



PEMODELAN MATEMATIKA PADA SISTEM REDAMAN MERIAM

skripsi

disajikan sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika

oleh

Eri Prasetyo

4150406506

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG**

2011

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan.

Semarang, September 2011

Eri Prasetyo
NIM. 4150406506



PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Pemodelan Matematika pada Sistem Redaman Meriam

disusun oleh

Eri Prasetyo

4150406506

telah dipertahankan dihadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES pada tanggal 8 September 2011.

Panitia:

Ketua

Sekretaris

Dr. Kasmadi Imam S., M.S
195111151979031001

Drs. Edy Soedjoko, M.Pd
195604191987031001

Ketua Penguji

Dr. Rochmad, M.Si.
195711161987011001

Anggota Penguji/
Pembimbing Utama

Anggota Penguji/
Pembimbing Pendamping

Drs. Moch Chotim, M.S
194905151979031001

Dr. St. Budi Waluyo, M.Si.
196809071993031002

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

❖ MOTTO:

- Berusahalah sekerasmu seolah-olah tidak akan ada yang menolongmu dan berdoalah sekhushyukmu seolah-olah usahamu tidak akan pernah berhasil
- Jadilah ikan yang sehat yang selalu berenang menentang arus

❖ PERSEMBAHAN:

- Untuk Ayah dan Ibuku tercinta atas semua doa, dukungan dan kasih sayangnya.
- Adik dan semua keluargaku beserta kehangatan yang mereka berikan.
- Sahabatku Arif, Ryan dan Anis yang selalu menyemangatiku.
- Teman-teman Matpar 06 atas bantuan dan semangatnya.
- Mantan penghuni sel 176 yang senasib sepenanggungan.
- Penghuni m3-08 atas bantuannya selama ini.

PRAKATA

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “**PEMODELAN MATEMATIKA PADA SISTEM REDAMAN MERIAM**”. Penulisan skripsi ini sebagai syarat mutlak yang harus dipenuhi oleh penulis untuk memperoleh gelar sarjana sains di Universitas Negeri Semarang.

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan karena adanya bimbingan, bantuan, dan dukungan dari berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Sudijono Sastroatmodjo, M.Si, Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Dr. Kasmadi Imam S, M.S, Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Edy Soedjoko, M.Pd, Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
4. Drs. Moch Chotim, M.S, Pembimbing Utama yang telah memberikan bimbingan, motivasi, dan pengarahan.
5. Dr. St. Budi Waluya, M.Si., Pembimbing Pendamping yang telah memberikan bimbingan, motivasi, dan pengarahan.
6. Dr. Rochmad, M.Si., Penguji yang telah memberikan bimbingan dan pengarahan.
7. Ayah dan Ibu tercinta yang senantiasa mendoakan serta memberikan dukungan baik secara moral maupun spiritual.

8. Anak matematika 2006 yang telah memberikan dorongan dan motivasi hingga terselesaikannya penulisan skripsi ini.
9. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya penulisan skripsi ini.

Penulis sadar dengan apa yang telah disusun dan disampaikan masih banyak kekurangan dan jauh dari sempurna. Untuk itu penulis menerima segala kritik dan saran yang sifatnya membangun untuk skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Semarang, September 2011

Penulis



ABSTRAK

Prasetyo, Eri. 2011. *Pemodelan Matematika pada Sistem Redaman Meriam*. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang. Pembimbing Utama Drs. Moch Chotim, M.S. dan Pembimbing Pendamping Dr. St. Budi Waluyo, M.Si.

Kata kunci: Meriam, Model Matematika, Sistem Redaman.

Matematika merupakan salah satu sarana untuk menyelesaikan suatu masalah. Kajian matematika yang konsep-konsepnya banyak diterapkan dalam bidang lain adalah persamaan diferensial. Peran matematika pada kehidupan sehari-hari maupun pada ilmu-ilmu lain disajikan dalam pemodelan matematika. Salah satu model yang diperoleh dari masalah nyata yaitu meriam. Meriam mempunyai pegas dan peredam sebagai sistem redamannya. Pegas berfungsi sebagai pelontar disaat meriam menembakkan pelurunya, sedangkan peredam berfungsi menahan getaran yang ditimbulkan akibat penembakan meriam sehingga pegas kembali ke posisi setimbang. Gaya-gaya yang bekerja pada pegas dan peredam merupakan gaya gravitasi dan gaya pemulih.

Permasalahan yang diangkat dalam penelitian ini adalah bagaimana pemodelan matematika pada sistem redaman meriam, bagaimana menentukan solusi dari sistem redaman meriam, dan bagaimana interpretasi dari solusi model sistem redaman meriam. Metode yang digunakan untuk menganalisis masalah adalah studi pustaka. Langkah-langkah yang dilakukan adalah menentukan masalah, merumuskan masalah, studi pustaka, analisis pemecahan masalah dan penarikan kesimpulan.

Pembahasan dilakukan dengan analisis untuk menentukan model matematika dari sistem redaman meriam. Model matematika yang diperoleh yaitu $y'' + \frac{\delta}{m}y' + \frac{k}{m}y = f_0 \cos \omega t$ dengan $m =$ massa, $c =$ konstanta redaman, $k =$ konstanta pegas dan $f_0 \cos \omega t =$ gaya luar. Setelah didapatkan model matematikanya, kemudian dicari solusi dari sistem redaman meriam. Dalam hal ini terdapat tiga kasus yang tergantung dari jumlah redaman. Untuk kasus $d^2 + \omega_0^2 > 0$ mempunyai solusi $y = c_1 e^{-d + \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-d - \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t} + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \alpha)$, kasus $d^2 + \omega_0^2 = 0$ mempunyai solusi $y = (c_1 + c_2 t) e^{-dt} + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \alpha)$ dan kasus $d^2 + \omega_0^2 < 0$ mempunyai solusi $Y = c_3 e^{-dt} \cos\left(\sqrt{d^2 - \omega_0^2} t + \varphi\right) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \alpha)$ dengan $c_3 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ dan φ ditunjukkan dengan persamaan $\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \cos \varphi$ dan $\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \sin \varphi$. Dengan menggunakan *Maple*, dapat diperoleh visualisasi dari sistem redaman meriam.

DAFTAR ISI

	Halaman
PRAKATA	v
ABSTRAK	vii
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR LAMPIRAN	xii
BAB	
1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Pembatasan Masalah	4
1.4 Tujuan.....	4
1.5 Batasan Istilah	4
1.6 Manfaat	5
1.7 Sistematika Penulisan Skripsi	5
2. TINJAUAN PUSTAKA	8
2.1 Pemodelan Matematika	8
2.2 Pendekatan pada Pemodelan Matematika	8
2.3 Tahapan Pemodelan	10
2.4 Hukum Newton Pertama	11
2.5 Hukum Newton Kedua	12
2.6 Hukum Hooke	12

2.7	Osilasi	13
2.8	Sistem Redaman	14
2.9	Persamaan Diferensial	15
2.10	Order Persamaan Diferensial	17
2.11	Persamaan Diferensial Linear dan Tak Linear	18
2.12	Solusi Persamaan Diferensial	18
2.13	Maple	26
3.	METODE PENELITIAN	28
3.1	Menentukan Masalah	28
3.2	Perumusan Masalah	28
3.3	Studi Pustaka	29
3.4	Analisis dan Pemecahan Masalah	29
3.5	Penarikan Kesimpulan	29
4.	PEMBAHASAN	30
4.1	Pemodelan pada Sistem Redaman Meriam	30
4.2	Solusi dari Pemodelan pada Sistem Redaman Meriam	33
5	PENUTUP	47
5.1	Simpulan	47
5.2	Saran	48
	DAFTAR PUSTAKA	50
	LAMPIRAN	52

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
1.1 Contoh Model Meriam	3
2.1 Bagan Alur Penyelesaian Masalah	11
2.2 Gaya Pemulih pada Pegas	13
2.3 Sistem Redaman	14
4.1 Posisi Pegas	31
4.2 Rangkaian Pegas dan Peredam pada Sistem Redaman Meriam	32
4.3 Plot solusi aproksimasi osilasi redaman berlebih persamaan meriam $my'' + cy' + ky = 0, y(0) = 1, \frac{dy}{dt} = 0, m = 5, k = 200$ menggunakan <i>Maple</i> dengan berbagai konstanta redaman	34
4.4 Plot solusi aproksimasi redaman kritis persamaan meriam $my'' + cy' + ky = 0, m = 5, c = 5, k = \frac{5}{4}, y(0) = \frac{1}{2}, \frac{dy}{dt} = \frac{7}{4}$ dan $y(0) =$ $\frac{1}{2}, \frac{dy}{dt} = -\frac{7}{4}$ menggunakan <i>Maple</i>	36
4.5 Plot solusi aproksimasi osilasi redaman terlalu rendah persamaan meriam $my'' + cy' + ky = 0, y(0) = 1, \frac{dy}{dt} = 0, m = 5$ dan $k = 200$ menggunakan <i>Maple</i> dengan berbagai konstanta redaman	40
4.6 Plot solusi aproksimasi osilasi redaman berlebih persamaan meriam $my'' + cy' + ky = f_0 \cos \omega t, y(0) = 0, \frac{dy}{dt} = 0, m = 5, k = 200, f_0 = 50$ dan $\omega = 2$ menggunakan <i>Maple</i> dengan berbagai konstanta redaman ..	44
4.7 Plot solusi aproksimasi redaman kritis persamaan meriam	

$my'' + cy' + ky = f_0 \cos \omega t, y(0) = 0, \frac{dy}{dt} = 0, m = 5, c = 20\sqrt{10}, k =$
 $200, f_0 = 50$ dan $\omega = 2$ menggunakan *Maple* 45

4.8 Plot solusi aproksimasi osilasi redaman terlalu rendah persamaan

meriam $my'' + cy' + ky = f_0 \cos \omega t, y(0) = 0, \frac{dy}{dt} = 0, m = 10,$
 $k = 10, f_0 = 5$ dan $\omega = 0.8$ menggunakan *Maple* 46



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
1. Input dan Output Simulasi untuk Model Matematika tanpa Gaya Luar	52
2. Input dan Output Simulasi Osilasi Redaman Berlebih dengan Berbagai Konstanta Peredam tanpa Gaya Luar	53
3. Input dan Output Simulasi Osilasi Redaman Kritis tanpa Gaya Luar	55
4. Input dan Output Simulasi Osilasi Redaman Terlalu Rendah dengan Berbagai Konstanta Peredam tanpa Gaya Luar	56
5. Input dan Output Simulasi untuk Model Matematika dengan Gaya Luar ..	58
6. Input dan Output Simulasi Osilasi Redaman Berlebih dengan Berbagai Konstanta Peredam dengan Gaya Luar	59
7. Input dan Output Simulasi Osilasi Redaman Kritis dengan Gaya Luar	62
8. Input dan Output Simulasi Osilasi Redaman Terlalu Rendah tanpa Gaya Luar	63

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Proses perkembangan dan kemajuan dunia modern saat ini tidak bisa dipisahkan dari matematika. Hampir seluruh aktivitas manusia berkaitan dengan matematika. Matematika digunakan sebagai alat penting di berbagai bidang, termasuk ilmu pengetahuan alam, rekayasa medis dan ilmu pengetahuan sosial seperti ekonomi dan psikologi. Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang bersifat deduktif. Konsep-konsep yang ada di dalam matematika bersifat hierarkis, terstruktur, logis dan sistematis dari konsep yang paling sederhana sampai konsep yang paling kompleks (Winatapura, 1999: 124). Artinya, konsep dapat dibangun berdasarkan konsep terdahulu.

Penggunaan matematika dalam kehidupan sehari-hari tampak pada pengembangan aplikasi matematika pada seluruh aspek kehidupan manusia. Selain itu, matematika terapan berperan sebagai ilmu pengetahuan pembantu yang sangat penting bagi ilmu pengetahuan lainnya, terutama bagi ilmu pengetahuan eksak, sosial dan ekonomi. Peranan itu semakin bertambah meluas dan mendalam.

Peran matematika pada masalah kehidupan sehari-hari maupun pada ilmu-ilmu lain disajikan dalam pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk mempresentasi dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau problem pada dunia real dalam pernyataan

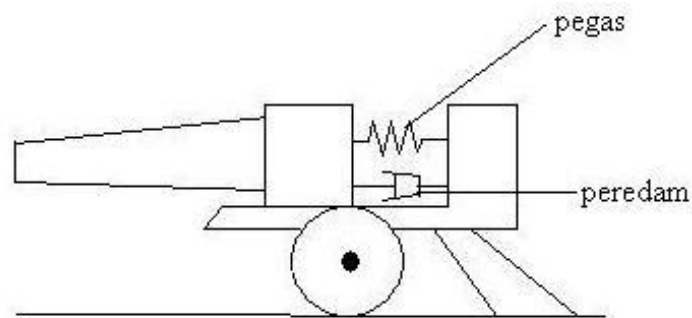
matematik, sehingga diperoleh pemahaman dari dunia real ini menjadi lebih tepat. Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal sebagai model matematika.

Model matematika digunakan dalam banyak disiplin ilmu dan bidang studi yang berbeda, sehingga dapat dicari aplikasi model matematika di bidang-bidang seperti fisika, ilmu biologi dan kedokteran, teknik, ilmu sosial dan politik, ekonomi, bisnis dan keuangan, juga problem-problem jaringan komputer.

Salah satu cabang dari ilmu matematika modern yang penting dan mempunyai cakupan wilayah penelitian yang luas adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial merupakan cabang dari matematika yang cukup strategis karena berkaitan dengan bagian-bagian sentral dalam Analisis, Aljabar, Geometris dan lainnya yang akan sangat berperan dalam pengenalan konsep maupun pemecahan masalah yang berkaitan dengan dunia nyata. Kebanyakan masalah-masalah yang muncul di dalam persamaan diferensial adalah bagaimana menemukan solusi eksak (analitik) dari model-model matematika yang diperoleh dari masalah nyata (Waluya, 2006: 1). Persamaan diferensial seringkali muncul dalam model-model matematik yang coba menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Banyak hukum-hukum alam dan hipotesa-hipotesa dapat diterjemahkan ke dalam persamaan yang mengandung turunan melalui bahasa matematik.

Salah satu model yang diperoleh dari masalah nyata yaitu meriam. Meriam mempunyai bagian-bagian seperti pipa senapan, gagang bedil, pegas, peredam dan kereta sebagai penyangga meriam. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 1. Pegas pada meriam berfungsi sebagai pelontar disaat meriam menembakkan pelurunya,

sedangkan peredam berfungsi untuk meredam atau menahan getaran yang ditimbulkan akibat penembakan meriam. Peredam meredam getaran sehingga pegas kembali ke posisi setimbang. Gaya-gaya yang bekerja pada pegas dan peredam ketika meriam diisi peluru dan ditembakkan merupakan gaya gravitasi dan gaya pemulih.



Gambar 1.1 Contoh Model Meriam (Kreyszig, 2006: 214).

Dalam menentukan solusi atau penyelesaian suatu persamaan diferensial, keberadaan suatu alat bantu untuk mempermudah menyelesaikan secara cepat dan tepat. Dewasa ini perkembangan teknologi komputer dan perangkat lunaknya dirasakan sangat pesat khususnya di bidang pendidikan. Salah satu kegunaannya adalah sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan-permasalahan matematika. Salah satunya perangkat lunak (software) berbasis matematika yang dikembangkan untuk kepentingan sistem komputer aljabar adalah *Maple*. *Maple* banyak digunakan oleh para ilmuwan untuk membantu menyelesaikan permasalahan-permasalahan matematika, karena merupakan perangkat lunak yang lengkap dan komunikatif. Persoalan yang dapat diselesaikan dengan *Maple* merupakan persoalan matematika murni, seperti aljabar, geometri, statistika, dan persamaan diferensial.

Dari uraian di atas, penulis mengangkat judul “Pemodelan Matematika pada Sistem Redaman Meriam”. Pada penelitian ini penulis berusaha untuk mendiskripsikan dan menyelesaikan masalah sistem pegas dan redaman pada meriam dengan menerapkan teori dan dalil matematika serta menggunakan *Maple* sebagai visualisasi dan alat bantu.

1.2 Rumusan Masalah

- (1) Bagaimana model matematika pada sistem redaman meriam?
- (2) Bagaimana solusi model matematika pada sistem redaman meriam?
- (3) Bagaimana visualisasi model matematika pada sistem redaman meriam menggunakan program *Maple*?

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam penyusunan skripsi ini membahas tentang pemodelan matematika pada sistem redaman meriam. Dalam hal ini hanya dibahas tentang gaya-gaya yang bekerja pada pegas dan peredam dengan gaya luar.

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

- (1) Menentukan model matematika pada sistem redaman meriam.
- (2) Menentukan solusi model matematika pada sistem redaman meriam.
- (3) Mengetahui aplikasi program *Maple* untuk visualisasi model matematika pada sistem redaman meriam.

1.5 Batasan Istilah

Agar diperoleh pengertian yang sama tentang istilah dalam penelitian ini dan tidak menimbulkan interpretasi yang berbeda dari pembaca maka perlu

adanya batasan istilah. Adapun batasan istilah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1.5.1 Pemodelan

Pemodelan adalah mempresentasikan dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau masalah pada dunia real dalam pernyataan matematis, sehingga diperoleh pemahaman dari dunia real ini menjadi lebih tepat.

1.5.2 Getaran

Getaran adalah suatu gerak bolak-balik di sekitar kesetimbangan. Kesetimbangan di sini maksudnya adalah keadaan dimana suatu benda berada pada posisi diam jika tidak ada gaya yang bekerja pada benda tersebut.

1.6 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari penyusunan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1.6.1 Bagi Peneliti

Peneliti dapat mengetahui pemodelan matematika pada sistem redaman meriam.

1.6.2 Bagi Pihak Lain

Dengan adanya penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangsih kepada mahasiswa untuk melakukan penelitian selanjutnya.

1.7 Sistematika Penulisan Skripsi

Penulisan skripsi disusun dalam tiga bagian utama, yaitu bagian awal, bagian inti, dan bagian akhir skripsi.

1.7.1 Bagian Awal Skripsi

Bagian awal skripsi terdiri dari halaman sampul, halaman judul, pernyataan, pengesahan, motto dan persembahan, kata pengantar, abstrak, daftar isi, daftar gambar, dan daftar lampiran.

1.7.2 Bagian Inti Skripsi

Bagian inti dibagi menjadi lima bab yaitu:

BAB I : PENDAHULUAN

Bab ini memuat gambaran singkat tentang isi skripsi dan membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan, batasan istilah, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan skripsi.

BAB II : LANDASAN TEORI

Landasan teori berisi mengenai teori-teori yang mendukung dan berkaitan dengan pembahasan skripsi sehingga dapat membantu penulis maupun pembaca dalam memahami isi skripsi. Bab ini terdiri dari pemodelan matematika, pendekatan pada pemodelan matematika, tahapan pemodelan, hukum Newton pertama, hukum Newton kedua, hukum Hooke, Osilasi, sistem redaman, persamaan diferensial, order persamaan diferensial, persamaan diferensial linear dan tak linear, solusi persamaan diferensial, dan *Maple*.

BAB III : METODE PENELITIAN

Metode penelitian berisi tentang proses atau langkah penelitian. Bab ini meliputi menentukan masalah, merumuskan masalah, studi pustaka, analisis pemecahan masalah, dan penarikan simpulan.

BAB IV : PEMBAHASAN

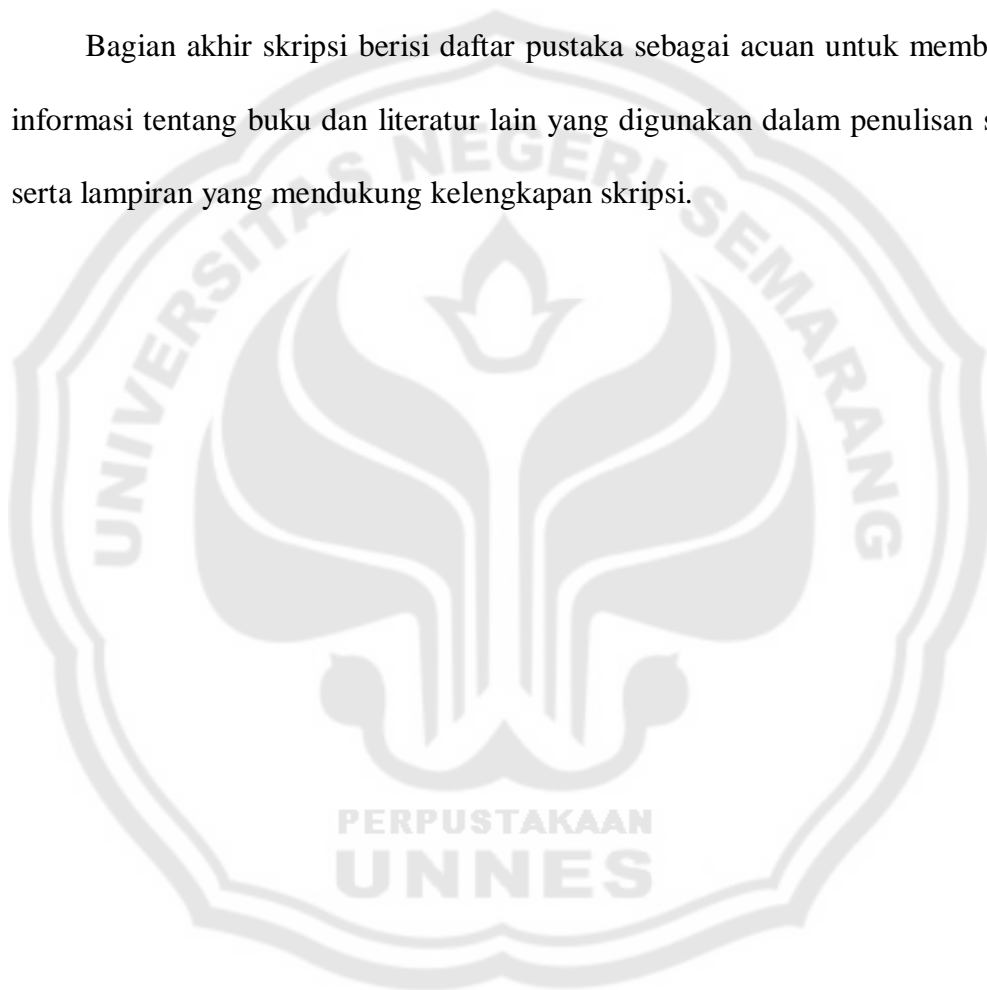
Pada bab ini berisi pemodelan matematika pada sistem redaman meriam dan solusinya disertai visualisasinya menggunakan *Maple*.

BAB V : PENUTUP

Bab ini berisi tentang simpulan dan saran yang diperoleh dari pembahasan.

1.7.3 Bagian Akhir Skripsi

Bagian akhir skripsi berisi daftar pustaka sebagai acuan untuk memberikan informasi tentang buku dan literatur lain yang digunakan dalam penulisan skripsi serta lampiran yang mendukung kelengkapan skripsi.



BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk mempresentasi dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau problem pada dunia real dalam pernyataan matematik, sehingga diperoleh pemahaman dari dunia real ini menjadi lebih tepat. Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal sebagai model matematika. Kontruksi, analisis dan penggunaan model matematika dipandang sebagai salah satu aplikasi matematika yang paling penting.

Model matematika digunakan dalam banyak disiplin ilmu dan bidang studi yang berbeda, sehingga dapat dicari aplikasi model matematika di bidang-bidang seperti fisika, ilmu biologi dan kedokteran, teknik, ilmu sosial dan politik, ekonomi, bisnis dan keuangan, juga problem-problem jaringan komputer. Bidang dan tipe aplikasi yang berbeda menghendaki bidang-bidang matematika yang berbeda (Widowati dan Sutimin, 2007:1).

2.2 Pendekatan pada Pemodelan Matematika

Perlu diketahui bahwa terdapat perbedaan pendekatan pemodelan matematika dalam memformulasikan model matematika. Terdapat beberapa jenis-jenis model matematika yang meliputi model empiris, model simulasi, model stokastik dan deterministik.

(1) Model Empiris

Pada model empiris, data yang berhubungan dengan problem menentukan peran yang penting. Dalam pendekatan ini, gagasan yang utama adalah mengkonstruksi formula (persamaan) matematika yang dapat menghasilkan grafik yang terbaik untuk mencocokkan data.

(2) Model Simulasi

Dalam pendekatan ini program komputer dituliskan didasarkan aturan-aturan. Aturan-aturan ini dipercaya untuk membentuk bagaimana suatu proses atau fenomena akan berjalan terhadap waktu dalam kehidupan nyata. Program komputer ini dijalankan terhadap waktu sehingga implikasi interaksi dari berbagai variabel dan komponen yang dikaji dan diuji.

(3) Model Deterministik dan Stokastik

Model deterministik meliputi penggunaan persamaan atau himpunan persamaan untuk merepresentasikan hubungan antara berbagai komponen (variabel) suatu sistem atau problem. Misalnya persamaan differensial biasa yang menjelaskan bagaimana suatu kuantitas (yang dinyatakan oleh variabel tak bebas dari persamaan) dan waktu sebagai variabel bebas. Diberikan syarat awal yang sesuai, persamaan differensial dapat diselesaikan untuk memprediksi perilaku sistem model.

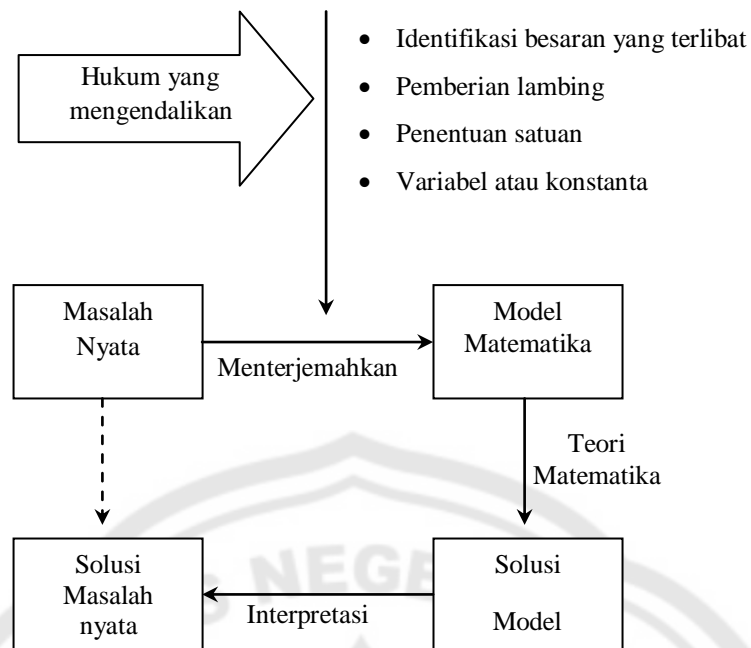
Dalam model deterministik, variasi random diabaikan. Dengan kata lain persamaan ini digunakan untuk menyatakan problem dunia nyata yang diformulasikan berdasarkan pada hubungan dasar faktor-faktor yang terlibat dalam problem ini (Widowati dan Sutimin, 2007: 2).

2.3 Tahapan Pemodelan

Tahapan mencari solusi permasalahan kehidupan sehari-hari maupun pada ilmu-ilmu lain dengan menggunakan bantuan matematika diberikan sebagai berikut.

- (1) Pemodelan matematika untuk menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari diawali dengan mengenali masalah tersebut terlebih dahulu yaitu melalui beberapa langkah yaitu identifikasi masalah, lambang, satuan dan variabel atau konstanta serta menentukan besaran yang terlibat, selain itu dalam proses penterjemahan masalah selalu terdapat hukum yang mengendalikan.
- (2) Menentukan variabel atau konstanta yang penting dan merinci keterkaitan antara variabel atau konstanta tersebut sehingga dapat disusun model matematika. Model matematika yang terbentuk harus bebas satuan.
- (3) Dengan memanfaatkan teori-teori dalam matematika dapat diperoleh solusi model.
- (4) Dengan menginterpretasikan solusi model ditentukan solusi masalah. Pada proses ini satuan muncul kembali (Nagle dan Saff, 1993: 3).

Uraian di atas dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Bagan Alur Penyelesaian Masalah (Nagle dan Saff, 1993: 4).

2.4 Hukum Newton Pertama

Apabila tidak ada gaya total yang bekerja pada suatu benda, maka benda tersebut akan tetap diam atau bergerak pada suatu lintasan lurus dengan kecepatan tetap. Begitu sebuah benda bergerak, tidak diperlukan lagi gaya total untuk mempertahankannya agar tetap bergerak. Dengan kata lain:

“Sebuah benda yang kepadanya tidak bekerja suatu gaya total akan bergerak dengan kecepatan konstan (yang nilainya bisa saja nol) dan percepatan nol (Hukum Newton Pertama tentang gerak)” (Young dan Freedman, 2002: 96).

Pada saat sebuah benda tidak dikenai gaya atau dikenai beberapa gaya yang hasil penjumlahan vektornya sama dengan nol, maka dikatakan bahwa benda tersebut berada dalam kesetimbangan. Pada kesetimbangan benda dapat diam atau bergerak pada garis lurus dengan kecepatan tetap. Untuk sebuah benda dalam kesetimbangan, gaya total adalah nol

$$\Sigma \vec{F} = 0 \quad (2.1.1)$$

dimana F adalah gaya yang bekerja pada suatu benda (Young dan Freedman, 2002: 97).

2.5 Hukum Newton Kedua

Gaya total sebuah benda adalah penyebab benda mengalami percepatan. Percobaan menunjukkan bahwa jika kombinasi gaya-gaya $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$ diberikan pada sebuah benda maka benda tersebut akan mengalami percepatan (besar dan arah). Newton mengemas semua hubungan ini dan digabungkan dengan hasil percobaan dalam sebuah pernyataan singkat yang kita kenal dengan Hukum Newton II tentang gerak, yaitu:

”Jika suatu gaya luar total bekerja pada sebuah benda maka benda akan mengalami percepatan. Arah percepatan tersebut sama dengan arah gaya total. Vektor gaya total sama dengan massa benda dikalikan dengan percepatan benda.

Dalam bentuk persamaan $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ “ (Young dan Freedman, 2002: 101).

Pernyataan alternatifnya adalah bahwa percepatan benda (perubahan kecepatan rata-rata) sama dengan jumlah (resultan) vektor dari semua gaya yang bekerja pada benda, dibagi dengan massanya (Serway dan Jewett, 2004: 57).

$$\text{Dalam bentuk persamaan } \frac{\Sigma F}{m} = a. \quad (2.2.1).$$

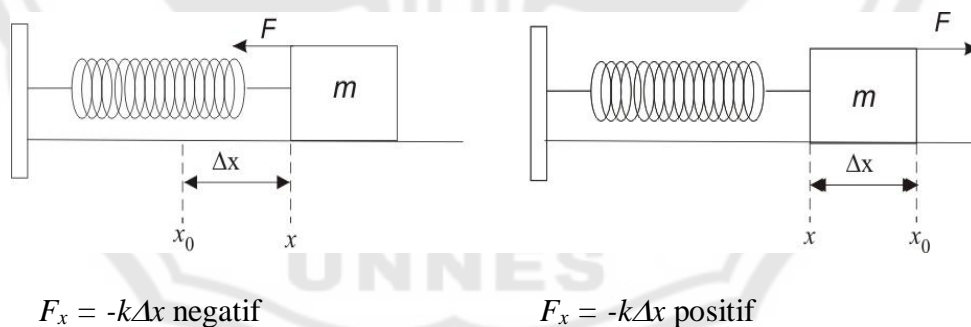
2.6 Hukum Hooke

Sebuah pegas dibuat dengan cara melilitkan kawat yang kaku menjadi sebuah kumparan. Jika pegas ditekan atau diregangkan kemudian dilepas, pegas kembali ke panjang asalnya, jika perpindahannya tidak terlalu besar. Ada suatu

batas untuk perpindahan itu, diatas nilai itu pegas tidak kembali ke panjang semula tetapi tinggal secara permanen dalam keadaan yang telah berubah, jika hanya diperbolehkan perpindahan di bawah batas ini, dapat mengkalibrasi peregangan atau penekanan Δx melalui gaya yang diperlukan untuk menghasilkan peregangan atau penekanan itu. Secara eksperimen ditemukan bahwa untuk Δx yang kecil, gaya yang dikerjakan oleh pegas mendekati sebanding dengan Δx dan dalam arah berlawanan. Hubungan ini dikenal sebagai hukum Hooke yang dapat ditulis

$$F_x = -k(x - x_0) = -k\Delta x \quad (2.3.1)$$

dengan konstanta k disebut konstanta gaya pegas. Jarak x adalah koordinat ujung pegas atau benda yang diikatkan pada ujung pegas tersebut. Konstanta x_0 adalah nilai koordinat jika pegas tidak diregangkan dari posisi kesetimbangannya. Gaya semacam itu dinamakan gaya pemulih karena gaya ini cenderung memulihkan pegas ke konfigurasi awalnya (Tipler, 1991: 102).



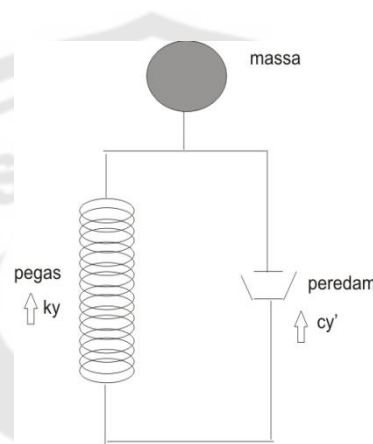
Gambar 2.2 Gaya Pemulih pada Pegas (Tipler, 1991: 102).

2.7 Osilasi

Osilasi terjadi bila sebuah sistem diganggu dari posisi kesetimbangan stabilnya. Karakteristik gerak osilasi yang paling dikenal adalah gerak tersebut

bersifat periodik, yaitu berulang-ulang. Banyak contoh osilasi yang mudah dikenali, misalnya perahu kecil yang berayun turun naik, bandul jam yang berayun ke kiri dan ke kanan, dan senar gitar yang bergetar. Suatu sistem yang menunjukkan gejala gerak harmonik sederhana adalah sebuah benda yang tertambat ke sebuah pegas (Kreyszig, 1993: 88).

2.8 Sistem Redaman



Gambar 2.3 Sistem Redaman

Secara fisik kita dapat menghubungkan badan (massa) dengan peredam seperti pada Gambar 4. Anggap gaya baru ini menjadi sebanding dengan kecepatan $y' = \frac{dy}{dt}$, seperti yang ditunjukkan gambar. Ini umumnya merupakan pendekatan yang baik, setidaknya untuk kecepatan yang rendah. Sekarang ditambahkan gaya redaman $F_d = -cy'$ kedalam persamaan $my'' = -ky$, sehingga diperoleh $my'' = -ky - cy'$ atau $my'' + cy' + ky = 0$.

Konstanta redaman disebut c . Jelas c positif. Untuk y' positif, badan (massa) bergerak ke bawah (yang merupakan arah positif). Oleh karena itu gaya redaman $F_d = -cy'$ selalu bertindak terhadap arah gerak. Bila badan (massa)

bergerak ke atas, ini berarti bahwa gaya redaman harus negatif, $F_d = -cy' < 0$, sehingga $-c < 0$ dan $c > 0$. Sedangkan bila badan bergerak ke bawah, $y' < 0$ sehingga $F_d = -cy > 0$ karena $-c < 0$ dan $c > 0$.

Persamaan $my'' + cy' + ky = 0$ merupakan persamaan linier homogen dan memiliki koefisien konstan. Oleh karena itu dapat diselesaikan dengan membagi persamaan dengan m sehingga diperoleh persamaan karakteristik $y^2 + \frac{c}{m}y + \frac{k}{m} = 0$.

Dengan formula untuk akar-akar persamaan kuadrat diperoleh $y_1 = -\alpha + \beta$, $y_2 = -\alpha - \beta$, dimana $\alpha = \frac{c}{m}$ dan $\beta = \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$. Terdapat jenis-jenis redaman yang tergantung pada jumlah redaman (banyak, rata-rata atau sedikit) yang dibedakan pada kasus dibawah ini:

Kasus I: $c^2 > 4mk$. Akar real berlainan (redaman berlebih).

Kasus II: $c^2 = 4mk$. Akar real yang sama (redaman kritis).

Kasus III: $c^2 < 4mk$. Akar kompleks (redaman terlalu rendah) (Kreyszig, 2006: 64-65).

2.9 Persamaan Diferensial

Banyak masalah yang sangat penting dalam mesin, ilmu fisika, ilmu sosial dan yang lainnya, ketika memformulakan dalam bentuk matematika mensyaratkan fungsi yang memenuhi persamaan yang memuat satu atau lebih turunan-turunan dari fungsi yang tidak diketahui. Persamaan-persamaan di atas disebut persamaan

diferensial. Persamaan diferensial diperoleh berdasarkan pemodelan matematika dari permasalahan yang ada di dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh penerapan matematika pada ilmu fisika. Persamaan diferensial dari hukum Newton II yang timbul karena gejala alam, bahwa massa kali percepatan dari suatu benda sama dengan gaya luar yang bekerja pada benda itu. Dituliskan dalam $F = m \cdot a$. Jika $y(t)$ menyatakan posisi partikel bermassa m pada waktu t dan dengan gaya F , selanjutnya maka didapatkan

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = F \left[t, y, \frac{dy}{dt} \right] \quad (2.4.1)$$

dimana gaya F mungkin merupakan fungsi dari t, y , dan kecepatan $\frac{dy}{dt}$. Jadi persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan-turunan dari satu atau lebih variabel terikat yang tergantung pada satu atau lebih variabel bebas. Beberapa contoh dari persamaan diferensial:

$$(1) \frac{dy}{dt} = 2t + 10,$$

$$(2) \frac{d^4y}{dt^4} + 5 \frac{d^2y}{dt^2} + 3y = \sin t,$$

$$(3) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + 2z = 0, \text{ dan}$$

$$(4) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0.$$

Suatu persamaan diferensial yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel terikat yang tergantung pada variabel bebas tunggal disebut persamaan diferensial biasa, sedangkan persamaan diferensial yang memuat turunan parsial dari satu atau lebih variabel terikat yang tergantung pada variabel

bebas tidak tunggal adalah persamaan diferensial parsial. Contoh (1) dan (2) adalah persamaan diferensial biasa, sedangkan contoh (3) dan (4) merupakan persamaan diferensial parsial.

2.10 Order Persamaan Diferensial

Order dari persamaan diferensial adalah derajat atau pangkat tertinggi dari turunan yang muncul dalam persamaan. Persamaan (2.4.1) adalah persamaan diferensial order satu. Sedangkan contoh (1) dan (3) adalah persamaan diferensial order dua. Contoh (2) merupakan persamaan diferensial order empat dan contoh (4) berorder dua. Secara umum persamaan diferensial berorder n dapat dituliskan sebagai

$$F[t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t)] = 0. \quad (2.5.1)$$

Persamaan (2.5.1) menyatakan relasi antara variabel bebas t dan nilai-nilai dari fungsi $u, u', \dots, u^{(n)}$. Untuk lebih mudahnya dalam persamaan (2.5.1) biasanya kita tulis y untuk $u(t)$, y' untuk $u'(t)$ dan seterusnya. Jadi persamaan (2.5.1) dapat ditulis sebagai

$$F[t, y, y', \dots, y^{(n)}] = 0. \quad (2.5.2)$$

Berikut ini disajikan suatu contoh

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4 \quad (2.5.3)$$

yang merupakan persamaan diferensial orde tiga untuk $y = u(t)$. Diasumsikan bahwa selalu mungkin untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang diberikan untuk turunan yang terbesar (Waluya, 2006: 4).

2.11 Persamaan Diferensial Linear dan Tak Linear

Persamaan diferensial biasa $F[t, y, y', \dots, y^{(n)}] = 0$ dikatakan linear jika F dalam variabel-variabel $y, y', \dots, y^{(n)}$. Definisi serupa juga berlaku untuk persamaan diferensial sebagian. Jadi secara umum persamaan diferensial biasa linear order n diberikan dengan

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y^{(n)} = g(t). \quad (2.6.1)$$

Persamaan yang tidak dalam bentuk persamaan (2.6.1) merupakan persamaan tak linear.

Berikut ini disajikan beberapa contoh persamaan diferensial linear dan yang tak linear.

(1) $t^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + 5 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$; merupakan persamaan diferensial linear,

(2) $7 \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{g}{L} \cos \phi = 0$;

merupakan persamaan diferensial tak linear, karena suku $\cos \phi$, dan

(3) $(1 + y^2) \frac{d^e y}{dx} t \frac{dy}{dt} + 2y^2 = e^t$;

merupakan persamaan diferensial tak linear, karena suku $(1 + y^2)$ dan $2y^2$.

2.12 Solusi Persamaan Diferensial

Perhatikan persamaan diferensial biasa orde n berikut.

$$\phi^n(t) = f[t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n-1)}(t)]. \quad (2.7.1)$$

Suatu solusi dari persamaan (2.7.1) pada interval terbuka $\alpha < t < \beta$ adalah sebuah fungsi ϕ sehingga $\phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n-1)}(t)$ ada dan memenuhi persamaan (2.7.1) untuk setiap t dalam $\alpha < t < \beta$. Diasumsikan bahwa fungsi f pada

persamaan (2.7.1) adalah fungsi bernilai real dan akan dicari solusi-solusi yang bernilai real $y = \phi(t)$.

Solusi suatu persamaan diferensial berupa solusi umum dan solusi khusus. Solusi umum suatu persamaan diferensial adalah solusi yang mengandung sembarang konstan, sedangkan solusi khusus suatu persamaan diferensial adalah solusi yang dapat diperoleh dengan memberikan nilai tertentu pada sembarang konstan yang terdapat pada solusi umum.

Berikut merupakan solusi persamaan diferensial linear baik order satu maupun order dua:

(1) Solusi Persamaan Diferensial Linear Order Satu

Suatu fungsi $y = y(x)$ merupakan solusi persamaan diferensial $F(x, y, y') = 0$ apabila $y = y(x)$ dan y' didistribusikan pada persamaan diferensial tersebut, ruas kiri bernilai nol.

Berikut ini disajikan contoh bahwa $y = x^2 + 1$ adalah suatu solusi persamaan diferensial $y' = 2x$.

Demikian pula $y = x^2 + c$ untuk setiap konstanta real c juga merupakan solusi persamaan diferensial $y' = 2x$. Persamaan $y = x^2 + 1$ merupakan suatu solusi khusus dan $y = x^2 + c$ merupakan solusi umum.

(2) Solusi Persamaan Diferensial Linear Order Dua

(a) Solusi Persamaan Diferensial Linear Order Dua Homogen

Sebagai contoh, perhatikan persamaan diferensial yang berbentuk

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (2.7.2)$$

dengan p dan q merupakan konstanta real. Tulis $y = e^{mx}$ suatu solusi persamaan diferensial (2.7.2). Jelas $y' = me^{mx}$ dan $y'' = m^2 e^{mx}$. Ganti y, y', y'' ke persamaan (2.7.2), diperoleh: $m^2 e^{mx} + mpe^{mx} + qe^{mx} = 0$.

Jelas $e^{mx} \neq 0$.

Jadi $m^2 e^{mx} + mpe^{mx} + qe^{mx} = 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + mp + q = 0.$$

Persamaan $m^2 + pm + q = 0$ disebut persamaan karakteristik dari persamaan diferensial (2.7.2) dan akar-akarnya disebut akar-akar karakteristik.

Jelas $m^2 + mp + q = 0$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{atau} \quad m = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad (2.7.4)$$

Dari perhitungan di atas jelas bahwa $y_1 = e^{m_1 x}$ dan $y_2 = e^{m_2 x}$ merupakan solusi dari persamaan diferensial $y'' + py' + qy = 0$.

i. Kasus $m_1, m_2 \in R$ dan $m_1 \neq m_2$:

Tulis S : himpunan solusi $y'' + py' + qy = 0$.

Jelas $S = \{y \mid y \text{ kombinasi linier } e^{m_1 x} \text{ dan } e^{m_2 x}\}$.

Ambil sembarang $y \in S$.

Jelas $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$ dengan $c_1, c_2 \in R$.

ii. Kasus $m_1, m_2 \in R$ dan $m_1 = m_2 = m$:

Jelas $m_1 = m_2 = m = -\frac{p}{2}$.

Sehingga hanya mempunyai satu solusi yaitu $y = ce^{mx}$.

Karena persamaan diferensial pada orde dua, sehingga perlu mempunyai dua solusi untuk membangun solusi umumnya. Untuk mencari solusi kedua yang bebas linier

Tulis $y = v(x)y_1(x)$.

Jelas $y' = v'y_1 + vy_1'$ dan $y'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$.

Substitusi ke persamaan diferensial (2.7.2) diperoleh

$$v(y_1'' + py_1' + qy_1) + v'(2y_1' + py_1) + v''(y_1) = 0.$$

Jelas $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$.

Sehingga diperoleh $v'' + v'(2\frac{y_1'}{y_1} + p) = 0$.

Tulis $u = v'$.

Jelas $u' + u(2\frac{y_1'}{y_1} + p) = 0$

$$\Leftrightarrow u' + u(2\frac{\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x}}{e^{-\frac{p}{2}x}} + p) = 0$$

$$\Leftrightarrow u' + u(-p + p) = 0$$

$$\Leftrightarrow u' = 0$$

$$\Leftrightarrow v'' = 0.$$

Jelas $v'' = 0$

$$\Leftrightarrow v' = c_2$$

$$\Leftrightarrow v(x) = c_2x + c_3.$$

Diperoleh solusi lain yang bebas linier

$y = v(x)y_1$

$$\Leftrightarrow y = c_2xe^{-\frac{p}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow y = c_2 x e^{mx}.$$

$$\text{Jadi } y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}.$$

iii. Kasus $m_1, m_2 \in \mathbb{C}$ dan $m_1 \neq m_2$:

$$\text{Tulis } m_1 = \alpha + \beta i, m_2 = \alpha - \beta i \text{ dengan } \alpha = -\frac{p}{2} \text{ dan } \beta = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}.$$

$$\text{Jelas } y = c_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + c_2 e^{(\alpha-\beta i)x} \text{ dengan } y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x} \text{ dan } y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

$$\text{Tulis } e^{\pm i\beta x} = \cos(\beta x) \pm i \sin(\beta x).$$

$$\text{Tulis } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ dan } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

$$\text{Jadi } y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) \text{ dan}$$

$$y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)).$$

$$\text{Tulis } Y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \text{ dan } Y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

$$\text{Jadi } y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$$

$$= c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$$= e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)).$$

(b) Solusi Persamaan Diferensial Linear Order Dua Tak Homogen

Terdapat beberapa metode untuk menyelesaikan solusi persamaan diferensial linear order tak homogen. Antara lain Metode Koefisien Tak Tentu, Metode Variasi Parameter, dan Operator \mathcal{D} .

Sebuah solusi Y dari persamaan linear tak homogen orde ke- n dengan koefisien konstan dapat diperoleh dengan metode koefisien tak tentu (tebakan) bila $g(t)$ dalam bentuk tertentu.

Perhatikan persamaan tak homogen berikut ini:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t),$$

dengan $p(t)$, $q(t)$, dan $g(t)$ adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu selang I.

Teorema 1

Solusi umum persamaan tak homogen dapat dinyatakan sebagai

$$y = \phi(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + Y(t),$$

dimana y_1 dan y_2 adalah basis dari solusi persamaan homogen, c_1 dan c_2 adalah konstanta-konstanta, dan $Y(t)$ adalah penyelesaian khusus dari persamaan tak homogen (Waluya, 2006: 77).

Teorema ini memberikan langkah-langkah membangun solusi persamaan tak homogen adalah sebagai berikut.

- (1) Temukan solusi umum persamaan homogenya,
- (2) Temukan sebuah solusi untuk persamaan tak homogen,
- (3) Jumlahkan keduanya, dan
- (4) Temukan konstanta c_1 dan c_2 dari kondisi-kondisi awalnya.

Jika fungsi tebakan merupakan salah satu dari solusi homogenya, maka fungsi tebakan yang dipilih tidak pernah membangun sebuah suku yang memenuhi ruas kanan tak homogen $g(t)$ sehingga fungsi tebakannya harus dikalikan dengan t .

Ada beberapa urutan yang relatif mudah untuk menemukan solusi khusus dengan metode koefisien tak tentu, yaitu sebagai berikut.

- (1) Jika $g(t) = e^{at}$, maka fungsi tebakannya $y_p = Ae^{at}$.
- (2) Jika $g(t) = \cos(at)$ atau $\sin(at)$, maka $y_p = A \cos(at) + B \sin(at)$.

- (3) Jika $g(t) = a_n t^n + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$, maka $y_p = A_n t^n + \dots + A_2 t^2 + A_1 t + A_0$.
- (4) Jika $g(t) = t^2 e^{\alpha t}$, maka $y_p = (A_2 t^2 + A_1 t + A_0) e^{\alpha t}$.
- (5) Jika $g(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ atau $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, maka $y_p = e^{\alpha t} [A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)]$.
- (6) Jika $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, y_p^1 tebakan untuk $g_1(t)$ dan y_p^2 untuk $g_2(t)$, maka $y_p = y_p^1 + y_p^2$.

(Waluya, 2006: 80).

Berikut ini disajikan contoh persamaan diferensial.

Temukan solusi khusus persamaan $y'' + 9y = 2 \cos(3t)$.

Penyelesaian:

Persamaan homogen dari persamaan tersebut adalah $y'' + 9y = 0$, yang akan memberikan solusi komplemen, yaitu:

$$y_c = c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t).$$

Untuk menemukan solusi khususnya, digunakan metode menebak yang memuat fungsi-fungsi $\sin(3t)$ dan $\cos(3t)$. Akan tetapi, fungsi-fungsi tersebut merupakan solusi homogenya. Oleh karena itu, jika menebak solusi khususnya dengan fungsi-fungsi tersebut, maka tak akan pernah memenuhi bagian tak homogenya, sehingga digunakan fungsi tebakannya yaitu:

$$y_p = At \sin(3t) + Bt \cos(3t),$$

yang akan memenuhi bentuk sederhana $\sin(3t)$ dan $\cos(3t)$ setelah dideferensialkan.

Dari y_p diperoleh

$$y_p' = A \sin(3t) + B \cos(3t) + 3At \cos(3t) - 3Bt \sin(3t)$$

$$y_p'' = 3A \cos(3t) - 3B \sin(3t) - 9At \sin(3t) - 9Bt \cos(3t) + 3A \cos(3t) - 3B \sin(3t)$$

$$= 6A \cos(3t) - 6B \sin(3t) - 9At \sin(3t) - 9Bt \cos(3t)$$

Dengan mensubstitusikan y_p, y_p', y_p'' diperoleh

$$\Leftrightarrow 6A \cos(3t) - 6B \sin(3t) - 9At \sin(3t) - 9Bt \cos(3t) + 9At \sin(3t) + 9Bt \cos(3t) = 2 \cos(3t)$$

$$\Leftrightarrow 6A \cos(3t) - 6B \sin(3t) = 2 \cos(3t)$$

Jadi diperoleh,

$$6A = 2 \Leftrightarrow A = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ dan } -6B = 0 \Leftrightarrow B = 0$$

Jadi, solusi khususnya adalah

$$y_p = \frac{1}{3} t \sin(3t)$$

Jadi solusi umumnya adalah

$$y(t) = c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t) + \frac{1}{3} t \sin(3t).$$

Kebanyakan persamaan diferensial nonlinear tidak dapat diselesaikan secara eksplisit. Cara yang tepat dalam mempelajari persamaan diferensial nonlinear beserta sistemnya adalah dengan membuat persamaan itu menjadi “linear” dengan cara menghampiri persamaan tersebut oleh persamaan diferensial linear (hampiran/aproksimasi).

2.13 Maple

Maple merupakan salah satu perangkat lunak (*software*) yang dikembangkan oleh Waterloo Inc. Kanada. Maple sering digunakan untuk keperluan *ComputerAlgebraic System (CAS)*. Menu-menu yang terdapat pada tampilan program Maple ini terdiri dari menu *File, Edit, View, Insert, Format, Spreadsheet, Option, Window, dan Help*. Sebagian besar menu-menu di atas merupakan menu standar yang dikembangkan untuk program aplikasi pada system operasi *Windows*.

Maple sering digunakan untuk keperluan penyelesaian permasalahan persamaan diferensial dan visualisasinya, karena Maple memiliki kemampuan menyederhanakan persamaan, hingga suatu solusi persamaan diferensial dapat dipahami dengan baik. Keunggulan lain dari Maple untuk aplikasi persamaan diferensial adalah kemampuan melakukan animasi grafik dari suatu fenomena gerakan yang dimodelkan ke dalam persamaan diferensial yang memiliki nilai awal dan syarat batas (Kartono, 2001).

Pernyataan yang sering digunakan untuk keperluan menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial antara lain: *diff* digunakan untuk mendiferensialkan (menurunkan) suatu fungsi, *dsolve* digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, *evalf* memberikan nilai numeric dari suatu persamaan, dan *simplify* digunakan untuk menyederhanakan suatu persamaan. Namun tentu saja pernyataan-pernyataan awal seperti *restart* dan deklarasi variabel/konstanta yang diperlukan tidak boleh diabaikan. Untuk membuat grafik pada Maple digunakan *perintah plot, plot2d, plot3d*, tergantung dimensi dari

pernyataan yang dimiliki. Untuk membuat gerakan animasi digunakan perintah *animate3d* (Kartono, 2001).

Bahasa yang digunakan pada *Maple* merupakan bahasa pemrograman yang sekaligus sebagai bahasa aplikasi, sebab pernyataan atau *statement* yang merupakan input pada *Maple* berupa deklarasi pada bahasa program dan perintah (*command*) yang sering digunakan pada bahasa aplikasi.



BAB III

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini metode yang penulis gunakan adalah studi pustaka. Langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut.

3.1 Menentukan Masalah

Dalam tahap ini dilakukan pencarian sumber pustaka dan memilih bagian dalam sumber pustaka tersebut yang dapat dijadikan sebagai permasalahan yang akan dikaji. Dalam hal ini penulis mengambil materi tentang meriam.

3.2 Perumusan Masalah

Masalah yang ditemukan kemudian dirumuskan kedalam pertanyaan yang harus diselesaikan yaitu sebagai berikut.

- (1) Bagaimana model matematika pada sistem redaman meriam?
- (2) Bagaimana solusi model matematika pada sistem redaman meriam?
- (3) Bagaimana visualisasi model matematika pada sistem redaman meriam menggunakan program *Maple*?

Perumusan masalah di atas mengacu pada beberapa pustaka yang ada. Selanjutnya dengan menggunakan pendekatan teoritik maka dapat ditemukan jawaban permasalahan sehingga tercapai tujuan penulisan skripsi.

3.3 Studi Pustaka

Dalam langkah ini dilakukan kajian sumber-sumber pustaka dengan cara mengumpulkan data atau informasi yang berkaitan dengan masalah, mengumpulkan konsep pendukung yang diperlukan dalam menyelesaikan masalah, sehingga didapatkan suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah.

3.4 Analisis dan Pemecahan Masalah

Dari berbagai sumber pustaka yang sudah menjadi bahan kajian, diperoleh suatu pemecahan masalah di atas. Selanjutnya dilakukan langkah-langkah pemecahan masalah sebagai berikut.

- (1) Menentukan model matematika pada sistem redaman meriam.
- (2) Menentukan solusi model matematika pada sistem redaman meriam.
- (3) Mengatahui aplikasi program *Maple* untuk visualisasi model matematika pada sistem redaman meriam.

3.5 Penarikan Kesimpulan

Langkah terakhir dalam metode penelitian adalah penarikan kesimpulan yang diperoleh dari hasil langkah pemecahan masalah.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Pemodelan pada Sistem Redaman Meriam

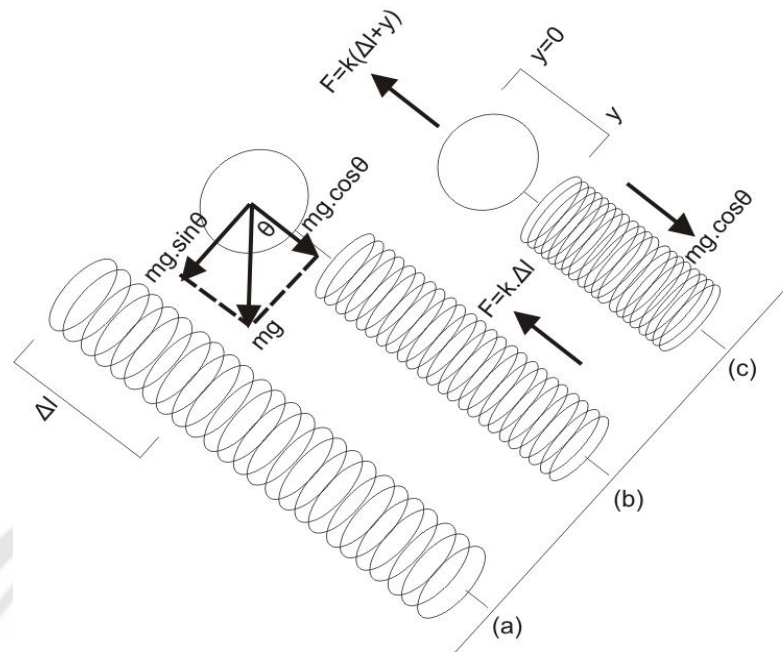
4.1.1 Gaya yang Bekerja pada Peredam

Peredam berfungsi menahan atau meredam getaran ketika peluru ditembakkan. Pada peredam terdapat gaya pemulih sehingga pegas yang bergerak akan kembali ke posisi setimbangnya. Jika c adalah suatu konstanta yang menggambarkan kekuatan dari gaya redaman dan y merupakan perpindahan posisi massa terhadap waktu maka kita memiliki suatu gaya tambahan pada benda yaitu

$$F_d = -c \frac{dy}{dt} \quad (4.1.1)$$

dimana F_d merupakan gaya yang bekerja pada peredam, c merupakan konstanta yang menggambarkan kekuatan dari gaya redaman dan $\frac{dy}{dt}$ merupakan perpindahan gerak benda terhadap waktu. Tanda negatif menunjukkan bahwa gaya selalu berlawanan dengan perpindahan benda.

4.1.2 Gaya-gaya yang Bekerja pada Pegas



Gambar 4.1 Posisi Pegas (a) sebuah pegas, (b) pegas dalam kesetimbangan, (c) jika massa dipindahkan dari kesetimbangan

Pada Gambar 4.1 (b) pegas dalam keadaan setimbang. Sesuai dengan Hukum Pertama Newton diperoleh gaya yang bekerja pada pegas adalah

$$\sum F = 0$$

$$\Leftrightarrow m \cdot g \cos \theta - k \cdot \Delta l = 0$$

$$\Leftrightarrow m \cdot g \cos \theta = k \cdot \Delta l \quad (4.1.2.1)$$

dimana m merupakan massa peluru, g merupakan gaya gravitasi, k merupakan konstanta pegas, Δl merupakan perubahan panjang pegas dan θ merupakan sudut yang dibentuk antara peluru dengan sumbu vertikal.

Pada Gambar 4.1 (c) benda dipindahkan dari keadaan setimbang, gaya pemulihnya sebanding dengan koordinat yang terukur dari posisi kesetimbangan.

Pada Gambar 4.1 (c) massa mengalami percepatan sehingga sesuai dengan Hukum Newton Kedua, gaya total yang bekerja pada pegas adalah

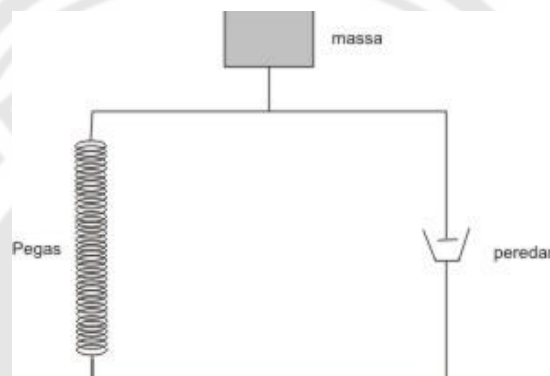
$$\sum F = m \cdot a$$

$$\Leftrightarrow m \cdot g \cos \theta - k \cdot (\Delta l + y) = m \cdot a$$

$$\Leftrightarrow m \cdot g \cos \theta - k \cdot \Delta l - k \cdot y = m \cdot a$$

$$\Leftrightarrow -k \cdot y = m \cdot a. \quad (4.1.2.2)$$

4.1.3 Gaya-gaya yang Bekerja pada Pegas dan Peredam



Gambar 4.2 Rangkaian Pegas dan Peredam pada Sistem Redaman Meriam

Pada sistem redaman meriam dipengaruhi gaya-gaya yang bekerja pada pegas dan peredam. Sesuai dengan Hukum Kedua Newton, gaya-gaya yang bekerja pada pegas dan peredam adalah

$$\sum F = ma$$

$$\Leftrightarrow -ky - c \frac{dy}{dt} = ma$$

$$\Leftrightarrow -ky - c \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow m \frac{d^2y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

$$\Leftrightarrow my'' + cy' + ky = 0. \quad (4.1.3.1)$$

Jadi pemodelan matematika pada sistem redaman meriam yaitu

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0. \quad (4.1.3.2)$$

4.2 Solusi dari Pemodelan pada Sistem Redaman Meriam

4.2.1 Pemodelan Matematika tanpa gaya luar

Pemodelan matematika yang diperoleh berbentuk

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0 \quad (4.2.1.1)$$

merupakan bentuk dari persamaan diferensial linier orde 2 homogen. Persamaan (4.2.1) dapat ditulis

$$y'' + 2dy' + \omega_0^2 y = 0 \quad (4.2.1.2)$$

dengan $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ dan $d = \frac{c}{2m}$.

Persamaan karakteristik dari persamaan (4.2.1.2) adalah

$$r^2 + 2dr + \omega_0^2 = 0. \quad (4.2.1.3)$$

Akar-akar karakteristik dari persamaan (4.2.1.3) sebagai berikut.

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{-2d \pm \sqrt{4d^2 - 4.1.\omega_0^2}}{2.1} \\ &= -d \pm \sqrt{d^2 - \omega_0^2}. \end{aligned}$$

(1) Kasus $d^2 - \omega_0^2 > 0$

Kondisi ini dinamakan redaman berlebih (*overdamping*). Persamaan (4.2.1.3) mempunyai dua akar riil yaitu

$$r_1 = -d + \sqrt{d^2 - \omega_0^2}, \text{ dan } r_2 = -d - \sqrt{d^2 - \omega_0^2}.$$

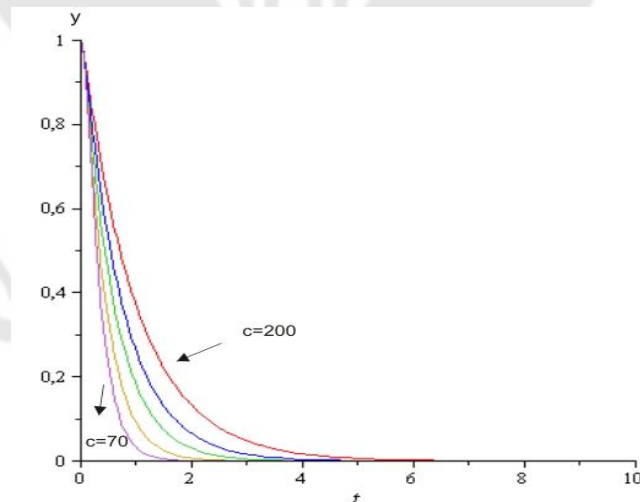
Sehingga solusi dari persamaan (4.2.1.2) adalah

$$\begin{aligned}
 y_h &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \\
 &= c_1 e^{-d + \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-d - \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t}. \quad (4.2.1.4)
 \end{aligned}$$

Jelas $y_h' = \frac{dy_h}{dt}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d \left(c_1 e^{-d + \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-d - \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t} \right)}{dt} \\
 &= \left(-d + \sqrt{d^2 - \omega_0^2} \right) c_1 e^{-d + \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t} \\
 &\quad + \left(-d - \sqrt{d^2 - \omega_0^2} \right) c_2 e^{-d - \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t}. \quad (4.2.1.5)
 \end{aligned}$$

Plot solusi aproksimasi osilasi redaman berlebih persamaan meriam $my'' + cy' + ky = 0, y(0) = 1, \frac{dy}{dt} = 0$ menggunakan *Maple* dengan berbagai konstanta redaman diberikan pada Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Plot solusi aproksimasi osilasi redaman berlebih persamaan meriam

$$my'' + cy' + ky = 0, y(0) = 1, \frac{dy}{dt} = 0, m = 5, k = 200$$

menggunakan *Maple* dengan berbagai konstanta redaman.

Dari Gambar 4.3, dengan kecepatan awal nol dan jika benda dipindahkan sejauh 1 satuan dapat dilihat bahwa getaran yang timbul karena proses penembakan semakin lama akan semakin kecil. Hal ini dikarenakan adanya peredam pada meriam. Getaran berbanding terbalik dengan waktu, artinya semakin besar waktunya getaran yang ditimbulkan semakin kecil dan sebaliknya. Konstanta peredam juga berpengaruh pada waktu berhentinya getaran pada meriam. Semakin besar konstanta peredam maka semakin besar waktu yang diperlukan supaya meriam berhenti bergetar.

$$(2) \text{ Kasus } d^2 - \omega_0^2 = 0$$

Kondisi ini dinamakan redaman kritis (*critically damping*). Persamaan (4.2.1.3) akan mempunyai dua akar riil kembar yaitu

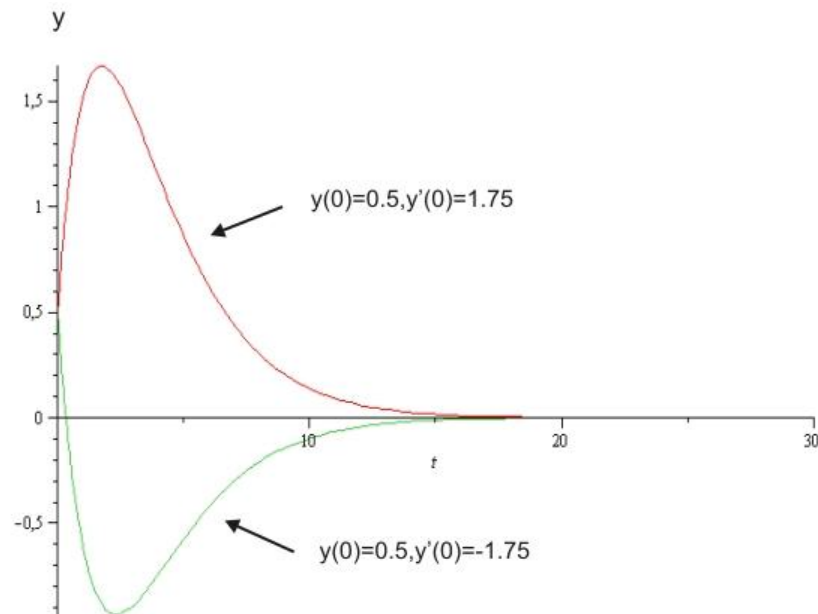
$$r_1 = r_2 = -d .$$

Sehingga solusi dari persamaan (4.2.1.2) adalah

$$y_h = (c_1 + c_2 t)e^{-dt} . \quad (4.2.1.6)$$

$$\begin{aligned} y_h' &= \frac{dy_h}{dt} \\ &= \frac{(c_1 + c_2 t)e^{-dt}}{dt} \\ &= \frac{c_1 + c_2 t}{dt} e^{-dt} + (c_1 + c_2 t) \frac{e^{-dt}}{dt} \\ &= c_2 e^{-dt} + (c_1 + c_2 t)(-d)e^{-dt} . \end{aligned} \quad (4.2.1.7)$$

Plot solusi aproksimasi redaman kritis persamaan meriam $my'' + cy' + ky = 0, y(0) = 1, \frac{dy}{dt} = 0$ menggunakan *Maple* diberikan pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4 Plot solusi aproksimasi redaman kritis persamaan meriam

$$my'' + cy' + ky = 0, m = 5, c = 5, k = \frac{5}{4}, y(0) = \frac{1}{2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{7}{4} \text{ dan } y(0) = \frac{1}{2}, \frac{dy}{dt} = -\frac{7}{4} \text{ menggunakan Maple}$$

Pada Gambar 4.4, dengan kondisi dan kecepatan awal yang berbeda dapat dilihat bahwa sistem akan berosilasi dan kemudian berhenti. Dalam hal ini sistem tidak mengalami osilasi berkali-kali. Waktu pada redaman kritis merupakan waktu yang efektif untuk meriam berhenti bergetar. Hal tersebut dikarenakan semakin cepat getaran berhenti maka semakin cepat pula meriam dapat digunakan lagi.

(3) Kasus $d^2 - \omega_0^2 < 0$

Kondisi ini dinamakan redaman terlalu rendah (*underdamping*). Persamaan (4.2.1.3) akan mempunyai dua akar imajiner yaitu

$$r_1 = -d + \sqrt{(d^2 - \omega_0^2) i^2} = -d + \sqrt{(d^2 - \omega_0^2) i}.$$

$$r_2 = -d - \sqrt{(d^2 - \omega_0^2) i^2} = -d - \sqrt{(d^2 - \omega_0^2) i}.$$

Sehingga solusi dari persamaan (4.2.1.2) adalah

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \\ &= c_1 e^{\left(-d + \sqrt{(d^2 - \omega_0^2)} i\right) t} + c_2 e^{\left(-d - \sqrt{(d^2 - \omega_0^2)} i\right) t} \\ &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \end{aligned}$$

dengan

$$y_1 = e^{\left(-d + \sqrt{(d^2 - \omega_0^2)} i\right) t} \quad \text{dan} \quad y_2 = e^{\left(-d - \sqrt{(d^2 - \omega_0^2)} i\right) t}. \quad (4.2.1.9)$$

Dengan mengingat bahwa

$$e^{\pm i \alpha t} = \cos \alpha t \pm i \sin \alpha t.$$

Maka persamaan (4.2.1.9) bisa dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\left(-d + \sqrt{(d^2 - \omega_0^2)} i\right) t} \\ &= e^{-dt} \left(\cos \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t + i \sin \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t \right), \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{\left(-d - \sqrt{(d^2 - \omega_0^2)} i\right) t} \\ &= e^{-dt} \left(\cos \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t - i \sin \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t \right). \end{aligned}$$

Diperoleh dua solusi baru yaitu

$$Y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{-dt} \cos \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t, \text{ dan}$$

$$Y_2 = \frac{y_1 + y_2}{2i} = e^{-dt} \sin \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t.$$

Sehingga solusi dari persamaan (4.2.1.2)

$$Y_h = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$$

$$= c_1 e^{-dt} \cos \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t + c_2 e^{-dt} \sin \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t$$

$$= e^{-dt} \left(c_1 \cos \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t + c_2 \sin \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t \right)$$

$$= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} e^{-dt} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t \right)$$

$$= c_3 e^{-dt} \left(\cos \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + \sin \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \right)$$

$$= c_3 e^{-dt} \left(\cos \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t \cos \varphi + \sin \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t \sin \varphi \right)$$

$$= c_3 e^{-dt} \cos \left(\sqrt{d^2 - \omega_0^2} t + \varphi \right). \quad (4.2.1.10)$$

Dengan $c_3 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ dan φ ditunjukkan dengan persamaan

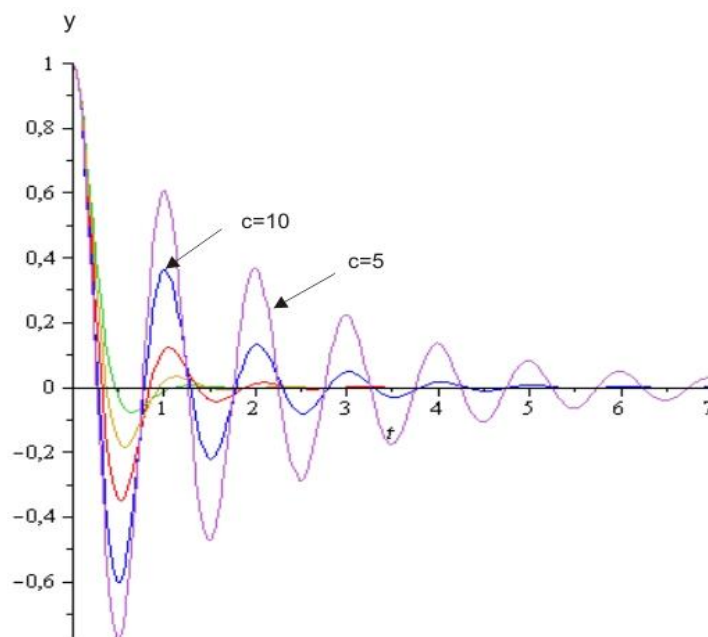
$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \cos \varphi$$

$$\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \sin \varphi.$$

$$Y_h' = \frac{dY_h}{dt}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d\left(c_3 e^{-dt} \cos\left(\sqrt{d^2 - \omega_0^2} t + \varphi\right)\right)}{dt} \\ &= \frac{d(c_3 e^{-dt})}{dt} \cos\left(\sqrt{d^2 - \omega_0^2} t + \varphi\right) + c_3 e^{-dt} \frac{\cos\left(\sqrt{d^2 - \omega_0^2} t + \varphi\right)}{dt} \\ &= -dc_3 e^{-dt} \cos\left(\sqrt{d^2 - \omega_0^2} t + \varphi\right) - c_3 e^{-dt} \sin\left(\sqrt{d^2 - \omega_0^2} t + \varphi\right) \end{aligned}$$

Plot solusi aproksimasi osilasi redaman terlalu rendah persamaan meriam $my'' + cy' + ky = 0, y(0) = 1, \frac{dy}{dt} = 0$ menggunakan *Maple* dengan berbagai konstanta redaman diberikan pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Plot solusi aproksimasi osilasi redaman terlalu rendah persamaan meriam $my'' + cy' + ky = 0, y(0) = 1, \frac{dy}{dt} = 0, m = 5$ dan $k = 200$ menggunakan *Maple* dengan berbagai konstanta redaman.

Dari Gambar 4.5, dengan kecepatan awal nol dan jika benda dipindahkan sejauh 1 satuan dapat dilihat bahwa meriam akan berhenti bergetar setelah beberapa selang waktu. Hal ini dikarenakan peredam yang berfungsi menahan getaran sehingga berhenti bergetar. Besarnya getaran tergantung pada besar kecilnya konstanta peredam. Semakin kecil konstanta peredam maka getaran akan semakin besar dan waktu yang dibutuhkan semakin banyak dan sebaliknya, semakin besar konstanta redaman maka getaran akan semakin kecil dan waktu yang dibutuhkan untuk berhenti bergetar semakin sedikit. Jadi konstanta redaman berbanding terbalik dengan besarnya getaran dan waktu yang diperlukan untuk berhenti bergetar.

4.2.2 Pemodelan Matematika dengan Gaya Luar

Jika persamaan (4.2.1.2) diberikan gaya luar yang berbentuk $f_0 \cos \omega t$ (Prasetio dan Adi, 1998:453), maka diperoleh

$$y'' + 2dy' + \omega_0^2 y = f_0 \cos \omega t. \quad (4.2.2.1)$$

Misalkan solusi khusus sebagai berikut

$$y_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (4.2.2.2)$$

$$y_p' = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

$$y_p'' = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t.$$

Substitusikan persamaan (4.2.2.2) ke persamaan (4.2.2.1) diperoleh

$$-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t + 2d(-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) + \omega_0^2(A \cos \omega t + B \sin \omega t) = f_0 \cos \omega t \quad (4.2.2.3)$$

Dari persamaan (4.2.2.3) diperoleh

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A + 2d\omega B = f_0 \quad (4.2.2.4)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)B - 2d\omega A = 0$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)B}{2d\omega} \quad (4.2.2.5)$$

Substitusikan persamaan (4.2.2.5) ke persamaan (4.2.2.4) diperoleh

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)B}{2d\omega} + 2d\omega B = f_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2)B}{2d\omega} = f_0$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{2f_0d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2} \quad (4.2.2.6)$$

$$A = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)B}{2d\omega}$$

$$= \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{2d\omega} \frac{2f_0d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2}$$

$$= \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2} \quad (4.2.2.7)$$

Substitusikan persamaan (4.2.2.6) dan (4.2.2.7) ke persamaan (4.2.2.2) sehingga diperoleh solusi khusus sebagai

$$y_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$= \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{2f_0d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2} \sin \omega t$$

$$= \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2} ((\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2d\omega \sin \omega t) \quad (4.2.2.8)$$

$(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2d\omega \sin \omega t$ dapat ditulis sebagai berikut.

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2d\omega \sin \omega t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2} \left(\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2}} \cos \omega t + \frac{2d\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2}} \sin \omega t \right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2} (\cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2} \cos(\omega t - \alpha) \quad (4.2.2.9)$$

$$\text{dengan } \cos \alpha = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2}} \text{ dan } \sin \alpha = \frac{2d\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2}}.$$

Substitusikan persamaan (4.2.2.9) ke persamaan (4.2.2.8), sehingga diperoleh solusi khusus sebagai

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2} \left(\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2} \cos(\omega t - \alpha) \right) \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2}} \cos(\omega t - \alpha) \quad (4.2.2.10). \end{aligned}$$

Setelah diperoleh solusi khususnya kemudian dicari solusi umumnya.

Solusi umum persamaan (4.2.1.2) adalah

$$y = y_h + y_p.$$

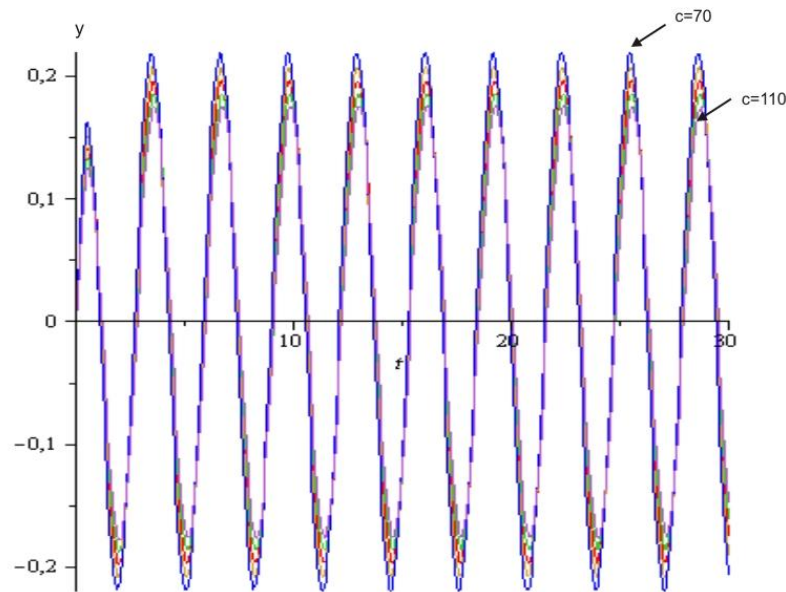
a. Kasus $d^2 - \omega_0^2 > 0$

$$\begin{aligned} \text{Jelas } y &= c_1 e^{-d + \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-d - \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t} \\ &\quad + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2}} \cos(\omega t - \alpha). \end{aligned}$$

Plot solusi aproksimasi osilasi redaman berlebih persamaan meriam

$my'' + cy' + ky = f_0 \cos \omega t, y(0) = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ menggunakan *Maple* dengan

berbagai konstanta redaman diberikan pada Gambar 4.6.



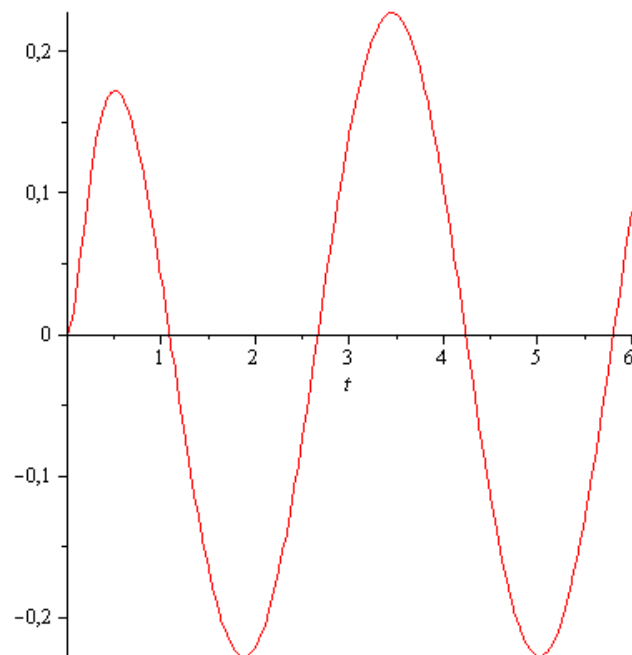
Gambar 4.6 Plot solusi aproksimasi osilasi redaman berlebih persamaan meriam $my'' + cy' + ky = f_0 \cos \omega t, y(0) = 0, \frac{dy}{dt} = 0, m = 5, k = 200, f_0 = 50$ dan $\omega = 2$ menggunakan *Maple* dengan berbagai konstanta redaman.

Dari Gambar 4.6 dengan kondisi dan kecepatan awal nol dapat dilihat semakin besar konstanta redaman, getaran yang ditimbulkan tidak begitu besar. Perpindahan pegas dari posisi setimbang tidak terlalu jauh, sedangkan waktu yang dibutuhkan untuk mengalami getaran semakin lama. Jadi semakin besar konstanta redaman maka semakin lemah getaran yang dihasilkan.

b. Kasus $d^2 - \omega_0^2 = 0$

$$\text{Jelas } y = (c_1 + c_2 t)e^{-dt} + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2}} \cos(\omega t - \alpha).$$

Plot solusi aproksimasi osilasi redaman kritis persamaan meriam $my'' + cy' + ky = f_0 \cos \omega t, y(0) = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ menggunakan *Maple* dengan berbagai konstanta redaman diberikan pada Gambar 4.7.



Gambar 4.7 Plot solusi aproksimasi osilasi redaman kritis persamaan meriam

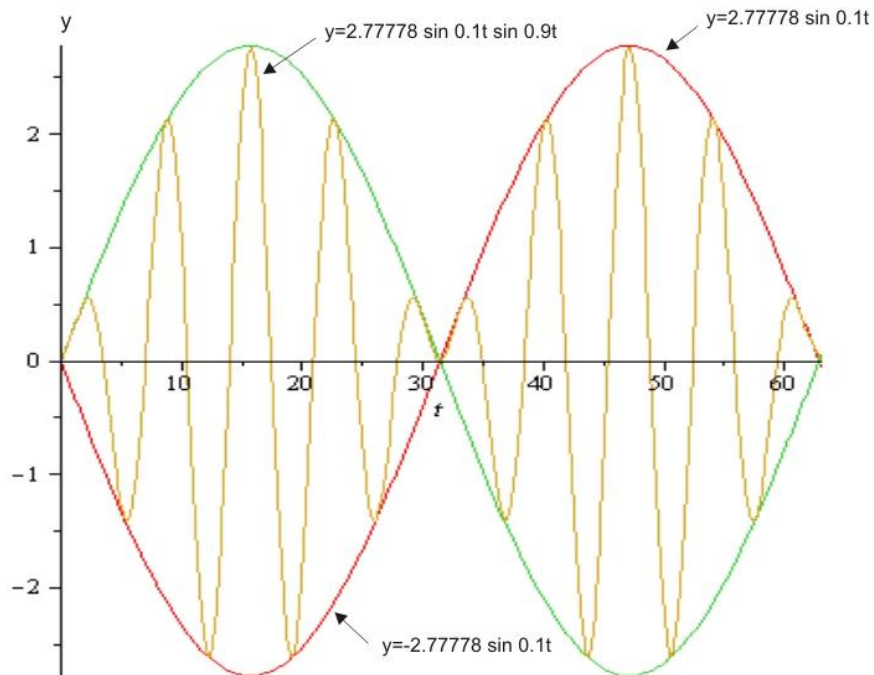
$$my'' + cy' + ky = f_0 \cos \omega t, y(0) = 0, \frac{dy}{dt} = 0, m = 5, c = 20\sqrt{10}, k = 200, f_0 = 50 \text{ dan } \omega = 2 \text{ menggunakan Maple.}$$

c. Kasus $d^2 - \omega_0^2 < 0$

$$\text{Jelas } y = c_3 e^{-dt} \cos\left(\sqrt{d^2 - \omega_0^2} t + \varphi\right) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2}} \cos(\omega t - \alpha).$$

Plot solusi aproksimasi osilasi redaman terlalu rendah persamaan meriam

$my'' + cy' + ky = f_0 \cos \omega t, y(0) = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ menggunakan *Maple* dengan berbagai konstanta redaman diberikan pada Gambar 4.8.



Gambar 4.8. Plot solusi aproksimasi osilasi redaman terlalu rendah persamaan meriam $my'' + cy' + ky = f_0 \cos \omega t$, $y(0) = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $m = 10$, $k = 10$, $f_0 = 5$ dan $\omega = 0.8$ menggunakan *Maple*.

Dari Gambar 4.8 dengan kondisi dan kecepatan awal nol dapat dilihat pada kondisi redaman terlalu rendah, persamaan dengan gaya luar dan persamaan tanpa gaya luar memiliki amplitudo yang sama tetapi periode yang berbeda. Dalam kondisi ini juga berlaku semakin kecil konstanta redaman, getaran yang dihasilkan akan semakin besar. Dalam hal ini perpindahan pegas dari posisi kesetimbangan lebih jauh. Waktu yang dibutuhkan pegas untuk kembali ke posisi setimbang lebih cepat.

BAB V

PENUTUP

5.1 Simpulan

Simpulan yang dapat diambil dari hasil pembahasan pada Bab IV adalah sebagai berikut:

(1) Model matematika pada sistem redaman meriam yaitu $y'' + \frac{\delta}{m}y' + \frac{k}{m}y = f_0 \cos \omega t$ dengan $m =$ massa, $c =$ konstanta redaman, $k =$ konstanta pegas dan $f \cos \omega t_0 =$ gaya luar.

(2) Model matematika pada sistem redaman meriam secara umum memiliki dua akar yaitu $r_1 = -d + \sqrt{d^2 - \omega_0^2}$ dan $r_2 = -d - \sqrt{d^2 - \omega_0^2}$. Terdapat tiga

kasus yang tergantung pada jumlah redaman dengan $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $d = \frac{c}{2m}$,

$$\cos \alpha = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2}} \text{ dan } \sin \alpha = \frac{2d\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2}}.$$

a. Kasus $d^2 - \omega_0^2 > 0$ yang dinamakan redaman berlebih (*overdamping*). Redaman berlebih terjadi jika sistem redaman menerima getaran yang terlalu besar sehingga pegas sulit kembali ke posisi

setimbang. Kasus ini mempunyai solusi $y = c_1 e^{-d + \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t} +$

$$c_2 e^{-d - \sqrt{d^2 - \omega_0^2} t} + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega^2}} \cos(\omega t - \alpha).$$

- b. Kasus $d^2 - \omega_0^2 = 0$ yang dinamakan redaman kritis (*critical damping*). Redaman kritis merupakan suatu keadaan dimana sistem menerima getaran yang tidak berlebih dan tidak terlalu rendah sehingga pegas mudah kembali ke posisi setimbang. Kasus ini mempunyai solusi

$$y = (c_1 + c_2 t)e^{-dt} + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \alpha).$$

- c. Kasus $d^2 - \omega_0^2 < 0$ yang dinamakan redaman terlalu rendah (*underdamping*). Redaman terlalu rendah terjadi bila sistem redaman menerima getaran yang terlalu rendah sehingga pegas secara mudah kembali ke posisi setimbangnya. Kasus ini mempunyai solusi $Y =$

$$c_3 e^{-dt} \cos\left(\sqrt{d^2 - \omega_0^2} t + \varphi\right) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \alpha)$$

dengan $c_3 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ dan φ ditunjukkan dengan persamaan

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \cos \varphi \text{ dan } \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \sin \varphi.$$

- (3) Aplikasi Maple untuk visualisasi solusi dari sistem redaman meriam dapat dilihat pada lampiran.

5.2 Saran

Berkaitan dengan hasil penelitian, ada beberapa hal yang perlu mendapat perhatian yaitu:

- (1) Pemodelan matematika pada sistem redaman meriam merupakan persamaan diferensial linier orde 2 tak homogen. Untuk itu perlu dilakukan penelitian lebih lanjut pada pemodelan lain yang memiliki persamaan diferensial tak linier.

- (2) Penelitian ini hanya mengkaji pemodelan matematika dengan gaya luar yang sederhana. Untuk itu perlu dilakukan penelitian lebih lanjut dengan gaya luar yang lebih kompleks.
- (3) Visualisasi solusi suatu persamaan diferensial dapat digunakan untuk melihat perilaku solusi persamaan. Oleh karena itu, perlu disajikan plot (grafik) dan interpretasinya.



DAFTAR PUSTAKA

- Ardianti, E.D. 2008. *Solusi dari Osilasi Dua Pegas dan Dua Massa*. Skripsi Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang.
- Dewanto, J. 1999. Kajian Teoritik Sistem Peredam Getaran Satu Derajat Kebebasan. *Jurnal Tehnik Mesin*, 1(2): 156-162. Tersedia di <http://puslit.petra.ac.id/journals/mechanical/> [diakses 11-8-2011].
- Giancoli, D.C. 1998. *Fisika. Alih Bahasa*: Y. Hanum. Jakarta: Erlangga.
- Kartono. 2001. *Maple untuk Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: J&J Learning.
- Komaridah, I. 2008. *Pemodelan Matematika pada Sistem Suspensi Kendaraan Bermotor*. Skripsi Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang.
- Kreyszig, E. 1988. *Matematika Tehnik Lanjutan. Alih Bahasa*: Hutahaean. 1990. Jakarta: Erlangga.
- Kreyszig, E. 2006. *Advanced Engineering Mathematics-9th ed*. Singapore: John Wiley & Sons, Inc.
- Nagle, R.E & E.B. Saff. 1996. *Fundamentals of Differential Equation and Boundary Value Problems*. New York: Addison-wesley Publishing Company.
- Prasetio & Adi. 1998. *Fisika untuk Sains dan Tehnik, Edisi Ketiga Jilid I*. Jakarta: Erlangga.
- Rahadian, F. 2008. *Model Persaingan Dua Spesies*. Skripsi Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang.
- Serway & Jewett. 2004. *Fisika untuk Sains dan Tehnik. Alih Bahasa*: Prasetio. Jakarta: Erlangga.
- Soegihardjo, O. 2001. Simulasi Komputer untuk Analisis Karakteristik Model Sistem Pegas-Peredam Kejut-Massa . *Jurnal Tehnik Mesin*, 3(2): 29-34. Tersedia di <http://puslit.petra.ac.id/journals/mechanical/> [diakses 11-8-2011].
- Tipler, P.A. 1991. *Fisika untuk Sains dan Tehnik. Alih Bahasa*: L. Prasetio, R.W. Adi. Jakarta: Erlangga.
- Waluya, S.B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Widowati & Sutimin. 2007. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Jurusan Matematika Universitas Diponegoro.

- Winatapura, S.U. 1999. *Strategi Belajar Mengajar Matematika*. Jakarta: Universitas Terbuka DEPDIBUD.
- Wijayanto, W.E. 2009. *Model Matematika dan Solusi dari Sistem Getaran Dua Derajat Kebebasan (Getaran Tergandeng)*. Skripsi Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang.
- Young, H.D dan R.A. Freedman. 1996. *Fisika Universitas Jilid I*. Jakarta: Erlangga.



*Lampiran 1***Input dan Output Simulasi untuk Model Matematika tanpa Gaya Luar**

```
> restart;
```

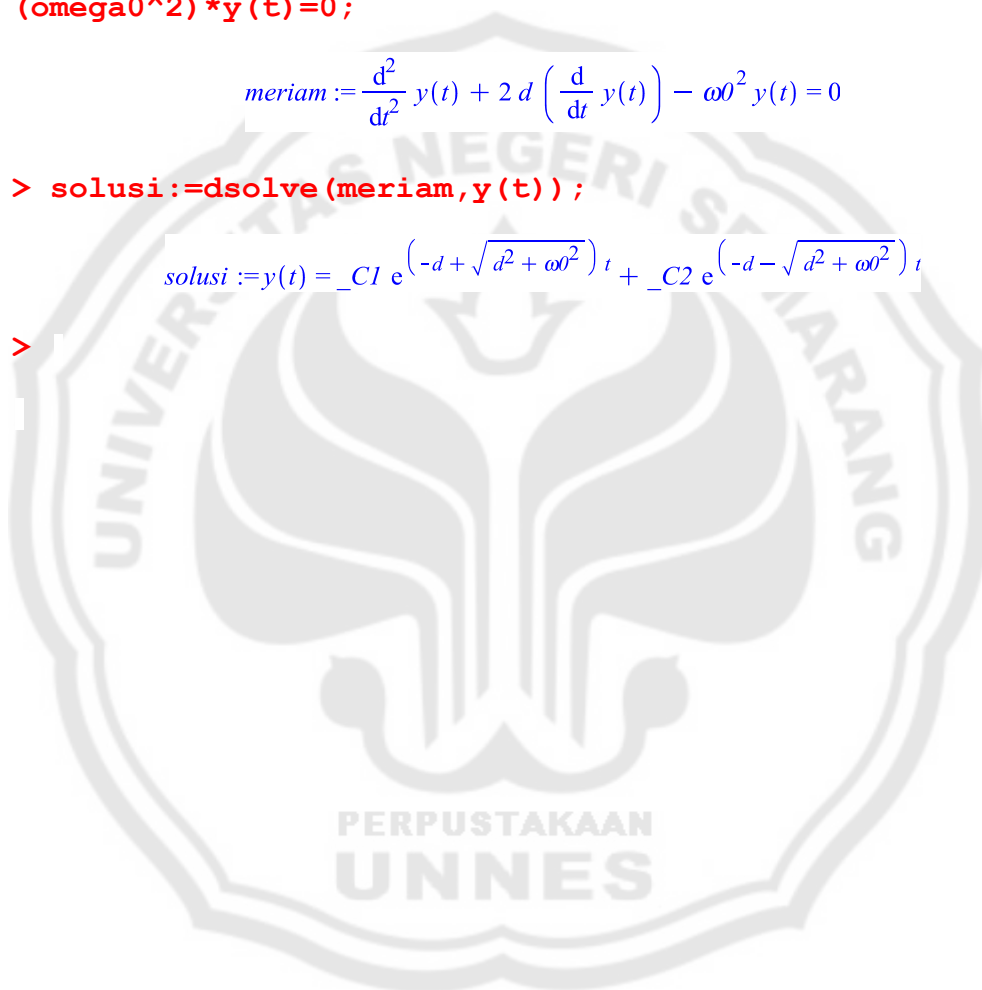
```
> meriam:=diff(y(t),t$2)+2*d*diff(y(t),t)-  
(omega0^2)*y(t)=0;
```

$$\text{meriam} := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2d \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) - \omega_0^2 y(t) = 0$$

```
> solusi:=dsolve(meriam,y(t));
```

$$\text{solusi} := y(t) = _C1 e^{(-d + \sqrt{d^2 + \omega_0^2})t} + _C2 e^{(-d - \sqrt{d^2 + \omega_0^2})t}$$

```
>
```



Lampiran 2

Input dan Output Simulasi Osilasi Redaman Berlebih dengan Berbagai Konstanta Peredam tanpa Gaya Luar

> restart;

> pers1:=5*diff(y(t),t\$2)+70*diff(y(t),t)+200*y(t)=0;

$$pers1 := 5 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 70 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 200y(t) = 0$$

> sol1:=dsolve({pers1,y(0)=1,D(y)(0)=0},y(t));

$$sol1 := y(t) = -\frac{2}{3} e^{-10t} + \frac{5}{3} e^{-4t}$$

> pers2:=5*diff(y(t),t\$2)+90*diff(y(t),t)+200*y(t)=0;

$$pers2 := 5 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 90 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 200y(t) = 0$$

> sol2:=dsolve({pers2,y(0)=1,D(y)(0)=0},y(t));

$$sol2 := y(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{82} \sqrt{41} \right) e^{(-9+\sqrt{41})t} + \left(-\frac{9}{82} \sqrt{41} + \frac{1}{2} \right) e^{-(9+\sqrt{41})t}$$

> pers3:=5*diff(y(t),t\$2)+120*diff(y(t),t)+200*y(t)=0;

$$pers3 := 5 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 120 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 200y(t) = 0$$

> sol3:=dsolve({pers3,y(0)=1,D(y)(0)=0},y(t));

$$sol3 := y(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{26} \sqrt{26} \right) e^{2(-6+\sqrt{26})t} + \left(-\frac{3}{26} \sqrt{26} + \frac{1}{2} \right) e^{-2(6+\sqrt{26})t}$$

> pers4:=5*diff(y(t),t\$2)+150*diff(y(t),t)+200*y(t)=0;

$$\text{pers4} := 5 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 150 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 200y(t) = 0$$

> `sol4:=dsolve({pers4,y(0)=1,D(y)(0)=0},y(t));`

$$\text{sol4} := y(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{74} \sqrt{185} \right) e^{(-15 + \sqrt{185})t} + \left(-\frac{3}{74} \sqrt{185} + \frac{1}{2} \right) e^{-(15 + \sqrt{185})t}$$

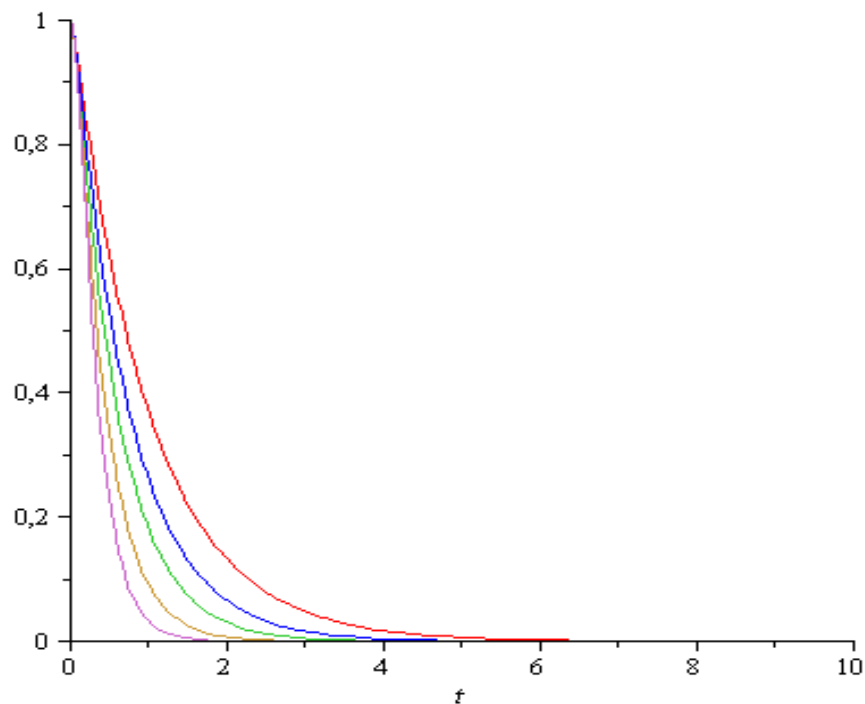
> `pers5:=5*diff(y(t),t$2)+200*diff(y(t),t)+200*y(t)=0;`

$$\text{pers5} := 5 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 200 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 200y(t) = 0$$

> `sol5:=dsolve({pers5,y(0)=1,D(y)(0)=0},y(t));`

$$\text{sol5} := y(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sqrt{10} \right) e^{2(-10 + 3\sqrt{10})t} + \left(-\frac{1}{6} \sqrt{10} + \frac{1}{2} \right) e^{-2(10 + 3\sqrt{10})t}$$

> `plot({rhs(sol1),rhs(sol2),rhs(sol3),rhs(sol4),rhs(sol5)},t=0..10);`



Lampiran 3

Input dan Output Simulasi Osilasi Redaman Kritis tanpa Gaya Luar

```
> restart;
```

```
> pers:=diff(y(t),t$2)+diff(y(t),t)+0.25*y(t)=0;
```

$$pers := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + \frac{d}{dt} y(t) + 0.25y(t) = 0$$

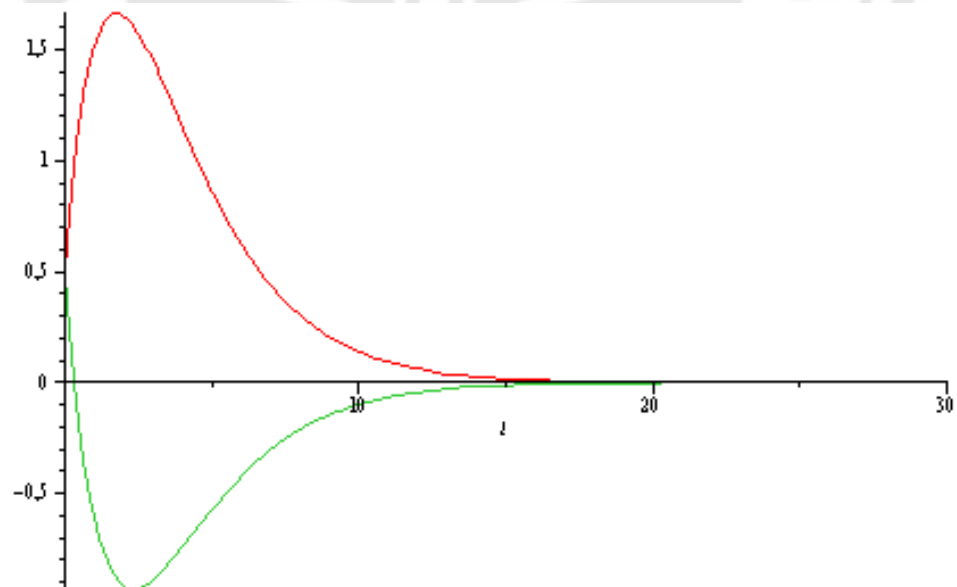
```
> sol1:=dsolve({pers,y(0)=0.5,D(y)(0)=7/4},y(t));
```

$$sol1 := y(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} + 2 e^{-\frac{1}{2}t} t$$

```
> sol2:=dsolve({pers,y(0)=0.5,D(y)(0)=-7/4},y(t));
```

$$sol2 := y(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}t} t$$

```
> plot({rhs(sol),rhs(sol2)},t=0..30);
```



Lampiran 4

Input dan Output Simulasi Redaman Terlalu Rendah dengan Berbagai Konstanta Peredam tanpa Gaya Luar

> restart;

> pers1:=5*diff(y(t),t\$2)+40*diff(y(t),t)+200*y(t)=0;

$$pers1 := 5 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 40 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 200y(t) = 0$$

> sol1:=dsolve({pers1,y(0)=1,D(y)(0)=0},y(t));

$$sol1 := y(t) = \frac{1}{3} \sqrt{6} e^{-4t} \sin(2\sqrt{6} t) + e^{-4t} \cos(2\sqrt{6} t)$$

> pers2:=5*diff(y(t),t\$2)+30*diff(y(t),t)+200*y(t)=0;

$$pers2 := 5 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 30 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 200y(t) = 0$$

> sol2:=dsolve({pers2,y(0)=1,D(y)(0)=0},y(t));

$$sol2 := y(t) = \frac{3}{31} \sqrt{31} e^{-3t} \sin(\sqrt{31} t) + e^{-3t} \cos(\sqrt{31} t)$$

> pers3:=5*diff(y(t),t\$2)+20*diff(y(t),t)+200*y(t)=0;

$$pers3 := 5 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 20 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 200y(t) = 0$$

> sol3:=dsolve({pers3,y(0)=1,D(y)(0)=0},y(t));

$$sol3 := y(t) = \frac{1}{3} e^{-2t} \sin(6t) + e^{-2t} \cos(6t)$$

> pers4:=5*diff(y(t),t\$2)+10*diff(y(t),t)+200*y(t)=0;

$$pers4 := 5 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 10 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 200y(t) = 0$$

> sol4:=dsolve({pers4,y(0)=1,D(y)(0)=0},y(t));

$$\text{sol4} := y(t) = \frac{1}{39} \sqrt{39} e^{-t} \sin(\sqrt{39} t) + e^{-t} \cos(\sqrt{39} t)$$

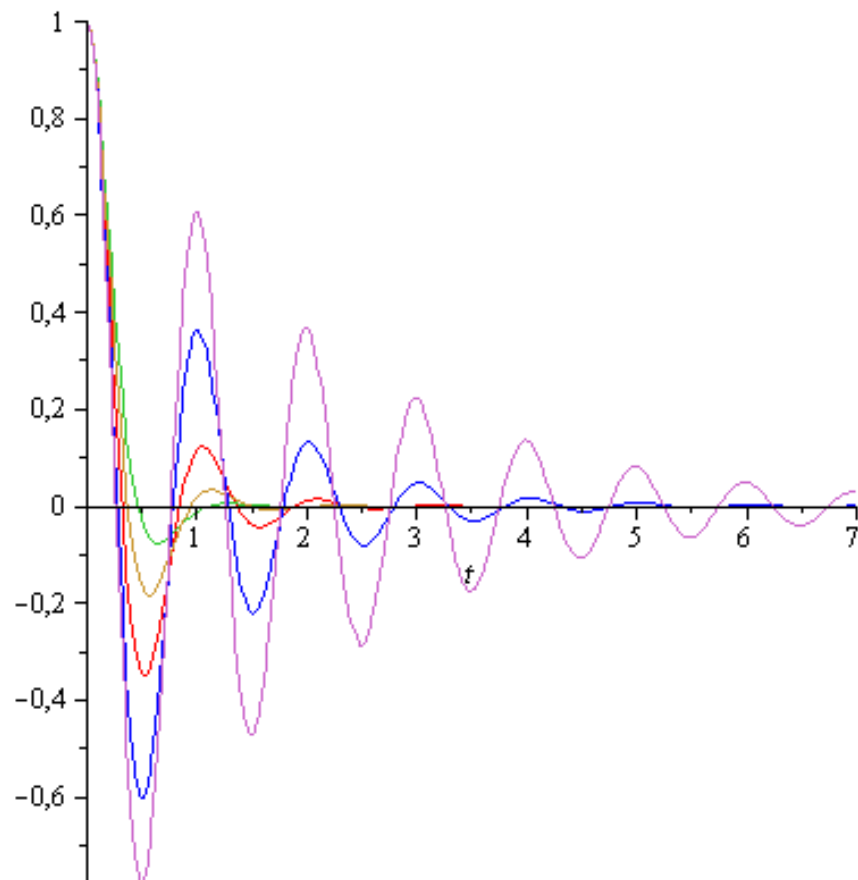
> `pers5:=5*diff(y(t),t$2)+5*diff(y(t),t)+200*y(t)=0;`

$$\text{pers5} := 5 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 5 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 200y(t) = 0$$

> `sol5:=dsolve({pers5,y(0)=1,D(y)(0)=0},y(t));`

$$\begin{aligned} \text{sol5} := y(t) &= \frac{1}{159} \sqrt{159} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{159} t\right) \\ &+ e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{159} t\right) \end{aligned}$$

> `plot({rhs(sol1),rhs(sol2),rhs(sol3),rhs(sol4),rhs(sol5)},t=0..7);`



Lampiran 5

Input dan Output Simulasi untuk Model Matematika dengan Gaya Luar

```
> restart;
```

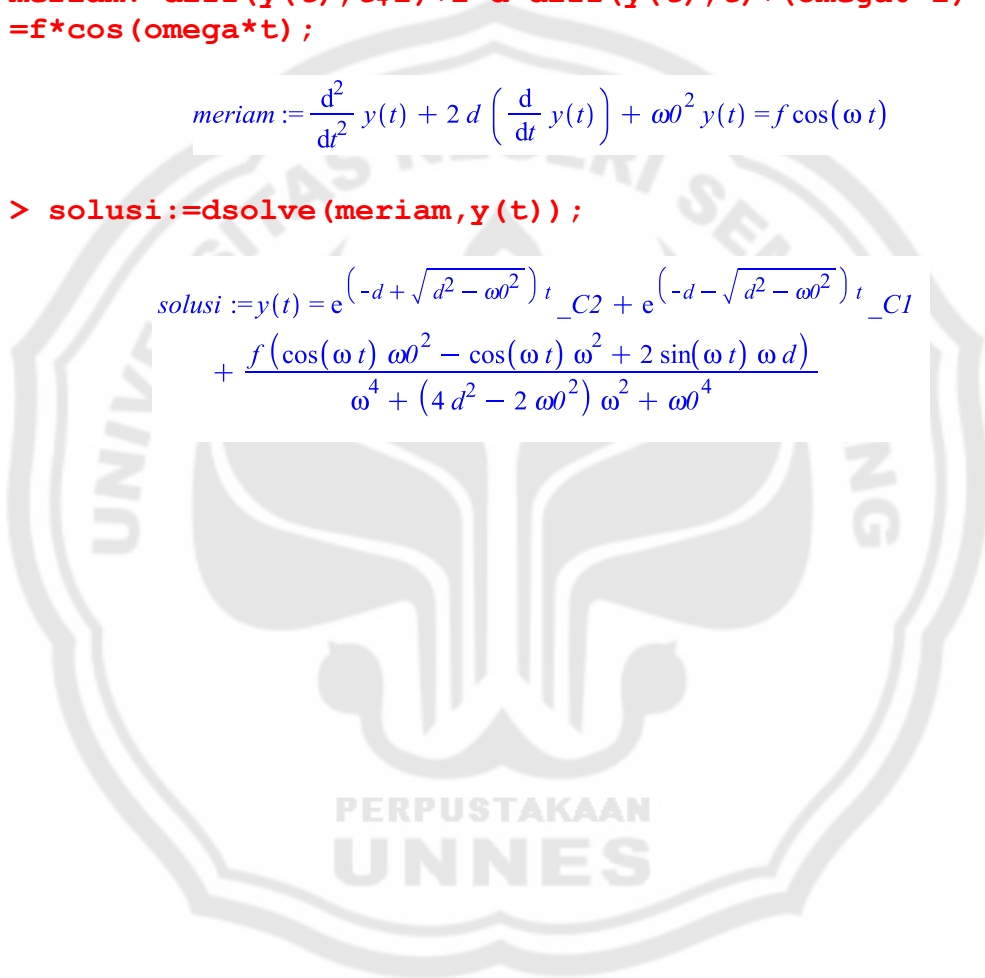
```
>
```

```
meriam:=diff(y(t),t$2)+2*d*diff(y(t),t)+(omega0^2)*y(t)
=f*cos(omega*t);
```

$$\text{meriam} := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2d \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + \omega_0^2 y(t) = f \cos(\omega t)$$

```
> solusi:=dsolve(meriam,y(t));
```

$$\begin{aligned} \text{solusi} := y(t) = & e^{(-d + \sqrt{d^2 - \omega_0^2})t} _C2 + e^{(-d - \sqrt{d^2 - \omega_0^2})t} _C1 \\ & + \frac{f(\cos(\omega t) \omega_0^2 - \cos(\omega t) \omega^2 + 2 \sin(\omega t) \omega d)}{\omega^4 + (4d^2 - 2\omega_0^2)\omega^2 + \omega_0^4} \end{aligned}$$



Lampiran 6

Input dan Output Simulasi Osilasi Redaman Berlebih dengan Berbagai Konstanta Peredam dengan Gaya Luar

```
> restart;
```

```
>
```

```
pers1:=5*diff(y(t),t$2)+70*diff(y(t),t)+200*y(t)=50*cos(2*t);
```

$$pers1 := 5 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 70 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 200y(t) = 50 \cos(2t)$$

```
> sol1:=dsolve({pers1,y(0)=0,D(y)(0)=0},y(t));
```

$$sol1 := y(t) = -\frac{1}{3} e^{-4t} + \frac{25}{156} e^{-10t} + \frac{9}{52} \cos(2t) + \frac{7}{52} \sin(2t)$$

```
>
```

```
pers2:=5*diff(y(t),t$2)+80*diff(y(t),t)+200*y(t)=50*cos(2*t);
```

$$pers2 := 5 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 80 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 200y(t) = 50 \cos(2t)$$

```
> sol2:=dsolve({pers2,y(0)=0,D(y)(0)=0},y(t));
```

$$sol2 := y(t) = e^{2(-4+\sqrt{6})t} \left(-\frac{11}{174} \sqrt{6} - \frac{9}{116} \right) + e^{-2(4+\sqrt{6})t} \left(-\frac{9}{116} + \frac{11}{174} \sqrt{6} \right) + \frac{9}{58} \cos(2t) + \frac{4}{29} \sin(2t)$$

```
>
```

```
pers3:=5*diff(y(t),t$2)+90*diff(y(t),t)+200*y(t)=50*cos(2*t);
```

$$pers3 := 5 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 90 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 200y(t) = 50 \cos(2t)$$

```
> sol3:=dsolve({pers3,y(0)=0,D(y)(0)=0},y(t));
```

$$\begin{aligned} \text{sol3} := y(t) &= e^{(-9 + \sqrt{41})t} \left(-\frac{55}{2952} \sqrt{41} - \frac{5}{72} \right) \\ &+ e^{-(9 + \sqrt{41})t} \left(-\frac{5}{72} + \frac{55}{2952} \sqrt{41} \right) + \frac{5}{36} \cos(2t) \\ &+ \frac{5}{36} \sin(2t) \end{aligned}$$

>

```
pers4 := 5*diff(y(t), t$2) + 100*diff(y(t), t) + 200*y(t) = 50*cos(2*t);
```

$$\text{pers4} := 5 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 100 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 200y(t) = 50 \cos(2t)$$

```
> sol4 := dsolve({pers4, y(0)=0, D(y)(0)=0}, y(t));
```

$$\begin{aligned} \text{sol4} := y(t) &= e^{(-5 + \sqrt{15})t} \left(-\frac{55}{2172} \sqrt{15} - \frac{45}{724} \right) \\ &+ e^{-2(5 + \sqrt{15})t} \left(-\frac{45}{724} + \frac{55}{2172} \sqrt{15} \right) + \frac{45}{362} \cos(2t) \\ &+ \frac{25}{181} \sin(2t) \end{aligned}$$

>

```
pers5 := 5*diff(y(t), t$2) + 110*diff(y(t), t) + 200*y(t) = 50*cos(2*t);
```

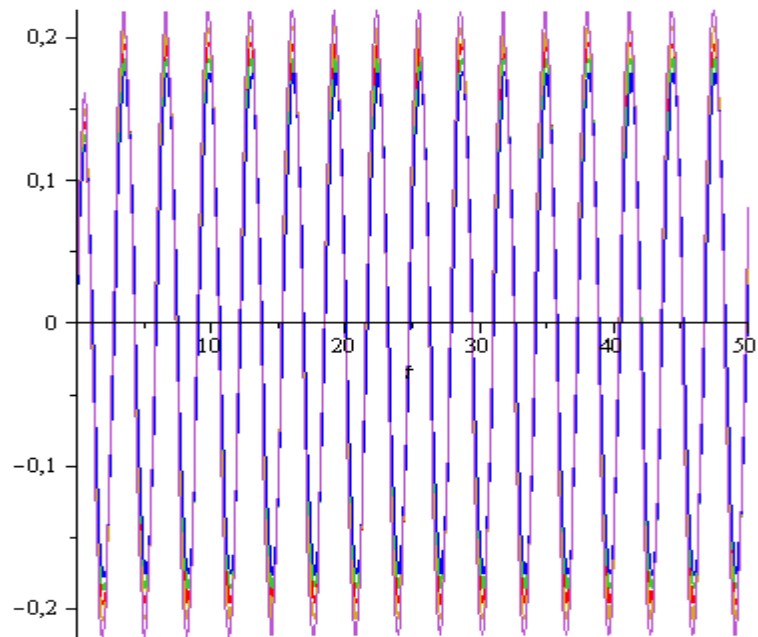
$$\text{pers5} := 5 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 110 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 200y(t) = 50 \cos(2t)$$

```
> sol5 := dsolve({pers5, y(0)=0, D(y)(0)=0}, y(t));
```

$$\begin{aligned} \text{sol5} := y(t) &= -\frac{5}{36} e^{-2t} + \frac{25}{909} e^{-20t} + \frac{45}{404} \cos(2t) \\ &+ \frac{55}{404} \sin(2t) \end{aligned}$$

>

```
plot({rhs(sol1), rhs(sol2), rhs(sol3), rhs(sol4), rhs(sol5)}, t=0..6);
```

Lampiran 7

Input dan Output Simulasi Osilasi Redaman Kritis dengan Gaya Luar

```
> restart;
```

```
>
```

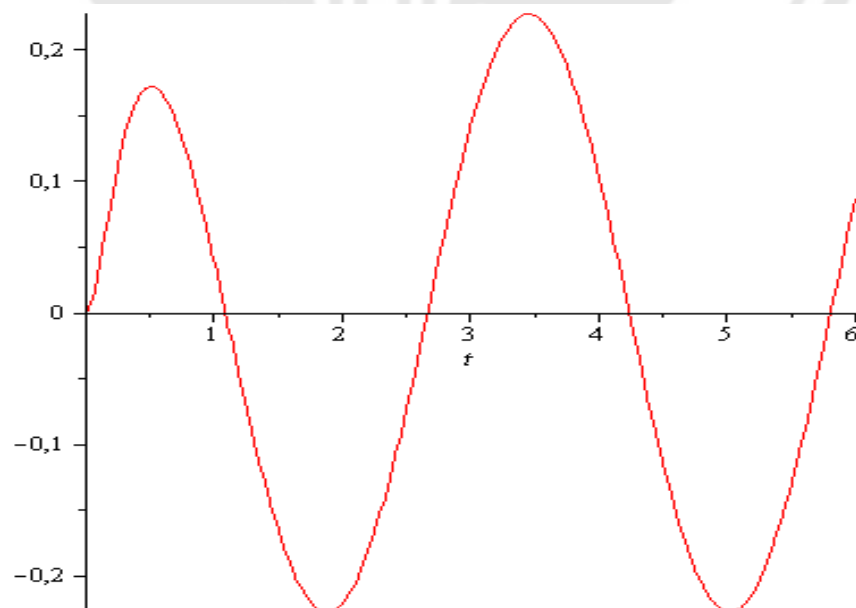
```
pers1:=5*diff(y(t),t$2)+20*sqrt(10)*diff(y(t),t)+200*y(t)=50*cos(2*t);
```

$$\begin{aligned} \text{pers1} &:= 5 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 20\sqrt{10} \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 200y(t) \\ &= 50 \cos(2t) \end{aligned}$$

```
> sol1:=dsolve({pers1,y(0)=0,D(y)(0)=0},y(t));
```

$$\begin{aligned} \text{sol1} &:= y(t) = -\frac{45}{242} e^{-2\sqrt{10}t} - \frac{5}{11} \sqrt{10} e^{-2\sqrt{10}t} t \\ &\quad + \frac{45}{242} \cos(2t) + \frac{5}{121} \sin(2t) \sqrt{10} \end{aligned}$$

```
> plot(rhs(sol1),t=0..6);
```



Lampiran 8

Input dan Output Simulasi Redaman Terlalu Rendah dengan Gaya Luar

> restart;

> pers:=diff(y(t),t\$2)+y(t)=0.5*cos(0.8*t);

$$\text{pers} := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + y(t) = 0.5 \cos(0.8 t)$$

> sol1:=dsolve({pers,y(0)=0,D(y)(0)=0},y(t));

$$\text{sol1} := y(t) = -\frac{25}{18} \cos(t) + \frac{25}{18} \cos\left(\frac{4}{5} t\right)$$

> pers1:=diff(100*y(t),t\$2)+y(t)=0;

$$\text{pers1} := 100 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + y(t) = 0$$

> sol2:=dsolve({pers1,y(0)=0,D(y)(0)=1},y(t))*0.277778;

$$\text{sol2} := 0.277778 y(t) = 2.777780 \sin\left(\frac{1}{10} t\right)$$

> sol3:=dsolve({pers1,y(0)=0,D(y)(0)=1},y(t))*(-0.277778);

$$\text{sol3} := -0.277778 y(t) = -2.777780 \sin\left(\frac{1}{10} t\right)$$

> plot({rhs(sol1),rhs(sol2),rhs(sol3)},t=0..63);

