HIPERBOLOIDA-N (*HYPER-HYPERBOLOID*) DALAM RUANG EUCLID

skripsi

disajikan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sain

Program Studi Matematika

oleh

Refrizal Amir

4150406527

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2011

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan perundang-undangan.

Semarang, September 2011

Refrizal Amir

4150406527

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Hiperboloida-n (*Hyper-Hyperboloid*) Dalam Ruang Euclid

disusun oleh

Refrizal Amir

4150406527

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA Unnes pada tanggal 21 September 2011

Panitia:

Ketua	Sekretaris
Dr. Kasmadi Imam S., M.S.	Drs. Edy Soedjoko, M.Pd.
195111151979031001	195604191987031001

Ketua Penguji

Dr. Iwan Junaedi, M.Pd.

197103281999031001

Anggota Penguji/ Pembimbing Utama	Anggota Penguji/ Pembimbing Pendamping
Drs. Suhito, M.Pd.	Dra. Kusni
195311031976121001	194904081975012001

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

1. "Hai orang-orang yang beriman, bersabarlah kamu dan kuatkanlah kesabaranmu dan tetaplah bersiap siaga (di perbatasan negerimu) dan bertakwalah kepada Allah, supaya kamu beruntung."

   (QS. Ali 'Imran : 200)
2. Manusia wajib berusaha, tapi hasilnya tidak wajib karena bagaimanapun manusia hanya bisa berencana dan keputusan terakhir ada pada Allah SWT.
3. Man Jadda Wa Jada (Barangsiapa bersungguh-sungguh, ia pasti berhasil).

PERSEMBAHAN

1. Puji syukur kepada Allah SWT.
2. Bapak dan Ibu atas do'a, dukungan, dan kasih sayang.
3. Sahabat dan teman-temanku yang selalu memberi semangat.
4. Almamater UNNES.

PRAKATA

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat,hidayah dan inayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul: **"HIPERBOLOIDA-N (*HYPER-HYPERBOLOID*) DALAM RUANG EUCLID"** dengan baik dan lancar.

Skripsi ini dapat diselesaikan berkat bimbingan dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati disampaikan terima kasih kepada yang terhormat:

1. Prof. Dr. H. Sudijono Sastroatmodjo, M.Si selaku Rektor Universitas Negeri Semarang yang telah memberikan izin kuliah dan segala fasilitas untuk menyelesaikan skripsi ini.
2. Dr. Kasmadi Imam S., M.S selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang atas ijinnya untuk melakukan penelitian.
3. Drs. Edy Soedjoko, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang yang telah mendorong dan mengarahkan selama menempuh studi.
4. Drs. Suhito, M.Pd selaku Dosen Pembimbing I dengan penuh kesabaran memberikan bimbingan, bantuan dan dorongan dalam penulisan skripsi ini.
5. Dra. Kusni selaku Dosen Pembimbing II dengan penuh kesabaran memberikan bimbingan, bantuan dan dorongan dalam penulisan skripsi ini.

6. Dr. Iwan Junaedi, M.Pd selaku Dosen Penguji yang memberikan bimbingan dalam penulisan skripsi ini.
7. Bapak, ibu, dan kakakku tercinta yang telah mendoakan dan memberikan semangat yang sangat tinggi agar selalu maju dan pantang menyerah.
8. Teman-teman Matematika angkatan 2006 terima kasih atas bantuan dan kerjasamanya.
9. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini yang tidak bisa disebutkan satu per satu.

Mudah-mudahan apa yang dituangkan dalam skripsi ini dapat menambah informasi dan bermanfaat bagi semua pihak.

Semarang,   September 2011

Penulis

ABSTRAK

Amir, Refrizal. 2011. “Hiperboloida-n (*Hyper-Hyperboloid*) Dalam Ruang Euclid”. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Pembimbing Utama Drs. Suhito, M.Pd dan Pembimbing Pendamping Dra. Kusni.

Kata kunci : hiperboloida-n, garis singgung, bidang singgung, bidang kutub

Geometri lahir sebagai salah satu sumber dari beberapa matematika terapan yang ada selama ini. Salah satu kajian dalam geometri adalah hiperbola dan hiperboloida. Hiperbola merupakan tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap harganya. Perluasan hiperboloida pada ruang n>3 dapat dilakukan dengan bekerja melalui sifat-sifat analitisnya.

Pembatasan masalah dalam karya ini yaitu persamaan hiperboloida-n dengan titik fokus pada sumbu simetri, relasi antara garis lurus dan hiperboloida yaitu mengenai garis singgung, relasi antara bidang datar dan hiperboloida yaitu mengenai persamaan bidang singgung dan persamaan bidang kutubnya.

Permasalahan yang dikaji dalam penulisan ini yaitu, bagaimana persamaan hiperboloida-n, persamaan garis singgung, bidang singgung dan bidang kutub hiperboloida-n dalam ruang berdimensi n yang titik fokusnya terletak pada sumbu simetri dengan pusatnya di O (0, 0, …, 0) dan O’(h_1, h_2, …, h_n) dengan sumbu simetri sejajar dengan sumbu koordinat.

Tujuan penulisan ini adalah merumuskan dan menentukan persamaan hiperboloida-n, persamaan garis singgung, bidang singgung dan bidang kutub hiperboloida-n dalam ruang berdimensi n yang titik fokusnya terletak pada sumbu simetri dengan di O (0, 0, …, 0) dan O’ (h_1, h_2, …, h_n) dengan sumbu simetri sejajar dengan sumbu koordinat.

Berdasarkan pembahasan, disimpulkan bahwa Persamaan hiperboloida-*n* *H* dengan titik pusat O (0,0,…,0) dan titik fokusnya terletak pada sumbu x_1 yaitu $H: \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} - \cdots - \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$, persamaan garis dengan bilangan arah $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ yang menyinggung hiperboloida-*n* *H* di titik $x' = (x_1', x_2', \dots, x_n') \in R^n$ yaitu $\frac{x_1 - x_1'}{b_1} = \frac{x_2 - x_2'}{b_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n'}{b_n} = \lambda$, dengan syarat $\frac{x_1' b_1}{a_1^2} - \frac{x_2' b_2}{a_2^2} - \cdots - \frac{x_n' b_n}{a_n^2} = 0$, persamaan bidang singgung pada *H* di titik $x' = (x_1', x_2', \dots, x_n') \in R^n$ yaitu $\frac{x_1 x_1'}{a_1^2} - \frac{x_2 x_2'}{a_2^2} - \cdots - \frac{x_n x_n'}{a_n^2} = 1$ dengan bilangan arah $\left\{\frac{(x_1')}{a_1^2}, -\frac{(x_2')}{a_2^2}, \dots, -\frac{(x_n')}{a_n^2}\right\}$, persamaan bidang kutub pada *H* dengan titik kutub

$b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R^n$ yaitu $V^H: \frac{b_1 x_1}{a_1^2} - \frac{b_2 x_2}{a_2^2} - \dots - \frac{b_n x_n}{a_n^2} = 1$ dengan bilangan arah $\left\{\frac{b_1}{a_1^2}, \frac{b_2}{a_2^2}, \dots, \frac{b_n}{a_n^2}\right\}$, persamaan hiperboloida-*n* *H'* dengan titik pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ dan titik fokusnya terletak pada sumbu x_1' yaitu $H': \frac{x_1'^2}{a_1^2} - \frac{x_2'^2}{a_2^2} - \dots - \frac{x_n'^2}{a_n^2} = 1$ atau $H': \frac{(x_1-h_1)^2}{a_1^2} - \frac{(x_2-h_2)^2}{a_2^2} - \dots - \frac{(x_n-h_n)^2}{a_n^2} = 1$, persamaan garis dengan bilangan arah $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ yang menyinggung hiperboloida-*n* *H'* di titik $(x')' = ((x_1')', (x_2')', \dots, (x_n')') \in R^n$ yaitu $\frac{(x_1)' - (x_1')'}{b_1} = \frac{(x_2)' - (x_2')'}{b_2} = \dots = \frac{(x_n)' - (x_n')'}{b_n} = \lambda$ dengan syarat $\frac{(x_1')' b_1}{a_1^2} - \frac{(x_2')' b_2}{a_2^2} - \dots - \frac{(x_n')' b_n}{a_n^2} = 0$, persamaan bidang singgung pada *H'* di titik $(x')' = ((x_1')', (x_2')', \dots, (x_n')') \in R^n$ yaitu $\frac{(x_1)'(x_1')'}{a_1^2} - \frac{(x_2)'(x_2')'}{a_2^2} - \dots - \frac{(x_n)'(x_n')'}{a_n^2} = 1$ atau $\frac{(x_1-h_1)(x_1'-h_1)}{a_1^2} - \frac{(x_2-h_2)(x_2'-h_2)}{a_2^2} - \dots - \frac{(x_n-h_n)(x_n'-h_n)}{a_n^2} = 1$, persamaan bidang kutub pada *H'* dengan titik kutub $b' = (b_1', b_2', \dots, b_n') \in R^n$ yaitu $V^{H'}: \frac{b_1' x_1'}{a_1^2} - \frac{b_2' x_2'}{a_2^2} - \dots - \frac{b_n' x_n'}{a_n^2} = 1$ atau $\frac{(b_1-h_1)(x_1-h_1)}{a_1^2} - \frac{(b_2-h_2)(x_2-h_2)}{a_2^2} - \dots - \frac{(b_n-h_n)(x_n-h_n)}{a_n^2} = 1$.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah studi besaran, struktur, ruang, dan perubahan. Secara garis besar matematika dibagi menjadi dua cabang ilmu, yaitu matematika murni (*Pure Mathematics*) dan matematika terapan (*Applied Mathematics*). Disiplin-disiplin utama di dalam matematika pertama muncul karena kebutuhan akan perhitungan di dalam perdagangan, untuk memahami hubungan antarbilangan, untuk mengukur tanah, dan untuk meramal peristiwa astronomi. Empat kebutuhan ini secara kasar dapat dikaitkan dengan pembagian-pembagian kasar matematika ke dalam pengkajian besaran, struktur, ruang, dan perubahan (yakni aritmetika, aljabar, geometri, dan analisis).

Geometri lahir sebagai salah satu sumber dari beberapa matematika terapan yang ada selama ini. Pada mulanya, geometri hanya dipergunakan sebagai ilmu pengetahuan praktis dan keahlian teknik. Selanjutnya geometri terus berkembang menjadi pengetahuan yang disusun secara menarik dan secara logis.

Pada perkembangannya secara umum terdapat penggolongan geometri berdasarkan lingkup atau bidang kajiannya yaitu geometri pada ruang berimensi n (R^n, $n \geq 1$) yang meliputi geometri garis (R^1), geometri bidang (R^2), geometri ruang (R^3), geometri ruang berdimensi $n > 3$. Dalam R^1 setiap titik hanya berkaitan denagn satu bilangan real saja, sedangkan dalam R^2 setiap titik berkaitan dengan pasangan bilangan real terurut (x,y). Di dalam ruang berdimensi tiga (R^3), setiap titik dapat diwakili oleh satu dan hanya satu tripel terurut bilangan-bilangan real (x,y,z), dan sebaliknya setiap tripel terurut bilangan-bilangan real (x,y,z) memiliki satu dan hanya satu titik di dalam ruang berdimensi tiga (R^3) atau korespondensi satu-satu antara himpunan titik-titik di dalam ruang dengan himpunan semua tripel terurut bilangan-bilangan real. Dalam dimensi $n > 3$, setiap titik berkaitan dengan pasangan bilangan terurut lebih dari tiga. Gagasan digunakannya pasangan bilangan terurut lebih dari tiga, karena para ahli matematika dan fisika menyadari bahwa masih ada ruang yang melebihi dari ganda tiga. Walaupun visualisasi geometrik tidak melebihi ruang dimensi tiga.

Salah satu kajian dalam geometri yang dibahas dalam karya tulis ini yaitu mengenai hiperbola. Hiperboloida pada ruang berdimensi tiga (R^3) dinamakan hiperboloida. Hiperbola merupakan tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap harganya. Pada hiperbola maupun hiperboloida terdapat persamaan serta relasi-relasi yang berhubungan dengan hiperbola maupun hiperboloida.

Penyampaian tentang persamaan hiperbola dan hiperboloida serta relasi yang terkait hanya dapat divisualisasikan tidak melebihi ruang berdimensi tiga. Terdapat salah materi menarik yaitu mengenai ruang vektor serta ruang matriks yang dapat menghasilkan analisis dari ruang berdimensi dua atau tiga sampai ruang berdimensi lebih dari 3. Kemudian diharapkan penelitan ini dapat memudahkan para peminat geometri, termasuk guru-guru untuk dapat memberikan kemudahan dalam membahas hiperboloida pada dimensi dua atau tiga. Selain itu, ketertarikan penulis mengkaji hiperbolida dan relasi yang terkait di ruang berdimensi n yaitu untuk menambah daya pikir keruangan.

Dalam karya ini penulis membatasi permasalahan pada hiperboloida-*n* yang berpusat di O (0, 0, …, 0), di O' (h_1, h_2, …, h_n) dengan sumbu simetrinya yang sejajar dengan sumbu koordinat serta titik fokusnya pada sumbu simetri karena keterbatasan penulis dalam mengalisis kasus yang lain. Dari uraian tersebut, maka dapat dilakukan pengkajian pustaka dan analisis lebih lanjut tentang hiperboloida-n di dalam ruang berdimensi n. Perluasan hiperboloida pada ruang n (R^n) dapat dilakukan dengan bekerja melalui sifat-sifat analitisnya. Berdasarkan latar belakang tersebut maka judul dari karya tulis ini adalah hiperboloida-n (*hyper-hyperboloid*) dalam ruang Euclid.

1.2 Pembatasan Masalah

Dalam penulisan ini pembatasan masalahnya sebagai berikut.

(1) Persamaan hiperboloida-n dengan titik fokus pada sumbu simetri.

(2) Relasi antara garis lurus dan hiperboloida-n yaitu mengenai persamaan garis singgung pada hiperboloida-n.

(3) Relasi antara bidang datar dan hiperboloida-n yaitu mengenai persamaan bidang singgung dan persamaan bidang kutub pada hiperboloida-n.

1.3 Permasalahan

Permasalahan yang dikaji dalam penulisan ini sebagai berikut.

(1) Bagaimana persamaan hiperboloida-n dalam ruang berdimensi n yang titik fokusnya terletak pada sumbu simetri dengan pusatnya di O (0, 0, …, 0) dan

pusatnya di O’ (h_1, h_2, …, h_n) dimana sumbu simetri sejajar dengan sumbu koordinat?

(2) Bagaimana persamaan garis singgung hiperboloida-n dalam ruang berdimensi n yang titik fokusnya terletak pada sumbu simetri dengan pusatnya di O (0, 0, …, 0) dan pusatnya di O’ (h_1, h_2, …, h_n) dimana sumbu simetri sejajar dengan sumbu koordinat?

(3) Bagaimana persamaan bidang singgung hiperboloida-n dalam ruang berdimensi n yang titik fokusnya terletak pada sumbu simetri dengan pusatnya di O (0, 0, …, 0) dan pusatnya di O’ (h_1, h_2, …, h_n) dimana sumbu simetri sejajar dengan sumbu koordinat?

(4) Bagaimana persamaan bidang kutub hiperboloida-n dalam ruang berdimensi n yang titik fokusnya terletak pada sumbu simetri dengan pusatnya di O (0, 0, …, 0) dan pusatnya di O’ (h_1, h_2, …, h_n) dimana sumbu simetri sejajar dengan sumbu koordinat?

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan ini adalah sebagai berikut.

(1) Merumuskan dan menentukan persamaan hiperboloida-n dalam ruang berdimensi n yang titik fokusnya terletak pada sumbu simetri dengan pusatnya di O (0, 0, …, 0) dan pusatnya di O’ (h_1, h_2, …, h_n) dimana sumbu simetri sejajar dengan sumbu koordinat?

(2) Merumuskan dan menentukan persamaan garis singgung hiperboloida-n dalam ruang berdimensi n yang titik fokusnya terletak pada sumbu simetri

dengan pusatnya di O (0, 0, …, 0) dan pusatnya di O’ (h_1, h_2, …, h_n) dimana sumbu simetri sejajar dengan sumbu koordinat?

(3) Merumuskan dan menentukan persamaan bidang singgung hiperboloida-n dalam ruang berdimensi n yang titik fokusnya terletak pada sumbu simetri dengan pusatnya di O (0, 0, …, 0) dan pusatnya di O’ (h_1, h_2, …, h_n) dimana sumbu simetri sejajar dengan sumbu koordinat?

(4) Merumuskan dan menentukan persamaan bidang kutub hiperboloida-n dalam ruang berdimensi n yang titik fokusnya terletak pada sumbu simetri dengan pusatnya di O (0, 0, …, 0) dan pusatnya di O’ (h_1, h_2, …, h_n) dimana sumbu simetri sejajar dengan sumbu koordinat?

1.5 Manfaat Penulisan

Dari hasil penulisan ini diharapkan dapat digunakan sebagai sumbangan pemikiran bagi mahasiswa Universitas Negeri Semarang, khususnya Jurusan Matematika yang ingin mengembangkan penulisan ini.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Hiperbola

Hiperbola dapat diperoleh melalui irisan kerucut. Irisan kerucut merupakan irisan bidang datar dengan kerucut lingkaran tegak. Terdapatlah beberapa kemungkinan dari irisan tersebut, tergantung dari letak bidang irisan tersebut.

Misalkan pada sebuah bidang yang dinamakan α. Hiperbola terbentuk apabila besar sudut yang dibentuk antara bidang α dan sumbu kerucut kurang dari besar setengah sudut pucak kerucut tersebut.

Pada gambar, sebuah bidang α yang sejajar dengan sumbu kerucut diiriskan pada sebuah kerucut. Irisan antara bidang α dengan kerucut dinamakan hiperbola. Kemudian dibangun sebuah bola yang menyinggung bidang α dan kerucut dari dalam kerucut tersebut.

Bidang α dan kerucut memiliki salah satu titik potong yaitu titik P. Bidang α menyinggung bola pada titik F dan G. Sedangkan bola kerucut pada titik Q dan R. Dari kelima titik-titik tersebut dapat diperoleh hubungan |PF| = |PQ| karena keduanya merupakan garis singgung pada bola yang sama, begitu juga |PG| = |PR|, sehingga |PF| – |PG| = |PQ| – |PR| = |QR|. QR merupakan sebuah garis pelukis antara dua lingkaran. Hal ini juga berlaku untuk titik-titik potong yang lain antara bidang α dan kerucut.

Jadi dapat dikatakan *hiperbola* merupakan tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu F dan G tetap harganya. Kemudian titik-titik F dan G ini disebut titik fokus.

Dari penjelasan tersebut maka diperoleh definisi dari hiperbola.

Definisi 1

A hyperbol *is the set of points in a plane such that for each point the difference of its distances from two fixed point (the foci) is a constant.*

(Charles and Irving 1980: 59)

Dari definisi tersebut, dapat dikatakan bahwa hiperbola merupakan himpunan titik-titik pada bidang yang selisih jaraknya terhadap dua titik tetap yang disebut titik fokus adalah sama. Sehingga dapat diilustrasikan bagian-bagian dari hiperbola dan dirumuskan persamaan bakunya.

2.1.1 Bagian-bagian hiperbola

Pada Gambar 2.2, pusat dari suatu hiperbola merupakan titik tengah antara dua titik fokus. Garis yang terbentuk dari dua titik fokus memotong hiperbola pada dua titik yang disebut titik kutub.

Gambar 2.2 Bagian-bagian Hiperbola

2.1.2 Persamaan baku hiperbola

Berikut ditunjukkan persamaan baku hiperbola dengan titik pusat O (0,0) dan titik fokus terletak pada sumbu x atau sumbu y.

Perhatikan Gambar 2.3

Gambar 2.3 Hiperbola pada bidang XOY

Ambil sebarang titik pada sumbu X yaitu titik a = (a,0) dan $-a$ = (-a,0) ∈ R dan

titik fokus suatu hiperbola yaitu titik $F_1 = (c,0)$ dan $F_2 = (-c,0)$ dengan a < c.

Misalkan jarak suatu titik P(x,y) pada hiperbola ke titik-titik fokusnya adalah d_1 dan d_2 maka dapat diperoleh

$$d_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \text{ dan } d_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Dari definisi hiperbola diperoleh

$$|d_1 - d_2| = 2a$$

Sehingga

$$d_1 - d_2 = \pm 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow -cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (-cx - a^2)^2 = a^2[(x+c)^2 + y^2]$$

$$\Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Perhatikan segitiga F_1F_2P pada gambar:

Jelas $d_1 < |F_1F_2| + d_2 \Leftrightarrow |d_1 - d_2| < |F_1F_2|$

$$\Leftrightarrow 2a < 2c$$

$$\Leftrightarrow a < c.$$

Ini berarti $c^2 - a^2 > 0$.

Dengan kata lain $c^2 - a^2 = b^2$ untuk suatu bilangan b.

Sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Jadi persamaan baku hiperbola dengan titik pusat (0,0) dan titik fokusnya terletak pada sumbu x yaitu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Berdasarkan pembuktian tersebut, untuk hiperbola yang titik pusatnya (0,0) dan titik fokusnya terletak pada sumbu y mempunyai persamaan baku sebagai berikut

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Apabila kedua persamaan diilustrasikan bersama dalam satu bidang XOY maka diperoleh gambar sebagai berikut

Gambar 2.4 Hiperbola Sekawan

Kedua hiperbola tersebut merupakan hiperbola yang saling sekawan. Terlihat bahwa titik a merupakan titik potong hiperbola dengan sumbu x dan titik b merupakan dengan sumbu y. Sehingga pada hiperbola dengan titik fokusnya pada sumbu x, a bernilai riil dan b bernilai imajiner. Begitu juga sebaliknya untuk hiperbola dengan fokusnya pada sumbu y.

2.2 Hiperboloida

Definisi 2

A hyperboloid *is the set of points in* R^3 *such that for each point the difference of its distances from two fixed point (the foci) is a constant.*

Dari definisi tersebut, dapat dikatakan bahwa hiperboloida merupakan himpunan titik-titik di R^3 yang selisih jaraknya terhadap dua titik tetap yang disebut titik fokus adalah sama.

2.2.1 Persamaan baku hiperboloida

Berikut ditunjukkan persamaan baku hiperboloida dengan titik pusat O (0,0,0) dan titik fokus terletak pada sumbu *x*.

Misalkan diberikan titik $a = (a,0,0)$ dan $-a = (-a,0,0) \in R^3$ dan titik fokus suatu hiperbolida yaitu $c = (c,0,0)$ dan $-c = (-c,0,0) \in R^3$ dengan $a < c$ pada salah satu sumbu yaitu *x*. Kemudian apabila jarak suatu titik pada hiperboloida ke titik-titik fokusnya adalah d_1 dan d_2, maka dapat diperoleh:

$$d_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2 + z^2} \text{ dan } d_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2 + z^2}$$

Dari definisi hiperboloida di atas diperoleh

$$|d_1 - d_2| = 2a$$

Sehingga

$d_1 - d_2 = \pm 2a$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2 + z^2} = \pm 2a$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2 + z^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2 + z^2}$

Setelah kedua ruas dikuadratkan

$\Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2 + z^2} + (x+c)^2 + y^2 + z^2$

$\Leftrightarrow -cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2 + z^2}$

Kedua ruas dikuadratkan lagi

$\Leftrightarrow (-cx - a^2)^2 = a^2[(x+c)^2 + y^2 + z^2]$

$\Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2(y^2 + z^2) = a^2(c^2 - a^2)$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2 - a^2} = 1.$

Karena $a < c$ maka $c^2 - a^2 > 0$.

Dengan kata lain $c^2 - a^2 = b^2$ untuk suatu $b \in$ R.

Sehingga diperoleh persamaan

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$

Titik-titik b merupakan titik potong antara hiperboloida dengan bidang YOZ. Untuk membedakan titik potong pada sumbu y dengan sumbu z, maka pada

sumbu z hiperboloida memotong pada titik c untuk suatu $c \in$ R.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Jadi persamaan hiperboloida dengan titik pusat (0,0,0) dan titik fokusnya terletak pada sumbu x yaitu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2.2.2 Ilustrasi

Berdasarkan definisi dan persamaan yang telah diperoleh, suatu hiperboloida dapat diilustrasikan sebagai berikut:

Gambar 2.5 Hiperboloida berdaun dua

2.2.3 Bentuk lain hiperboloida

Berdasarkan gambar 2.4, hiperboloida dapat diilustrasikan sebagai hasil 'putaran' hiperbola pada suatu bidang yang 'diputar' mengelilingi sumbu letak titik fokusnya, yaitu hiperbola pada bidang XOY 'diputar' mengelilingi sumbu *x*. Karena pada R^3 memiliki tiga sumbu, maka pada hiperbola dapat dilakukan 'putaran' mengelilingi sumbu lainnya.

Misalkan dipunyai hiperbola pada bidang YOZ. Jika hiperbola pada bidang YOZ tersebut diputar mengelilingi sumbu *z* maka diperoleh persamaan luasan berikut ini:

Misalkan T (x_0, y_0, z_0) sebarang titik pada hiperbola, maka memenuhi

$$x_0 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

dan

$$\frac{{z_0}^2}{a^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1 \ldots\ldots\ldots(2)$$

Persamaan bidang melalui T dan tegak lurus sumbu *y* adalah $y = y_0$. Persamaan bola melalui T dan titik pusatnya O adalah $x^2 + y^2 + z^2 = {x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2$.

Jadi sistem persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

$$\begin{cases} z = z_0 & \ldots\ldots\ldots(3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = {x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2 & \ldots\ldots\ldots(4) \end{cases}$$

Dengan mengeliminasi x_0, y_0 dan z_0 dari persamaan (1) sampai dengan (4) diperoleh persamaan

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Beberapa titik puncaknya adalah (a, 0, 0), (-a, 0 ,0), (0, a, 0), (0, -a, 0)

Dari persamaan tersebut, hiperboloida ini dapat diilustrasikan sebagai berikut:

Gambar 2.5 Hiperboloida berdaun satu

Berdasarkan kedua ilustrasi maka kedua hiperboloida tersebut sering dinamakan dengan hiperboloida berdaun dua (gambar 2.4) dan hiperboloida berdaun satu (gambar 2.5).

2.3 Persamaan Vektoris Garis Lurus

Suatu garis lurus ditentukan oleh dua buah titik. Misalkan titik P(x_1,y_1,z_1) dan Q(x_2,y_2,z_2) terletak pada garis lurus g. Maka $\overline{OP}$= [x_1,y_1,z_1], $\overline{OQ}$= [x_2,y_2,z_2] dan $\overline{PQ} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$. Untuk setiap titik sebarang X(x,y,z) pada g berlaku PX = λPQ, λ ∈ R. Jelas bahwa OX = OP + PX sehingga

$$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$$

adalah persamaan vektoris garis lurus melalui dua titik P(x_1,y_1,z_1) dan Q(x_2,y_2,z_2). Vektor PQ (atau vektor lain ≠ 0 yang terletak pada garis) disebut *vektor arah garis lurus*, jadi bila garis lurus melalui satu titik P(x_1,y_1,z_1) dan mempunyai vektor arah $a = [a, b, c]$, persamaannya

$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[a, b, c], \lambda \in R.$

Persamaan tersebut dapat juga ditulis menjadi tiga persamaan:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda a \\ y = y_1 + \lambda b \\ z = z_1 + \lambda c \end{cases}$$

yang disebut persamaan parameter garis lurus *g*. Apabila λ dieliminasi maka diperoleh

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

yang disebut garis lurus diketahui melalui titik P(x_1,y_1,z_1) dengan vektor arah $a = [a, b, c]$.

2.4 Ruang Vektor

Berikut ini didefinisikan perihal ruang vektor *V* dimana *K* adalah medan skalar.

Definisi 3

Misalkan V adalah suatu himpunan bukan-kosong dengan dua operasi:

(1) ***Penjumlahan Vektor***: untuk sebarang *u*, *v* ∈ *V*, jumlah *u* + *v* di dalam *V*.

(2) ***Perkalian skalar***: Untuk sebarang $u \in V$, $a \in K$, hasil kali $au \in V$

Maka V disebut *ruang vektor* (atas medan K) jika aksioma-aksioma berikut ini dipenuhi untuk sebarang vektor u, v, $w \in$ V:

a. $u + v = v + u$

b. $(u + v) + w = u + (v + w)$

c. Terdapat vektor di dalam V, yang dilambangkan dengan 0 dan disebut *vektor nol*, sedemikian sehingga, untuk sebarang $u \in V$,

$$u + 0 = 0 + u = u$$

d. Untuk setiap $u \in V$, terdapat vektor di dalam V, yang dilambangkan dengan $-u$ dan disebut *negative* dari u, sedemikian rupa sehingga

$$u + (-u) = (-u) + u = 0$$

e. $a(u + v) = au + av$, untuk sebarang skalar $a \in K$

f. $(a + b)u = au + bu$, untuk sebarang skalar $a, b \in K$

g. $(ab)u = a(bu)$, untuk sebarang skalar $a, b \in K$

h. $Iu = u$, untuk skalar satuan $I \in K$

(Seymour dan Marc 2006: 98-99)

Contoh 1

Tunjukkan R^n merupakan ruang vektor.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dan $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in R^n$.

(a) Jelas $u + v = (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$

$= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots, v_n + u_n)$

$= (v_1, v_2, \ldots, v_n) + (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$= v + u$.

(b) $(u + v) + w = ((u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n)) + (w_1, w_2, \ldots, w_n)$

$= ((u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n))$

$= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + ((v_1, v_2, \ldots, v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n))$

$= u + (v + w)$.

(c) Pilih $0 = (0_1, 0_2, \ldots, 0_n) \in R^n$

Jelas $u + 0 = 0 + u = (0_1, 0_2, \ldots, 0_n) + (u_1, u_2, \ldots, u_n) = u$.

(d) Pilih $-u = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n) \in R^n$

Jelas $u + -u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$

$= (u_1 - u_1, u_2 - u_2, \ldots, u_n - u_n)$

$= 0$.

Ambil sebarang $a, b \in R$

(e) $a(u + v) = a\{(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n)\}$

$= a(u_1, u_2, \ldots, u_n) + a(v_1, v_2, \ldots, v_n)$

$= au + av.$

(f) $(a + b)u = (a + b)(u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$= a(u_1, u_2, \ldots, u_n) + b(u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$= au + bu.$

(g) $(ab)u = (ab)(u_1, u_2, \ldots, u_n) = a(b(u_1, u_2, \ldots, u_n)) = a(bu).$

(h) Pilih $I = (1_1, 1_2, \ldots, 1_n) \in R^n$

Jelas $Iu = uI = (1_1, 1_2, \ldots, 1_n)(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) = u.$

Karena aksioma ruang vektor $\mathbb{R}^n$ dipenuhi, maka $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang vektor.

2.5 Ruang Bagian dari Ruang Vektor

Jika V ruang linear atas R, $W \neq \emptyset$ dan $W \subset V$. W disebut ruang linear bagian terhadap V jika dan hanva jika memenuhi svarat-svarat berikut:

(1) $u + v$ di W, $\forall\, u, v$ di W

(2) $ku \in W$, $\forall\, u \in W$ dan sebarang skalar k

Contoh 2

Tunjukkan untuk setiap bilangan m, n dengan m ≤ n maka R^m merupakan ruang bagian dari ruang linear terhadap R^n

Penyelesaian:

Dipunyai $R^m = R \times R \times R \times \ldots \times R = \{(u_1, u_2, \ldots, u_m) \mid u_1, u_2, \ldots, u_m \in R\}$.

Ambil sebarang $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m) \in R^m$

i. Jelas $(u + v) = (u_1, u_2, \ldots, u_m) + (v_1, v_2, \ldots, v_m)$

$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_m + v_m) \in R^m$.

ii. Jelas $ku = k(u_1, u_2, \ldots, u_m) = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_m) = ku \in R^m$.

Jadi R^m merupakan subruang dari R^n.

2.6 Ruang Bernorma

Definisi 4

Misalkan V adalah ruang vektor real atau kompleks. Anggaplah untuk setiap $v \in V$ terdapat hubungan dengan suatu bilangan real, vang dilambang dengan $||v||$. Fungsi $||.||$ ini disebut norma pada V jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

[N$_1$] $||v|| \geq 0$; dan $||v|| = 0$ jika dan hanva jika $v = 0$.

[N$_2$] $||kv|| = |k|\ ||v||$.

[N$_3$] $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.

Ruang vektor V dengan sebuah norma disebut ruang vektor vang dinormalisasi.

Misalkan V adalah ruang vektor vang dinormalisasikan. Jarak antara dua vektor u dan v dalam V dilambangkan dan didefinisikan sebagai

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

(Sevmour dan Marc 2006: 211)

Contoh 3

Dipunyai fungsi $R^n \rightarrow R$ yang didefinisikan

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

untuk setiap vektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ adalah suatu norm pada ruang Euclid

R^n. Tunjukkan fungsi tersebut merupakan suatu norm pada ruang Euclid R^n.

Penyelesaian:

Ambil sebarang vektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in$

R^n dan skalar $\alpha \in R$ memenuhi:

(1) $\|x\| \geq 0$ dan $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, sebab $\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

($\Leftarrow$) jika $x = 0$, maka $x_i = 0$ untuk setiap i ($i = 1, 2, \ldots, n$), yang berakibat

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

($\Rightarrow$) jika $\|x\| = 0$ maka dipunyai $0 = \|x\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$, sehingga untuk setiap i ($i = 1, 2, \ldots, n$) haruslah $x_i^2 = 0$ yang berakibat $x_i = 0$. Karena $x_i = 0$ untuk setiap i ($i = 1, 2, \ldots, n$) ini berarti $x = 0$.

(2) Jelas $\|ax\| = |a|\|x\|$

Karena $\|ax\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (ax_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = |a| \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = |a|\|x\|.$

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ditunjukkan sebagai berikut

Karena untuk setiap i ($i = 1, 2, \ldots, n$) berlaku

$$(x_i + y_i)^2 = (x_i + y_i)(x_i + y_i)$$

$$\leq (x_i + y_i)\big((x_i) + (y_i)\big)$$

$$= (x_i + y_i)x_i + (x_i + y_i)y_i$$

Maka dengan memanfaatkan teorema Cauchy-Schwartz didapat

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)x_i + \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)y_i$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dalam hal $x_i + y_i \neq 0$, untuk suatu i ($i = 1, 2, \ldots, n$), maka diperoleh

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dengan kata lain diperoleh $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tinjau jika $x_i + y_i = 0$, untuk setiap i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Jelas bahwa pertaksamaan $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ tetap berlaku.

Berdasarkan ketiga poin a, b dan c maka fungsi $R^n \rightarrow R$ yang didefinisikan

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

untuk setiap vektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ adalah ruang bernorma.

2.7 Ruang Hasil Kali Dalam

Definisi 5

Sebuah hasil kali dalam (*inner product*) pada ruang vektor riil V adalah fungsi vang mengasosiasikan bilangan riil $\langle u, v\rangle$ dengan masing-masing pasangan vektor u dan v pada V sedemikian rupa sehingga aksioma-aksioma berikut dipenuhi untuk semua vektor u, v, dan w di V dan juga untuk semua skalar k.

(1) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ (aksioma simetri)

(2) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle v, w\rangle$ (aksioma penambahan)

(3) $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle$ (aksioma kehomogenan)

(4) $\langle v, v\rangle \geq 0$; dan $\langle v, v\rangle = 0$ (aksioma kepositifan)

jika dan hanya jika $v = 0$

Sebuah ruang vektor riil dengan sebuah hasil kali dalam dinamakan ***ruang hasil kali dalam riil*** **(*real product space*)**

(Anton dan Rorres 2000: 276)

2.8 Ruang Hasil Kali Dalam dan Ruang Bernorma

Dipunyai $V = Ç^n$, Ç lapangan komplek.

Dilengkapi fungsi $\langle .,. \rangle$: $V \times V \rightarrow$ Ç

Didefinisikan

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in V$$

Dibangun fungsi F: V → ℝ, didefinisikan $F(u) = \langle u, v\rangle^{\frac{1}{2}}$

Ditunjukkan F memenuhi sifat ruang bernorma:

(1) $F(x) \geq 0$ dan $F(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

sebab $F(x) = \langle u, v\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \geq 0$ (karena $|x_i|^2 \geq 0$)

(⇒) Dipunvai F(u) = 0, ditunjukkan u = 0

Karena $0 = F(x) = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

Maka $0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

Berakibat $0 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$ (satu-satunya kemungkinan adalah jika $|x_i|^2 = 0$)

Jadi $u_i = 0$ $\forall i$, $u = (0, 0, \ldots, 0) \in V =$ Ç.

(⇐) Dipunvai u = 0, ditunjukkan F(u) = 0

Karena $u = 0$ maka diperoleh $u_i = 0\ \forall i$, $u = (0, 0, \ldots, 0) \in V = $ Ç

Berakibat $0 = |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i} = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$

Jadi F(u) = 0.

(2) V memenuhi sifat kedua, sebab

$$|F(\alpha x)| = \langle \alpha x, \alpha x\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha x_i \alpha \bar{x}_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i|^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$$= |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i}$$

$$= |\alpha| \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\alpha| F(x) \ \forall x \in V.$$

(3) V memenuhi sifat ketiga, sebab

$$(x_i + y_i)^2 = (x_i + y_i)(x_i + y_i) \leq (x_i + y_i)((x_i) + (y_i))$$

$$= (x_i + y_i)x_i + (x_i + y_i)y_i$$

maka dengan memanfaatkan teorema Cauchv-Shcwarstw didapat

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)x_i + \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)y_i$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

dalam hal $u_i + v_i \neq 0$ untuk suatu i (i = 1, 2, …, n), maka diperoleh

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dengan kata lain diperoleh $|x+y| \leq |x| + |y|$

Tinjau jika $u_i + v_i = 0 \ \forall \ i$ (i = 1, 2, …, n). Jelas bahwa pertaksamaan

$|x+y| \leq |x| + |y|$ tetap berlaku.

Karena V memenuhi 1, 2, 3, maka V = Ç^n merupakan ruang bernorma.

2.9 Ruang Matriks

Definisi 6

Misalkan $S \neq \emptyset$ dan $u, v \in S$. Fungsi d : $S \times S \rightarrow$ R disebut ruang matriks

pada S jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:

(M1) $d(u, v) \geq 0 \; \forall \; u, v \in S$.

(M2) $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.

(M3) $d(u, v) = d(v, u) \; \forall \; u, v \in S$.

(M4) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \; \forall \; u, v, w \in S$.

(William dan Philip 1987: 298)

Contoh 4

Buktikan bahwa fungsi $d: R^n x R^n \rightarrow R$ yang didefinisikan

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

memenuhi semua sifat matriks.

Penyelesaian:

(1) d memenuhi M1, sebab

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0, \text{jelas karena} (x_i - y_i)^2 \geq 0.$$

Jadi d memenuhi M1.

(2) Ditunjukkan d memenuhi M2

$(\Rightarrow)$ dipunyai d(x,y) = 0, ditunjukkan $x = y$.

karena $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

berakibat $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = 0$

sehingga $(x_i - y_i)^2 = 0 \ \forall i = 1,2,\dots,n$

sebab andaikan $\exists i \ni (x_i - y_i)^2 > 0$

berakibat $0 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 > 0$

diperoleh fakta 0 > 0, kontradiksi.

Sehingga haruslah $x_i - y_i = 0 \ \forall i = 1,2,\dots,n.$

Jadi $x = y$.

$(\Leftarrow)$ dipunyai $x = y$, ditunjukkan d(x,y) = 0

karena $x = y$ maka $x_i = y_i \ \forall i = 1,2,\dots,n$

berakibat $x_i - y_i = 0 \ \forall i = 1,2,\dots,n$

berakibat $(x_i - y_i)^2 = 0 \ \forall i = 1,2,\dots,n$

berakibat $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = 0$

berakibat $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$

Jadi d(x,y) = 0.

Jadi d memenuhi M2.

(3) Ditunjukkan d memenuhi M3

d(x,y) = d(y,x) untuk setiap x,y di R

dipunyai $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

maka $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n}(-(x_i - y_i))^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = d(x,y).$$

Jadi d memenuhi M3.

(4) Ditunjukkan d memenuhi M4

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\ \forall\ x, y, z \in R.$

dipunyai $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \|x_i - y_i\|$$

$$= \|x_i - z_i + z_i - y_i\|$$

$$\leq \|x_i - z_i\| + \|z_i - y_i\|$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= d(x,z) + d(z,y).$$

Jadi d memenuhi M4.

Jadi $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ merupakan suatu matriks.

BAB 3

METODE PUSTAKA

3.1 Kajian Pustaka

Kajian pustaka merupakan penelaah sumber pustaka relevan yang digunakan untuk mengumpulkan data maupun informasi yang diperlukan dalam penulisan ini. Kajian pustaka diawali dengan mengumpulkan sumber pustaka yaitu berupa buku-buku maupun referensi yang menjadi dasar dalam penulisan ini. Setelah sumber pustaka terkumpul dilanjutkan dengan penelaahan isi sumber pustaka tersebut. Pada akhirnya sumber pustaka ini dijadikan landasan untuk melakukan penelitian ini.

3.2 Perumusan Masalah

Dengan menemukan tema yang cocok, langkah selanjutnva adalah merumuskan masalah dari tema yang diangkat tersebut sesuai dengan bahasan yang akan digunakan dengan bantuan dosen pembimbing. Perumusan masalah dinyatakan dalam bentuk pernyataan yang singkat dan jelas sehingga mudah untuk dipahami.

3.3 Pemecahan Masalah

Pada tahap ini, dilakukan analisis dari permasalahan vang telah dirumuskan dengan didasari teori dan argumentasi vang tepat. Pemecahan masalah ini meliputi penjelasan tema vang telah ditetapkan dan pembahasan mengenai masalah vang telah diungkapkan sebelumnva secara lengkap dengan landasan teori vang ada, tentunva dengan menggunakan referensi vang ada di samping hasil olahan kajian penulis sendiri disertai kosultasi dengan dosen pembimbing.

Dalam proses pemecahan masalah ini, diterangkan berbagai cara menvelesaikan masalah dengan pendekatan vang ditetapkan sebelumnva berdasarkan landasan teori vang sudah ada.

3.4 Penarikan Simpulan

Hasil dari pembahasan ini dituangkan dalam bentuk simpulan akhir vang menvimpulkan secara umum pemecahan masalah tersebut. Simpulan in dijadikan sebagai hasil kajian akhir dan merupakan hasil akhir dari proses penulisan skripsi.

BAB 4

HIPERBOLOIDA-N DI R^n

4.1 Definisi Hiperboloida-n

Definisi 7

A hyperboloid-n *is the set of points in R^n such that for each point the difference of its distances from two fixed point (the foci) is a constant.*

4.2 Persamaan Hiperboloida-n

Ambil sebarang titik $a = (a_1,0,0, \ldots,0)$ dan $-a = (-a_1,0,0, \ldots, 0) \in R^n$ dan

titik fokus suatu hiperboloida-n yaitu titik $c = (c_1,0,0, \ldots,0)$ dan titik $-c = (-c_1,0,0,$

$\ldots,0) \in R^n$ dengan $a < c$ pada salah satu sumbu yaitu x_1.

Ambil sebarang titik pada hiperboloida-n yaitu titik $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$.

Telah didefinisikan bahwa jarak antara titik x ke c dan ke $-c$ di R^n adalah

$$d(x,c) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - c_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ dan } d(x,-c) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + c_i)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

dan dari definisi hiperboloida-n diperoleh

$|d(x,c) - d(x,-c)| = 2a_1$

Sehingga

$d(x,c) - d(x,-c) = \pm 2a_1$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - c_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + c_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \pm 2a_1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - 0)^2 + \cdots + (x_n - 0)^2} - \sqrt{(x_1 + c_i)^2 + (x_2 + 0)^2 + \cdots + (x_n + 0)^2} = \pm 2a_1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - 0)^2 + \cdots + (x_n - 0)^2} = \pm 2a_1 + \sqrt{(x_1 + c_1)^2 + (x_2 + 0)^2 + \cdots + (x_n + 0)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \pm 2a_1 + \sqrt{(x_1 + c_1)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Setelah kedua ruas dikuadratkan

$$\Leftrightarrow (x_1 - c_1)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 4a_1^2 \pm 4a_1\sqrt{(x_1 + c_1)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} + (x_1 + c_1)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

$$\Leftrightarrow -c_1x_1 - a_1^2 = \pm a_1\sqrt{(x_1 + c_1)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Kedua ruas dikuadratkan lagi

$$\Leftrightarrow (-c_1x_1 - a_1^2)^2 = a_1^2[(x_1 + c_1)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2]$$

$$\Leftrightarrow (c_1^2 - a_1^2)x_1^2 - a^2(x_2^2 + \cdots + x_n^2) = a_1^2(c_1^2 - a_1^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2 + \cdots + x_n^2}{c_1^2 - a_1^2} = 1.$$

Karena $a < c$ maka $c_1^2 - a_1^2 > 0$.

Dengan kata lain $c_1^2 - a_1^2 = b_1^2$ untuk suatu $b \in$ R.

Sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{b_1^2} - \frac{x_3^2}{b_1^2} \dots - \frac{x_n^2}{b_1^2} = 1$$

Misalkan titik-titik potong hiperboloida-n terhadap sumbu lainnya yaitu x_2, x_3, …, x_n adalah a_2, a_3, …, a_n, maka diperoleh

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} - \dots - \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$$

Untuk suatu $a_i (i = 1,2, \dots, n), a \in R$.

Jadi persamaan hiperboloida-n dengan titik pusat O(0,0,…,0) dan titik fokusnya terletak pada sumbu x_1 yaitu

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} - \dots - \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$$

dan $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ disebut bilangan karakteristik.

Dengan cara yang sama maka untuk hiperboloida-n dengan titik pusat O(0,0,…,0) dan titik fokusnya terletak pada sumbu x_2 yaitu

$$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} - \dots - \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$$

dan seterusnya hingga titik fokusnya terletak pada sumbu x_n yaitu

$$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} - \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$$

Sehingga persamaan hiperboloida-n dengan titik pusat O(0,0,…0) dan titik fokusnya tereletak pada suatu sumbu x_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ dengan suatu bilangan karakteristik $\sqrt{-a_i^2}\ (i = 1,2, \ldots, n)$, $i \in$ R yaitu

$$-\frac{x_1^{\,2}}{a_1^{\,2}}-\frac{x_2^{\,2}}{a_2^{\,2}}-\frac{x_3^{\,2}}{a_3^{\,2}}-\cdots-\frac{x_n^{\,2}}{a_n^{\,2}}=1$$

4.3 Garis dan Bidang Singgung Hiperboloida-n

Jika diberikan suatu hiperboloida-n dengan titik pusat (0,0,…,0) dan titik fokusnya terletak pada sumbu x_1

$$H: \frac{x_1^{\,2}}{a_1^{\,2}}-\frac{x_2^{\,2}}{a_2^{\,2}}-\cdots-\frac{x_n^{\,2}}{a_n^{\,2}}=1$$

Dan diketahui bahwa suatu titik $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_n') \in R^n$ terletak pada *H*, dan misalkan $T\ (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ merupakan titik singgung pada *H*. Maka persamaan garis yang melalui T dengan bilangan arah $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ adalah

$$\frac{x_1 - x_1'}{b_1} = \frac{x_2 - x_2'}{b_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n'}{b_n} = \lambda \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Sehingga diperoleh $x_1 = x_1' + b_1\lambda, x_1 = x_2' + b_2\lambda, \ldots, x_n = x_n' + b_n\lambda$

Koordinat-koordinat titik-titik potong garis ini dengan *H* diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{x_1^{\,2}}{a_1^{\,2}}-\frac{x_2^{\,2}}{a_2^{\,2}}-\cdots-\frac{x_n^{\,2}}{a_n^{\,2}}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1' + b_1\lambda)^2}{a_1{}^2} - \frac{(x_2' + b_2\lambda)^2}{a_2{}^2} - \cdots - \frac{(x_n' + b_n\lambda)^2}{a_n{}^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1'^2 + 2x_1'b_1\lambda + b_1^2\lambda^2}{a_1{}^2} - \frac{x_2'^2 + 2x_2'b_2\lambda + b_2^2\lambda^2}{a_2{}^2} - \cdots - \frac{x_n'^2 + 2x_n'b_n\lambda + b_n^2\lambda^2}{a_n{}^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x_1'^2}{a_1{}^2} - \frac{x_2'^2}{a_2{}^2} - \cdots - \frac{x_n'^2}{a_n{}^2}\right) + \left(\frac{2x_1'b_1\lambda}{a_1{}^2} - \frac{2x_2'b_2\lambda}{a_2{}^2} - \cdots - \frac{2x_n'b_n\lambda}{a_n{}^2}\right) + \left(\frac{b_1^2\lambda^2}{a_1{}^2} - \frac{b_2^2\lambda^2}{a_2{}^2} - \cdots - \frac{b_n^2\lambda^2}{a_n{}^2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{b_1^2}{a_1{}^2} - \frac{b_2^2}{a_2{}^2} - \cdots - \frac{b_n^2}{a_n{}^2}\right)\lambda^2 + \left(\frac{2x_1'b_1}{a_1{}^2} - \frac{2x_2'b_2}{a_2{}^2} - \cdots - \frac{2x_n'b_n}{a_n{}^2}\right)\lambda = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b_1^2}{a_1{}^2} - \frac{b_2^2}{a_2{}^2} - \cdots - \frac{b_n^2}{a_n{}^2}\right)\lambda^2 + \left(\frac{2x_1'b_1}{a_1{}^2} - \frac{2x_2'b_2}{a_2{}^2} - \cdots - \frac{2x_n'b_n}{a_n{}^2}\right)\lambda = 0$$

Garis akan menyinggung *H* jika titik-titik potongnya berimpit. Hal ini terjadi apabila persamaan kuadrat sebelumnya mempunyai dua akar yang sama atau apabila nilai diskriminannya sama dengan nol.

$D = b^2 - 4ac = 0.$

Jadi, haruslah akar persamaannya $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Hal ini hanya terjadi untuk

$$\frac{2x_1'b_1}{a_1{}^2} - \frac{2x_2'b_2}{a_2{}^2} - \cdots - \frac{2x_n'b_n}{a_n{}^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1'b_1}{a_1{}^2} - \frac{x_2'b_2}{a_2{}^2} - \cdots - \frac{x_n'b_n}{a_n{}^2} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

Sehingga persamaan garis dengan bilangan arah $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ yang menyinggung hiperboloida-n di titik singgung $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ yaitu

$$\frac{x_1 - x_1'}{b_1} = \frac{x_2 - x_2'}{b_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n'}{b_n} = \lambda$$

dengan syarat

$$\frac{x_1' b_1}{{a_1}^2} - \frac{x_2' b_2}{{a_2}^2} - \cdots - \frac{x_n' b_n}{{a_n}^2} = 0$$

Kemudian dari persamaan (1) dan (2), dengan mengeliminasi $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, diperoleh

$$\frac{x_1'(x_1 - x_1')}{{a_1}^2} - \frac{x_2'(x_2 - x_2')}{{a_2}^2} - \cdots - \frac{x_n'(x_n - x_n')}{{a_n}^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 x_1' - {x_1'}^2}{{a_1}^2} - \frac{x_2 x_2' - {x_2'}^2}{{a_2}^2} - \cdots - \frac{x_n x_n' - {x_n'}^2}{{a_n}^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 x_1'}{{a_1}^2} - \frac{x_2 x_2'}{{a_2}^2} - \cdots - \frac{x_n x_n'}{{a_n}^2} - \left(\frac{{x_1'}^2}{{a_1}^2} - \frac{{x_2'}^2}{{a_2}^2} - \cdots - \frac{{x_n'}^2}{{a_n}^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 x_1'}{{a_1}^2} - \frac{x_2 x_2'}{{a_2}^2} - \cdots - \frac{x_n x_n'}{{a_n}^2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 x_1'}{{a_1}^2} - \frac{x_2 x_2'}{{a_2}^2} - \cdots - \frac{x_n x_n'}{{a_n}^2} = 1.$$

Jadi titik x' tersebut memenuhi persamaan

$$\frac{x_1 x_1'}{{a_1}^2} - \frac{x_2 x_2'}{{a_2}^2} - \cdots - \frac{x_n x_n'}{{a_n}^2} = 1$$

Persamaan ini merupakan bidang datar-*n* dengan bilangan arah

$$\left\{\frac{(x_1')}{{a_1}^2}, -\frac{(x_2')}{{a_2}^2}, \ldots, -\frac{(x_n')}{{a_n}^2}\right\}$$

yang bersekutu tepat di satu titik dengan hiperboloida-n *H* yaitu titik x', dan selanjutnya disebut dengan *bidang singgung terhadap H* di titik x' dan titik x' disebut *titik singgung bidang singgung terhadap H*.

4.4 Bidang Kutub Hiperboloida-n

Bidang kutub pada hiperboloida-*n* adalah suatu bidang yang dibentuk dari titik yang tidak terletak pada hiperboloida-*n* tersebut dan menyinggung hiperboloida-*n* tersebut.

Jika diberikan suatu hiperboloida-*n* dengan titik pusat (0,0,…,0) dan titik fokusnya terletak pada sumbu x_1

$$H: \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \cdots - \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$$

Dan sebarang titik $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R^n$ yang tidak terletak pada *H*. Misalkan $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in R^n$ suatu titik singgung pada *H* dari bidang singgung yang melalui titik $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R^n$. Sehingga diperoleh persamaan bidang singgung pada *H*

$$\frac{x_1 c_1}{a_1^2} - \frac{x_2 c_2}{a_2^2} - \cdots - \frac{x_n c_n}{a_n^2} = 1$$

Karena bidang singgung melalui $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R^n$, maka diperoleh

$$\frac{b_1 c_1}{a_1^2} - \frac{b_2 c_2}{a_2^2} - \cdots - \frac{b_n c_n}{a_n^2} = 1$$

Karena titik $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in R^n$ merupakan titik singgung pada *H*, maka ini berarti setiap titik singgung dari bidang singgung pada *H* yang melalui $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R^n$, terletak pada bidang dengan persamaan

$$\frac{b_1 x_1}{a_1^2} - \frac{b_2 x_2}{a_2^2} - \cdots - \frac{b_n x_n}{a_n^2} = 1.$$

Jadi, persamaan berikut merupakan persamaan bidang kutub pada H

$$V^H: \frac{b_1 x_1}{a_1^2} - \frac{b_2 x_2}{a_2^2} - \cdots - \frac{b_n x_n}{a_n^2} = 1$$

dengan bilangan arah

$\left\{\frac{b_1}{{a_1}^2}, -\frac{b_2}{{a_2}^2}, \dots, -\frac{b_n}{{a_n}^2}\right\}$.

Selanjutnya bidang datar–*n* V^H dinamakan *bidang kutub b terhadap H*, sedangkan titik *b* disebut *titik kutub* V^H *terhadap H*.

4.5 Persamaan Hiperboloida-n Dengan Pusat $\mathbf{O'(h_1, h_2, \dots, h_n)}$

Selain permasalahan sebelumnya, permasalahan yang dibahas adalah bagaimana persamaan hiperboloida-n di R^n dengan titik pusatnya selain O(0,0,..,0) dan sumbu simetri sejajar dengan sumbu koordinat.

Untuk memperoleh penyelesaian permasalahan tersebut, di awali dengan adanya pergeseran atau translasi sumbu dari $x_1, x_2, \dots, x_n$ terhadap $x_1', x_2', \dots, x_n'$. Misalkan ambil titik sebarang $O'(0,0,\dots,0)$ pada sumbu koordinat $x_1', x_2', \dots, x_n'$ dan $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ pada sumbu koordinat $x_1, x_2, \dots, x_n$. Melalui sebuah titik dapat dibangun sebuah sumbu koordinat x_1' dengan cara membentuk garis yang sejajar dengan sumbu x_1 dengan satu garis. Demikian juga dengan sumbu koordinat $x_1', x_2', \dots, x_n'$. Untuk setiap titik $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $P'(x_1', x_2', \dots, x_n')$ pada sumbu koordinat $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ dapat dibuat persamaan

$$x_1 = x_1' + h_1 \text{ atau } x_1' = x_1 - h_1$$

$$x_2 = x_2' + h_2 \text{ atau } x_2' = x_2 - h_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_n = x_n' + h_n \text{ atau } x_n' = x_n - h_n$$

Dari persamaan di atas dapat digunakan untuk menentukan persamaan hiperboloida-n di R^n serta relasi yang terkait sebagai berikut.

Dipunyai suatu hiperboloida-n dengan titik pusat (0,0,…,0) dan titik fokusnya terletak pada sumbu x_1

$$\frac{{x_1}^2}{{a_1}^2}-\frac{{x_2}^2}{{a_2}^2}-\dots-\frac{{x_n}^2}{{a_n}^2}=1$$

Dari persamaan tersebut, maka untuk hiperboloida-n dengan titik pusat $O'(0,0,\dots,0)$ pada sumbu koordinat $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ adalah

$$\frac{{x'_1}^2}{{a_1}^2}-\frac{{x'_2}^2}{{a_2}^2}-\dots-\frac{{x'_n}^2}{{a_n}^2}=1$$

Karena untuk setiap titik $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $P'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ pada sumbu koordinat $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ terdapat hubungan

$x_1 = x'_1 + h_1$ atau ${x_1}' = x_1 - h_1$

$x_2 = x'_2 + h_2$ atau ${x_2}' = x_2 - h_2$

$\vdots$ $\vdots$

$x_n = x'_n + h_n$ atau ${x_n}' = x_n - h_n$

maka persamaan hiperboloida-n dengan titik pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ adalah

$$\frac{{x'_1}^2}{{a_1}^2}-\frac{{x'_2}^2}{{a_2}^2}-\dots-\frac{{x'_n}^2}{{a_n}^2}=1$$

atau

$$\frac{(x_1-h_1)^2}{{a_1}^2}-\frac{(x_2-h_2)^2}{{a_2}^2}-\dots-\frac{(x_n-h_n)^2}{{a_n}^2}=1.$$

4.6 Garis dan Bidang Singgung Hiperboloida-n Dengan Pusat $\mathbf{O'(h_1, h_2, \dots, h_n)}$

Dipunyai persamaan garis dengan bilangan arah $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ menyinggung hiperboloida-n dengan titik pusat di titik $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ di titik $(x')' = ((x_1')', (x_2')', \dots, (x_n')')$ yaitu

$$\frac{(x_1)' - (x_1')'}{b_1} = \frac{(x_2)' - (x_2')'}{b_2} = \dots = \frac{(x_n)' - (x_n')'}{b_n} = \lambda$$

dengan syarat

$$\frac{(x_1')' b_1}{{a_1}^2} - \frac{(x_2')' b_2}{{a_2}^2} - \dots - \frac{(x_n')' b_n}{{a_n}^2} = 0$$

Kemudian suatu persamaan bidang singgung hiperboloida-n dengan titik pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ dan titik fokusnya terletak pada sumbu x_1'

$$\frac{x_1 x_1'}{{a_1}^2} - \frac{x_2 x_2'}{{a_2}^2} - \dots - \frac{x_n x_n'}{{a_n}^2} = 1$$

dengan bilangan arah

$$\left\{\frac{(x_1')}{{a_1}^2}, -\frac{(x_2')}{{a_2}^2}, \dots, -\frac{(x_n')}{{a_n}^2}\right\}$$

Dari persamaan tersebut, maka persamaan bidang singgung untuk hiperboloida-n dengan titik pusat $O'(0,0,\dots,0)$ pada sumbu koordinat $x_1', x_2', \dots, x_n'$ adalah

$$\frac{(x_1)'(x_1')'}{{a_1}^2} - \frac{(x_2)'(x_2')'}{{a_2}^2} - \dots - \frac{(x_n)'(x_n')'}{{a_n}^2} = 1$$

dengan bilangan arah

$$\left\{\frac{(x_1')'}{a_1{}^2}, -\frac{(x_2')'}{a_2{}^2}, \dots, -\frac{(x_n')'}{a_n{}^2}\right\}$$

Karena untuk setiap titik $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $P'(x_1', x_2', \dots, x_n')$ pada sumbu koordinat $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ terdapat hubungan

$$x_1 = x_1' + h_1 \text{ atau } x_1{}' = x_1 - h_1$$

$$x_2 = x_2' + h_2 \text{ atau } x_2{}' = x_2 - h_2$$

$\vdots \qquad \vdots$

$$x_n = x_n' + h_n \text{ atau } x_n{}' = x_n - h_n$$

maka persamaan garis singgung hiperboloida-n dengan titik pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ adalah

$$\frac{x_1 - x_1'}{b_1} = \frac{x_2 - x_2'}{b_2} = \dots = \frac{x_n - x_n'}{b_n} = \lambda$$

dengan syarat

$$\frac{(x_1' - h)b_1}{a_1{}^2} - \frac{(x_2' - h)b_2}{a_2{}^2} - \dots - \frac{(x_n' - h)b_n}{a_n{}^2} = 0$$

Persamaan bidang singgung hiperboloida-n dengan titik pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ adalah

$$\frac{(x_1 - h_1)(x_1' - h_1)}{a_1{}^2} - \frac{(x_2 - h_2)(x_2' - h_2)}{a_2{}^2} - \dots - \frac{(x_n - h_n)(x_n' - h_n)}{a_n{}^2} = 1.$$

4.7 Bidang Kutub Hiperboloida-n Dengan Pusat $\mathbf{O'(h_1, h_2, \dots, h_n)}$

Dipunyai suatu persamaan bidang kutub hiperboloida-*n* dengan titik pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ dan titik fokusnya terletak pada sumbu x_1'

$$\frac{b_1 x_1}{a_1{}^2} - \frac{b_2 x_2}{a_2{}^2} - \dots - \frac{b_n x_n}{a_n{}^2} = 1$$

dengan bilangan arah

$$\left\{\frac{b_1}{{a_1}^2}, \frac{b_2}{{a_2}^2}, \dots, \frac{b_n}{{a_n}^2}\right\}.$$

Dari persamaan tersebut, maka persamaan bidang singgung untuk hiperboloida-n dengan titik pusat $O'(0,0,\dots,0)$ pada sumbu koordinat $x_1', x_2', \dots, x_n'$ adalah

$$\frac{b_1' {x_1}'}{{a_1}^2} - \frac{b_2' {x_2}'}{{a_2}^2} - \dots - \frac{b_n' {x_n}'}{{a_n}^2} = 1$$

dengan bilangan arah

$$\left\{\frac{{b_1}'}{{a_1}^2}, \frac{{b_2}'}{{a_2}^2}, \dots, \frac{{b_n}'}{{a_n}^2}\right\}.$$

Karena untuk setiap titik $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $P'(x_1', x_2', \dots, x_n')$ pada sumbu koordinat $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ terdapat hubungan

$$x_1 = x_1' + h_1 \text{ atau } {x_1}' = x_1 - h_1$$

$$x_2 = x_2' + h_2 \text{ atau } {x_2}' = x_2 - h_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_n = x_n' + h_n \text{ atau } {x_n}' = x_n - h_n$$

maka persamaan bidang kutub hiperboloida-*n* dengan titik pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ adalah

$$\frac{(b_1 - h_1)(x_1 - h_1)}{{a_1}^2} - \frac{(b_2 - h_2)(x_2 - h_2)}{{a_2}^2} - \dots - \frac{(b_n - h_n)(x_n - h_n)}{{a_n}^2} = 1.$$

BAB 5

PENUTUP

5.1 Simpulan

Dari penulisan skripsi ini, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

(1) Hiperboloida-*n* dengan titik pusat O(0,0,…,0) dan titik fokusnya terletak pada sumbu x_1.

a. Persamaan hiperboloida-*n* *H* dengan titik pusat O(0,0,…,0) dan titik fokusnya terletak pada sumbu x_1 yaitu

$$H: \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} - \cdots - \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$$

b. Persamaan garis dengan bilangan arah $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ yang menyinggung hiperboloida-*n* *H* di titik $x' = (x_1', x_2', \dots, x_n') \in R^n$ yaitu

$$\frac{x_1 - x_1'}{b_1} = \frac{x_2 - x_2'}{b_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n'}{b_n} = \lambda$$

dengan syarat

$$\frac{x_1' b_1}{a_1^2} - \frac{x_2' b_2}{a_2^2} - \cdots - \frac{x_n' b_n}{a_n^2} = 0$$

c. Persamaan bidang singgung pada *H* di titik $x' = (x_1', x_2', \dots, x_n') \in R^n$ yaitu

$$\frac{x_1 x_1'}{a_1^2} - \frac{x_2 x_2'}{a_2^2} - \cdots - \frac{x_n x_n'}{a_n^2} = 1$$

dengan bilangan arah

$$\left\{\frac{(x_1')}{a_1^2}, -\frac{(x_2')}{a_2^2}, \dots, -\frac{(x_n')}{a_n^2}\right\}.$$

d. Persamaan bidang kutub pada *H* dengan titik kutub $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R^n$ yaitu

$$V^H: \frac{b_1 x_1}{a_1^2} - \frac{b_2 x_2}{a_2^2} - \dots - \frac{b_n x_n}{a_n^2} = 1$$

dengan bilangan arah

$$\left\{\frac{b_1}{a_1^2}, \frac{b_2}{a_2^2}, \dots, \frac{b_n}{a_n^2}\right\}.$$

(2) Hiperboloida-*n* dengan titik pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ dan titik fokusnya terletak pada sumbu x_1'

a. Persamaan hiperboloida-*n* *H'* dengan titik pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ dan titik fokusnya terletak pada sumbu x_1' yaitu

$$H': \frac{x_1'^2}{a_1^2} - \frac{x_2'^2}{a_2^2} - \dots - \frac{x_n'^2}{a_n^2} = 1$$

atau

$$H': \frac{(x_1 - h_1)^2}{a_1^2} - \frac{(x_2 - h_2)^2}{a_2^2} - \dots - \frac{(x_n - h_n)^2}{a_n^2} = 1.$$

b. Persamaan garis dengan bilangan arah $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ yang menyinggung hiperboloida-*n* *H'* di titik $(x')' = ((x_1')', (x_2')', \dots, (x_n')') \in R^n$ yaitu

$$\frac{(x_1)' - (x_1')'}{b_1} = \frac{(x_2)' - (x_2')'}{b_2} = \dots = \frac{(x_n)' - (x_n')'}{b_n} = \lambda$$

atau

$$\frac{x_1 - x_1'}{b_1} = \frac{x_2 - x_2'}{b_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n'}{b_n} = \lambda$$

dengan syarat

$$\frac{(x_1')' b_1}{a_1^2} - \frac{(x_2')' b_2}{a_2^2} - \cdots - \frac{(x_n')' b_n}{a_n^2} = 0$$

atau

$$\frac{(x_1' - h) b_1}{a_1^2} - \frac{(x_2' - h) b_2}{a_2^2} - \cdots - \frac{(x_n' - h) b_n}{a_n^2} = 0$$

c. Persamaan bidang singgung pada *H'* di titik $(x)' = \left((x_1)', (x_2)', \ldots, (x_n)'\right) \in R^n$ yaitu

$$\frac{(x_1)'(x_1)'}{a_1^2} - \frac{(x_2)'(x_2)'}{a_2^2} - \cdots - \frac{(x_n)'(x_n)'}{a_n^2} = 1$$

atau

$$\frac{(x_1 - h_1)(x_1' - h_1)}{a_1^2} - \frac{(x_2 - h_2)(x_2' - h_2)}{a_2^2} - \cdots - \frac{(x_n - h_n)(x_n' - h_n)}{a_n^2} = 1.$$

d. Persamaan bidang kutub pada *H'* dengan titik kutub $b' = (b_1', b_2', \ldots, b_n') \in R^n$ yaitu

$$V^{H'}: \frac{b_1' x_1'}{a_1^2} - \frac{b_2' x_2'}{a_2^2} - \cdots - \frac{b_n' x_n'}{a_n^2} = 1$$

atau

$$\frac{(b_1 - h_1)(x_1 - h_1)}{a_1^2} - \frac{(b_2 - h_2)(x_2 - h_2)}{a_2^2} - \cdots - \frac{(b_n - h_n)(x_n - h_n)}{a_n^2} = 1.$$

5.2 Saran

Telah diketahui bahwa penulisan skripsi ini bergantung pada titik fokusnya yang terletak pada sumbu simetri serta pusatnya terletak pada titik O(0,0,…,0) dan titik pusat pada sumbu simetri yang sejajar sumbu koordinat. Jadi masih dapat dilakukan pengkajian lebih lanjut misalnya: hiperboloida-*n* dengan titik fokus yang tidak terletak pada sumbu simetri, hiperboloida-*n* dengan titik pusat pada sumbu simetri yang tidak sejajar sumbu koordinat atau *hyper-hyperboloid* pada ruang tak hingga dan lain sebagainya, sebagai masalah selanjutnya

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. dan C, Rorres. 2000. *Elementarv Linear Algebra Applications Version*. USA: Von Hoffman Press, Inc.

Carico, **Charles** C. dan I, Droovan. 1980. *Analvtic Geometrv*. Los Angles: Pierce College.

Lipschutw, S. dan M, Lipson. 2006. *Schaum's Out Lines: Aljabar Linear Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.

Parwvnski, R. P. dan P. W, Wipse. *Introduction to Mathematical Analvsis.* Singapore: McGraw-Hill Book Co.

Rawuh, dkk. 1972. *Ilmu Ukur Analitis*. Bandung: Tarate.

Suryadi, H.S. 1984. *Ilmu Ukur Analitik Ruang*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Wuryanto. 2003. *Analisis Real I*. Semarang: Unnes.

http://id.wikipedia.org/wiki/Matematika [diakses 29-04-2011].