200} - \frac{1705}{6} + \frac{338}{3}$$

$$\frac{1}{200} - \frac{676}{3}$$

$$\frac{1}{200} - \frac{676}{3}$$

$$\frac{1}{200} - \frac{270400}{3}$$

$$\frac{1352}{3}$$

$$\frac{1}{200} - \frac{1705}{3} + \frac{338}{3} \cos$$

$$\frac{1}{200} - \frac{1705}{3} \cos + \frac{338}{3} \cos$$

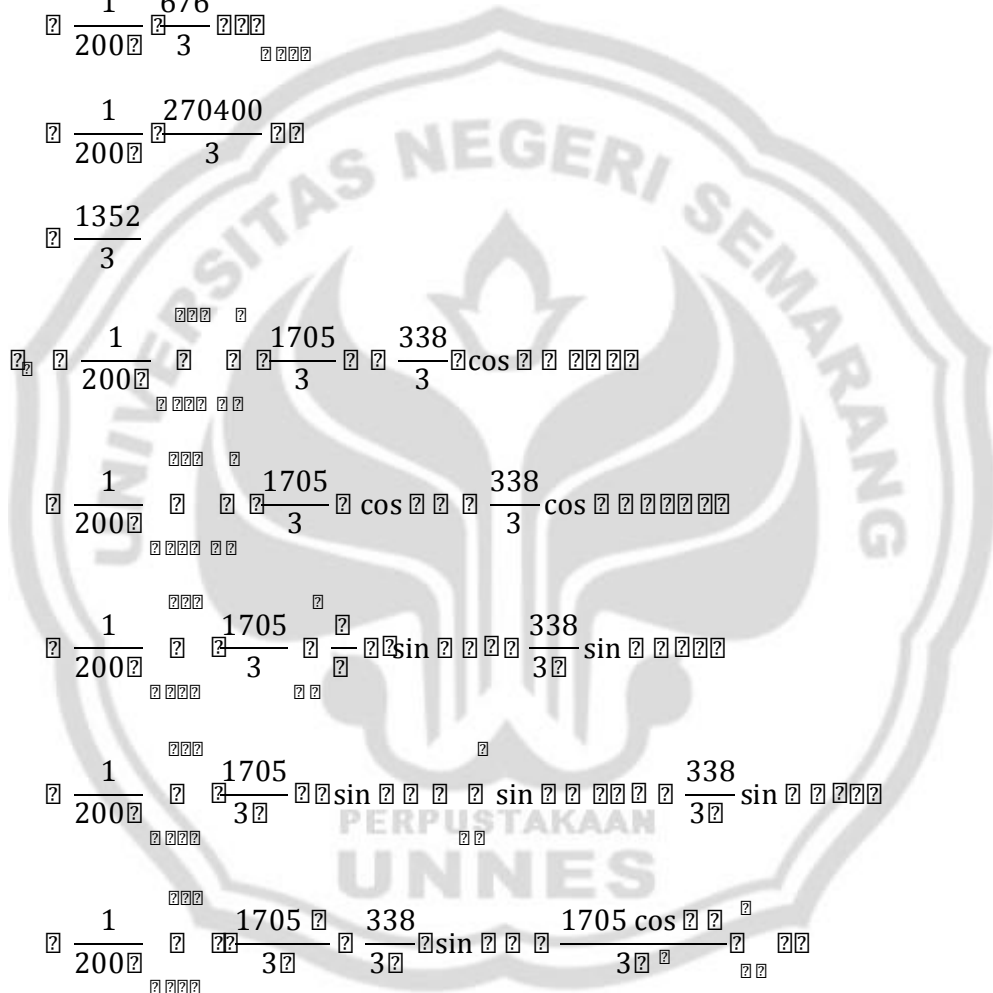
$$\frac{1}{200} - \frac{1705}{3} \sin + \frac{338}{3} \sin$$

$$\frac{1}{200} - \frac{1705}{3} \sin + \frac{338}{3} \sin$$

$$\frac{1}{200} - \frac{1705}{3} \sin + \frac{1705 \cos}{3}$$

0

$$\frac{1}{200} - \frac{1705}{3} \sin + \frac{338}{3} \sin$$



Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$\frac{1}{200} - \frac{1705}{3} \sin \frac{338}{3}$$

$$\frac{1}{200} - \frac{1705}{3} \cos \frac{338}{3}$$

$$\frac{1}{200} - \frac{1705}{3} \cos \frac{338}{3}$$

$$\frac{1}{200} - \frac{1705}{3} \cos \frac{338}{3} - \frac{1705 \sin \frac{338}{3}}{3}$$

0

Jadi Solusi untuk *unsteady state* adalah

$$\frac{1352}{3} \cos \frac{338}{3} \sin \frac{338}{3}$$

$$\frac{1352}{3}$$



BAB V

PENUTUP

5.1. Simpulan

Simpulan yang dapat diambil dari hasil pembahasan pada Bab IV adalah sebagai berikut:

1. Model persamaan kalor pada mesin pengering padi yang diperoleh dengan penurunan model pada koordinat kartesius ke koordinat tabung adalah

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (5.2)$$

2. Solusi persamaan kalor keadaan *steady* $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ yang diperoleh dengan menggunakan metode pemisahan variabel adalah

$$T(r, t) = \frac{T_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 T_0}{n \pi} \cos \frac{n \pi r}{2} \sin \frac{n \pi t}{2}$$

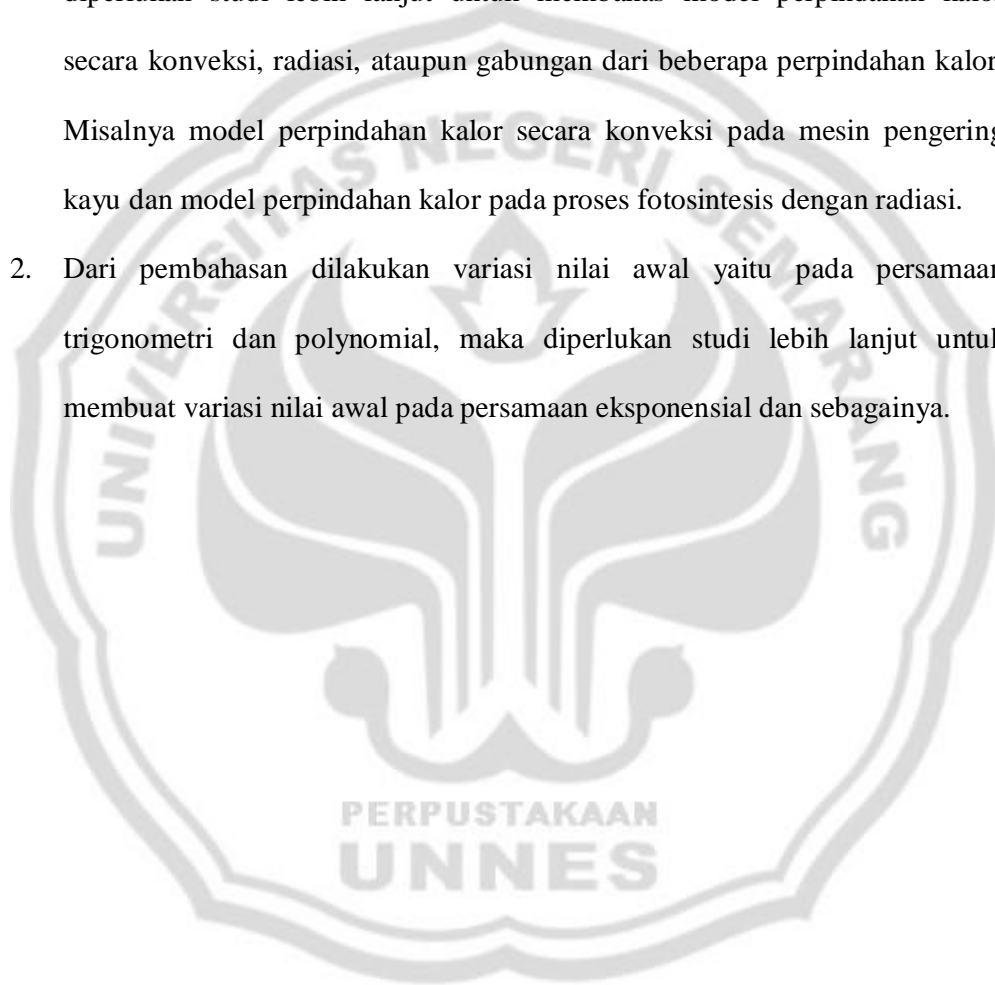
3. Solusi untuk persamaan kalor keadaan *unsteady* $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial r^2}$ yang diperoleh dengan menggunakan metode pemisahan variabel adalah

$$T(r, t) = \frac{T_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 T_0}{n \pi} \cos \frac{n \pi r}{2} \sin \frac{n \pi t}{2} e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{4}}$$

5.2. Saran

Saran yang dapat penulis berikan dari hasil penelitian yang telah diberikan adalah

1. Pembahasan ini hanya mengkaji perpindahan kalor secara konduksi, maka diperlukan studi lebih lanjut untuk membahas model perpindahan kalor secara konveksi, radiasi, ataupun gabungan dari beberapa perpindahan kalor. Misalnya model perpindahan kalor secara konveksi pada mesin pengering kayu dan model perpindahan kalor pada proses fotosintesis dengan radiasi.
2. Dari pembahasan dilakukan variasi nilai awal yaitu pada persamaan trigonometri dan polynomial, maka diperlukan studi lebih lanjut untuk membuat variasi nilai awal pada persamaan eksponensial dan sebagainya.



DAFTAR PUSTAKA

- Andriani, R. 2005. *Persamaan Diferensi Linear dan Aplikasinya*. Semarang : Skripsi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Unnes.
- Boas, M. L. 1983. *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (2nd editions). USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Haberman, R. 2004. *Applied Partial Differential Equations*. New Jersey: Pearson Education, Inc.
- Incropera, F. P and De Witt, D. P. 1990. *Fundamental of Heat and Mass Transfer*. John Wiley & Sons, Singapore.
- Kartono. 2001. *Maple untuk Persamaan Diferensial* (Edisi Pertama). Yogyakarta: J&J Learning
- Kreith, F. 1991. *Prinsip – Prinsip Perpindahan Panas*. Jakarta : Erlangga.
- Logan, J. D. 1998. *Applied Partial Differential Equations*. Springer-Verlag New York, Inc.
- N. Afzal, "Heat transfer from a stretching surface, 1993, " *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 36, no. 4, pp. 1128-1131.
- Nagle, K and Edward, B. S. 1986. *Fundamental of Differential Equation*. John Wiley & Sons.
- Ozisik, M. N. 1981. *Basic Heat Transfer*. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.
- Sneddon, I. 1957. *Elements of Partial Differential Equations*. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.
- Stanford Shateyi and Sandile Sydney Motsa, 2009, "Thermal Radiation Effects on Heat and Mass Transfer over an Unsteady Stretching Surface," *International Journal of Mathematical Problems in Engineering*, vol. 13.
- Strauss, W. A. 1992. *Partial Differential Equation an Introduction*. John Wiley & Sons, Inc.
- Ruwanto, B. 2004. *Asas-Asas Fisika*. Jakarta : Yudhistira.
- Waluya, S.B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta : Graha Ilmu.

Wuryanto. 2002. *Kalkulus Multi Variat*. Semarang: Jurusan Matematika unnes.

Zemansky, M. W and Richard H Dittman. 1986. *Kalor dan Termodinamika*.
Bandung: ITB.



Lampiran 1

**Plot Solusi Model Perpindahan Kalor
pada Keadaan *Steady***

```
> restart;
> pers := (v(r, phi, z) = (0.5) * sum((r^m) * (cos(m*phi) + sin(m*phi)), m=1));
> pers1 := eval(pers, r=100);
    pers := v(r, f, z) = 0.5 r (cos(f) + sin(f))

    pers1 := v(100, f, z) = 50.0 cos(f) + 50.0 sin(f)

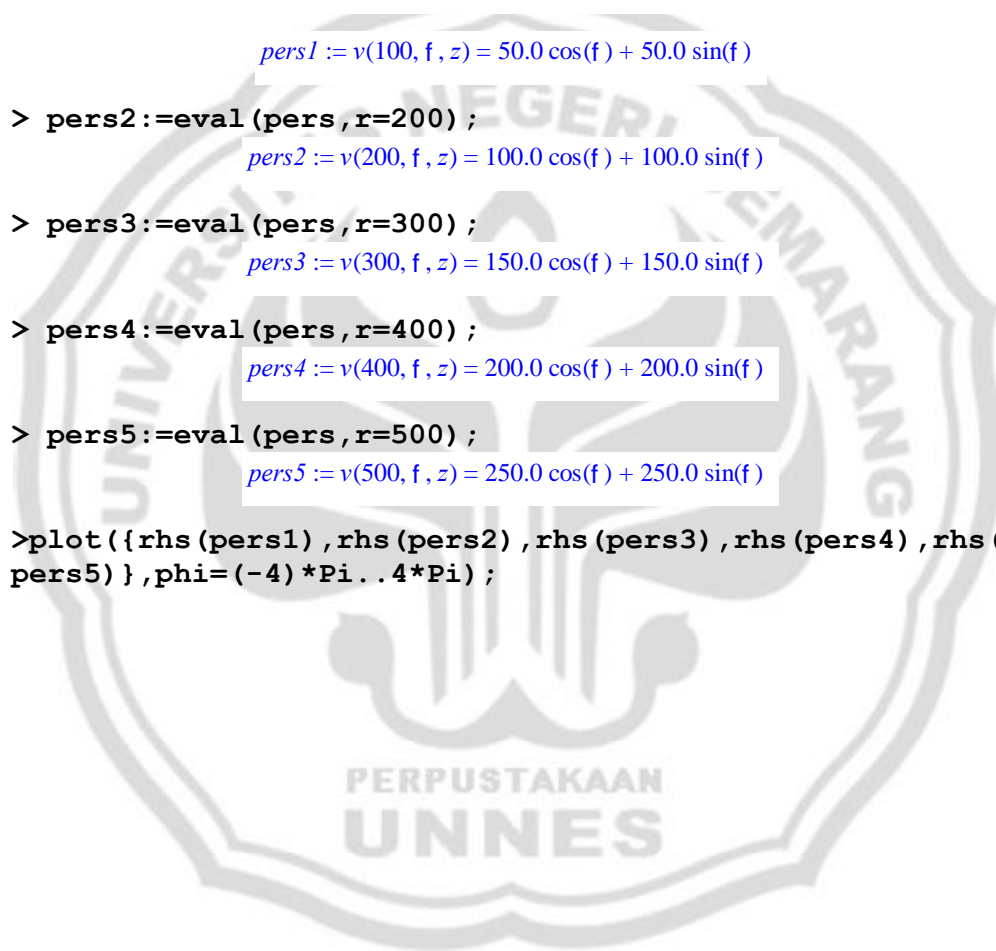
> pers2 := eval(pers, r=200);
    pers2 := v(200, f, z) = 100.0 cos(f) + 100.0 sin(f)

> pers3 := eval(pers, r=300);
    pers3 := v(300, f, z) = 150.0 cos(f) + 150.0 sin(f)

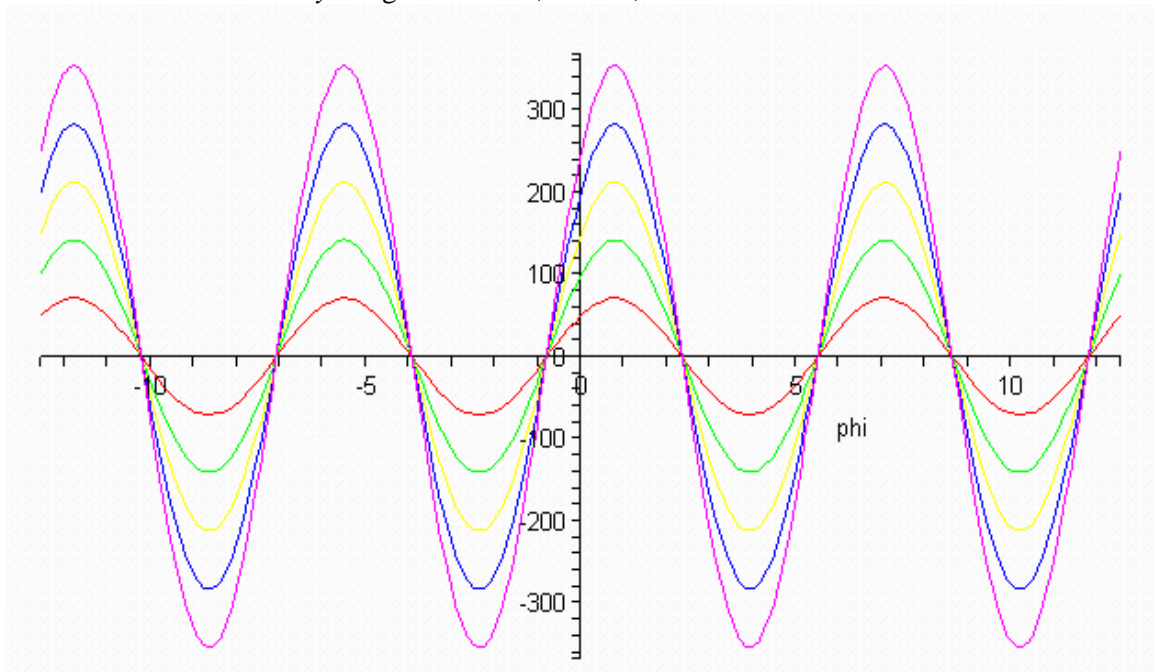
> pers4 := eval(pers, r=400);
    pers4 := v(400, f, z) = 200.0 cos(f) + 200.0 sin(f)

> pers5 := eval(pers, r=500);
    pers5 := v(500, f, z) = 250.0 cos(f) + 250.0 sin(f)

> plot({rhs(pers1), rhs(pers2), rhs(pers3), rhs(pers4), rhs(pers5)}, phi = (-4)*Pi..4*Pi);
```



Plot solusi *steady* dengan variasi r , ω , dan ϕ .



```

> restart;
> pers := (v(r, phi, z) = (0.5) * sum((r^m) * (cos(m*phi) + sin(m*phi)), m=1..3));
> pers1 := eval(pers, r=100);
pers := v(r, f, z) = 0.5 r (cos(f) + sin(f)) + 0.5 r^2 (cos(2 f) + sin(2 f)) + 0.5 r^3 (cos(3 f) + sin(3 f))
-----
pers1 := v(100, f, z) = 50.0 cos(f) + 50.0 sin(f) + 5000.0 cos(2 f) + 5000.0 sin(2 f) + 5.000000 10^5 cos(3 f)
+ 5.000000 10^5 sin(3 f)

> pers2 := eval(pers, r=200);
pers2 := v(200, f, z) = 100.0 cos(f) + 100.0 sin(f) + 20000.0 cos(2 f) + 20000.0 sin(2 f)
+ 4.0000000 10^6 cos(3 f) + 4.0000000 10^6 sin(3 f)

> pers3 := eval(pers, r=300);
pers3 := v(300, f, z) = 150.0 cos(f) + 150.0 sin(f) + 45000.0 cos(2 f) + 45000.0 sin(2 f)
+ 1.35000000 10^7 cos(3 f) + 1.35000000 10^7 sin(3 f)

> pers4 := eval(pers, r=400);

```

[Click Here to upgrade to
Unlimited Pages and Expanded Features](#)

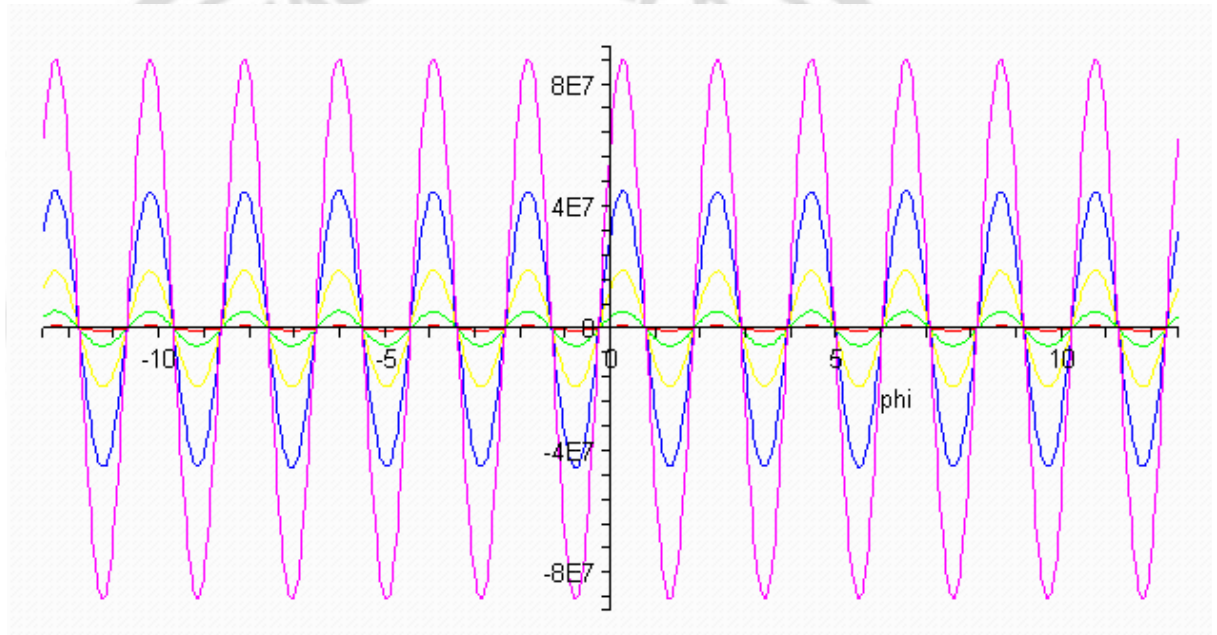
$$\text{pers4} := v(400, f, z) = 200.0 \cos(f) + 200.0 \sin(f) + 80000.0 \cos(2 f) + 80000.0 \sin(2 f) \\ + 3.20000000 \cdot 10^7 \cos(3 f) + 3.20000000 \cdot 10^7 \sin(3 f)$$

> **pers5:=eval(pers, r=500) ;**

$$\text{pers5} := v(500, f, z) = 250.0 \cos(f) + 250.0 \sin(f) + 1.250000 \cdot 10^5 \cos(2 f) + 1.250000 \cdot 10^5 \sin(2 f) \\ + 6.25000000 \cdot 10^7 \cos(3 f) + 6.25000000 \cdot 10^7 \sin(3 f)$$

>**plot({rhs(pers1), rhs(pers2), rhs(pers3), rhs(pers4), rhs(pers5)}, phi=-4*Pi..4*Pi) ;**

Plot solusi *steady* dengan variasi ϕ , dan r .



UNNES

Lampiran 2

Plot Solusi Model Perpindahan Kalor
pada Keadaan *Unsteady*

```
> restart;
> pers := (w(r, phi, z, t) = (0.5) * sum(sum((r^m) * (cos(m*phi) + sin(m*phi)) * (exp((n*Pi/200)^2)) * sin(n*Pi/200) * z), m=1), n=1));
```

$$pers := w(r, f, z, t) = 0.5 r (\cos(f) + \sin(f)) e^{-\frac{1}{40000} p^2} \sin\left(\frac{1}{200} p z\right)$$

```
> pers1 := eval(pers, z=200);
```

$$pers1 := w(r, f, 200, t) = 100.0 r (\cos(f) + \sin(f)) e^{-\frac{1}{40000} p^2} \sin\left(\frac{1}{200} p z\right)$$

```
> pers2 := eval(pers1, r=100);
```

$$pers2 := w(100, f, 200, t) = 10000.0 (\cos(f) + \sin(f)) e^{-\frac{1}{40000} p^2} \sin\left(\frac{1}{200} p z\right)$$

```
> pers3 := eval(pers1, r=200);
```

$$pers3 := w(200, f, 200, t) = 20000.0 (\cos(f) + \sin(f)) e^{-\frac{1}{40000} p^2} \sin\left(\frac{1}{200} p z\right)$$

```
> pers4 := eval(pers1, r=300);
```

$$pers4 := w(300, f, 200, t) = 30000.0 (\cos(f) + \sin(f)) e^{-\frac{1}{40000} p^2} \sin\left(\frac{1}{200} p z\right)$$

```
> pers5 := eval(pers1, r=400);
```

$$pers5 := w(400, f, 200, t) = 40000.0 (\cos(f) + \sin(f)) e^{-\frac{1}{40000} p^2} \sin\left(\frac{1}{200} p z\right)$$

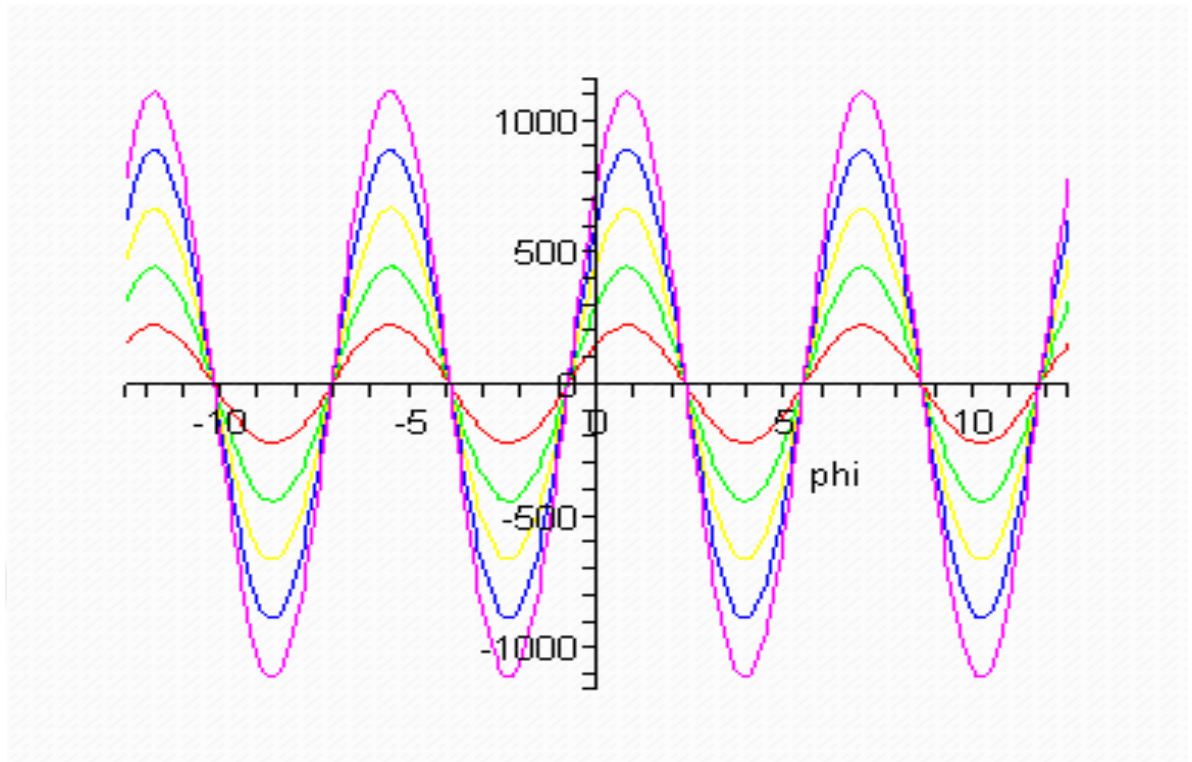
```
> pers6 := eval(pers1, r=500);
```

$$pers6 := w(500, f, 200, t) = 50000.0 (\cos(f) + \sin(f)) e^{-\frac{1}{40000} p^2} \sin\left(\frac{1}{200} p z\right)$$

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

```
>plot({rhs(pers2), rhs(pers3), rhs(pers4), rhs(pers5), rhs(pers6)}, phi=-4*Pi..4*Pi);
```

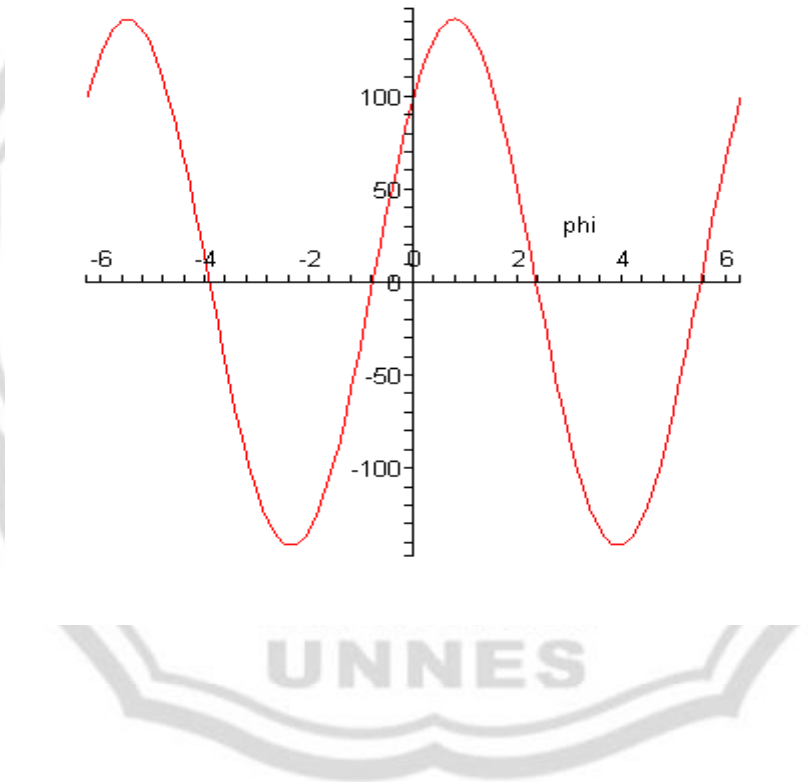
Plot solusi persamaan kalor pada keadaan *unsteady* dengan variasi nilai , , dan , dan



Lampiran 3

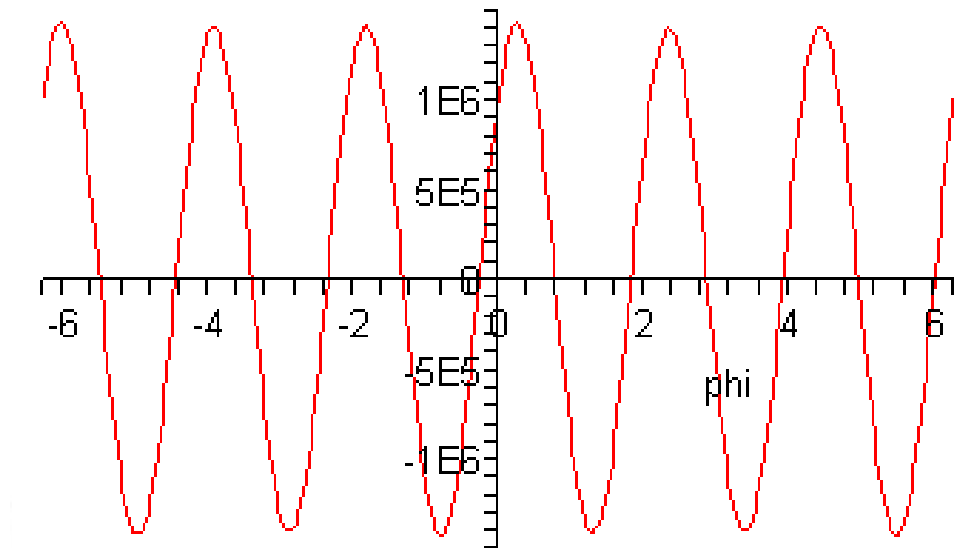
**Plot Solusi Model pada Keadaan *Steady*
dengan Variasi Nilai Awal Fungsi Trigonometri**

Plot Solusi Model Keadaan *Steady*
dengan Variasi Nilai Awal Fungsi Trigonometri dan



Plot Solusi Model Keadaan *Steady*

dengan Variasi Nilai Awal Fungsi Trigonometri dan



Plot Solusi Model Keadaan *Steady*

dengan Variasi Nilai Awal Fungsi Trigonometri dan

