PENYELESAIAN KASUS BEBERAPA INTEGRAL TAK WAJAR DENGAN INTEGRAN MEMUAT FUNGSI EKSPONENSIAL DAN FUNGSI LOGARITMA

skripsi

disajikan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

Anisa Kurniawati

4150407005

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2011

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan.

Semarang, Agustus 2011

Anisa Kurniawati

4150407005

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

" Penyelesaian Kasus Beberapa Integral Tak Wajar dengan Integran Memuat Fungsi Eksponensial dan Fungsi Logaritma "

disusun oleh

Anisa Kurniawati
4150407005

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA Unnes pada tanggal 19 Agustus 2011.

Panitia,

Ketua	Sekretaris
Dr. Kasmadi Imam S., M.S.	Drs. Edy Soedjoko, M.Pd.
195111151979031001	195604191987031001

Ketua Penguji

Dr. St. Budi Waluyo, M. Si.
196809071993031002

Anggota Penguji/ Pembimbing Utama	Anggota Penguji/ Pembimbing Pendamping
Drs. Wuryanto, M.Si.	Muhammad Kharis, S. Si, M. Sc.
195302051983031003	198210122005011001

PERSEMBAHAN

- Untuk bapak dan ibuku tercinta serta adikku tersayang.
- Untuk dia yang selalu memberi warna dalam hidupku.
- Untuk sahabat-sahabatku tersayang (Astin, Ani, Ninik, Tenis, Meita, Ulil, Angga).
- Untuk teman-teman seperjuangan (Math'07, Himatika 2008 & 2009, KKN Karanganyar-Tuntang).
- Untuk saudara-saudaraku di Kos Dodol dan Kos Pelangi.
- Untuk Almamaterku.

MOTTO

- *Sabar dalam mengatasi kesulitan, bertindak bijaksana dalam mengatasinya, dan ketekunan dalam menjalaninya adalah sesuatu yang utama.*
- *Setiap orang mungkin bisa membuatmu tersenyum senang, namun hanya ada satu orang spesial yang akan membuatmu tersenyum bahagia.*
- *Keyakinan diri yang kuat akan mampu bertahan di saat-saat sulit sekalipun.*
- *Kepercayaan bukanlah sesuatu hal yang kita minta, tapi sesuatu hal yang harus kita usahakan mendapatkannya.*

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Penyelesaian Kasus Beberapa Integral Tak Wajar dengan Integran Memuat Fungsi Eksponensial dan Fungsi Logaritma”. Solawat dan salam senantiasa penulis tujukan kepada Nabi Muhammad SAW, yang kita nantikan syafaatnya kelak di yaumil akhir.

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan karena adanya bimbingan, bantuan, dan dukungan dari berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Sudijono Sastroatmodjo, M.Si., Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Dr. Kasmadi Imam S, M.S., Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Edy Soedjoko, M.Pd., Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.
4. Drs. Wuryanto, M.Si., Dosen Pembimbing I yang telah membimbing dan mengarahkan penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Muhammad Kharis, S. Si, M. Sc., Dosen Pembimbing II yang telah membimbing dan mengarahkan penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Seluruh dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang yang telah memberikan ilmu yang bermanfaat dan membantu kelancaran dalam penyusunan skripsi ini.

7. Kedua orang tua dan adikku yang telah memberikan doa, dukungan, dan semangat yang tidak ternilai harganya sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi ini.
8. Semua pihak yang telah membantu penyusunan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT senantiasa memberikan limpahan rahmat dan hidayah-Nya pada kita. Kesempurnaan hanya milik Allah Yang Maha Kuasa, penulis berharap skripsi ini dapat memberi manfaat bagi Almamater pada khususnya dan pembaca pada umumnya.

Semarang, Agustus 2011

Penulis

Anisa Kurniawati
4150407005

ABSTRAK

Kurniawati, Anisa. 2011. *Penyelesaian Kasus Beberapa Integral Tak Wajar dengan Integran Memuat Fungsi Eksponensial dan Fungsi Logaritma*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Pembimbing Utama Drs. Wuryanto, M. Si. dan Pembimbing Pendamping Muhammad Kharis, S. Si, M. Sc.

Kata kunci: kalkulus, integral tak wajar, fungsi gamma, fungsi beta.

Matematika mempunyai peranan yang cukup besar dalam kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi saat ini, baik dari segi keilmuan matematika maupun dari segi teranpannya. Dalam matematika terdapat kajian mengenai kalkulus yang diantaranya membahas teorema L'Hopital, integral tak wajar, fungsi gamma, dan fungsi beta. Integral dengan batas tak hingga dapat disebut sebagai integral tak wajar. Menyelesaikan suatu integral tak wajar dapat dilakukan dengan mencari limit dari fungsinya. Fungsi gamma dan fungsi beta merupakan fungsi dalam bentuk integral.

Permasalahan yang dibahas pada penelitian ini adalah bagaimana menyelesaikan kasus beberapa integral tak wajar yang integrannya memuat fungsi eksponensial dan fungsi logaritma.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa fungsi gamma yang didefinisikan sebagai $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$, fungsi beta yang didefinisikan sebagai $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$, dan sifat-sifat fungsi gamma dan fungsi beta dapat digunakan untuk menyelesaikan kasus beberapa integral tak wajar.

Berdasarkan penelitian disimpulkan bahwa fungsi gamma dan fungsi beta dapat digunakan untuk menyelesaikan kasus beberapa integral tak wajar yang memiliki bentuk sesuai fungsi gamma dan fungsi beta serta memiliki bentuk-bentuk khusus. Integral tak wajar dengan integran memuat fungsi logaritma dapat diselesaikan dengan langkah mensubstitusi variabel x dengan e^{-u}. Integral tak wajar dengan integran memuat fungsi eksponensial dapat diselesaikan menggunakan fungsi gamma dengan cara merubah fungsi tersebut sesuai dengan bentuk fungsi gamma. Beberapa kasus integral tak wajar dapat diselesaikan menggunakan fungsi beta dengan cara merubah fungsi tersebut sesuai dengan bentuk fungsi beta, kemudian mencari nilai dari fungsi beta tersebut dengan menggunakan hubungan fungsi gamma dan fungsi beta.

DAFTAR ISI

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika mempunyai peranan yang cukup besar dalam kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi saat ini, baik dari segi keilmuan matematika maupun dari segi terapannya. Ilmu matematika berisi kumpulan teori-teori deduktif yang aksiomatis, masing-masing mempunyai suatu sistem tertentu yang terdiri dari pengertian-pengertian atau simbol-simbol yang sederhana, pernyataan-pernyataan pangkal yang sederhana, dan pernyataan-pernyataan sederhana yang tidak perlu dibuktikan. Akibatnya, kesimpulan yang diambil sangatlah logis dan terstruktur secara sistematis. Matematika terapan banyak berperan dalam menyelesaikan masalah-masalah di dunia nyata yang sukar diselesaikan dalam sistemnya, sehingga tidak hanya melatih ketrampilan dalam mengerjakan dan menyelesaikan soal-soal matematika saja, tetapi juga perlu mengkaji dan memahami konsep-konsep matematika baik yang sudah diajarkan dalam perkuliahan maupun yang belum diajarkan.

Dalam matematika terdapat kajian mengenai kalkulus yang diantaranya membahas teorema L'Hopital, integral tak wajar, fungsi gamma, fungsi beta, dan lain-lain. Fungsi gamma dan fungsi beta merupakan fungsi-fungsi istimewa yang sering muncul dalam pemecahan persamaan differensial, proses fisika, perpindahan panas, gesekan sumber bunyi, rambatan gelombang, potensial gaya, persamaan gelombang, mekanika kuantum, perhitungan probabilitas pada problem di mekanika statistik dan lainnya. Fungsi gamma dan fungsi beta merupakan fungsi dalam bentuk integral.

Suatu integral dengan batas tak hingga dapat disebut sebagai integral tak wajar, seperti integral dengan batas atas tak hingga, integral dengan batas bawah tak hingga, dan integral dengan batas atas dan bawah tak hingga. Menyelesaikan suatu integral tak wajar dalam kalkulus dapat dilakukan dengan mencari limit dari fungsinya.

Contoh:

Berikut disajikan suatu ilustrasi untuk menghitung $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

Jelas $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} (-tan^{-1} a) + \lim_{b \to \infty} (tan^{-1} b)$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \pi.$$

Contoh di atas merupakan salah satu cara dalam menyelesaikan integral tak wajar, dengan kata lain masih ada cara lain dalam menyelesaikan integral tak wajar. Sehingga memunculkan pertanyaan, apakah fungsi gamma dan fungsi beta dapat digunakan untuk menyelesaikan integral tak wajar?

1.2 Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana cara menyelesaikan kasus beberapa integral tak wajar yang integrannya memuat fungsi eksponensial dan fungsi logaritma.

1.3 Pembatasan Masalah

Masalah yang dikaji adalah cara menyelesaikan kasus beberapa integral tak wajar menggunakan fungsi gamma dan fungsi beta. Pada penelitian ini fungsi gamma digunakan untuk menyelesaikan kasus beberapa integral tak wajar dengan integran memuat fungsi eksponensial dan fungsi logaritma

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui penggunaan fungsi gamma dalam menyelesaikan kasus beberapa integral tak wajar dengan integran memuat fungsi eksponensial dan fungsi logaritma, serta untuk mengetahui penggunaan fungsi beta dalam menyelesaikan kasus beberapa integral tak wajar.

1.5 Manfaat

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

(1) Untuk memberikan informasi tentang penyelesaian kasus beberapa integral tak wajar dengan integran memuat fungsi eksponensial dan fungsi logaritma menggunakan fungsi gamma,

(2) memberikan informasi tentang penyelesaian kasus beberapa integral tak wajar menggunakan fungsi beta, dan

(3) memberikan manfaat bagi pembaca pecinta matematika, khususnya untuk pecinta kalkulus mengenai integral tak wajar dan fungsi-fungsi istimewa.

1.6 Sistematika Skripsi

Penulisan skripsi disusun dalam tiga bagian utama, yaitu bagian awal, bagian inti, dan bagian akhir skripsi.

1.6.1 Bagian Awal

Bagian awal skripsi terdiri dari halaman judul, halaman kosong, pernyataan keaslian tulisan, pengesahan, persembahan, motto, prakata, abstrak, dan daftar isi.

1.6.2 Bagian Pokok

Bagian pokok dari penulisan skripsi ini adalah isi skripsi yang terdiri dari lima bab.

(1) BAB 1 PENDAHULUAN

Bab ini memuat gambaran singkat tentang isi skripsi dan membahas tentang latar belakang, masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, manfaat, dan sistematika skripsi.

(2) BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

Tinjauan pustaka berisi mengenai teori-teori yang mendukung dan berkaitan dengan pembahasan skripsi sehingga dapat membantu penulis maupun pembaca dalam memahami isi skripsi. Bab ini terdiri dari fungsi, faktorial, anti turunan, integral parsial, limit, integral tak wajar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi gamma, fungsi beta, hubungan fungsi gamma dan fungsi beta serta beberapa teorema yang mendukung.

(3) BAB 3 METODOLOGI PENELITIAN

Metode penelitian berisi tentang proses atau langkah penelitian. Bab ini meliputi penemuan masalah, perumusan masalah, studi pustaka, analisis pemecahan masalah, dan penarikan simpulan.

(4) BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini berisi penggunaan fungsi gamma dalam menyelesaikan kasus beberapa integral tak wajar yang integrannya memuat fungsi eksponensial dan fungsi logaritma, serta penggunaan fungsi beta dalam menyelesaikan kasus beberapa integral tak wajar.

(5) BAB 5 PENUTUP

Bab ini berisi tentang simpulan dan saran yang diperoleh dari hasil dan pembahasan.

1.6.3 Bagian Akhir

Bagian akhir skripsi berisi daftar pustaka sebagai acuan untuk memberikan informasi tentang buku dan literatur lain yang digunakan dalam penulisan skripsi.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Fungsi

Definisi 2.1.1

Fungsi adalah suatu himpunan pasangan terurut (x, y) dengan syarat tidak terdapat dua pasangan berbeda yang suku pertamanya sama. Himpunan semua nilai x dinamakan daerah asal (*domain*) fungsi dan dinotasikan dengan D_f. Sedangkan himpunan semua nilai y yang dihasilkan dinamakan daerah hasil (*range*) fungsi dan dinotasikan dengan R_f (Leithold, 1986:49).

Definisi fungsi di sistem bilangan real dapat dinotasikan sebagai $f: D \rightarrow R$, $D \subseteq R$. D_f disebut sebagai daerah asal dan R_f disebut daerah hasil $\left(R_f = \left\{f(x) \middle| x \in D_f\right\}, R_f \subseteq R\right)$.

Contoh:

Dipunyai persamaan $y = 2x^2 + 5$. Fungsi $f: D \rightarrow R$ dengan $y = f(x)$ adalah himpunan semua pasangan terurut (x, y) sehingga x dan y memenuhi persamaan $y = 2x^2 + 5$, yaitu

$$f = \{(x, y) | y = 2x^2 + 5, x \in D\}.$$

Dari definisi f di atas, diperoleh

(1) $x = 1 \Rightarrow y = 7$,

(2) $x = 2 \Rightarrow y = 13$.

Jadi $(1, 7), (2, 13) \in f$.

Beberapa pasangan terurut lain yang termuat pada fungsi f adalah $(0,5), (-1,7), (-2,13), (10,205)$ dan masih banyak pasangan terurut lainnya, karena untuk setiap bilangan real x terdapat suatu nilai hasil y yang tunggal.

Bilangan x dan y adalah peubah/variabel. Untuk setiap f dari $D \subseteq R$ ke R, penggunaan huruf x adalah sebagai variabel bebas dan huruf y sebagai variabel tak bebas yang bergantung pada x.

2.2 Faktorial

Definisi 2.2.1

Misalkan n adalah bilangan bulat positif. Besaran n faktorial (simbol $n!$) didefinisikan sebagai hasil kali semua bilangan bulat dari 1 hingga n. Untuk $n = 0$, nol faktorial didefinisikan sama dengan 1 (Siang, 2002:140).

$n! = 1.2.3. \ldots .(n-1).n$

$0! = 1.$

Contoh:

Tulislah faktorial dari bilangan 1 sampai 10.

Penyelesaian:

$1! = 1$

$2! = 1.2 = 2$

$3! = 1.2.3 = 6$

$4! = 1.2.3.4 = 24$

$5! = 1.2.3.4.5 = 120$

$6! = 1.2.3.4.5.6 = 720$

$7! = 1.2.3.4.5.6.7 = 5040$

$8! = 1.2.3.4.5.6.7.8 = 40320$

$9! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9 = 362880$

$10! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 3628800$

2.3 Anti Turunan

Definisi 2.3.1

Dipunyai fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I. Fungsi F yang memenuhi $F'(x) = f(x)$ pada selang I disebut anti turunan atau fungsi primitif f pada selang I (Chotim, 2004:3).

$\int f(x)\, dx$ melambangkan sebarang anti turunan $f(x)$. Dalam notasi ini, $f(x)$ disebut integran.

Contoh:

Dipunyai $f(x) = \sin 2x$ dan $F(x) = -\frac{1}{2}.\cos 2x$. Periksa apakah $F(x)$ suatu anti turunan dari $f(x)$.

Pemeriksaan:

Jelas $\frac{d[F(x)]}{dx} = \frac{d\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]}{dx}$

$$= -\frac{1}{2}.\frac{d(\cos 2x)}{d(2x)}.\frac{d(2x)}{dx}$$

$$= -\frac{1}{2}.(-\sin 2x)2$$

$$= \sin 2x$$

$$= f(x).$$

Jadi $F(x)$ merupakan suatu anti turunan dari $f(x)$.

2.3.1 Integral Tak Tentu

Definisi 2.3.1.1

Anti diferensial adalah bentuk paling umum dari suatu anti turunan atau fungsi primitif suatu fungsi.

Jika $F'(x) = f(x)$ pada selang buka I, maka anti diferensial dari fungsi f pada selang I adalah $y = F(x) + C$ untuk sembarang nilai konstanta C (Chotim, 2004:4).

Definisi 2.3.1.2

Dipunyai fungsi f terdefinisi pada selang buka I dan F adalah suatu anti turunan f pada selang I. Proses menentukan anti diferensial dari fungsi f dinamakan integral tak tentu f pada I, ditulis dengan lambang

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

dengan C sembarang nilai konstanta dan dibaca integral tak tentu dari f terhadap variabel x (Chotim, 2004:4).

Contoh:

(1) Tentukan $\int (12x^2 + 2x)dx$.

Penyelesaian:

Tulis $f(x) = 12x^2 + 2x$ dan $F(x) = 4x^3 + x^2$.

Jelas $F'(x) = \frac{d[F(x)]}{dx}$

$$= \frac{d(4x^3 + x^2)}{dx}$$

$$= 4\frac{d(x^3)}{dx} + \frac{d(x^2)}{dx}$$

$$= 12x^2 + 2x$$

$$= f(x).$$

Jadi $F(x)$ adalah suatu anti turunan dari $f(x)$.

(2) Hitung $\int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) dx$.

Penyelesaian:

Jelas $\int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \int x^{\frac{1}{2}}(x + x^{-1}) dx$

$$= \int \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}}\, dx + \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C_1\right) + \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_2\right)$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + (C_1 + C_2)$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

2.3.2 Integral lipat

Teorema 2.3.2.1

Dipunyai fungsi f kontinu di $[a, b]$ dan g kontinu di $[c, d]$. Buktikan bahwa

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right) = \iint_R f(x)g(y)dydx$$

dengan $R = [a, b] \times [c, d]$ (Budhi, 2001: 211).

Bukti:

Jelas $\int_a^b \int_c^d f(x)\, g(y) dydx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x)g(y)dy\right] dx$

$$= \int_a^b \left[f(x) \int_c^d g(y)dy \right] dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx \left[\int_c^d g(y)dy \right]$$

$$= \left(\int_a^b f(x)dx \right) \left(\int_c^d g(y)dy \right).$$

2.4 Integral Parsial

Teorema 2.4.1

Jika $U = U(x)$ dan $V = V(x)$ adalah fungsi-fungsi yang mempunyai turunan pada selang buka I, maka

$\int U.dV = U.V - \int V.dU$ (Chotim, 2004:7).

Bukti:

Dipunyai $d(U.V) = U.dV + V.dU$.

Jadi $\int d(U.V) = \int (U.dV + V.dU)$

$$\Leftrightarrow U.V = \int U.dV + \int V.dU$$

$$\Leftrightarrow \int U.dV = U.V - \int V.dU.$$

Contoh:

Tentukan $\int x^2 . \sin x \, dx$.

Penyelesaian:

Jelas $\int x^2 . \sin x \, dx = -\int x^2 . d(\cos x)$.

Tulis $x^2 = U(x)$ dan $\cos x = V(x)$.

Menurut Teorema 2.4.1 diperoleh

$$\int x^2.\sin x\, dx = -\int x^2.d(\cos x).$$

$$= -\left[x^2.\cos x - \int \cos x\, d(x^2)\right]$$

$$= -x^2.\cos x + \int \cos x. 2xdx$$

$$= -x^2.\cos x + 2\int x.\cos x\, dx \qquad (1)$$

Perhatikan $\int x.\cos x\, dx$.

Jelas $\int x.\cos x\, dx = \int xd(\sin x)$.

Tulis $x = U(x)$ dan $\sin x = V(x)$.

Menurut Teorema 2.4.1 diperoleh

$$\int x.\cos x\, dx = \int xd(\sin x)$$

$$= x.\sin x - \int \sin x\, dx$$

$$= x.\sin x - \cos x. \qquad (2)$$

Substitusi (2) ke persamaan (1), diperoleh

$$\int x^2.\sin x\, dx = -x^2.\cos x + 2\int x.\cos x\, dx$$

$$= -x^2.\cos x + 2(x.\sin x - \cos x)$$

$$= -x^2.\cos x + 2x.\sin x - 2\cos x + C.$$

Jadi $\int x^2.\sin x\, dx = -x^2.\cos x + 2x.\sin x - 2\cos x + C$.

2.5 Perubahan Variabel-Variabel Dalam Integral

Teorema 2.5.1

Dipunyai F suatu nilai fungsi dari $x \in \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $F = f(x)$ dan $\frac{dF}{dx}$ ada, dan x suatu nilai fungsi dari $u \in \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $x = g(u)$ dan $\frac{dx}{du}$ ada. Jadi F merupakan suatu nilai fungsi dari u dan $\frac{dF}{du}$ ada, dirumuskan sebagai

$$\frac{dF}{du} = \frac{dF}{dx}.\frac{dx}{du}$$ (Leithold, 1986:230).

Teorema 2.5.2

Peraturan perubahan variabel dalam integral tertentu diberikan sebagai berikut

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{u_1}^{u_2} f[x(u)]\,\frac{dx}{du}\,du$$

dengan f suatu fungsi kontinu di $x \in [x_1, x_2]$, dan $x = x(u)$ terdefinisi pada setiap $u \in [u_1, u_2]$, mempunyai turunan kontinu dengan $x_1 = x(u_1)$, $x_2 = x(u_2)$ dan $f[x(u)]$ kontinu untuk $u_1 \leq u \leq u_2$ (Soemartojo, 1987:65).

Bukti:

Jika $F(x)$ adalah suatu anti turunan dari $f(x)$, maka

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1).$$

Tetapi $F[x(u)]$ adalah integral tak tentu dari $f[x(u)]\frac{dx}{du}$, karena

$$\frac{dF}{du} = \frac{dF}{dx}.\frac{dx}{du} = f(x)\,\frac{dx}{du} = f[x(u)]\,\frac{dx}{du}$$

maka dapat ditulis

$$\int_{u_1}^{u_2} f[x(u)]\,\frac{dx}{du}\,du = F[x(u_2)] - F[x(u_1)] = F(x_2) - F(x_1).$$

Jadi

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{u_1}^{u_2} f[x(u)]\,\frac{dx}{du}\,du.$$

Analog dengan rumus di atas untuk integral lipat dua ditulis:

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_{uv}} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv. \qquad (2.5.2.1)$$

Fungsi-fungsi $x = x(u,v), y = y(u,v)$ terdefinisi dan mempunyai turunan kontinu dalam daerah R_{uv} pada bidang uv. Titik (x,y) terletak dalam daerah R_{xy} pada bidang xy, fungsi-fungsi inversnya $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$ terdefinisi dan kontinu dalam R_{xy}, sehingga hubungan antara R_{xy} dan R_{uv} adalah satu-satu.

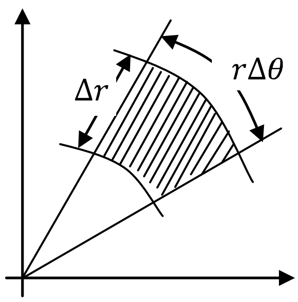
Karena fungsi $f(x,y)$ kontinu dalam R_{xy}, maka $f[x(u,v),y(u,v)]$ kontinu dalam R_{uv}.

Fungsi-fungsi $x = x(u,v), y = y(u,v)$ mempunyai invers, sehingga determinan matriks Jacobi $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$.

Misalkan:

$$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$$

Koordinat-koordinat lengkung yang dimaksud di sini adalah koordinat-koordinat polar. Elemen luas hampir menyerupai empat persegi panjang dengan sisi-sisi $r\Delta\theta$ dan Δr.



Diperoleh $\Delta A \sim (r\Delta\theta)\Delta r$ sehingga rumus (2.5.2.1) menjadi

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr$$

Jelas $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$, $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$, $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta$ dan $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$.

Jacobian J dalam hal ini adalah

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta$$

$$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= r, r > 0.$$

Nilai mutlak diberikan karena luas daerah bernilai positif.

Daerah $R_{r\theta}$ dapat digambarkan di bidang $r\theta$ atau dilukiskan oleh pertidaksamaan

$$\alpha \le \theta \le \beta, \qquad r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta).$$

Jadi $\iint_{R_{r\theta}} r(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$.

Integralnya diturunkan menjadi integral berulang dalam r dan θ. Kadang-kadang penting untuk memecah daerah $R_{r\theta}$ menjadi beberapa bagian dan memperoleh integral sebagai jumlah dari integral iterasi. Untuk beberapa persoalan, lebih sederhana untuk mengintegrasikan dalam urutan $d\theta\ dr$.

Daerah $R_{r\theta}$ harus dilukiskan oleh pertidaksamaan

$$a \leq r \leq b, \qquad \theta_1(r) \leq \theta \leq \theta_2(r)$$

dan integralnya menjadi

$$\int_a^b \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ r\ d\theta\ dr.$$

Contoh:

1. Tentukan nilai dari $\int_0^{\pi} \sin(4x+2)dx$.

   Penyelesaian:

   Tulis $v = 4x + 2 \Rightarrow dv = 4dx$.

   Jika $x = 0$ maka $v = 2$.

   Jika $x = \pi$ maka $v = 4\pi + 2$.

   Jadi $\int_0^{\pi} \sin(4x+2)dx = \int_2^{4\pi+2} \sin v \,.\frac{1}{4}\,dv$

$$= \frac{1}{4}\int_2^{4\pi+2} \sin v\ dv$$

$$= -\frac{1}{4}[\cos v]_2^{4\pi+2}$$

$$= -\frac{1}{4}(\cos(4\pi+2) - \cos 2)$$

$$= \frac{1}{4}\cos 2 - \frac{1}{4}\cos(4\pi+2)$$

$$= \frac{1}{4}\cos 2 - \frac{1}{4}(\cos 4\pi \cos 2 - \sin 4\pi \sin 2)$$

$$= \frac{1}{4}\cos 2 - \frac{1}{4}(1\cos 2 - 0)$$

$$= \frac{1}{4}\cos 2 - \frac{1}{4}\cos 2$$

$$= 0.$$

2. Dipunyai lingkaran dengan jari-jari $r = a$ (a suatu bilangan positif) dan jantung dengan jari-jari $r = a(1 + \cos\theta)$. Hitunglah luas daerah di luar lingkaran di dalam jantung!

Penyelesaian:

Tulis $L =$ luas daerah yang dicari.

Potongkan $r = a$ dan jantung $r = a(1 + \cos\theta)$.

Jelas $a = a(1 + \cos\theta)$

$\Leftrightarrow a - a(1 + \cos\theta) = 0$

$\Leftrightarrow a - a - a\cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow -a\cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow \cos\theta = 0.$

Oleh sebab pergerakan θ dibatasi (dari 0 ke 2π atau $-\pi$ ke π).

Jelas $\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ atau $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Jadi $\frac{1}{2}L = \iint_D r\,dr\,d\theta$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=a}^{r=a(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_a^{a(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left[\left(a(1+\cos\theta)\right)^2 - a^2\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left[\left(a^2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\right) - a^2\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta - 1]\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2\cos\theta + \cos^2\theta]\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \left[2\sin\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \left[2 + \frac{\pi}{4} + 0 - (0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \left(2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{8}a^2(8 + \pi).$$

Jadi luas daerah yang dicari adalah $\frac{1}{4}a^2(8 + \pi)$ satuan luas.

2.6 Limit

Definisi 2.6.1

Dipunyai fungsi $f: I \to R, I \subset R,$ I suatu interval dan a titik limit dari I. Limit fungsi f bernilai L untuk $x \to a$ ditulis

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan positif δ, sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ apabila $0 < |x - a| < \delta$ (Chotim, 2007:45).

Contoh:

Tentukan $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3}$.

Penyelesaian:

Jelas $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)}$

$$= \lim_{x\to 3}(x^2+3x+9)$$

$$= \lim_{x\to 3} x^2 + \lim_{x\to 3}(3x+9)$$

$$= \left(\lim_{x\to 3} x\right)^2 + 18$$

$$= 3^2 + 18$$

$$= 27.$$

Jadi $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = 27.$

2.7 Teorema Nilai Rata-Rata Cauchy

Jika f dan g adalah dua fungsi yang memenuhi

(i) f dan g kontinu pada selang tertutup $[a, b]$,

(ii) f dan g mempunyai turunan pada selang terbuka (a, b),

(iii) untuk setiap $x \in (a, b), g'(x) \neq 0$

maka terdapat $z \in (a, b)$ sehingga

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$ (Leithold, 1993:262).

Bukti:

Ditunjukkan $g(b) \neq g(a)$.

Andaikan $g(b) = g(a)$.

Jelas g kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ dan mempunyai turunan pada selang terbuka (a, b).

Jadi terdapat $c \in (a, b)$ sehingga $g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = 0$.

Ini suatu kontradiksi. Pengandaian harus diingkar.

Jadi $g(b) \neq g(a)$ dan akibatnya $g(b) - g(a) \neq 0$.

Tulis $L = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Definisikan $h(x) = f(x) - f(a) - L.\big(g(x) - g(a)\big)$.

Dipunyai f dan g masing-masing kontinu dan mempunyai turunan pada selang (a, b).

Jelas h suatu fungsi kontinu dan mempunyai turunan pada selang (a, b).

Jadi $h'(x) = f'(x) - L.g'(x)$.

Jelas $h(a) = f(a) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right)\big(g(a) - g(a)\big) = 0$ dan

$h(b) = f(b) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right)\big(g(b) - g(a)\big) = 0$.

Pilih $z \in (a, b)$ sehingga $h'(z) = 0$.

Jelas $f'(z) - L.g'(z) = 0$

$\Leftrightarrow L.g'(z) = f'(z)$

$\Leftrightarrow L = \dfrac{f'(z)}{g'(z)}$.

Jadi terdapat $z \in (a, b)$ sehingga $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$.

Contoh:

Dipunyai $f:[-1,1] \to R$ dan $g:[-1,1] \to R$ dengan $f(x) = x^3 - 3x + 3$ dan $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$. Tentukan nilai c sehingga $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}$.

Penyelesaian:

Jelas f dan g keduanya kontinu dan mempunyai turunan pada selang $(-1,1)$.

Jelas $f'(x) = 3x^2 - 3$ dan $g'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

Jelas $g'(x) \neq 0, \forall x \in (-1,1)$.

Pilih $c \in (-1,1)$ sehingga $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}$.

Jelas $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)} \Leftrightarrow \frac{3c^2-3}{3c^2+6c-9} = \frac{1-5}{-5-11}$

$$\Leftrightarrow \frac{3(c^2-1)}{3(c^2+2c-3)} = \frac{4}{16}$$

$$\Leftrightarrow 4(c^2-1) = (c^2+2c-3)$$

$$\Leftrightarrow 4c^2 - c^2 - 2c - 4 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3c^2 - 2c - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3c+1)(c-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{1}{3} \vee c = 1.$$

Jadi $c = -\frac{1}{3}$.

2.8 Penggunaan Aturan L'Hopital

Teorema 2.8.1

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya mendekati 0 dan juga mendekati $\pm\infty$, maka

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

"lim " adalah untuk sembarang dari

$$\lim_{x\to+\infty}\ ,\ \lim_{x\to-\infty}\ ,\ \lim_{x\to a}\ ,\ \lim_{x\to a^+}\ ,\ \lim_{x\to a^-}$$

(Ayres & Mendelson, 2006:154).

Dengan menggunakan Aturan L'Hopital, hitunglah beberapa limit berikut jika ada.

1. Tentukan $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^x}$ jika ada.

   Penyelesaian:

   Jelas $\lim_{x\to 0} x = 0$ dan $\lim_{x\to 0} 1 - e^x = 0$.

   Maka Aturan L'Hopital dapat digunakan.

   Jadi $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{-e^x}$

   $$= \frac{1}{-1}$$

   $$= -1.$$

2. Tentukan $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^{100})}{x}$ jika ada.

   Penyelesaian:

   Jelas $\lim_{x\to\infty} \ln(x^{100}) = \infty$ dan $\lim_{x\to\infty} x = \infty$.

   Maka Aturan L'Hopital dapat digunakan.

   Jadi $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^{100})}{x}$

   $$= \lim_{x\to\infty} \frac{100.\ln x}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 100.\frac{\frac{1}{x}}{1}$$

$$= 100.\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$$

$$= 0.$$

2.9 Integral Tak Wajar

2.9.1 Integral Tak Wajar pada Selang Tak Hingga

Definisi 2.9.1.1

Jika f kontinu untuk setiap nilai $x \in \mathbb{R}$ dan c suatu bilangan real, maka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx$$

bilamana limit ini ada. Jika limit tersebut ada, maka integral tak wajarnya dikatakan konvergen. Jika limitnya tidak ada, maka dikatakan bahwa integral tak wajarnya divergen (Leithold, 1993:277).

Definisi 2.9.1.2

Jika f kontinu untuk setiap $x \geq a$, maka

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

bilamana limit ini ada (Leithold, 1993:277).

Definisi 2.9.1.3

Jika f kontinu untuk setiap $x \leq b$, maka

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

bilamana limit ini ada (Leithold, 1993:277).

Pada definisi 2.9.1.1, 2.9.1.2, dan 2.9.1.3, jika limit tersebut ada, maka dikatakan bahwa integral tak wajarnya konvergen. Jika limitnya tak ada, maka dikatakan bahwa integral tak wajarnya divergen. Bila definisi 2.9.1.1 digunakan, c biasanya diambil 0 (nol) (Leithold, 1993: 277).

Contoh :

1. Fungsi $f(x) = xe^{-x}$ kontinu pada selang $(0, +\infty)$, integral tak wajar dari fungsi f pada selang $(0, +\infty)$ adalah

$$\int_0^{+\infty} x.e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b x.e^{-x}\,dx.$$

Untuk menghitung integral ini digunakan pengintegralan parsial dengan $u = x, dv = e^{-x}dx,$ dan $du = dx, v = -e^{-x}$.

Jadi

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x.e^{-x}\,dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b x.e^{-x}\,dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(-\int_0^b xd(e^{-x})\right) \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left([-xe^{-x}]_0^b + \int_0^b e^{-x}dx\right) \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(-be^{-b} + [-e^{-x}]_0^b\right) \\
&= \lim_{b\to+\infty} (-be^{-b} - e^{-b} + 1) \\
&= -\lim_{b\to+\infty} \frac{b}{e^b} - 0 + 1.
\end{aligned}$$

Untuk menghitung $\lim_{b\to+\infty} \frac{b}{e^b}$, digunakan aturan L'Hopital. Karena $\lim_{b\to+\infty} b = +\infty$ dan $\lim_{b\to+\infty} e^b = +\infty$, maka

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{b}{e^b} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^b} = 0.$$

Sehingga diperoleh

$$\int_0^{+\infty} x.e^{-x}\,dx = 0 - 0 + 1 = 1.$$

Jadi, integral tak wajar dari fungsi f pada selang $(0, +\infty)$ konvergen ke 1.

2. Hitunglah $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.

   Penyelesaian:

   Jelas $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^{c} \frac{dx}{x^2}$

   $$= \lim_{c\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^c$$

   $$= \lim_{c\to\infty} \left(-\frac{1}{c} + 1\right)$$

   $$= 0 + 1$$

   $$= 1.$$

3. Hitunglah $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx$.

   Penyelesaian:

   Jelas $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^{2x}dx$

   $$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_a^0$$

   $$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2}(1 - e^{2a})$$

   $$= \frac{1}{2}(1 - 0)$$

   $$= \frac{1}{2}.$$

4. Hitunglah $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$.

   Penyelesaian:

   Jelas $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_0^{a} \frac{1}{x^2+4}\,dx$

$$= \lim_{a \to +\infty} \left[\frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^a$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\left(\frac{c}{a}\right) - 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

5. Hitunglah $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$.

   Penyelesaian:

   Jelas $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{a \to \infty} \int_0^{a} e^{-x} dx$

   $$= \lim_{a \to \infty} [-e^{-x}]_0^a$$

   $$= \lim_{a \to \infty} \left[-\frac{1}{e^a} + 1\right]$$

   $$= 1.$$

6. Hitunglah $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

   Penyelesaian:

   Jelas $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \to -\infty} \int_b^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{c \to \infty} \int_0^c \frac{1}{1+x^2} dx$

   $$= \lim_{b \to -\infty} [\tan^{-1} x]_b^0 + \lim_{c \to \infty} [\tan^{-1} x]_0^c$$

   $$= \lim_{b \to -\infty} (\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} b) + \lim_{c \to \infty} (\tan^{-1} c - \tan^{-1} 0)$$

   $$= \left[0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \left[\frac{\pi}{2} - 0\right]$$

   $$= \pi.$$

2.9.2 Integral Tak Wajar pada Selang Hingga

Definisi 2.9.2.1

Jika f kontinu di setiap x pada selang $(a, b]$ dan jika $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

bilamana limit ini ada (Leithold, 1993:286).

Definisi 2.9.2.2

Jika f kontinu di setiap x pada selang $[a, b)$ dan jika $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$, maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

bilamana limit ini ada (Leithold, 1993:287).

Definisi 2.9.2.3

Jika f kontinu di setiap x pada selang $[a, b]$ kecuali di c, bila $a < c < b$, dan jika $\lim_{x\to c} |f(x)| = +\infty$, maka

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f(x)dx = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{s\to c^+} \int_s^b f(x)dx$$

bilamana limit ini ada (Leithold, 1993:287).

Contoh:

1. Hitunglah $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

   Penyelesaian:

   Jelas $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

   $$= \lim_{t\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_t^4$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \left(4 - 2\sqrt{t}\right)$$

$$= 4 - 2\sqrt{0}$$

$$= 4.$$

2. Hitunglah $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

   Penyelesaian:

   Jelas $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

$$= \lim_{t \to 1^-} \left(-\int_0^t (1-x)^{-\frac{1}{2}} d(1-x) \right)$$

$$= \lim_{t \to 1^-} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^t$$

$$= \lim_{t \to 1^-} \left(-2\sqrt{1-t} + 2\right)$$

$$= -2\sqrt{1-1} + 2$$

$$= 2.$$

3. Hitunglah $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

   Penyelesaian:

   Jelas $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{c \to 1^-} \int_0^c \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$= \lim_{c \to 1^-} \int_0^c x.(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \lim_{c \to 1^-} \left(-\frac{1}{2} \int_0^c (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) \right)$$

$$= \lim_{c \to 1^-} \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^c$$

$$= \lim_{c \to 1^-} \left(-\sqrt{1-c^2} + 1\right)$$

$$= 1.$$

4. Hitunglah $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

   Penyelesaian:

Jelas $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{t\to 3^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

$$= \lim_{t\to 3^-} \left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^t$$

$$= \lim_{t\to 3^-} \left[\sin^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) - \sin^{-1}(0)\right]$$

$$= \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}.$$

2.10 Fungsi Eksponensial

Definisi 2.10.1

Fungsi eksponensial dengan basis b adalah fungsi dari bilangan real $\mathbb{R}$ ke bilangan real positif $\mathbb{R}^+$ yang didefinisikan sebagai berikut

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dengan $f(x) = b^x, \forall x \in \mathbb{R}$ (Siang, 2002:382).

2.11 Fungsi Logaritma

Definisi 2.11.1

Fungsi logaritma basis b adalah fungsi dari bilangan real positif $\mathbb{R}^+$ ke bilangan real $\mathbb{R}$, yang didefinisikan sebagai berikut

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = \log_b x, \forall x \in \mathbb{R}^+$ (Siang, 2002:140).

2.12 Fungsi Gamma

Definisi 2.12.1

Fungsi gamma dinotasikan dengan $\Gamma(n)$ dan didefinisikan sebagai

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

yang konvergen untuk setiap bilangan real positif n (Spiegel, 1974:285).

2.13 Sifat-Sifat Fungsi Gamma

Sifat 1 : $\boldsymbol{\Gamma(1) = 1}$.

Bukti:

Dipunyai $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}.e^{-x}dx$.

$$
\begin{aligned}
\text{Jelas } \Gamma(1) &= \int_0^\infty x^{1-1}.e^{-x}dx \\
&= \int_0^\infty e^{-x}dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b (-e^{-x})d(-x) \\
&= \lim_{b\to\infty}[-e^{-x}]_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+e^{-0}) \\
&= \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa $\Gamma(1) = 1$.

Sifat 2 : $\boldsymbol{\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}}$.

Bukti:

Untuk $n = 1$ maka $\Gamma(1+1) = \Gamma(2) = 1! = 1$. (1)

$$
\begin{aligned}
\text{Jelas } \Gamma(2) &= \int_0^\infty x^{2-1}.e^{-x}dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b x.e^{-x}dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-\int_0^b x\, d(e^{-x})\right)
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-[x.e^{-x}]_0^b + \int_0^b e^{-x}dx\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-b.e^{-b} + (-e^{-x})_0^b\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}(-b.e^{-b} - e^{-b} + 1)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b}{e^b} + 1\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^b} + 1\right)$$

$$= 1.$$

Jelas $1! = 1$.

Jadi (1) benar.

Jika $\Gamma(k) = (k-1)!$ benar. (2)

Ditunjukkan $\Gamma(k+1) = k!$.

Diperoleh

$$\Gamma(k+1) = \int_0^\infty x^{(k+1)-1}.e^{-x}dx$$

$$= \int_0^\infty x^k.e^{-x}dx$$

$$= \lim_{a\to\infty}\int_0^a (-x^k)d(e^{-x})$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left([-x^k.e^{-x}]_0^a - \int_0^a e^{-x}d(-x^k)\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left([-x^k.e^{-x}]_0^a + \int_0^a e^{-x}.k.x^{k-1}d(x)\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left([-a^k.e^{-a} - 0] + k\int_0^a e^{-x}.x^{k-1}dx\right)$$

$= 0 + k\Gamma(k)$ (Menurut (2) maka $\Gamma(k) = (k-1)!$)

$$= k(k-1)!$$

$$= k!.$$

Karena pernyataan $\Gamma(k+1) = k!$ benar jika $\Gamma(k) = (k-1)!$.

Maka $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$ benar.

Sifat 3 : $\boldsymbol{\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)}$.

Bukti:

Dipunyai $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}.e^{-x}dx$.

Jelas $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^{(n+1)-1}.e^{-x}dx$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty x^n.e^{-x}dx \\
&= \lim_{a\to\infty} \int_0^a x^n.e^{-x}dx \\
&= \lim_{a\to\infty} \int_0^a (-x^n)d(e^{-x}) \\
&= \lim_{a\to\infty} \left([-x^n.e^{-x}]_0^a - \int_0^a e^{-x}d(-x^n) \right) \\
&= \lim_{a\to\infty} \left([-a^n.e^{-a} - 0] + \int_0^a e^{-x}.n.x^{n-1}dx \right) \\
&= \lim_{a\to\infty} -a^n.e^{-a} + \lim_{a\to\infty} n \int_0^a x^{n-1}.e^{-x}dx \\
&= 0 + n\int_0^\infty x^{n-1}.e^{-x}dx \\
&= n\Gamma(n).
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

2.14 Fungsi Beta

Definisi 2.14.1

Fungsi beta dinotasikan dengan $B(m,n)$ yang didefinisikan sebagai

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

yang konvergen untuk $m > 0$ dan $n > 0$ (Spiegel, 1974:286).

2.15 Sifat-Sifat Fungsi Beta

Sifat 1: $\boldsymbol{B(m,n) = B(n,m)}$.

Bukti:

Jelas $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}.(1-x)^{n-1}dx$.

Tulis $x = 1 - y$.

Jelas

$$B(m,n) = \int_0^1 (1-y)^{m-1}.\big(1-(1-y)\big)^{n-1}dy$$
$$= \int_0^1 (1-y)^{m-1}.y^{n-1}dy$$
$$= \int_0^1 y^{n-1}.(1-y)^{m-1}dy$$
$$= B(n,m).$$

Jadi, terbukti bahwa $B(m,n) = B(n,m)$.

Sifat 2: $\boldsymbol{B(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta\,.\cos^{2n-1}\theta\ d\theta}$.

Bukti :

Jelas $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$.

Tulis $x = \sin^2\theta \Leftrightarrow dx = 2\sin\theta\cos\theta$.

Untuk $x = 0\ maka\ \theta = 0$.

Untuk $x = 1\ maka\ \theta = \frac{\pi}{2}$.

Jelas

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}.(1-x)^{n-1}dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{m-1}.(1-\sin^2\theta)^{n-1}.2.\sin\theta\,.\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{m-1}.(\cos^2\theta)^{n-1}.2.\sin\theta.\cos\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-2}\theta.\sin\theta.\cos^{2n-2}\theta.\cos\theta \quad d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta.\cos^{2n-1}\theta \;\; d\theta.$$

Jadi, terbukti bahwa $B(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta.\cos^{2n-1}\theta \;\; d\theta$.

Sifat 3: $\boldsymbol{B(m,n) = \int_0^{\infty} \frac{t^{m-1}}{(1+t)^{(m+n)}} dt}$.

Bukti:

Jelas $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$.

Tulis $x = \frac{t}{(1+t)} \Leftrightarrow dx = d\left(\frac{t}{(1+t)}\right)$

$$= \frac{(1+t)-t}{(1+t)^2}dt$$

$$= \frac{1}{(1+t)^2}dt.$$

Untuk $x = 0, t = 0$.

Untuk $x = 1, t = \infty$.

Jelas

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{t}{(1+t)}\right)^{m-1}\left(1-\frac{t}{(1+t)}\right)^{n-1} d\left(\frac{t}{(1+t)}\right)$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{t}{(1+t)}\right)^{m-1}\left(\frac{(1+t)-t}{(1+t)}\right)^{n-1} \frac{1}{(1+t)^2}dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{t}{(1+t)}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{(1+t)}\right)^{n-1} \frac{1}{(1+t)^2}dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{t^{m-1}1^{n-1}}{(1+t)^{m-1}.(1+t)^{n-1}}.\frac{1}{(1+t)^2}dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n-2}} \cdot \frac{1}{(1+t)^2} dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n}} dt.$$

Jadi, terbukti bahwa $B(m,n) = \int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(1+t)^{(m+n)}} dt$.

Sifat 4: $\boldsymbol{B(m,n) = r^n.(r+1)^m \int_0^1 \frac{t^{m-1}.(1-t)^{n-1}}{(r+t)^{(m+n)}} dt.}$

Bukti:

Jelas $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}.(1-x)^{n-1} dx$.

Tulis $x = \frac{(r+1)t}{(r+t)} \Leftrightarrow dx = d\left(\frac{(r+1)t}{(r+t)}\right)$

$$= \frac{(r+1)(r+t) - (rt+t)}{(r+t)^2} dt$$

$$= \frac{r(r+1)}{(r+t)^2} dt.$$

Untuk $x = 0 \; maka \; t = 0$.

Untuk $x = 1 \; maka \; t = 1$.

Jelas

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}.(1-x)^{n-1} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(r+1)t}{(r+t)}\right)^{m-1} \left(1 - \left(\frac{(r+1)t}{(r+t)}\right)\right)^{n-1} d\left(\frac{(r+1)t}{(r+t)}\right)$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(r+1)t}{(r+t)}\right)^{m-1} \left(\frac{(r+t) - (r+1)t}{(r+t)}\right)^{n-1} \frac{r(r+1)}{(r+t)^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{(r+1)^{m-1} t^{m-1}}{(r+t)^{m-1}} \cdot \frac{r^{n-1}(1-t)^{n-1}}{(r+t)^{n-1}} \cdot \frac{r(r+1)}{(r+t)^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{(r+1)^{m-1}.(r+1).r^{n-1}.r.(1-t)^{n-1}.t^{m-1}}{(r+t)^{m-1+n-1+2}} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{(r+1)^{m}.r^{n}.t^{m-1}.(1-t)^{n-1}}{(r+t)^{m+n}} dt$$

$$= r^n.(r+1)^m \int_0^1 \frac{t^{m-1}.(1-t)^{n-1}}{(r+t)^{m+n}} dt.$$

Jadi, terbukti bahwa $B(m,n) = r^n.(r+1)^m \int_0^1 \frac{t^{m-1}.(1-t)^{n-1}}{(r+t)^{(m+n)}} dt.$

2.16 Hubungan Fungsi Gamma dan Fungsi Beta

Fungsi beta terhubung dengan fungsi gamma menurut hubungan

$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ (Wrede & Spiegel, 2007:301).

Bukti :

Dipunyai $\Gamma(m) = \int_0^\infty t^{m-1}.e^{-t}dt.$

Tulis $t = x^2$.

Jelas $dt = 2xdx$.

Jadi $\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{2(m-1)}.e^{-x^2}2xdx$

$$= 2\int_0^\infty x^{2m-2}.e^{-x^2}xdx$$

$$= 2\int_0^\infty x^{2m-1}.e^{-x^2}dx.$$

Bentuk di atas sama dengan $\Gamma(n) = 2\int_0^\infty y^{2n-1}.e^{-y^2}dy$ sehingga diperoleh

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \left(2\int_0^\infty x^{2m-1}.e^{-x^2}dx\right)\left(2\int_0^\infty y^{2n-1}.e^{-y^2}dy\right)$$

$$= 4\left(\int_0^{\infty} x^{2m-1}.e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^{\infty} y^{2n-1}.e^{-y^2}dy\right)$$

$$= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{2m-1}.y^{2n-1}.e^{-(x^2+y^2)}dxdy. \quad (1)$$

Jika diubah ke koordinat kutub, maka $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ sehingga diperoleh batas r dan θ sebagai berikut.

Batas r.

Untuk $y = 0$ dan $x = 0$ maka $r = 0$.

Untuk $y = \infty$ dan $x = \infty$ maka $r = \infty$.

Sehingga $0 \le r \le \infty$.

Batas θ.

Untuk $y = 0$, maka $\sin\theta = 0$, sehingga $\theta = 0$.

Untuk $y = \infty$, maka $\sin\theta = 1$, sehingga $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Sehingga $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Sehingga dalam sistem koordinat kutub, integral ganda dua pada (1) menjadi

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{\infty}(r\cos\theta)^{2m-1}(r\sin\theta)^{2n-1}.e^{-((r\cos\theta)^2+(r\ \sin\theta)^2)}rdrd\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{\infty} r^{2m-1}.r^{2n-1}.\cos^{2m-1}\theta\,.\sin^{2n-1}\theta\,.e^{-r^2}rdrd\theta$$

$$= 4\left(\int_{r=0}^{\infty}(r^2)^{(m+n)-1}.e^{-r^2}rdr\right)\left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m-1}\theta\,.\sin^{2n-1}\theta\ d\theta\right)$$

$$= 2\left(\int_{r=0}^{\infty}(r^2)^{(m+n)-1}.e^{-r^2}\frac{1}{2}d(r^2)\right).2\left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m-1}\theta\,.\sin^{2n-1}\theta\ d\theta\right)$$

$$= \left(\int_{r=0}^{\infty}(r^2)^{(m+n)-1}.e^{-r^2}d(r^2)\right).B(n,m)$$

$$= \Gamma(m+n).B(m,n).$$

Diperoleh $\Gamma(m)\Gamma(n) = \Gamma(m+n).B(m,n)$

$$\Leftrightarrow B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

Jadi, terbukti bahwa $B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

BAB 3

METODOLOGI PENELITIAN

Peranan metode dalam suatu penelitian sangatlah penting sehingga dengan metode penelitian dapat mencapai tujuan penelitian yang telah ditetapkan. Melalui metode penelitian, masalah yang dihadapi dapat diatasi dan dipecahkan dari perolehan data atau informasi yang telah dikumpulkan.

Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini meliputi beberapa hal yaitu sebagai berikut.

3.1 Penemuan Masalah

Metode ini merupakan tahapan pertama dalam penelitian. Pada tahap ini, penulis membaca dan menelaah beberapa sumber pustaka. Dari kajian tersebut, penulis menemukan permasalahan umum yaitu penyelesaian integral tak wajar. Permasalahan ini masih terlalu luas, sehingga diperlukan rumusan permasalahan yang lebih spesifik.

3.2 Perumusan Masalah

Tahap ini dimaksudkan untuk memperjelas permasalahan yang telah ditemukan yaitu dengan merumuskannya sebagai berikut. Bagaimana cara menyelesaikan kasus beberapa integral tak wajar yang integrannya memuat fungsi eksponensial dan fungsi logaritma?

Perumusan masalah di atas mengacu pada beberapa pustaka yang ada. Selanjutnya, dengan menggunakan pendekatan teoritik, dapat ditemukan jawaban dari permasalahan dan tujuan penulisan skripsi dapat tercapai.

3.3 Studi Pustaka

Studi pustaka merupakan penelaah sumber pustaka relevan yang digunakan untuk mengumpulkan data maupun informasi yang diperlukan dalam penelitian ini. Studi pustaka diawali dengan mengumpulkan sumber pustaka yaitu berupa buku-buku maupun referensi yang menjadi dasar dalam penelitian ini. Setelah sumber pustaka terkumpul dilanjutkan dengan penelaahan isi sumber pustaka tersebut. Pada akhirnya sumber pustaka ini dijadikan landasan untuk melakukan penelitian ini.

3.4 Analisis Pemecahan Masalah

Pada tahap ini dilakukan analisa dan pemecahan masalah yaitu dengan langkah-langkah sebagai berikut.

a. Mempelajari dan mengkaji bentuk umum integral tak wajar.
b. Mempelajari dan mengkaji penyelesaian integral tak wajar yang integrannya memuat fungsi eksponensial dan fungsi logaritma.
c. Mempelajari dan mengkaji fungsi gamma dan fungsi beta serta hubungan antara fungsi gamma dan fungsi beta.
d. Menggunakan fungsi gamma dan fungsi beta untuk menyelesaikan kasus beberapa integral tak wajar.

3.5 Penarikan Simpulan

Tahap ini merupakan tahap terakhir dari penelitian. Setelah menganalisis dan memecahkan masalah berdasarkan studi pustaka dan pembahasannya kemudian dibuat sebagai simpulan sebagai jawaban dari permasalahan yang telah dirumuskan sebelumnya.

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Penyelesaian Integral Tak Wajar dengan Fungsi Gamma

1. Buktikan $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

   Bukti:

   Jelas $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1}.e^{-x}dx$

   $$= \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}.e^{-x}dx.$$

   Tulis $x = u^2$ maka $dx = 2udu$.

   Jadi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty (u^2)^{-\frac{1}{2}}.e^{-(u^2)}2udu = 2\int_0^\infty e^{-(u^2)}du$.

   Tulis $A = \int_0^\infty e^{-(u^2)}du$.

   Jelas $A^2 = \left[\int_0^\infty e^{-(u^2)}du\right]\left[\int_0^\infty e^{-(v^2)}dv\right]$

   $$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}dudv.$$

   Tulis $u = r\cos\theta$ dan $v = r\sin\theta$.

   Jelas

   $$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\theta, \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\sin\theta,$$

   $$\frac{\partial v}{\partial r} = \sin\theta, \frac{\partial v}{\partial \theta} = r\cos\theta,$$

   $u^2 + v^2 = r^2$,

   dan $dudv = rdrd\theta$.

Jadi $A^2 = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} . rdrd\theta$

$$= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} . \frac{1}{2} d(r^2) \right] d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} (0-1)\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} (-1)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

Jelas $A^2 = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow A^2 - \frac{\pi}{4} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(A + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(A - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow A = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \vee A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Jadi $A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Jadi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2. A$

$$\Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2. \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

2. Hitunglah $\int_0^{\infty} x. e^{-x}\, dx$.

   Penyelesaian:

   Jelas $\int_0^{\infty} x. e^{-x}\, dx$

$$= \int_0^{\infty} x^{2-1}. e^{-x} dx$$

$$= \Gamma(2)$$

$= 1!$

$= 1.$

Jadi $\int_0^\infty x^{1-1}.e^{-x}dx = 1.$

3. Hitunglah $\int_0^\infty e^{-x}\,dx.$

Penyelesaian:

Jelas $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

$$= \int_0^\infty x^0.e^{-x}dx$$

$$= \int_0^\infty x^{1-1}.e^{-x}dx$$

$= \Gamma(1)$

$= 1.$

Jadi $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$

4. Hitunglah $\int_0^\infty x^3.e^{-x}\,dx.$

Penyelesaian:

Jelas $\int_0^\infty x^3.e^{-x}\,dx$

$$= \int_0^\infty x^{4-1}.e^{-x}\,dx$$

$= \Gamma(4)$

$= \Gamma(3+1)$

$= 3!$

$= 6.$

Jadi $\int_0^\infty x^3.e^{-x}\,dx = 6.$

5. Hitunglah $\int_0^\infty x^6.e^{-2x}\,dx.$

Penyelesaian:

Jelas $\int_0^\infty x^6.e^{-2x}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty x^6 . e^{-2x}\, d(2x)$$

$$= \frac{1}{2^7}\int_0^\infty (2x)^6 . e^{-2x}\, d(2x)$$

$$= \frac{1}{2^7} . \Gamma(7)$$

$$= \frac{1}{2^7} . 6!$$

$$= \frac{720}{128}$$

$$= \frac{45}{8}.$$

Jadi $\int_0^\infty x^6 . e^{-2x}\, dx = \frac{45}{8}$.

6. Hitunglah $\int_0^\infty e^{-x+2\ln x} dx$.

Penyelesaian:

Jelas $\int_0^\infty e^{-x+2\ln x} dx$

$$= \int_0^\infty e^{-x+\ln x^2} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} . e^{\ln x^2} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} . x^2 dx$$

$$= \int_0^\infty x^{3-1} . e^{-x} dx$$

$$= \Gamma(3)$$

$$= 2!$$

$$= 2.$$

Jadi $\int_0^\infty e^{-x+2\ln x} dx = 2$.

7. Hitunglah $\int_0^\infty x^2 . e^{2x} dx$.

   Penyelesaian:

   Jelas $\int_0^\infty x^2 . e^{2x} dx$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\infty x^2 . e^{-(-2x)} d(-2x)$$

$$= -\frac{1}{2^3}\int_0^\infty (-2x)^2 . e^{-(-2x)} d(-2x)$$

$$= -\frac{1}{8}\int_0^\infty (-2x)^{3-1} . e^{-(-2x)} d(-2x)$$

$$= -\frac{1}{8}\Gamma(3)$$

$$= -\frac{1}{8} . 2!$$

$$= -\frac{1}{4}.$$

   Jadi $\int_0^\infty x^2 . e^{2x} dx = -\frac{1}{4}$.

8. Hitunglah $\int_0^\infty \sqrt{x} . e^{-x} dx$.

   Penyelesaian:

   Jelas $\int_0^\infty \sqrt{x} . e^{-x} dx$

$$= \int_0^\infty (x)^{\frac{1}{2}} . e^{-x} dx$$

$$= \int_0^\infty (x)^{\frac{3}{2}-1} . e^{-x} dx$$

$$= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Jadi $\int_0^\infty \sqrt{x}.\,e^{-x}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

9. Hitunglah $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$.

   Penyelesaian:

   Jelas $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$

$$= \int_0^\infty (x)^{-\frac{1}{2}}.\,e^{-x}dx$$

$$= \int_0^\infty (x)^{\frac{1}{2}-1}.\,e^{-x}dx$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\pi}.$$

   Jadi $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\pi}$.

10. Hitunglah $\int_0^\infty x^{-\frac{1}{3}}.\,e^{-8x}dx$.

   Penyelesaian:

   Jelas $\int_0^\infty x^{-\frac{1}{3}}.\,e^{-8x}dx$

$$= \int_0^\infty \frac{2}{8}.\,(8x)^{-\frac{1}{3}}.\,e^{-8x}\,d(8x)$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty (8x)^{\frac{2}{3}-1}.\,e^{-8x}\,d(8x)$$

$$= \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

   Jadi $\int_0^\infty x^{-\frac{1}{3}}.\,e^{-8x}dx = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$.

11. Hitunglah $\int_0^\infty x^2.e^{-x^2}dx$.

Penyelesaian:

Tulis $x^2 = u$

$\Leftrightarrow x = u^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du.$

Jelas $\int_0^\infty x^2.e^{-x^2}dx$

$= \int_0^\infty u.e^{-u}.\frac{1}{2}.u^{-\frac{1}{2}}du$

$= \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}}.e^{-u}du$

$= \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{\frac{3}{2}-1}.e^{-u}du$

$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$

$= \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$

Jadi $\int_0^\infty x^2.e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

12. Hitunglah $\int_0^\infty x^2.e^{-2x^2}dx$.

Penyelesaian:

Jelas $\int_0^\infty x^2.e^{-2x^2}dx$

$= \int_0^\infty \frac{1}{4x}.x^2.e^{-2x^2}d(2x^2)$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty x.\,e^{-2x^2}d(2x^2)$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}.\,(2x^2)^{\frac{1}{2}}.\,e^{-2x^2}d(2x^2)$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty (2x^2)^{\frac{3}{2}-1}.\,e^{-2x^2}d(2x^2)$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt{2}}.\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}.\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1}{16}\sqrt{2\pi}.$$

Jadi $\int_0^\infty x^2.\,e^{-2x^2}dx = \frac{1}{16}\sqrt{2\pi}.$

13. Hitunglah $\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$

Penyelesaian:

Jelas $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

$$= \int_0^\infty \frac{x}{x}e^{-x^2}dx$$

$$= \int_0^\infty x^{-1}e^{-x^2}\frac{1}{2}d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-x^2}d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^2)^{\frac{1}{2}-1}e^{-x^2}d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Jadi $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

14. Hitunglah $\int_0^\infty \sqrt{y}. e^{-y^3} dy$.

Penyelesaian:

Tulis $y^3 = x$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x}$$

$$\Leftrightarrow dy = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx.$$

Jelas $\int_0^\infty \sqrt{y}. e^{-y^3} dy$

$$= \int_0^\infty \sqrt{x^{\frac{1}{3}}. e^{-x}}. \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\infty x^{\frac{1}{6}}. x^{-\frac{2}{3}}. e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}. e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1}. e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{3}.$$

Jadi $\int_0^\infty \sqrt{y}. e^{-y^3} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$.

15. Hitunglah $\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}} dt, s > 0.$

Penyelesaian:

Jelas $\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}} dt$

$$= \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}.e^{-st} dt$$

$$= \int_0^\infty \sqrt{s}.(st)^{-\frac{1}{2}}.e^{-st}.\frac{1}{s}\, d(st)$$

$$= \frac{\sqrt{s}}{s}\int_0^\infty (st)^{-\frac{1}{2}}.e^{-st}\, d(st)$$

$$= \frac{\sqrt{s}}{s}\int_0^\infty (st)^{\frac{1}{2}-1}.e^{-st}\, d(st)$$

$$= \frac{\sqrt{s}}{s}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{s}.\sqrt{\pi}}{s}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

Jadi $\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$

16. Hitunglah $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}.$

Penyelesaian:

Tulis $-\ln x = u$

$\Leftrightarrow x = e^{-u}$

$\Leftrightarrow dx = -e^{-u} du$

Jika $x = 0 \Rightarrow u = \infty,$

$x = 1 \Rightarrow u = 0.$

Jelas $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$

$$= -\int_{\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{u}}.e^{-u}du$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u}}.e^{-u}du$$

$$= \int_{0}^{\infty} (u)^{-\frac{1}{2}}.e^{-u}du$$

$$= \int_{0}^{\infty} (u)^{\frac{1}{2}-1}.e^{-u}du$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\pi}.$$

Jadi $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \sqrt{\pi}$.

17. Hitunglah $\int_0^1 x^2 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^3 dx$.

Penyelesaian:

Tulis $x = e^{-u}$

$\Leftrightarrow dx = -e^{-u}du.$

Jika $x = 0 \Rightarrow u = \infty,$

$x = 1 \Rightarrow u = 0.$

Jelas $\int_0^1 x^2 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^3 dx$

$$= \int_{\infty}^{0} (e^{-u})^2 \left(\ln\frac{1}{e^{-u}}\right)^3 (-e^{-u})du$$

$$= -\int_{0}^{\infty} e^{-2u}(-e^{-u})(\ln e^{u})^3 du$$

$$= \int_{0}^{\infty} u^3.e^{-3u}du$$

$$= \frac{1}{3^4}\int_{0}^{\infty} (3u)^3.e^{-3u}d(3u)$$

$$= \frac{1}{3^4} \int_0^\infty (3u)^{4-1} . e^{-3u} d(3u)$$

$$= \frac{1}{3^4} \Gamma(4)$$

$$= \frac{1}{3^4} . 3!$$

$$= \frac{2}{3^3}$$

$$= \frac{2}{27}.$$

Jadi $\int_0^1 x^2 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 dx = \frac{2}{27}$.

18. Hitunglah $\int_0^1 (\ln x)^2 dx$.

Penyelesaian:

Tulis $x = e^{-u}$

$\Leftrightarrow dx = -e^{-u} du.$

Jika $x = 0 \Rightarrow u = \infty,$

$x = 1 \Rightarrow u = 0.$

Jelas $\int_0^1 (\ln x)^2 dx$

$$= \int_\infty^0 (\ln e^{-u})^2 (-e^{-u}) du$$

$$= -\int_0^\infty (-u)^2 (-e^{-u}) du$$

$$= \int_0^\infty (-u)^2 (e^{-u}) du$$

$$= \int_0^\infty (u)^2 (e^{-u}) du$$

$$= \int_0^\infty (u)^{3-1} (e^{-u}) du$$

$$= \Gamma(3)$$

$= 2!$

$= 2.$

Jadi $\int_0^1 (\ln x)^2 dx = 2.$

19. Hitunglah $\int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^6 dx.$

Penyelesaian:

Tulis $x = e^{-u}$

$\Leftrightarrow dx = -e^{-u} du.$

Jika $x = 0 \Rightarrow u = \infty,$

$x = 1 \Rightarrow u = 0.$

Jelas $\int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^6 dx$

$$= \int_\infty^0 \left[\ln\left(\frac{1}{e^{-u}}\right)\right]^6 (-e)^{-u} du$$

$$= -\int_0^\infty [\ln e^u]^6 (-e)^{-u} du$$

$$= \int_0^\infty u^6 . e^{-u} du$$

$$= \int_0^\infty u^{7-1} . e^{-u} du$$

$= \Gamma(7)$

$= 6!$

$= 720.$

Jadi $\int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^6 dx = 720.$

20. Buktikan $\Gamma(v) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{v-1} dx \, , v > 0.$

Bukti:

Tulis $x = e^{-u}$

$\Leftrightarrow dx = -e^{-u} du.$

Jika $x = 0 \Rightarrow u = \infty,$

$x = 1 \Rightarrow u = 0.$

Jelas $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{v-1} dx$

$$= \int_{\infty}^{0} \left(\ln\left(\frac{1}{e^{-u}}\right)\right)^{v-1} .(-e^{-u})du$$

$$= \int_{0}^{\infty} (\ln e^{u})^{v-1} . e^{-u}\, du$$

$$= \int_{0}^{\infty} u^{v-1} . e^{-u}\, du$$

$= \Gamma(v).$

Jadi $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{v-1} dx = \Gamma(v).$

21. Hitunglah $\int_0^1 (\ln x)^4\, dx.$

Penyelesaian:

Tulis $x = e^{-u}$

$\Leftrightarrow dx = -e^{-u} du.$

Jika $x = 0 \Rightarrow u = \infty,$

$x = 1 \Rightarrow u = 0.$

Jelas $\int_0^1 (\ln x)^4\, dx$

$$= \int_{\infty}^{0} (\ln e^{-u})^4 . (-e^{-u})\, du$$

$$= \int_{0}^{\infty} (\ln e^{-u})^4 . (e^{-u})\, du$$

$$= \int_{0}^{\infty} (-u)^4 . (e^{-u})\, du$$

$$= \int_{0}^{\infty} u^4 . e^{-u}\, du$$

$$= \int_{0}^{\infty} u^{5-1} \, . \, e^{-u} \, du$$

$$= \Gamma(5)$$

$$= 4!$$

$$= 24.$$

Jadi $\int_0^1 (\ln x)^4 \, dx = 24.$

22. Hitunglah $\int_0^1 (x \ln x)^3 dx.$

Penyelesaian:

Tulis $x = e^{-u}$

$\Leftrightarrow dx = -e^{-u} du.$

Jika $x = 0 \Rightarrow u = \infty,$

$x = 1 \Rightarrow u = 0.$

Jelas $\int_0^1 (x \ln x)^3 dx$

$$= \int_{\infty}^{0} (e^{-u} \ln e^{-u})^3 (-e^{-u}) du$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-3u} \, (\ln e^{-u})^3 e^{-u} \, du$$

$$= \int_{0}^{\infty} (-u)^3 e^{-4u} \, du$$

$$= -\int_{0}^{\infty} u^3 e^{-4u} \, du$$

$$= -\int_{0}^{\infty} \frac{1}{4^3} (4u)^3 e^{-4u} \, \frac{1}{4} d(4u)$$

$$= -\frac{1}{4^4} \int_{0}^{\infty} (4u)^3 e^{-4u} \, d(4u)$$

$$= \frac{1}{4^4} \int_{0}^{\infty} (4u)^{4-1} e^{-4u} \, d(4u)$$

$$= -\frac{1}{4^4}\Gamma(4)$$

$$= \frac{3!}{4^4}$$

$$= -\frac{3}{128}.$$

Jadi $\int_0^1 (x \ln x)^3 dx = -\frac{3}{128}$.

23. Hitunglah $\int_0^1 \sqrt[3]{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\, dx$.

Penyelesaian:

Tulis $x = e^{-u}$

$\Leftrightarrow dx = -e^{-u} du.$

Jika $x = 0 \Rightarrow u = \infty,$

$x = 1 \Rightarrow u = 0.$

Jelas $\int_0^1 \sqrt[3]{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\, dx$

$$= \int_{\infty}^{0} (\ln e^u)^{\frac{1}{3}} (-e^{-u}) du$$

$$= \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{3}}\, e^{-u}\, du$$

$$= \int_0^{\infty} u^{\frac{4}{3}-1}\, e^{-u}\, du$$

$$= \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Jadi $\int_0^1 \sqrt[3]{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\, dx = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$.

4.2 Penyelesaian Integral Tak Wajar dengan Fungsi Beta

1. Hitunglah $\int_0^1 x^5.(1-x)^4 dx$.

   Penyelesaian:

   Jelas $\int_0^1 x^5.(1-x)^4 dx$

   $= B(6,5)$

   $= \frac{\Gamma(6)\Gamma(5)}{\Gamma(11)}$

   $= \frac{5!\,4!}{10!}$

   $= \frac{1}{1260}.$

   Jadi $\int_0^1 x^5.(1-x)^4 dx = \frac{1}{1260}$.

2. Hitunglah $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$.

   Penyelesaian:

   Tulis $x = 2v \Leftrightarrow dx = 2dv$.

   Jika $x = 0\ maka\ v = 0,$

   $x = 2\ maka\ v = 1.$

   Jelas $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$

   $$= \int_0^1 \frac{(2v)^2}{\sqrt{2-2v}}.2\,dv$$

   $$= \int_0^1 \frac{4v^2}{\sqrt{2(1-v)}} dv$$

   $$= \int_0^1 \frac{8}{\sqrt{2}}.\frac{v^2}{\sqrt{1-v}}\ dv$$

   $$= 4\sqrt{2}\int_0^1 v^2.(1-v)^{-\frac{1}{2}} dv$$

   $$= 4\sqrt{2}\,B\left(3,\frac{1}{2}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}.\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}$$

$$= 4\sqrt{2}.\frac{2!.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{16}{15}.4\sqrt{2}$$

$$= \frac{64\sqrt{2}}{15}.$$

Jadi $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx = \frac{64\sqrt{2}}{15}$.

3. Hitunglah $\int_0^1 e^{5\ln x + \ln(1-x)^3} dx$.

Penyelesaian:

Jelas $\int_0^1 e^{5\ln x + \ln(1-x)^3} dx$

$$= \int_0^1 e^{\ln x^5} e^{\ln(1-x)^3} dx$$

$$= \int_0^1 x^5(1-x)^3 dx$$

$$= \int_0^1 x^{6-1}(1-x)^{4-1} dx$$

$$= B(6,4)$$

$$= \frac{\Gamma(6)\Gamma(4)}{\Gamma(10)}$$

$$= \frac{5!\,3!}{9!}$$

$$= \frac{3.2.1}{9.8.7.6}$$

$$= \frac{1}{504}.$$

Jadi $\int_0^1 e^{5\ln x + \ln(1-x)^3} dx = \frac{1}{504}$.

4. Hitunglah $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Penyelesaian:

Jelas $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$= \int_0^1 x^4 \,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^4 \,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{2x}\,d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3 \,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2)^{\frac{3}{2}} \,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2)^{\frac{5}{2}-1} \,(1-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\,d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\frac{3}{4}.\sqrt{\pi}.\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \frac{3}{16}\pi.$$

Jadi $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{3}{16}\pi.$

5. Hitunglah $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

   Penyelesaian:

   Jelas $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$

$$= \int_0^1 (1-x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \int_0^1 (1-x^3)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{3x^2}\,d(x^3)$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2}\,(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{x^2}\,d(x^3)$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 x^{-2}\,(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}\,d(x^3)$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (x^3)^{-\frac{2}{3}}\,(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}\,d(x^3)$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (x^3)^{\frac{1}{3}-1}\,(1-x^3)^{\frac{1}{2}-1}\,d(x^3)$$

$$= \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right).$$

6. Hitunglah $\int_0^\infty \frac{y^2}{(1+y)^6}\,dy$.

   Penyelesaian:

   Tulis $x = \frac{y}{1+y}$

$$\Leftrightarrow x + xy = y$$

$$\Leftrightarrow x = y - xy$$

$$\Leftrightarrow x = y(1-x)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(1-x)+x}{(1-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow dy = \frac{1}{(1-x)^2}dx.$$

Jika $y = 0 \Rightarrow x = 0,$

$y = \infty \Rightarrow x = 1.$

Jelas $\int_0^\infty \frac{y^2}{(1+y)^6}dy$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{-6} \frac{1}{(1-x)^2}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{(1-x)^2}\left(\frac{1-x+x}{1-x}\right)^{-6} \frac{1}{(1-x)^2}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{(1-x)^4}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{-6} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{(1-x)^4}(1-x)^6dx$$

$$= \int_0^1 x^2(1-x)^2dx$$

$$= \int_0^1 x^{3-1}(1-x)^{3-1}dx$$

$$= B(3,3)$$

$$= \frac{\Gamma(3)\Gamma(3)}{\Gamma(6)}$$

$$= \frac{2!\,2!}{5!}$$

$$= \frac{4}{120}$$

$$= \frac{1}{30}.$$

Jadi $\int_0^\infty \frac{y^2}{(1+y)^6}dy = \frac{1}{30}.$

7. Hitunglah $\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}dy$.

   Penyelesaian:

   Tulis $y^2 = a^2x$

   $\Leftrightarrow y = a\sqrt{x}$

   $\Leftrightarrow dy = \frac{1}{2}.a.x^{-\frac{1}{2}}\,dx.$

   Jika $y = 0 \Rightarrow x = 0,$

   $y = a \Rightarrow x = 1.$

   Jelas $\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}dy$

   $$= \int_0^1 (a^2x)^2.\sqrt{a^2-a^2x}.\frac{1}{2}.a.x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

   $$= \frac{a}{2}\int_0^1 a^4.x^2.a.(1-x)^{\frac{1}{2}}.x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

   $$= \frac{a^6}{2}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}.(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

   $$= \frac{a^6}{2}\int_0^1 x^{\frac{5}{2}-1}.(1-x)^{\frac{3}{2}-1}\,dx$$

   $$= \frac{a^6}{2}.B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$$

   $$= \frac{a^6}{2}.\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right).\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)}$$

   $$= \frac{a^6}{2}.\frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{3!}$$

   $$= \frac{a^6}{12}.\frac{3}{8}.\sqrt{\pi}.\sqrt{\pi}$$

   $$= \frac{\pi.a^6}{32}.$$

   Jadi $\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}dy = \frac{\pi.a^6}{32}$.

8. Hitunglah $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$.

Penyelesaian:

Jelas $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$

$$= \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}.(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1}.(1-x)^{\frac{3}{2}-1}\,dx$$

$$= B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{1}$$

$$= \frac{1}{2}.\sqrt{\pi}.\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

Jadi $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

9. Hitunglah $\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$.

Penyelesaian:

Tulis $x^2 = 4y$

$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{y}$

$\Leftrightarrow dx = y^{-\frac{1}{2}}\,dy$.

Jika $x = 0 \Rightarrow y = 0$,

$x = 2 \Rightarrow y = 1$.

Jelas $\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$

$$= \int_0^1 (4-4y)^{\frac{3}{2}}.y^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= \int_0^1 8.(1-y)^{\frac{3}{2}}.y^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= 8\int_0^1 (1-y)^{\frac{5}{2}-1}.y^{\frac{1}{2}-1}\,dy$$

$$= 8.B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$= 8.\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$= 8.\frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

$$= 3\pi.$$

Jadi $\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = 3\pi.$

10. Hitunglah $\int_0^4 u^{\frac{3}{2}}.(4-u)^{\frac{5}{2}}\,du.$

Penyelesaian:

Tulis $u = 4v$

$\Leftrightarrow du = 4\,dv.$

Jika $u = 0 \Rightarrow v = 0,$

$u = 4 \Rightarrow v = 1.$

Jelas $\int_0^4 u^{\frac{3}{2}}.(4-u)^{\frac{5}{2}}\,du$

$$= \int_0^1 (4v)^{\frac{3}{2}}.(4-4v)^{\frac{5}{2}}.4\,dv$$

$$= 4\int_0^1 8.v^{\frac{3}{2}}.32.(1-v)^{\frac{5}{2}}\,dv$$

$$= 1024\int_0^1 v^{\frac{3}{2}}.(1-v)^{\frac{5}{2}}\,dv$$

$$= 1024\int_0^1 v^{\frac{5}{2}-1}.(1-v)^{\frac{7}{2}-1}\,dv$$

$$= 1024.B\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$$

$$= 1024.\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right).\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$

$$= 1024.\frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{120}$$

$$= \frac{1024}{120}.\frac{45}{32}.\pi$$

$$= 12\pi.$$

Jadi $\int_0^4 u^{\frac{3}{2}}.(4-u)^{\frac{5}{2}}\,du = 12\pi.$

11. Hitunglah $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}}$.

Penyelesaian:

Tulis $x = 3y$

$\Leftrightarrow dx = 3dy.$

Jika $x = 0 \Rightarrow y = 0,$

$x = 3 \Rightarrow y = 1.$

Jelas $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}}$

$$= \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{9y-(3y)^2}}\,dy$$

$$= 3\int_0^1 \frac{dy}{3\sqrt{y-y^2}}$$

$$= \int_0^1 (y-y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}.(1-y)^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= \int_0^1 y^{\frac{1}{2}-1}.(1-y)^{\frac{1}{2}-1}\,dy$$

$$= B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}$$

$$= \pi.$$

Jadi $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}} = \pi$.

BAB 5

PENUTUP

5.1 Simpulan

Simpulan yang dapat diambil dari hasil dan pembahasan pada Bab 4 adalah sebagai berikut.

1. Integral tak wajar yang dapat diselesaikan dengan bantuan fungsi gamma adalah:
   a. Integral tak wajar yang memiliki bentuk sesuai dengan fungsi gamma.
   b. Integral tak wajar yang integrannya melibatkan fungsi eksponensial negatif.

      Salah satu aplikasi fungsi gamma adalah penggunaannya dalam analisis fungsi kepadatan peluang dimana fungsinya melibatkan fungsi eksponensial negatif, seperti fungsi distribusi gamma, fungsi eksponensial, fungsi distribusi normal, fungsi distribusi Weibull, fungsi distribusi Rayleigh, fungsi distribusi normal standard.
   c. Integral tak wajar yang integrannya melibatkan fungsi logaritma.
2. Dari beberapa contoh integral tak wajar terlihat bahwa integral tak wajar dengan integran memuat fungsi logaritma dapat diselesaikan menggunakan fungsi gamma dengan langkah mensubstitusi variabel $\boldsymbol{x}$ dengan $\boldsymbol{e^{-u}}$.

3. Integral tak wajar dengan integran memuat fungsi eksponensial dapat diselesaikan menggunakan fungsi gamma dengan cara merubah fungsi tersebut sesuai dengan bentuk fungsi gamma.
4. Integral tak wajar yang dapat diselesaikan dengan bantuan fungsi beta adalah:
   a. Integral tak wajar yang memiliki bentuk sesuai dengan fungsi beta dan sifat-sifat fungsi beta.
   b. Integral tak wajar pada selang hingga dengan bentuk $\int_a^b \frac{dx}{(a-x)^p}, p < 1.$
5. Beberapa kasus integral tak wajar dapat diselesaikan menggunakan fungsi beta dengan cara merubah fungsi tersebut sesuai dengan bentuk fungsi beta, kemudian mencari nilai dari fungsi beta tersebut dengan menggunakan hubungan fungsi gamma dan fungsi beta.

5.2 Saran

Saran yang dapat penulis berikan dari hasil dan pembahasan yang telah diberikan adalah.

1. Pembahasan ini hanya mengkaji integral tak wajar dengan integran memuat fungsi eksponensial dan fungsi logaritma, maka diperlukan studi lebih lanjut untuk membahas penyelesaian integral tak wajar dengan integran fungsi lainnya, seperti fungsi trigonometri.
2. Alat yang digunakan untuk menyelesaikan integral tak wajar dalam pembahasan ini adalah fungsi gamma dan fungsi beta. Oleh sebab itu, perlu dilakukan pembahasan lebih lanjut untuk menyelesaikan integral tak wajar dengan menggunakan alat lainnya, seperti teorema residu.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, F. & E. Mendelson. 2006. *Kalkulus Edisi Keempat (Alih Bahasa oleh Nur Danarjaya)*. Jakarta: Erlangga.

Boas, M. L. 1983. *Mathematical Methods in The Physical Sciences*. Second Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Budhi, W.S. 2001. *Kalkulus Peubah Banyak dan Penggunaannya*. Bandung: Penerbit ITB.

Chotim, M. 2004. *Kalkulus 2*. Semarang: Jurusan Matematika FMIPA UNNES.

Chotim, M. 2007. *Kalkulus 1*. Semarang: Jurusan Matematika FMIPA UNNES.

Gunawan. 2003. Penggunaan Fungsi Gamma untuk Beberapa Perhitungan Integral Tak Wajar. Skripsi. Semarang: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.

Laval, P. B. 2005. *Improper Integral*. Tersedia di http://science.kennesaw.edu/~plaval/math2202/intimp.pdf [diakses 25-2-2011].

Leithold, L. 1986. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik Jilid 1 (Alih Bahasa oleh E. Hutahaean)*. Jakarta: Erlangga.

Leithold, L. 1993. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik Jilid 2 (Alih Bahasa oleh S. M. Nababan)*. Jakarta: Erlangga.

Sebah, P. & X. Gourdon. 2002. *Introduction to the Gamma Function*. Tersedia di http://www.profesores.frc.utn.edu.ar/electronica/analisisdeseniales/aplicaciones/Funcion_Gamma.pdf [diakses 23-7-2011].

Soemartojo, N. 1987. *Kalkulus Lanjutan*. Jakarta: UI-Press.

Spiegel, M. R. 1974. *Theory and Problems of Advanced Calculus*. New York: McGraw-Hill International Book Company.

Siang, J.J. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Andi

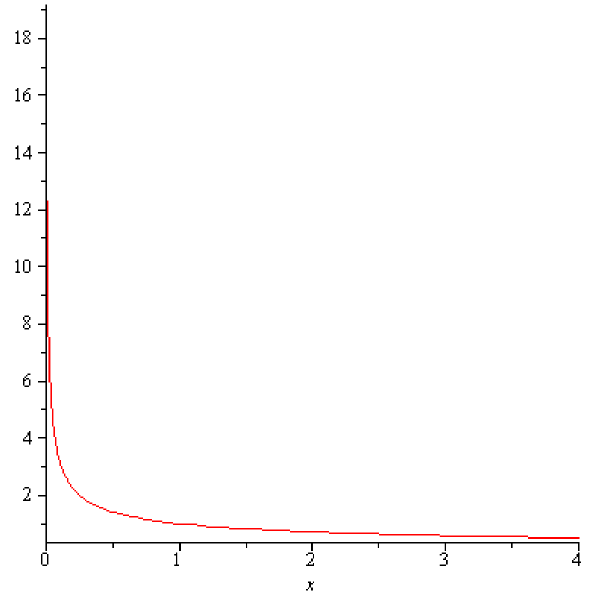
Wrede, R. C. & M. Spiegel. 2007. *Kalkulus Lanjut, Edisi kedua*. Jakarta: Erlangga.

Lampiran

```
> f(x)=1/(x^(1/2));
```

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

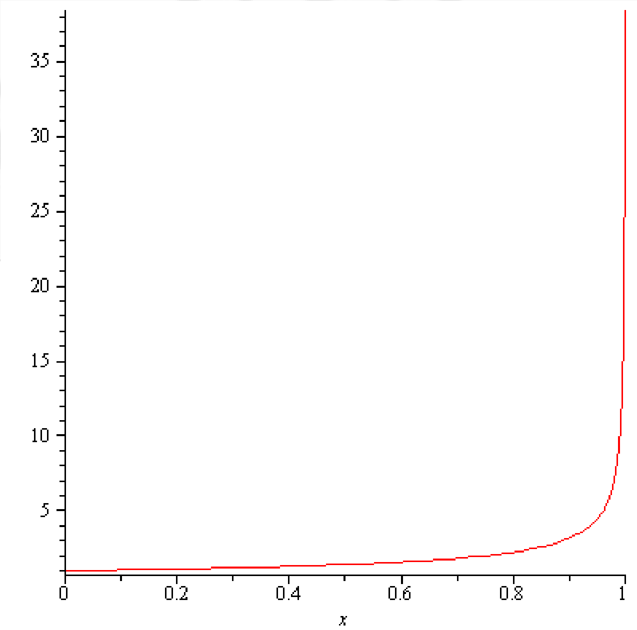
```
> plot(1/(x^(1/2)),x=0..4);
```




```
> g(x)=1/((1-x)^(1/2));
```

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

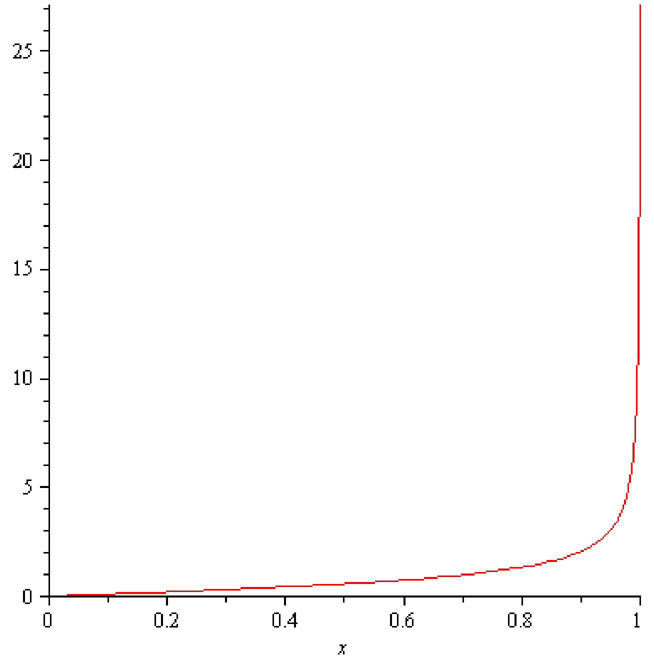
```
> plot(1/((1-x)^(1/2)),x=0..1);
```



```
> h(x)=x/((1-x^2)^(1/2));
```

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

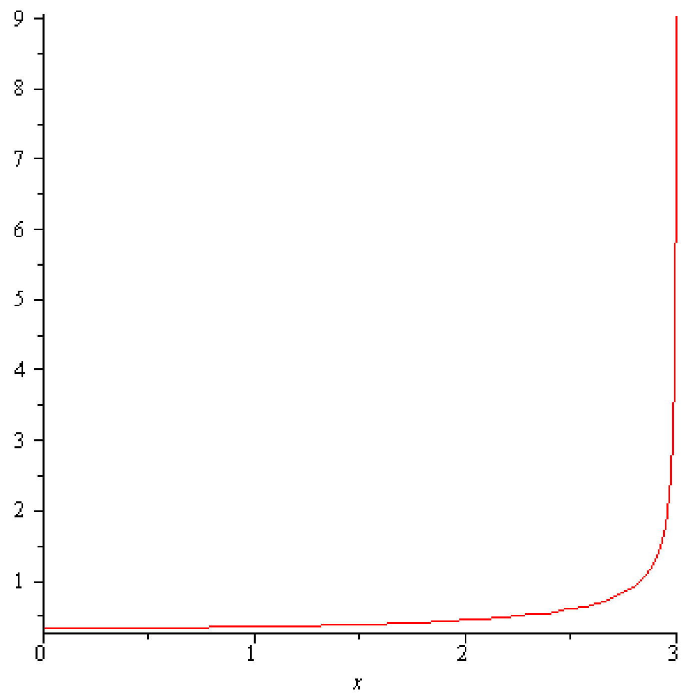
```
> plot(x/((1-x^2)^(1/2)),x=0..1);
```




```
> a(x)=1/((9-x^2)^(1/2));
```

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$$

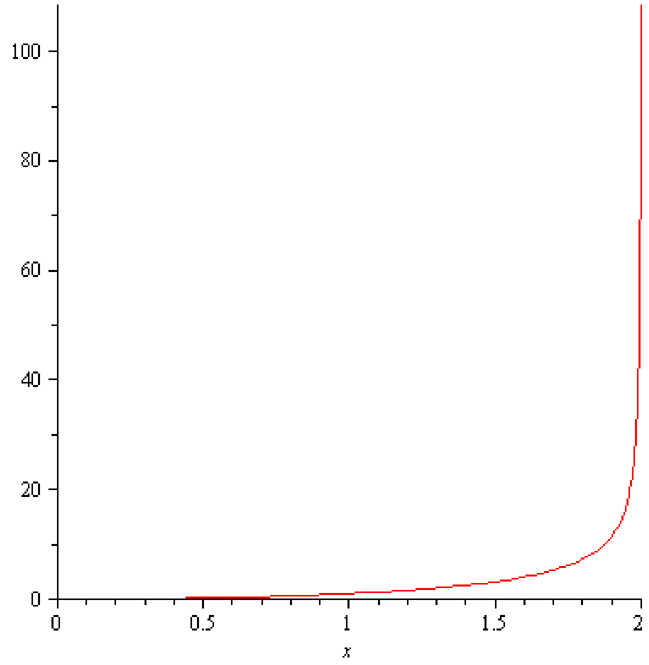
```
> plot(1/((9-x^2)^(1/2)),x=0..3);
```



```
> b(x)=x^2/((2-x)^(1/2));
```

$$b(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}$$

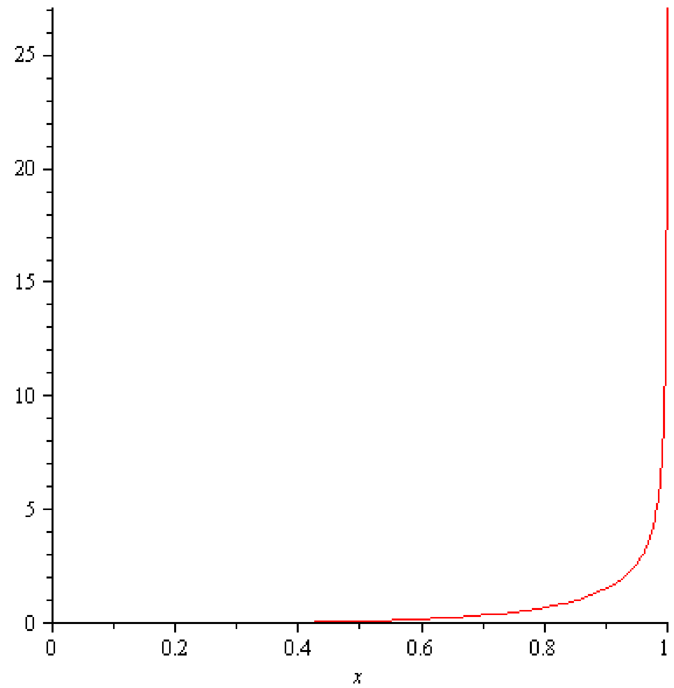
```
> plot(x^2/((2-x)^(1/2)), x=0..2);
```




```
> s(x)=x^4/((1-x^2)^(1/2));
```

$$s(x) = \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$$

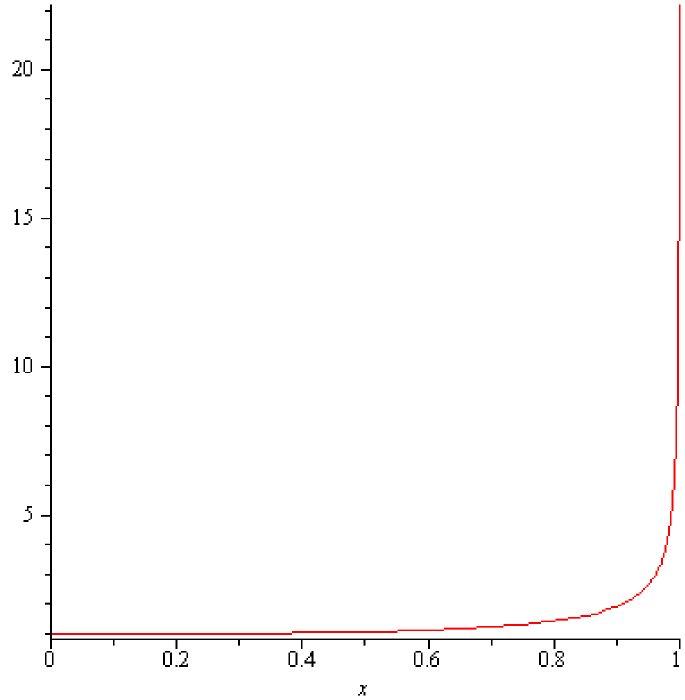
```
> plot(x^4/((1-x^2)^(1/2)),x=0..1);
```



```
> t(x)=1/((1-x^3)^(1/2));
```

$$t(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$$

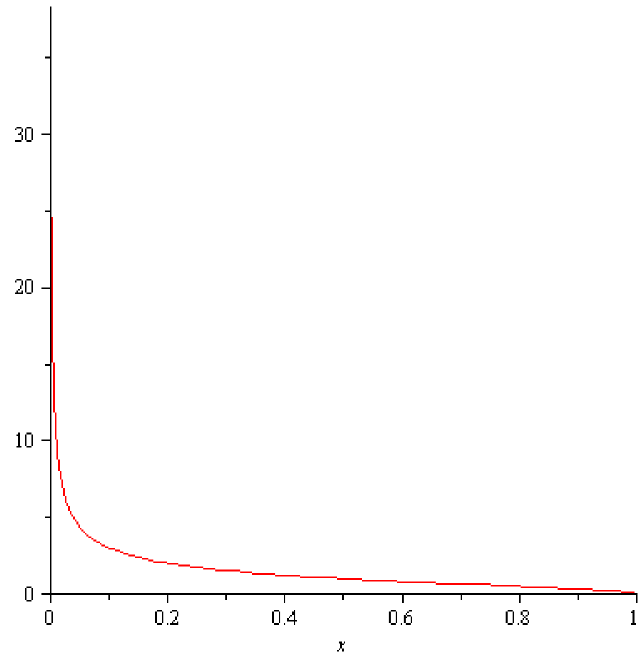
```
> plot(1/((1-x^3)^(1/2)),x=0..1);
```




```
> c(x)=((1-x)/x)^(1/2);
```

$$c(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

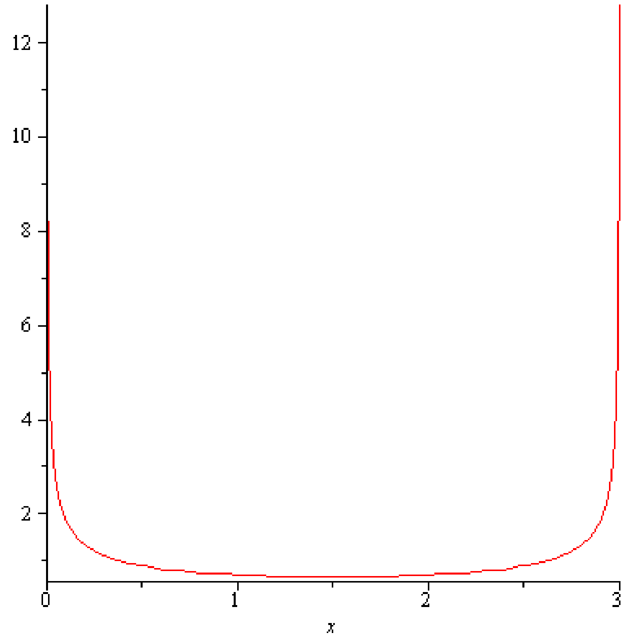
```
> plot(((1-x)/x)^(1/2),x=0..1);
```



```
> d(x)=1/((3*x-x^2)^(1/2));
```

$$d(x) = \frac{1}{\sqrt{3\,x - x^2}}$$

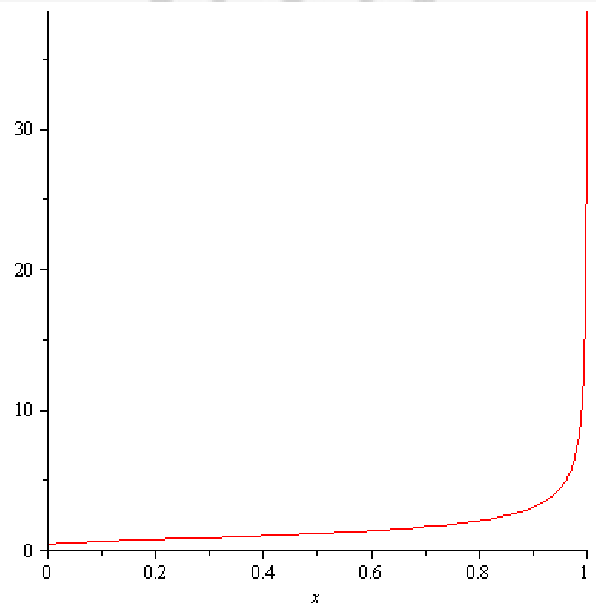
```
> plot(1/((3*x-x^2)^(1/2)),x=0..3);
```




```
> f(x)=1/(-ln(x))^(1/2);
```

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}}$$

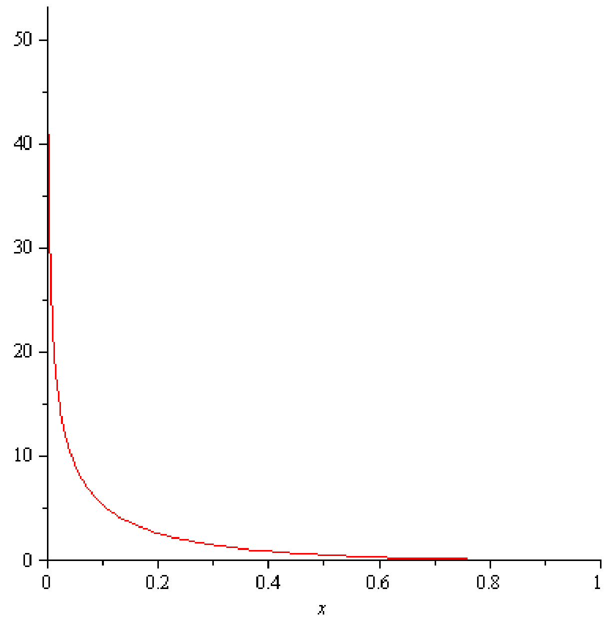
```
> plot(1/(-ln(x))^(1/2),x=0..1);
```



```
> f(x)=(ln(x))^2;
```

$$f(x) = \ln(x)^2$$

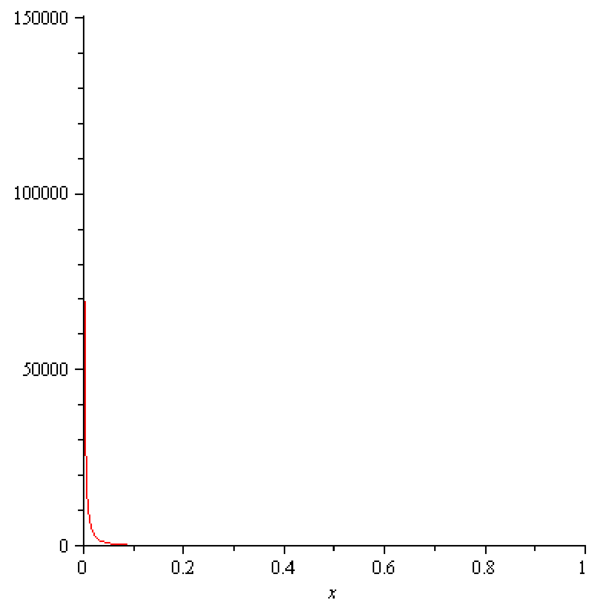
```
> plot((ln(x))^2,x=0..1);
```




```
> f(x)=(ln(1/x))^6;
```

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^6$$

```
> plot((ln(1/x))^6,x=0..1);
```



```
> f(x)=(ln(x))^4;
```

$$f(x) = \ln(x)^4$$

```
> plot((ln(x))^4,x=0..1);
```