MENENTUKAN INVERS MOORE PENROSE DARI MATRIKS KOMPLEKS

skripsi

disajikan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

Astin Wita Yunihapsari

4150407021

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2011

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan.

Semarang, 29 Juli 2011

Astin Wita Yunihapsari

4150407021

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Menentukan Invers Moore-Penrose dari Matriks Kompleks

disusun oleh

Astin Wita Yunihapsari

4150407021

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA Unnes pada tanggal 9 Agustus 2011

Panitia,

Ketua	Sekretaris
Dr. Kasmadi Imam S., M.S. 195111151979031001	Drs. Edy Soedjoko, M.Pd. 195604191987031001

Ketua Penguji

Drs. Supriyono, M.Si.
195210291980031002

Anggota Penguji/ Pembimbing Utama	Anggota Penguji/ Pembimbing Pendamping
Dr. Kartono, M.Si 196502221980031002	Drs. Darmo 19490481975011001

PERSEMBAHAN

Ku tulis dengan tinta emas yang ku hiasi cinta
Skripsi ini ku persembahkan untuk......

- *Bapak Ibuku tersayang Ibnoe Taufik (alm) dan Widihastuti.*
- *Keluargaku tersayang Rima Yunartati, Haryono dan Airlangga.*
- *Penjaga hatiku tercinta, Tri Hermanto.*
- *Sahabat-sahabatku tersayang Tenis, Anisa, Ulil, Riza, Ani, Meita, Ninik.*
- *Teman seperjuanganku Matematika '07.*
- *Anak-anak kos dodol, kos pelangi, Creal Ska, KKN Wonorejo-Pringapus*
- *Almamaterku.*

MOTTO

- *Tetesan air mengalahkan kekerasan batu.*
- *Kebahagiaan tertunda yang dibayar dengan pengorbanan dan keikhlasan akan terasa lebih indah.*
- *Rencana Tuhan akan selalu indah pada waktunya.*
- *Harapan, doa, dan usaha mengantarkan kita pada kesuksesan.*

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis memperoleh kekuatan untuk menyelesaikan skripsi ini. Solawat dan salam senantiasa penulis tujukan kepada Nabi Muhammad SAW.

Penyelesaian skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan, bantuan dan saran dari segala pihak dalam penulisannya. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Prof. Dr. H. Sudijono Sastroatmodjo, M.Si., Rektor Universitas Negeri Semarang yang telah memberikan fasilitas-fasilitas kepada penulis.
2. Dr. Kasmadi Imam S, M.S, Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Edy Soedjoko, M.Pd, Ketua Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang.
4. Dr. Kartono, M.Si, Dosen Pembimbing I yang penuh keikhlasan mengarahkan dan membimbing penulis dalam menyusun skripsi ini dari awal hingga akhir.
5. Drs Darmo, Dosen Pembimbing II yang penuh keikhlasan mengarahkan dan membimbing penulis dalam menyusun skripsi ini dari awal hingga akhir.
6. Drs. Supriyono, M.Si, Dosen Penguji yang penuh keikhlasan mengarahkan dan membimbing penulis dalam menyusun skripsi ini dari awal hingga akhir.
7. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan bekal ilmu dan pengetahuan selama kuliah.
8. Bapak ibu dan keluargaku yang selalu memberikan doa, dukungan, dan semangat sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa Skripsi ini masih sangat jauh dari sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan. Semoga tulisan ini bermanfaat bagi yang berkepentingan dengan ilmu matematika.

Semarang,   Agustus 2011

Penulis

Astin Wita Yunihapsari
4150407021

ABSTRAK

Yunihapsari, Astin, Wita. 2011. *Menentukan Invers Moore Penrose Dari Matriks Kompleks.* Skripsi, Jurusan Matematika dan Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Pembimbing Utama Dr. Kartono, M.Si. dan Pembimbing Pendamping Drs. Darmo.

Kata Kunci : Bilangan Kompleks, Ruang Vektor, Matriks, Graf.

Invers Moore - Penrose adalah salah satu jenis matriks invers yang dinotasikan dengan A^+. Invers Moore - Penrose merupakan perluasan dari konsep invers matriks. Jika invers matriks yang sudah kita kenal adalah invers dari suatu matriks bujur sangkar dan non singular (determinannya tidak nol), maka Invers Moore - Penrose ada untuk setiap matriks baik matriks bujur sangkar yang singular maupun yang tidak bujur sangkar. Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui sifat dan metode dalam mencari Invers Moore – Penrose matriks kompleks, apakah Invers Moore - Penrose dari matriks bebas juga merupakan matriks bebas, dan syarat apa saja yang harus dipenuhi.

Metode penelitian yang digunakan dalam skripsi ini adalah penemuan masalah, perumusan masalah, studi pustaka, analisis pemecahan masalah, penarikan simpulan. Dalam pembahasan dijelaskan mengenai sifat dan metode dalam mencari Invers Moore – Penrose matriks kompleks, apakah Invers Moore - Penrose dari matriks bebas juga merupakan matriks bebas, dan syarat apa saja yang harus dipenuhi. Dari pembahasan dapat disimpulkan bahwa Invers Moore – Penrose mempunyai enam sifat dan dua metode untuk mencari Invers Moore – Penrose, tidak semua matriks bebas memiliki Invers Moore – Penrose yang bebas, dan ada dua syarat yang harus dipenuhi agar Invers Moore – Penrose dari suatu matriks bebas juga merupakan matriks bebas.

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i

PERNYATAAN ii

PENGESAHAN iii

PERSEMBAHAN iv

MOTTO v

KATA PENGANTAR vi

ABSTRAK viii

DAFTAR ISI ix

DAFTAR GAMBAR xi

DAFTAR SIMBOL xii

BAB 1 PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Masalahan 2

1.3 Batasan Masalah 3

1.4 Tujuan Penelitian 3

1.5 Manfaat Penelisan 4

1.6 Sistematika Skripsi 4

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Bilangan Kompleks 6

2.2 Ruang Vektor 9

2.3 Matriks 15

2.4 Graf 20

BAB 3 METODE PENELITIAN

3.1 Penemuan Masalah 25

3.2 Perumusan Masalah 26
3.3 Studi Pustaka 26
3.4 Analisis Pemecahan Masalah 27
3.5 Penarikan Simpulan 27
BAB 4 PEMBAHASAN
4.1 Invers Moore – Penrose 29
4.2 Sifat Invers Moore – Penrose 33
4.3 Metode untuk mencari Invers Moore – Penrose 38
4.4 Invers Moore – Penrose Matriks Bebas 48
4.5 Struktur Invers Moore – Penrose Matriks Bebas 63
BAB 5 PENUTUP
5.1 Simpulan 75
5.2 Saran 76
DAFTAR PUSTAKA
LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

2.1.1 Penyajian Bilangan Kompleks Dalam Koordinat 6

2.4.1 Graf G 20

2.4.2 Graf Yang Memiliki Sisi Ganda 21

2.4.3 Garaf Yang Memiliki Lup 21

2.4.4 Graf Sederhana 22

2.4.5a Subgaf G 22

2.4.5b Graf G 22

2.4.6 Graf G 23

2.4.7 Graf B 23

2.4.8 Digraf D 24

4.4.1 Graf Bipartite $B\ \ A$ 52

4.4.2 $D(I_2)$ 53

4.4.3 $D(I_3)$ 53

4.4.4 $D(A)$ 54

4.4.5 $D(A)$ 54

4.4.6 $D\ \ A$ 55

4.4.7 Matriks bebas dan Invers Moore - Penrosenya yang tidak bebas 62

4.4.8 Matriks Bebas dan Invers Moore-Penrosenya yang tidak bebas 62

DAFTAR SIMBOL

A^{+}	Invers Moore – Penrose
A^{*}	Transpose Konjugat
A^{-1}	Invers dari matriks A
A^{T}	Transpos dari matriks A

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matriks dan operasinya merupakan hal yang berkaitan erat dengan bidang aljabar linear. Konsep dari suatu matriks sangat berguna dalam menyelesaikan beberapa permasalahan pada ilmu matematika modern. Penyelesaian permasalahan matematika dalam bentuk matriks tersebut dapat dilakukan dengan beberapa cara. Salah satu cara tersebut adalah menggunakan invers matriks.

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. (Anton, H; 1987: 22). Matriks adalah kumpulan bilangan berbentuk persegi panjang yang disusun menurut baris dan kolom. Dengan representasi matriks, perhitungan dapat dilakukan dengan lebih terstruktur. Pemanfaatannya misalnya dalam menjelaskan persamaan linier, transformasi koordinat, dan lainnya.Matriks seperti halnya variabel biasa dapat dimanipulasi, seperti dikalikan, dijumlah, dikurangkan dan didekomposisikan. (http://en.wikipedia.org/wiki/matriks_(matematic))

Penggunaan matriks invers sangatlah penting dalam menentukan solusi dari sistem persamaan linear $Ax = B$ yang sesuai, yakni $x = A^{-1}B$. (Anton, H; 1987: 49). Oleh karena pentingnya penggunaan matriks invers maka tulisan ini akan membahas salah satu jenis matriks invers, yakni Invers Moore - Penrose.

Invers Moore - Penrose adalah salah satu jenis matriks invers yang dinotasikan dengan A^+. Invers Moore - Penrose merupakan perluasan dari konsep invers matriks. Jika invers matriks yang sudah kita kenal adalah invers dari suatu matriks bujur sangkar dan non singular (determinannya tidak nol), maka Invers Moore - Penrose ada untuk setiap matriks baik matriks bujur sangkar yang singular maupun yang tidak bujur sangkar. (Thomas Blitz :1081-3810)

Pada skripsi sebelumnya telah dijelaskan mengenai matriks invers tergeneralisir dan matriks invers tergeralisir Moore - Penrose, dan hubungan matriks invers tergeralisir dengan matriks tergeralisir Moore - Penrose. Dalam skripsi ini penulis tertarik untuk melanjutkan skripsi sebelumnya dengan membahas lebih lanjut mengenai Invers Moore - Penrose pada matriks kompleks dengan membatasinya pada matrik kompleks sejati dan matriks bebas dengan membatasinya pada matriks A berukuran $n \times n$. Pembahasan ini akan dikaitkan dengan digraph dan graf bipartite sub-sub matriks dari matriks bebas tersebut dengan Invers Moore - Penrosenya.

1.2 Masalah

Dari latar belakang di atas diperoleh permasalahan yang timbul dalam penyusunan skripsi ini adalah :

1. Bagaimana sifat-sifat Invers Moore – Penrose matriks kompleks?
2. Bagaimana metode dalam mencari Invers Moore – Penrose matriks kompleks?

3. Apakah Invers Moore - Penrose dari matriks bebas juga merupakan matriks bebas?
4. Syarat apa saja yang harus dipenuhi agar Invers Moore - Penrose dari matriks bebas juga merupakan matriks bebas?

1.3 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini permasalahan yang dibahas adalah menentukan Invers Moore – Penrose matriks kompleks dengan membatasinya hanya pada matriks kompleks sejati dan matriks bebas dengan membatasinya pada matriks A berukuran $n \times n$.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Mengetahui sifat-sifat Invers Moore – Penrose matriks kompleks.
2. Mengetahui metode dalam mencari Invers Moore – Penrose matriks kompleks.
3. Mengetahui apakah Invers Moore - Penrose dari matriks bebas juga merupakan matriks bebas.
4. Mengetahui syarat apa saja yang harus dipenuhi agar Invers Moore - Penrose dari matriks bebas juga merupakan matriks bebas.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penyusunan skripsi ini adalah :

1. Bagi peneliti

   Dapat mengetahui sifat-sifat Invers Moore – Penrose matriks kompleks, mengetahui metode dalam mencari Invers Moore – Penrose matriks kompleks, mengetahui apakah Invers Moore - Penrose dari matriks bebas juga merupakan matriks bebas, mengetahui syarat apa saja yang harus dipenuhi agar Invers Moore - Penrose dari matriks bebas juga merupakan matriks bebas.

2. Bagi universitas

   Dari hasil penelitian ini dapat dijadikan masukan dan bahan koreksi dalam menentukan Invers Moore - Penrose dari matriks kompleks dan matriks bebas dengan membatasinya pada matriks A berukuran $n \times n$.

1.6 Sistematika Skripsi

Dalam penulisan skripsi ini secara garis besar dibagi menjadi tiga bagian pokok, yaitu bagian awal, bagian isi, dan bagian akhir. Pada bagian awal berisi halaman sampul, halaman judul, abstrak, lembar pengesahan, motto dan persembahan, kata pengantar, daftar isi.

Pada bagian isi skripsi terdiri dari lima bab. Bab 1 Pendahuluan. Pada bab ini mengemukakan tentang latar belakang, permasalahan, tujuan dan manfaat penelitian, dan sistematika penulisan skripsi. Pada bab berikutnya adalah tinjauan pustaka yang diangkat sebagai bab 2. Bab ini berisi uraian teoritis atau teori-teori yang mendasari pemecahan tentang masalah-masalah yang berhubungan dengan judul skripsi. Bab 3 adalah metode penelitian yang berisi tentang metode yang digunakan dalam penelitian yang meliputi penemuan masalah, perumusan masalah, studi pustaka, pemecahan masalah, serta penarikan simpulan.

Bab selanjutnya yaitu bab 4 berisi semua hasil dan pembahasan mengenai bagaimana sifat-sifat Invers Moore – Penrose matriks kompleks, bagaimana metode dalam mencari Invers Moore – Penrose matriks kompleks, apakah Invers Moore - Penrose dari matriks bebas juga merupakan matriks bebas, syarat apa saja yang harus dipenuhi agar Invers Moore - Penrose dari matriks bebas juga merupakan matriks bebas. Bab terakhir merupakan bab 4, yaitu bab penutup. Bab ini berisi tentang simpulan dan saran yang diberikan penulis berdasarkan simpulan yang diambil.

Bagian akhir skripsi berisi daftar pustaka dan lampiran-lampiran yang mendukung skripsi.

BAB 2

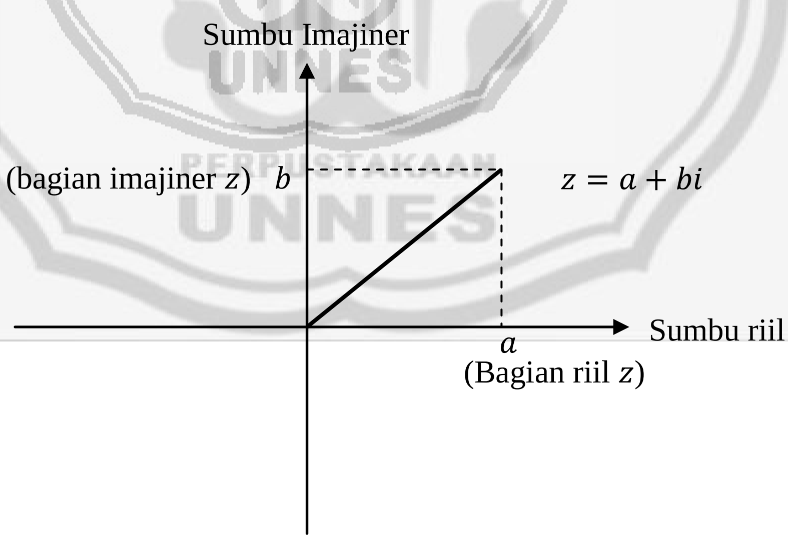
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 BILANGAN KOMPLEKS

Definisi 2.1.1

Bilangan kompleks adalah suatu pasangan terurut dari dua bilangan real a dan b, yang dinyatakan oleh a, b . Lambang bilangan kompleks, kita gunakan z, yang berarti $z =\ a, b$ atau $a + bi$. (Supriyono; 1992:1)

Secara geometris, bilangan kompleks dapat ditinjau sebagai titik atau pun vektor di bidang x, y dimana sumbu x disebut *sumbu riil* ,sumbu y disebut *sumbu imajiner*, dan bidangnya disebut *bidang kompleks.* (Anton, H; 1987: 389)



Gambar 2.1.1 Penyajian bilangan kompleks dalam koordinat

Definisi 2.1.2

Dua bilangan kompleks $a + bi$ dan $c + di$, didefinisikan *sama*, dituliskan $a + bi = c + di$ jika $a = c$ dan $b = d$. (Anton, H; 1987: 390)

Operasi aljabar dari bilangan kompleks di pandang sama dengan operasi aljabar vektor dalam R^2. Jika diketahui $z_1 = a + bi$ dan $z_2 = c + di$, maka

Penjumlahan bilangan kompleks

$$z_1 + z_2 = \ a + bi \ + \ c + di \ = \ a + c \ + \ b + d \ i$$

Pengurangan bilangan kompleks

$$z_1 - z_2 = \ a + bi \ - \ c + di \ = \ a - c \ + \ b - d \ i$$

Perkalian bilangan kompleks

$$z_1 . z_2 = \ a + bi \ . \ c + di \ = \ ac - bd \ + \ bc + ad \ i$$

Pembagian bilangan kompleks

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \ i$$

Dengan c dan d tidak boleh sama dengan nol. (Anton, H; 1987: 390)

Contoh 2.1.1

Diketahui $z_1 = 2 + i$ dan $z_2 = -7 - 5i$, maka

$$z_1 + z_2 = \ 2 + i \ + \ -7 - 5i \ = -5 - 4i$$

$$z_1 - z_2 = \ 2 + i \ - \ -7 - 5i \ = 9 - 6i$$

$$z_1 . z_2 = \ 2 + i \ . \ -7 - 5i \ = -9 - 17i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i}{-7 - 5i} = \frac{-19}{74} + \frac{3}{74} \ i$$

Definisi 2.1.3

Jika $z = a + bi$ sebarang bilangan kompleks, maka *konjugat/ sekawan* z yang dinyatakan oleh $\bar{z}$ (dibaca "z garis"), didefinisikan oleh $\bar{z} = a - bi$. (Anton, H; 1987: 394)

Contoh 2.1.2

Konjugat dari bilangan kompleks $z = 4 + i$ adalah $\bar{z} = 4 - i$.

Definisi 2.1.4

Modulus/ Nilai Mutlak bilangan kompleks $z = a + bi$, dinyatakan oleh $|z|$, didefinisikan oleh $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. (Anton, H; 1987: 395)

Contoh 2.1.3

Bilangan kompleks $z = 8 + 6i$ memiliki harga mutlak

$$|z| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Definisi 2.1.5

Matriks Kompleks adalah matriks dengan entri-entri bilangan kompleks. (Schaum's; 2004: 34)

Contoh 2.1.4

Matriks Kompleks $A = \begin{bmatrix} 2i & 3 & i \\ 2 & 3i & 1 \end{bmatrix}$

2.2 RUANG VEKTOR

Definisi 2.2.1

Misalkan V sebarang himpunan yang tidak kosong, dimana telah didefinikan operasi-operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Himpunan V dikatakan ruang vektor jika memenuhi aksioma sebagai berikut

1. Untuk setiap $u, v \in V$, maka $u + v \in V$.
2. $u + v = v + u$, untuk setiap $u, v \in V$.
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$, untuk setiap $u, v, w \in V$.
4. Terdapat $0 \in V$ sehingga $u + 0 = 0 + u = u$, untuk setiap $u \in V$.
5. Untuk setiap $u \in V$, terdapat $-u \in V$ sehingga $u + (-u) = (-u) + u = 0$.
6. Untuk sembarang skalar k dan untuk setiap $u \in V$, maka $ku \in V$.
7. $k(u + v) = ku + kv$, untuk sembarang skalar k dan untuk setiap $u, v \in V$.
8. $(k + l)u = ku + lu$, untuk sembarang skalar k, l dan untuk setiap $u \in V$.
9. $(kl)u = k(lu)$, untuk sembarang skalar k, l dan untuk setiap $u \in V$.
10. $1.u \in V$, untuk setiap $u \in V$.

(Anton, H; 1987: 137)

Contoh 2.2.1

Diketahui $u = (a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i)$, $v = (a_2 + b_2 i, c_2 + d_2 i, e_2 + f_2 i)$, $w = (a_3 + b_3 i, c_3 + d_3 i, e_3 + f_3 i)$ adalah vektor-vektor di dalam $V = \{(x, y, z) |$dengan x, y, z adalah bilangan kompleks$\}$ dengan mendefinisikan operasi penjumlahan

$$u + v = \ a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i \ + \ a_2 + b_2 i, c_2 + d_2 i, e_2 + f_2 i$$

$$= \ a_1 + a_2 + b_1 i + b_2 i, c_1 + c_2 + d_1 i + d_2 i, e_1 + e_2 + f_1 i + f_2 i$$

Dan perkalian skalar

$$k.u = k. \ a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i$$

$$= \ ka_1 + kb_1 i, kc_1 + kd_1 i, ke_1 + kf_1 i$$

Akan diperlihatkan bahwa V merupakan ruang vektor.

Aksioma 1

$$u + v = \ a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i \ + \ a_2 + b_2 i, c_2 + d_2 i, e_2 + f_2 i$$

$$= \ a_1 + a_2 + b_1 i + b_2 i, c_1 + c_2 + d_1 i + d_2 i, e_1 + e_2 + f_1 i + f_2 i \ \in V.$$

Aksioma 2

$$u + v = \ a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i \ + \ a_2 + b_2 i, c_2 + d_2 i, e_2 + f_2 i$$

$$= \ a_1 + a_2 + b_1 i + b_2 i, c_1 + c_2 + d_1 i + d_2 i, e_1 + e_2 + f_1 i + f_2 i$$

$$= \ a_2 + a_1 + b_2 i + b_1 i, c_2 + c_1 + d_2 i + d_1 i, e_2 + e_1 + f_2 i + f_1 i$$

$$= \ a_2 + b_2 i, c_2 + d_2 i, e_2 + f_2 i \ + \ a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i$$

$$= v + u$$

Aksioma 3

$$u + v \ + w = \ a_1 + a_2 + b_1 i + b_2 i, c_1 + c_2 + d_1 i + d_2 i, e_1 + e_2 + f_1 i + f_2 i \ + \ a_3 + b_3 i, c_3 + d_3 i, e_3 + f_3 i$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + b_1 i + b_2 i + b_3, c_1 + c_2 + c_3 + d_1 i + d_2 i + d_3 i, e_1 + e_2 + e_3 + f_1 i + f_2 i + f_3 i$$

$$= a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i \ + \ a_2 + b_2 i, c_2 + d_2 i, e_2 + f_2 i \ + $$
$$a_3 + b_3 i, c_3 + d_3 i, e_3 + f_3 i$$
$$= u + (v + w)$$

Aksioma 4

Terdapat $0 = \ 0{,}0{,}0 \ \in V$, sedemikian sehingga

$u + 0 = \ a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i \ + \ 0{,}0{,}0 \ = \ a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i \ = u$, untuk setiap $v_1 \in V$.

Aksioma 5

$$-1 \ u = -u = - \ a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i \ \in V$$

Terdapat $-v_1 \in V$, sedemikian sehingga

$u + \ -u \ = \ a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i \ + \ -a_1 - b_1 i, c_1 - d_1 i, e_1 - f_1 i \ = \ 0{,}0{,}0$, untuk setiap $v_1 \in V$.

Aksioma 6

$$k.u = k. \ a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i$$
$$= ka_1 + kb_1 i, kc_1 + kd_1 i, ke_1 + kf_1 i \ \in V.$$

Aksioma 7

$$k \ u + v \ = k \ \ a_1 + a_2 + b_1 i + b_2 i, c_1 + c_2 + d_1 i + d_2 i, e_1 + e_2 + f_1 i + f_2 i$$
$$= ka_1 + ka_2 + kb_1 i + kb_2 i, kc_1 + kc_2 + kd_1 i + kd_2 i, ke_1 + ke_2 + $$
$$kf_1 i + kf_2 i$$
$$= k \ a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i \ + k \ a_2 + b_2 i, c_2 + d_2 i, e_2 + f_2 i$$
$$= ku + kv$$

Aksioma 8

. $k + l \;\; u = \;\; k + l \quad a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i$

$= \;\; ka_1 + kb_1 i + la_1 + lb_1 i, kc_1 + kd_1 i + lc_1 + ld_1 i, ke_1 + kf_1 i + le_1 + lf_1 i$

$= k \;\; a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i \;\; + l \;\; a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i$

$= ku + lu$

Aksioma 9

$k.l \;\; u = \;\; k.l \quad a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i$

$= k \quad la_1 + lb_1 i, lc_1 + ld_1 i, le_1 + lf_1 i$

$= k(lu)$

Aksioma 10

$1. u = 1. \;\; a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i \;\; = \;\; a_1 + b_1 i, c_1 + d_1 i, e_1 + f_1 i \;\; \epsilon\, V.$

Karena memenuhi semua aksioma dari ruang vektor, maka himpunan $V = \{(x, y, z)|$dengan x, y, z adalah bilangan kompleks$\}$ adalah ruang vektor.

Definisi 2.2.2

Sebuah vektor w dinamakan *kombinasi linear* dari vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_r$ jika vektor tersebut dapat diungkapkan dalam bentuk $w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_r v_r$ di mana $k_1, k_2 \ldots k_r$ adalah skalar. (Anton, H; 1987: 145)

Definisi 2.2.3

Jika $v_1, v_2, \ldots, v_r$ adalah vektor-vektor pada ruang V dan jika masing-masing vektor pada V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear $v_1, v_2, \ldots, v_r$ maka vektor-vektor ini *merentang* V. (Anton, H; 1987: 146)

Contoh 2.2.2

Diketahui vektor-vektor $v_1 = \;\; i, 0,0 \;\;, v_2 = \;\; 3i, 2i, 0 \;\;, v_3 = (2i, i, 3i)$ di dalam $V = \{(x, y, z)|$dengan x, y, z adalah bilangan kompleks. Himpunan semua kombinasi linear v_1, v_2 dan v_3 disebut Rentang (v_1, v_2, v_3)

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = k_1 \;\; i, 0,0 \;\; + k_2 \;\; 3i, 2i, 0 \;\; + k_3(2i, i, 3i)$$

$$= \;\; ik_1, 0,0 \;\; + \;\; 3ik_2, 2ik_2, 0 \;\; + \;\; 2ik_3, ik_3, 3ik_3$$

$$= \;\; ik_1 + 3ik_2 + 2ik_2, 2ik_3 + ik_3 + 3ik_3$$

Dengan k_1, k_2, k_3 adalah skalar tertentu.

Untuk $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ diperoleh $\;\; 6i, 3i, 3i \;\;$ yang merupakan kombinasi linear dari $\;\; i, 0,0 \;\;$, $\;\; 3i, 2i, 0 \;\;$ dan $\;\; 2i, i, 3i \;\;$.

Definisi 2.2.4

Jika $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ adalah himpunan vektor maka persamaan vektor $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r = 0$ hanya mempunyai satu pemecahan $k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_r = 0$ maka S dinamakan *bebas linear (linearly independent).* Jika ada pemecahan lain, maka S kita namakan himpunan *tak bebas linear (linearly dependent)/ bergantung linear.* (Anton, H; 1987: 151)

Contoh 2.2.4

Dengan menggunakan contoh diatas akan diselidiki apakah $v_1 = \ i,0,0\ , v_2 = \ 3i,2i,0\ , v_3 = (2i,i,3i)$ bebas linear atau bergantung linear. Diambil k_1,k_2,k_3 sedimikian sehingga

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = k_1\ \ i,0,0\ \ + k_2\ \ 3i,2i,0\ \ + k_3(2i,i,3i)$$

$$= \ ik_1,0,0\ + \ 3ik_2,2ik_2,0\ + \ 2ik_3,ik_3,3ik_3$$

$$= \ 0,0,0\ \ \ldots(1)$$

Dari sini diperoleh sistem persamaan

$$ik_1 + 3ik_2 + 2ik_3 = 0 \ldots\ \ 2$$

$$2ik_2 + ik_3 = 0 \ldots(3)$$

$$3ik_3 = 0 \ldots(4)$$

Dengan melakukan substitusi terhadap persamaan (2), (3) dan (4) diperoleh $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Karena persamaan (1) hanya dipenuhi oleh $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, maka terbukti bahwa $v_1 = \ i,0,0\ , v_2 = \ 3i,2i,0\ , v_3 = (2i,i,3i)$ bebas linear.

2.3 MATRIKS

Definisi 2.3.1

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. (Anton, H; 1987: 22). Matriks adalah kumpulan bilangan berbentuk persegi panjang yang disusun menurut baris dan kolom. Bilangan-bilangan yang terdapat di suatu matriks disebut dengan elemen atau anggota matriks. Dengan representasi matriks, perhitungan dapat dilakukan dengan lebih terstruktur. Pemanfaatannya misalnya dalam menjelaskan persamaan linier, transformasi koordinat, dan lainnya. Matriks seperti halnya variabel biasa dapat dimanipulasi, seperti dikalikan, dijumlah, dikurangkan dan didekomposisi kan. (http://en.wikipedia.org/wiki/matriks_(matematic))

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Contoh 2.3.1

Matriks $A = \begin{matrix} i & 3 \\ 4 & 2+i \end{matrix}$ adalah matriks persegi berukuran 2×2.

Matriks $B = \begin{matrix} 3 & 2-i \\ 4i & 5 \\ 7 & 6+2i \end{matrix}$ adalah matriks yang berukuran 3×2.

Matriks $C = \begin{matrix} 1 & 2i & 3 \\ -2i & 4 & 5-i \\ 3 & 5+i & 8 \end{matrix}$ adalah matriks yang berukuran 3×3.

Definisi 2.3.2

Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pilih baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan. (Anton, H; 1987: 25)

Contoh 2.3.2

Diketahui matriks $A = \begin{matrix} 1+2i & 2+4i \\ 1 & 5i \end{matrix}$ dan $B = \begin{matrix} 3 & i \\ 2+i & 2+3i \end{matrix}$

Maka $A.B = \begin{matrix} 1+2i & 2+4i \\ 1 & 5i \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 3 & i \\ 2+i & 2+3i \end{matrix} = \begin{matrix} 3+16i & -10+15i \\ -2+10i & -15+11i \end{matrix}$

Definisi 2.3.3

Jika A adalah sebarang matriks $m \times n$, maka *transpos* A dinyatakan oleh A^t dan didefinisikan dengan matriks $n \times m$ yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari A, kolom keduanya adalah baris kedua dari A, demikian juga dengan kolom ketiga adalah baris ketiga dari A, dan seterusnya. (Anton, H; 1987: 27)

Contoh 2.3.3

Diketahui matriks $A = \begin{matrix} i & 3 \\ 4 & 2+i \end{matrix}$, $B = \begin{matrix} 3 & 2-i \\ 4i & 5 \\ 7 & 6+2i \end{matrix}$, $C = \begin{matrix} 1 & 2i & 3 \\ -2i & 4 & 5-i \\ 3 & 5+i & 8 \end{matrix}$.

Maka Transpos matriks dari $A^T = \begin{matrix} i & 4 \\ 3 & 2+i \end{matrix}$, $B^T = \begin{matrix} 3 & 4i & 7 \\ 2-i & 5 & 6+2i \end{matrix}$, $C^T =$

$$\begin{matrix} 1 & -2i & 3 \\ 2i & 4 & 5+i \\ 3 & 5-i & 8 \end{matrix}.$$

Definisi 2.3.4

Jika A adalah matriks dengan elemen bilangan kompleks, maka transpos konjugat dari A dinotasikan dengan A^* dan didefinisikan sebagai matriks hasil yang diperoleh dengan mengubah elemen-elemen yang bersesuaian dari A dengan konjugatnya, kemudian mengubah letak elemen-elemen dalam matriks, dari yang baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Jika $A = A^*$, maka matriks A merupakan matriks Hermitian. (Anton, H; 1987: 425)

Contoh 2.3.4

Diketahui matriks $A = \begin{matrix} i & 3 \\ 4 & 2+i \end{matrix}$, $B = \begin{matrix} 3 & 2-i \\ 4i & 5 \\ 7 & 6+2i \end{matrix}$, $C = \begin{matrix} 1 & 2i & 3 \\ -2i & 4 & 5-i \\ 3 & 5+i & 8 \end{matrix}$

Maka $A^* = \begin{matrix} -i & 4 \\ 3 & 2-i \end{matrix}$, $B^* = \begin{matrix} 3 & -4i & 7 \\ 2+i & 5 & 6-2i \end{matrix}$, $C^* = \begin{matrix} 1 & 2i & 3 \\ -2i & 4 & 5-i \\ 3 & 5+i & 8 \end{matrix}$.

Dari sini dapat terlihat matriks A dan B tidak sama dengan tranpos konjugatnya, sedangkan $C = C^*$. Oleh karena itu, A dan B bukan merupakan matriks Hermitian dan C adalah matriks Hermitian.

Definisi 2.3.5

Matriks bujur sangkar A dengan unsur kompleks dinamakan Uniter jika $A^{-1} = A^*$. (Anton, H; 1987: 426).

Contoh 2.3.5

Diketahui $A = \begin{matrix} \frac{1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{matrix}$, maka $A^* = \begin{matrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{matrix}$

$$AA^* = \begin{matrix} \frac{1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{matrix} \begin{matrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{matrix} \begin{matrix} \frac{1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{matrix} = A^* A$$

Karena $AA^* = I = A^* A$ maka matriks A merupakan matriks Uniter.

Definisi 2.3.6

Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, dimana A disebut *dapat dibalik* (*invertible*) dan B disebut sebagai invers (*inverse*) dari A. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai *matriks singular* (Anton & Rosses, 2004: 46).

Contoh 2.3.6

Diketahui matriks $A = \begin{matrix} i & 3 \\ 4 & 2+i \end{matrix}$ dan $B = A^{-1} = \begin{matrix} -2+i & 3 \\ 2 & -2-i \end{matrix}$

Di mana $B.A = \begin{matrix} -2+i & 3 \\ 2 & -2-i \end{matrix} . \begin{matrix} i & 3 \\ 4 & 2+i \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = I$

Dan $A.B = \begin{matrix} i & 3 \\ 4 & 2+i \end{matrix} . \begin{matrix} -2+i & 3 \\ 2 & -2-i \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = I.$

Definisi 2.3.7

Dimensi umum dari ruang baris dan ruang kolom dari suatu matriks A disebut ***rank*** dari A dan dinyatakan sebagai $rank(A)$; dimensi ruang nul dari A disebut sebagai ***nulitas*** (*nullity*) dari A dan dinyatakan sebagai $nulitas\ A$ (Anton & Rosses.2004: 294).

Contoh 2.3.7

Diketahui $A = \begin{matrix} i & i \\ 2 & 2 \end{matrix}$

Akan dicari rank dari matriks A, dengan $\begin{matrix} i & i \\ 2 & 2 \end{matrix}\ b_2 {\sim} b_1\ \frac{2}{i}\ \begin{matrix} i & i \\ 0 & 0 \end{matrix}$

Karena jumlah maksimal baris dari matriks A yang bebas linear adalah 1, maka $rank\ A\ = 1$.

Definisi 2.3.8

Misalkan A adalah matriks berukuran $n\, x\, n$. Diagonal parsial dari matriks A didefiniskan sebagai himpunan n elemen yang terletak pada baris dan kolom yang berbeda.

Contoh 2.3.8

Diketahui $A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$. Diagonal parsial dari matriks A tersebut adalah

a_{11}, a_{22}, a_{33} , a_{12}, a_{23}, a_{31} , a_{13}, a_{23}, a_{32} , a_{13}, a_{22}, a_{31} dan yang lain.

Definisi 2.3.9

Misalkan A adalah matriks berukuran $n\,x\,n$. Term rank dari matriks A didefinisikan sebagai jumlah maksimal dari elemen tak nol pada diagonal parsial matriks A dan dinotasikan dengan term rank(A).

Contoh 2.3.9

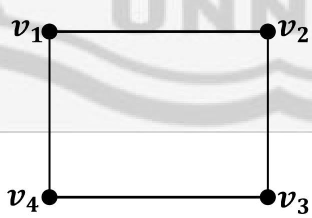
Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2+i & 2 \\ 4 & 3+i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 6i \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Term rank $A\ = 2$ dan term rank $B\ = 1$.

2.4 Graf

Definisi 2.4.1

Graf adalah pasangan himpunan V, E dengan V adalah himpunan tak kosong dari titik dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik (bisa berupa himpunan kosong). Graf biasanya dinotasikan dengan G. (Sutarno, Heri, dkk, 2003: 59)

Contoh 2.4.1



Gambar 2.4.1 Graf G

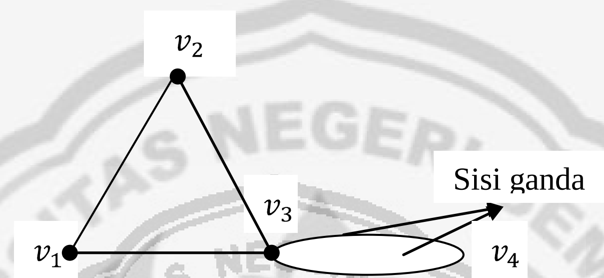
Graf G tersebut memiliki

$V = \ v_1, v_2, v_3, v_4$ dan $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}\}$.

Definisi 2.4.2

Dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama dinamakan dengan sisi ganda. (Sutarno, Heri, dkk, 2003: 60)

Contoh 2.4.2

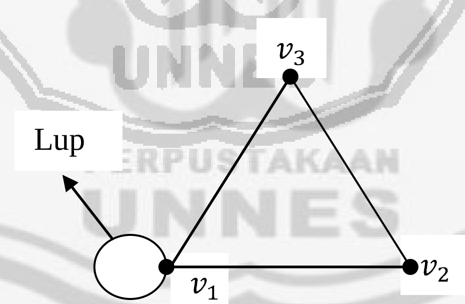


Gambar 2.4.2. Graf yang memiliki sisi ganda

Definisi 2.4.3

Sebuah sisi yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri dinamakan dengan lup (simpul). (Sutarno, Heri, dkk, 2003: 60)

Contoh 2.4.3

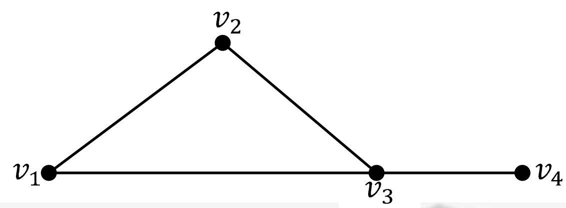


Gambar 2.4.3. Graf yang memiliki lup

Definisi 2.4.3

Graf tanpa lup dan sisi ganda dinamakan dengan graf sederhana, sebaliknya graf yang memiliki lup atau sisi ganda dinamakan graf tidak sederhana.

Contoh 2.4.3

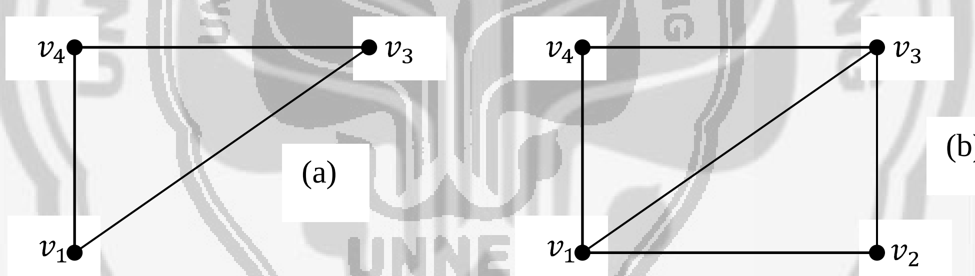


Gambar 2.4.4. Graf sederhana

Definisi 2.4.4

Misalkan G adalah suatu graf yang memiliki himpunan titik V dan daftar sisi E. Subgraf dari graf G adalah graf yang semua titiknya merupakan elemen dari V dan semua sisinya merupakan elemen dari E.

Contoh 2.4.4

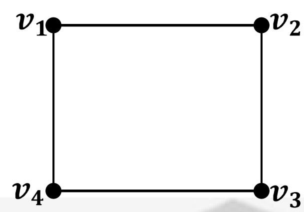


Gambar 2.4.5. (a) subgraf G (b) graf G

Definisi 2.4.5

Misalkan G adalah graf dan v_1, v_2 adalah titik-titik dari graf G. Jika v_1 dan v_2 dihubungkan dengan sisi e, maka v_1 dan v_2 dikatakan berdekatan (*adjacent*). Dikatakan juga, bahwa v_1 dan v_2 insiden dengan sisi e serta sisi e juga dikatakan insiden dengan titik v_1 dan v_2.

Contoh 2.4.5



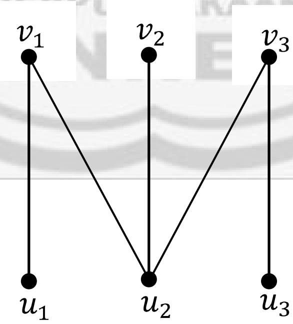
Gambar 2.4.6. Graf G

Pada gambar 2.4.5, titik v_1 berdekatan dengan v_2 dan v_4, tapi tidak berdekatan dengan v_3. Kemudian sisi $\{v_1, v_2\}$ insiden dengan titik v_1 dan v_2, tapi tidak insiden dengan v_3 dan v_4.

Definisi 2.4.6

Graf bipartite adalah graf yang memiliki himpunan titik yang dapat dikomposisikan ke dalam dua himpunan yang saling terpisah, sehingga tidak terdapat titik yang berada di dalam himpunan titik yang sama saling bedekatan (*adjacent).* Graf bipartite dinotasikan dengan B.

Contoh 2.4.6



Gambar 2.4.7. Graf B

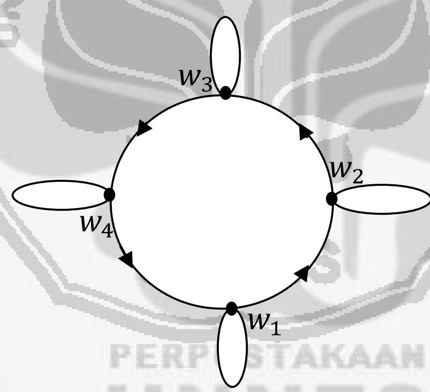
Pada contoh di atas graf B adalah graf bipartite dengan dua himpunan titik, yaitu $U = \ u_1, u_2, u_3$ dan $V = \ v_1, v_2, v_3$. Titik yang berada dalam satu himpunan tidak ada yang berdekatan.

Definisi 2.4.7

Digraf adalah grafik yang terdiri dari titik dan busur, di mana busur tersebut menghubungkan titik satu ke titik yang lainnya dan memiliki arah. Digraf biasanya dinotasikan dengan D.

Misalkan D adalah digraf, himpunan titik dari digraf biasanya dinotasikan dengan V. Sedangkan daftar busur biasanya dinotasikan dengan $\mathcal{A}$.

Contoh 2.4.7



Gambar 2.4.8. Digraf *D*

Pada contoh di atas digraph *D* memiliki himpunan titik

$W = \ w_1, w_2, w_3, w_4$ dan himpunan busurnya adalah

$\mathcal{A} \ \ w_1, w_1 \ , \ w_2, w_2 \ , \ w_3, w_3 \ , \ w_4, w_4 \ , \ w_1, w_2 \ , \ w_2, w_3 \ , \ w_3, w_4 \ , \ w_4, w_1$.

BAB 3

METODE PENELITIAN

Peranan metode dalam suatu penelitian sangatlah penting sehingga dengan metode penelitian dapat mencapai tujuan penelitian yang telah ditetapkan. Melalui metode penelitian, masalah yang dihadapi dapat diatasi dan dipecahkan dari perolehan data atau informasi yang telah dikumpulkan.

Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini meliputi beberapa hal yaitu sebagai berikut:

3.1 Penemuan Masalah

Metode ini merupakan tahapan pertama dalam penelitian yaitu dengan pencarian ide atau gagasan materi dari bidang kajian yang dipilih dan dijadikan permasalahan untuk dikaji pada penelitian ini.

Dalam aljabar elementer konsep invers hanya dibatasi sampai pada matriks persegi non singular. Jika A matriks persegi non singular maka terdapat matriks X sedemikian sehingga $AX = XA = I$. Matriks X yang bersifat demikian disebut invers dari matriks A. Jika A matriks berukuran $m \times n$ atau A matriks singular maka tidak selalu terdapat matriks X yang bersifat demikian. Berdasarkan pernyataan tersebut peneliti menemukan masalah yang akan dipecahkan dalam penelitian ini yaitu tentang invers dari matriks A berukuran $m \times n$ yang selanjutnya disebut matriks invers tergeneralisir yang bersifat khusus yang disebut Invers Moore – Penrose, dengan membatasinya pada matriks kompleks sejati dan mengenai Invers Moore – Penrose matriks bebas dengan membatasinya pada matriks A berukuran $n \times n$.

3.2 Perumusan Masalah

Tahap ini di maksudkan untuk memperjelas permasalahan yang telah ditemukan yaitu dengan merumuskannya sebagai berikut.

Berdasarkan masalah yang telah ditemukan, peneliti merumuskan masalah sebagai berikut :

5. Bagaimana sifat-sifat Invers Moore – Penrose matriks kompleks?
6. Bagaimana metode dalam mencari Invers Moore – Penrose matriks kompleks?
7. Apakah Invers Moore - Penrose dari matriks bebas juga merupakan matriks bebas?
8. Syarat apa saja yang harus dipenuhi agar Invers Moore - Penrose dari matriks bebas juga merupakan matriks bebas?

3.3 Studi Pustaka

Studi pustaka merupakan penelaah sumber pustaka relevan yang digunakan untuk mengumpulkan data maupun informasi yang diperlukan dalam penelitian ini. Studi pustaka diawali dengan mengumpulkan sumber pustaka yaitu berupa buku-

buku maupun referensi yang menjadi dasar dalam penelitian ini. Setelah sumber pustaka terkumpul dilanjutkan dengan penelaahan isi sumber pustaka tersebut. Pada akhirnya sumber pustaka ini dijadikan landasan untuk melakukan penelitian ini.

Dalam penelitian ini pokok bahasan yang ditelaah adalah bilangan kompleks, ruang vektor, matriks, dan graf. Hasil telaah akan menjadi landasan untuk memecahkan masalah.

3.4 Analisis Pemecahan Masalah

Pada tahap ini dilakukan analisa dan pemecahan masalah yaitu dengan langkah-langkah sebagai berikut.

5. Mengkaji sifat-sifat Invers Moore – Penrose matriks kompleks.
6. Mengkaji metode dalam mencari Invers Moore – Penrose matriks kompleks.
7. Mengkaji apakah Invers Moore - Penrose dari matriks bebas juga merupakan matriks bebas.
8. Mengkaji syarat apa saja yang harus dipenuhi agar Invers Moore - Penrose dari matriks bebas juga merupakan matriks bebas.

3.5 Penarikan Simpulan

Sebagai akhir dari penelitian ini, dilakukan penarikan simpulan mengenai sifat-sifat Invers Moore – Penrose matriks kompleks, metode dalam mencari Invers Moore

– Penrose matriks kompleks, apakah Invers Moore - Penrose dari matriks bebas juga merupakan matriks bebas, dan syarat apa saja yang harus dipenuhi agar Invers Moore - Penrose dari matriks bebas juga merupakan matriks bebas.

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada skripsi sebelumnya telah dijelaskan mengenai matriks invers tergeneralisir dan matriks invers tergeralisir Moore Penrose, dan hubungan matriks invers tergeralisir dengan matriks tergeralisir Moore Penrose. Pada skripsi ini penulis tertarik untuk melanjutkan skripsi sebelumnya dengan membahas lebih lanjut mengenai Invers Moore - Penrose pada matriks bebas dengan membatasinya pada matriks A berukuran $n \times n$.

Invers Moore - Penrose merupakan salah satu jenis invers matriks yang biasanya disimbolkan dengan A^{+}. Dalam skripsi ini penulis tertarik untuk menentukan Invers Moore - Penrose dari suatu matriks kompleks dengan melihat *rank*nya, kemudian akan dilanjutnya mengenai matriks bebas, dan menentukan Invers Moore - Penrose matriks bebas.

4.1 Invers Moore - Penrose

Definisi 4.1.1

Diberikan matriks A berukuran $(m\ x\ n)$. Matriks A^{+} merupakan Invers Moore - Penrose dari matriks A jika memenuhi

1. $AA^{+}A = A$
2. $A^{+}AA^{+} = A^{+}$

3. $(AA^+)^* = AA^+$ $\qquad$ (AA^+ hermitian)

4. $(A^+A)^* = A^+A$ $\qquad$ (A^+A hermitian)

Dengan A^* merupakan transpose konjugat dari matriks A.

Contoh 4.1.1

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 2+4i \\ 2i & 4i \end{pmatrix}$, akan dibuktikan bahwa $A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{45} & \frac{-2i}{45} \\ \frac{2-4i}{45} & \frac{-4i}{45} \end{pmatrix}$

merupakan Invers Moore - Penrose dari matriks A.

Bukti

Matriks A merupakan Invers Moore - Penrose dari matriks A jika memenuhi

1. $AA^+A = \begin{pmatrix} 1+2i & 2+4i \\ 2i & 4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{45} & \frac{-2i}{45} \\ \frac{2-4i}{45} & \frac{-4i}{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2i & 2+4i \\ 2i & 4i \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1+2i & 2+4i \\ 2i & 4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{45} & \frac{18}{45} \\ \frac{18}{45} & \frac{36}{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2i & 2+4i \\ 2i & 4i \end{pmatrix} = A$$

Jadi $AA^+A = A$

2. $A^+AA^+ = \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{45} & \frac{-2i}{45} \\ \frac{2-4i}{45} & \frac{-4i}{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2i & 2+4i \\ 2i & 4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{45} & \frac{-2i}{45} \\ \frac{2-4i}{45} & \frac{-4i}{45} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{45} & \frac{-2i}{45} \\ \frac{2-4i}{45} & \frac{-4i}{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{25}{45} & \frac{20-10i}{45} \\ \frac{20+10i}{45} & \frac{20}{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{45} & \frac{-2i}{45} \\ \frac{2-4i}{45} & \frac{-4i}{45} \end{pmatrix} = A^+$$

Jadi $A^+AA^+ = A^+$

3. $(AA^+)^* = \left(\begin{pmatrix} 1+2i & 2+4i \\ 2i & 4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{45} & \frac{-2i}{45} \\ \frac{2-4i}{45} & \frac{-4i}{45} \end{pmatrix} \right)^* = \begin{pmatrix} \frac{25}{45} & \frac{20-10i}{45} \\ \frac{20+10i}{45} & \frac{20}{45} \end{pmatrix}^*$

$$= \begin{pmatrix} \frac{25}{45} & \frac{20-10i}{45} \\ \frac{20+10i}{45} & \frac{20}{45} \end{pmatrix} = AA^+$$

Jadi $(AA^+)^* = AA^+$

4. $(A^+A)^* = \left(\begin{pmatrix} \frac{1-2i}{45} & \frac{-2i}{45} \\ \frac{2-4i}{45} & \frac{-4i}{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2i & 2+4i \\ 2i & 4i \end{pmatrix} \right)^* = \begin{pmatrix} \frac{9}{45} & \frac{18}{45} \\ \frac{18}{45} & \frac{36}{45} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \frac{9}{45} & \frac{18}{45} \\ \frac{18}{45} & \frac{36}{45} \end{pmatrix} = A^+A$

Jadi $(A^+A)^* = A^+A$

Karena $A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{45} & \frac{-2i}{45} \\ \frac{2-4i}{45} & \frac{-4i}{45} \end{pmatrix}$ memenuhi ke-4 definisi di atas jadi $A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{45} & \frac{-2i}{45} \\ \frac{2-4i}{45} & \frac{-4i}{45} \end{pmatrix}$ merupakan Invers Moore - Penrose dari $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 2+4i \\ 2i & 4i \end{pmatrix}$.

Contoh 4.1.2

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2i & 3 & i \\ 2 & 3i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, akan dibuktikan bahwa $A^+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}i & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}i & 0 \\ -\frac{1}{10}i & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$ merupakan Invers Moore - Penrose dari matriks A.

Bukti

1. $AA^+A = \begin{pmatrix} 2i & 3 & i \\ 2 & 3i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}i & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}i & 0 \\ -\frac{1}{10}i & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 3 & i \\ 2 & 3i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2i & 3 & i \\ 2 & 3i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{10} & 0 & \frac{2}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 3 & i \\ 2 & 3i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Jadi $AA^{+}A = A$

2. $$A^{+}AA^{+} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}i & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}i & 0 \\ -\frac{1}{10}i & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 3 & i \\ 2 & 3i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}i & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}i & 0 \\ -\frac{1}{10}i & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}i & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}i & 0 \\ -\frac{1}{10}i & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}i & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}i & 0 \\ -\frac{1}{10}i & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} = A^{+}$$

Jadi $A^{+}AA^{+} = A^{+}$

3. $$(AA^{+})^{*} = \left(\begin{pmatrix} 2i & 3 & i \\ 2 & 3i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}i & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}i & 0 \\ -\frac{1}{10}i & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \right)^{*} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^{*}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = AA^{+}$$

Jadi $(AA^{+})^{*} = AA^{+}$

4. $$(A^{+}A)^{*} = \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{5}i & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}i & 0 \\ -\frac{1}{10}i & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 3 & i \\ 2 & 3i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{*}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^+A$$

Jadi $(A^+A)^* = A^+A$

Karena $A^+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}i & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}i & 0 \\ -\frac{1}{10}i & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$ memenuhi ke-4 definisi di atas jadi $A^+ =$ $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5}i & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}i & 0 \\ -\frac{1}{10}i & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$ merupakan Invers Moore - Penrose dari $A = \begin{pmatrix} 2i & 3 & i \\ 2 & 3i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Seperti telah dijelaskan sebelumnya, Invers Moore – Penrose ini merupakan salah satu jenis invers semu yang bisa digunakan untuk mencari invers matriks A yang tidak bujur sangkar maupun singular yang mempunyai determinan 0. Menurut definisi Invers Moore – Penrose salah satu syaratnya adalah jika A^*A atau AA^* Hermitian. Hal ini bisa dipenuhi apabila matriks yang digunakan adalah matriks kompleks yang sejati. Jadi Invers Moore – Penrose ini hanya bisa digunakan apabila matriks A mempunyai entri bilangan kompleks sejati.

4.2 Sifat – Sifat Invers Moore - Penrose

Jika A adalah sebuah matriks, maka Invers Moore - Penrose dari A memiliki beberapa sifat, yakni

1. Jika A adalah matriks persegi yang *non-singular*, maka Invers Moore - Penrose dari A adalah A^{+}. Dengan kata lain $A^{+} = A^{-1}$.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa $A^{+} = A^{-1}$ memenuhi ke-4 kriteria

1. $AA^{+}A = AA^{-1}A = IA = A$

2. $A^{+}AA^{+} = A^{-1}AA^{-1} = IA^{-1} = A^{-1} = A^{+}$

3. $(AA^{+})^{*} = (AA^{-1})^{*} = \mathrm{I}^{*} = AA^{-1} = AA^{+}$

4. $(A^{+}A)^{*} = (A^{-1}A)^{*} = \mathrm{I}^{*} = A^{-1}A = A^{+}A$

Karena memenuhi keempat kriteria dari Invers Moore - Penrose, maka terbukti bahwa $A^{+} = A^{-1}$.

2. Invers Moore - Penrose bersifat *reversible.* Dalam pengertian bahwa Invers Moore - Penrose juga memiliki invers, yakni $(A^{+})^{+} = A$.

Bukti

Misalkan $B = A^{+}$, akan ditunjukan bahwa $B^{+} = A$ memenuhi ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose

1. $BB^{+}B = A^{+}AA^{+} = A^{+} = B$

2. $B^{+}BB^{+} = AA^{+}A = A = B^{+}$

3. $(BB^{+})^{*} = (A^{+}A)^{*} = A^{+}A = BB^{+}$

4. $(B^{+}B)^{*} = (AA^{+})^{*} = AA^{+} = B^{+}B$

Karena memenuhi ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose, maka terbukti bahwa $B^{+} = A$.

3. Invers Moore - Penrose dari matriks nol adalah matriks transposnya sendiri.

Bukti

Misalkan $A = O$ (merupakan matriks nol yang berukuran $m\,x\,m$), akan dibuktikan $A^+ = O^T$ (merupakan Invers Moore - Penrose dari matriks A yang juga merupakan matriks nol yang berukuran $m\,x\,m$) memenuhi ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose

1. $AA^+A = OO^TO = O = A$.

   Hasil perkalian antara matriks O yang berukuran $m\,x\,m$ dengan matriks O^T yang berukuran $m\,x\,m$ (matriks tersebut dimisalkan dengan O_1). Kemudian hasil perkalian O_1 yang berukuran $m\,x\,m$ dengan matriks O yang berukuran $m\,x\,m$ akan menghasilkan matriks nol yang berukuran $m\,x\,m$. Dengan kata lain matriks hasil yang terakhir tersebut adalah matriks O.

2. $A^+AA^+ = O^TOO^T = O^T = A^+$.

   Hasil perkalian antara matriks O^T yang berukuran $m\,x\,m$ dengan matriks O yang berukuran $m\,xm$ (matriks tersebut dimisalkan dengan O_2). Kemudian hasil perkalian O_2 yang berukuran $m\,x\,m$ dengan matriks O^T yang berukuran $m\,x\,m$ akan menghasilkan matriks nol yang berukuran $m\,x\,m$. Dengan kata lain matriks hasil yang terakhir tersebut adalah matriks O^T.

3. $AA^{+}\ {}^{*} = OO^{T}\ {}^{*} = OO^T = AA^+$.

Bahwa hasil perkalian dari matriks OO^T merupakan matriks nol yang berukuran $m\ x\ m$ (matriks persegi). Dan matriks *Hermitian* dari matriks nol yang berupa matriks persegi adalah dirinya sendiri.

4. $A^+A\ ^* = \ O^TO\ ^* = O^TO = A^+A.$

Bahwa hasil perkalian dari matriks O^TO merupakan matriks nol yang berukuran $m\ x\ m$ (matriks persegi). Dan matriks *Hermitian* dari matriks nol yang berupa matriks persegi adalah dirinya sendiri.

Karena memenuhi ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose, maka terbukti bahwa $O^+ = O^T$.

4.Perkalian dengan skalar terhadap matriks A adalah berbanding terbalik terhadap perkalian skalar dengan A^+. Dengan kata lain $kA\ ^+ = k^{-1}A^+$.

Bukti

Misalkan $P = kA$. Akan ditunjukan bahwa $P^+ = k^{-1}A^+$ memenuhi ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose

1. $PP^+P = kAk^{-1}A^+kA = kk^{-1}kAA^+A = IkA = kA = P$
2. $P^+PP^+ = k^{-1}A^+kAk^{-1}A^+ = k^{-1}kk^{-1}A^+AA^+ = Ik^{-1}A^+ = P^+$
3. $PP^+\ ^* = \ kAk^{-1}A^+\ ^* = \ kk^{-1}AA^+\ ^* = \ AA^+\ ^* = AA^+ = IAA^+ =$

   $kk^{-1}AA^+ = kAk^{-1}A^+ = PP^+$
4. $P^+P\ ^* = \ k^{-1}A^+kA\ ^* = \ k^{-1}kA^+A\ ^* = \ AA^+\ ^* = AA^+ = IAA^+ =$

   $k^{-1}kA^+A = k^{-1}A^+kA = P^+P$

Karena memenuhi ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose, maka terbukti bahwa $\alpha A\ ^{+} = \alpha^{-1}A^{+}$.

5. Invers Moore - Penrose dari suatu matriks adalah tunggal.

Bukti

Misal ${A_1}^{+}$ dan ${A_2}^{+}$, masing-masing adalah Invers Moore - Penrose dari matriks A.

Akan dibuktikan bahwa ${A_1}^{+} = {A_2}^{+}$

${A_1}^{+} = {A_1}^{+}A{A_1}^{+}$

$= A^{*}\ {A_1}^{+\ *}{A_1}^{+}$

$= \ A{A_2}^{+}A\ ^{*}\ {A_1}^{+\ *}{A_1}^{+}$

$= \ A^{*}({A_2}^{+})\ ^{*}(A^{*}\ {A_1}^{+\ \ *}){A_1}^{+}$

$= {A_2}^{+}A{A_1}^{+}A{A_1}^{+}$

$= {A_2}^{+}A{A_1}^{+}$ …………………………….. (i)

${A_2}^{+} = {A_2}^{+}A{A_2}^{+}$

$= {A_2}^{+}\ {A_2}^{+\ \ *}A^{*}$

$= {A_2}^{+}\ {A_2}^{+\ \ *}\ A{A_1}^{+}A\ ^{*}$

$= {A_2}^{+}\ ({A_2}^{+})A^{*\ \ *}(\ {A_1}^{+\ \ *}A^{*})$

$= {A_2}^{+}A{A_2}^{+}A{A_1}^{+}$

$= {A_2}^{+}A{A_1}^{+}$ …………………………….. (ii)

Dari (i) dan (ii) terlihat bahwa ${A_1}^{+} = {A_2}^{+}$. Jadi terbukti bahwa Invers Moore - Penrose bersifat tunggal.

6. Pada Invers Moore - Penrose berlaku $A^{*}\ {}^{+} = \ A^{+}\ {}^{*}$.

Bukti

Misalkan $B = A$, akan ditunjukkan bahwa $B^{+} = \ A^{+}\ {}^{*}$ memenuhi ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose

1. $BB^{+}B = A^{*}\ A^{+}\ {}^{*}A^{*} = \ AA^{+}A\ {}^{*} = A^{*} = B$

2. $B^{+}BB^{+} = \ A^{+}\ {}^{*}A^{*}\ A^{+}\ {}^{*} = \ A^{+}AA^{+}\ {}^{*} = A = \ B^{+}$

3. $B\ B^{+}\ = \ A^{*}\ A^{+}\ {}^{*}\ {}^{*} = A^{+}A = \ A^{+}A\ {}^{*} = A^{*}\ A^{+}\ {}^{*} = B\ B^{+}$

4. $B^{+}B\ = \ A^{+}\ {}^{*}A^{*}\ {}^{*} = AA^{+} = \ AA^{+}\ {}^{*} = \ A^{+}\ {}^{*}A^{*} = B^{+}B$

Karena memenuhi ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose, maka terbukti bahwa $A^{*}\ {}^{+} = \ A^{+}\ {}^{*}$.

4.3 Metode Untuk Mencari Invers Moore - Penrose

Misalkan A adalah suatu matriks yang berukuran $m\ x\ n$. Langkah awal dalam mencari Invers Moore - Penrose dari matriks A adalah menentukan rank matriks A dan dimisalkan dengan r. Selanjutnya, terdapat dua metode untuk menentukan Invers Moore - Penrose dari matriks A, yakni

4.3.1 Metode 1

Pada metode pertama ini dipergunakan untuk mencari Invers Moore - Penrose dari suatu matriks A yang *tidak full rank*. Adapun langkah-langkah untuk mencari Invers Moore - Penrose dari matriks tersebut, yakni

Langkah 1 Memilih submatriks dari matriks A yang berukuran $r\ x\ r$ dan memiliki rank r. Kemudian submatriks tersebut dimisalkan dengan A_{11}.

Langkah 2 Menempatkan submatriks A_{11} di bagian kiri atas dari matriks A semula dengan melalui penukaran baris-baris dan kolom-kolom.

Langkah 3 Mengambil matriks satuan I_m (matriks identitas yang berukuran $m\ x\ m$).

Misalkan dalam langkah 2 diperoleh dengan menukarkan elemen-elemen pada baris ke-i dengan elemen-elemen pada baris ke-j, maka kita dapat membentuk matriks P yang diperoleh dari matriks I_m, dengan menukarkan elemen-elemen pada baris ke-i dengan elemen-elemen pada baris ke-*j*.

Kemudian mengambil matriks satuan I_n (matriks identitas yang berukuran $n\ x\ n$).

Misalkan dalam langkah 2 diperoleh dengan menukarkan elemen-elemen pada kolom ke-k dengan elemen-elemen pada kolom ke-*l*, maka kita dapat membentuk matriks Q yang diperoleh dari matriks I_n, dengan menukarkan elemen-elemen pada kolom ke-k dengan elemen-elemen ke-*l*.

Langkah 4 Menghitung

$$PAQ = \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}$$

Matriks A_{11} merupakan submatriks yang diperoleh dari langkah 2 dan matriks A_{12}, A_{21}, A_{22} merupakan matriks-matriks bagian yang diperoleh setelah langkah 2.

Langkah 5 Mengambil

$$B = \begin{matrix} A_{11} \\ A_{21} \end{matrix}, = A_{11}{}^{-1}. A_{12}, C = \begin{matrix} I_r & F \end{matrix}$$

Dengan matriks I_r merupakan matriks satuan yang berukuran $r \; x \; r$.

Langkah 6 Dan diperoleh A^+ dengan menggunakan rumus

$$A^+ = QC^* \left(CC^*\right)^{-1} \left(B^*B\right)^{-1} B^*P$$

Akan dibuktikan bahwa $A^+ = QC^* \left(CC^*\right)^{-1} \left(B^*B\right)^{-1} B^*P$ memenuhi ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose.

Bukti

Melalui langkah-langkah dari metode 1 tersebut dapat dikatakan bahwa PAQ merupakan hasil kali dari BC, selama B^*B dan CC^* invertibel, maka

$$PAQ = \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}$$

Oleh karena $n - r$ kolom terakhir pada PAQ merupakan kombinasi linear dari r kolom pertama dari PAQ, maka terdapat matriks F sehingga $A_{12} = A_{11}F$ dan $A_{22} = A_{21}F$.

Karena submatriks A_{11} berukuran $r \; x \; r$ dengan rank r, maka A_{11} invertibel. Oleh karena itu diperoleh $F = A_{11}{}^{-1}A_{12}$ dan $A_{22}A_{11}{}^{-1}A_{12}$.

Sedemikian sehingga

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} I_r & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = PAQ$$

Karena P dan Q diperoleh dari matriks identitas yang mengalami operasi elementer baris dan kolom, maka P dan Q invertibel, sehingga diperoleh

$$PAQ = BC$$

$$A = P^{-1}BCQ^{-1}$$

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $A^{+} = QC^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}P$ merupakan Invers Moore - Penrose dari $A = P^{-1}BCQ^{-1}$ yang memenuhi kriteria dari Invers Moore - Penrose.

1. $AA^{+}A = (P^{-1}BCQ^{-1})(QC^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}P)(P^{-1}BCQ^{-1})$

   $AA^{+}A = P^{-1}BCQ^{-1} = A$

2. $A^{+}AA^{+} = (QC^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}P)(P^{-1}BCQ^{-1})(QC^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}P)$

   $A^{+}AA^{+} = QC^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}P = A^{+}$

3. $(AA^{+})^{*} = \left(P^{-1}BCQ^{-1}\left(QC^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}P\right)\right)^{*}$

   $(AA^{+})^{*} = \left(QC^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}P\right)^{*}(P^{-1}BCQ^{-1})^{*}$

   $(AA^{+})^{*} = \left((B^{*}B)^{-1}(B^{*}P)\right)^{*}\left(QC^{*}(CC^{*})^{-1}\right)^{*}\left(P^{-1}B(CQ^{-1})\right)^{*}$

   $(AA^{+})^{*} = (B^{*}P)^{*}((B^{*}B)^{-1})^{*}((CC^{*})^{-1})^{*}(QC^{*})^{*}(CQ^{-1})^{*}(P^{-1}B)^{*}$

   $(AA^{+})^{*} = P^{*}B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}CQ^{*}Q^{-1}C^{*}B^{*}P^{-1*}$

   $(AA^{+})^{*} = P^{*}B(B^{*}B)^{-1}B^{*}P^{-1*}$

   $(AA^{+})^{*} = P^{-1}B(B^{*}B)^{-1}B^{*}P = AA^{+}$.

4. $(A^{+}A)^{*} = \left(\left(QC^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}P\right)\left(P^{-1}BCQ^{-1}\right)\right)^{*}$

$$(A^{+}A)^{*} = \left(P^{-1}BCQ^{-1}\right)^{*}\left(QC^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}P\right)^{*}$$

$$(A^{+}A)^{*} = \left((P^{-1}B)(CQ^{-1})\right)^{*}\left((B^{*}B)^{-1}(B^{*}P)\right)^{*}\left(QC^{*}(CC^{*})^{-1}\right)^{*}$$

$$(A^{+}A)^{*} = Q^{-1*}C^{*}P^{*}P^{-1*}P^{*}B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}CQ^{*}$$

$$(A^{+}A)^{*} = Q^{-1*}C^{*}(CC^{*})^{-1}CQ^{*}$$

$$(A^{+}A)^{*} = QC^{*}(CC^{*})^{-1}CQ^{-1} = A^{+}A.$$

Karena A^{+} memenuhi ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose, sehingga Invers Moore - Penrose dari $A = P^{-1}BCQ^{-1}$ adalah

$A^{+} = QC^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}P.$

Contoh 4.4.1

Pada Contoh 4.1.2 diketahui $A = \begin{pmatrix} 2i & 3 & i \\ 2 & 3i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Akan dicari Invers Moore - Penrose dari matriks tersebut.

Langkah awal adalah mencari rank dari matriks A. Karena elemen-elemen pada baris 1 dan baris 2 dari matriks A membentuk himpunan vektor yang tidak bebas linear, maka rank $(A) = 1 = r$ (tidak *full rank*). Sehingga metode yang dipergunakan untuk mencari Invers Moore - Penrose dari matriks tersebut adalah metode 1.

Langkah 1 Mengambil $A_{11} = \begin{pmatrix} 2i & 3 \\ 2 & 3i \end{pmatrix}$.

Langkah 2 Karena pada langkah 1 mengambil submatriks A_{11} yang sudah terletak pada kiri atas dari matriks A semula, maka tidak perlu melakukan penukaran elemen-elemen baris atau kolom.

Langkah 3 Mengambil matriks satuan $I_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = P = Q.$

Langkah 4 Menghitung $PAQ = A = \begin{pmatrix}2i&3&i\\2&3i&1\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}.$

Langkah 5 Mengambil $B = \begin{pmatrix}A_{11}\\A_{21}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2i&3\\2&3i\\0&0\end{pmatrix}, B^* = \begin{pmatrix}-2i&2&0\\3&-3i&0\end{pmatrix}$

Kemudian mencari $(B^*B)^{-1} = \begin{pmatrix}8&0\\0&18\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{8}&0\\0&\frac{1}{18}\end{pmatrix}.$

$$F = A_{11}^{-1}.A_{12} = \begin{pmatrix}2i&3\\2&3i\end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}i&\frac{1}{4}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}i\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$$

$$C = (I_r \ \ F) = \begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}, C^* = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

Kemudian mencari $(CC^*)^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{5}{4}&0\\0&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}&0\\0&1\end{pmatrix}$

Langkah 6 Dan diperoleh A^+ dengan menggunakan rumus

$$A^+ = QC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*P$$

$$A^+ = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&0\\0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\frac{1}{8}&0\\0&\frac{1}{18}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2i&2&0\\3&-3i&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^+ = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}&0\\0&1\\\frac{2}{5}&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}i&\frac{1}{4}&0\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}i&0\end{pmatrix}$$

$$A^{+} = \begin{matrix} -\frac{1}{5}i & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}i & 0 \\ -\frac{1}{10}i & \frac{1}{10} & 0 \end{matrix}$$

Dan dengan definisi 4.1.1 memenuhi ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose, maka Invers Moore - Penrose dari $A = \begin{matrix} 2i & 3 & i \\ 2 & 3i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ adalah

$$A^{+} = \begin{matrix} -\frac{1}{5}i & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}i & 0 \\ -\frac{1}{10}i & \frac{1}{10} & 0 \end{matrix}.$$

4.3.2 Metode 2

Metode kedua ini diberlakukan untuk matriks A yang *full rank*, dibedakan menjadi 2, yakni

a. Bila matriks $A \in \mathbb{C}_{mxn}\ full\ colom\ rank$ dan jika $A^{*}A$ hermitian maka A^{+} dapat dicari dengan rumus $A^{+} = (A^{*}A)^{-1}A^{*}$

Akan dibuktikan bahwa $A^{+} = (A^{*}A)^{-1}A^{*}$ memenuhi ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose.

Bukti

1. $AA^{+}A = A(A^{*}A)^{-1}A^{T}A = AI = A$

2. $A^{+}AA^{+} = (A^{*}A)^{-1}A^{*}A(A^{*}A)^{-1}A^{*} = I(A^{*}A)^{-1}A^{*} = (A^{*}A)^{-1}A^{*} = A^{+}$

3. $(AA^{+})^{*} = (A(A^{*}A)^{-1}A^{*})^{*} = A(A^{*}A)^{-1}A^{*} = AA^{+}$

4. $(A^{+}A)^{*} = ((A^{*}A)^{-1}A^{*}A)^{*} = I^{*} = I = (A^{*}A)^{-1}A^{*}A = A^{+}A$

Karena $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ memenuhi ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose maka $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ merupakan Invers Moore - Penrose dari matriks A.

Contoh 4.3.2a

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, dengan *rank=2*, atau *full colom rank.*

Akan dicari Invers Moore - Penrose dari matriks A yang memenuhi $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$.

Diperoleh $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}$, $A^*A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ sehingga A^*A hermitian $(A^*A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$ sehingga Invers Moore - Penrose dari $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ adalah

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^* = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9}i & -\frac{5}{9}i \\ \frac{2}{9} & -\frac{5}{9}i & \frac{4}{9}i \end{pmatrix}$$

Akan dibuktikan bahwa A^+ yang telah diperoleh merupakan Invers Moore - Penrose yang memenuhi definisi Invers Moore - Penrose

1. $AA^+A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9}i & -\frac{5}{9}i \\ \frac{2}{9} & -\frac{5}{9}i & \frac{4}{9}i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = A$

2. $A^+AA^+ = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9}i & -\frac{5}{9}i \\ \frac{2}{9} & -\frac{5}{9}i & \frac{4}{9}i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9}i & -\frac{5}{9}i \\ \frac{2}{9} & -\frac{5}{9}i & \frac{4}{9}i \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9}i & -\frac{5}{9}i \\ \frac{2}{9} & -\frac{5}{9}i & \frac{4}{9}i \end{pmatrix} = A^+$$

3. $$(AA^+)^* = \left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9}i & -\frac{5}{9}i \\ \frac{2}{9} & -\frac{5}{9}i & \frac{4}{9}i \end{pmatrix}\right)^*$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{2i}{9} & -\frac{2i}{9} \\ \frac{2i}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{2i}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{2i}{9} & -\frac{2i}{9} \\ \frac{2i}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{2i}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} = AA^+$$

4. $$(A^+A)^* = \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9}i & -\frac{5}{9}i \\ \frac{2}{9} & -\frac{5}{9}i & \frac{4}{9}i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right)^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^+A$$

Karena ke empat kriteria terpenuhi maka A^+ merupakan Invers Moore - Penrose dari A.

b. Bila matriks $A \in \mathbb{C}_{mxn}$ $full\ row\ rank$ dan jika A^*A hermitian maka A^+ dapat dicari dengan rumus $A^+ = A^*(A^*A)^{-1}$

Akan dibuktikan bahwa $A^+ = A^*(A^*A)^{-1}$ memenuhi ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose.

Bukti

1. $AA^+A = AA^*(A^*A)^{-1}A = IA = A$

2. $A^+AA^+ = A^*(A^*A)^{-1}A^*A(A^*A)^{-1} = (A^*A)^{-1}A^*I = A^*(A^*A)^{-1} = A^+$

3. $(AA^+)^* = (AA^*(A^*A)^{-1})^* = I^* = I = AA^*(A^*A)^{-1} = AA^+$

4. $(A^+A)^* = (A^*(A^*A)^{-1}A)^* = A^*(A^*A)^{-1}A = A^+A$

Karena $A^+ = A^*(A^*A)^{-1}$ memenuhi ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose maka $A^+ = A^*(A^*A)^{-1}$ merupakan Invers Moore - Penrose dari matriks A.

Contoh 4.3.2b

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dengan *rank=2* ,atau *full row rank.*

Akan dicari Invers Moore - Penrose dari matriks A yang memenuhi

$$A^{+} = A^{*}\left(A^{*}A\right)^{-1}$$

Diperoleh $A^{*} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, $A^{*}A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ dimana

$\left(A^{*}A\right)^{*} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ sehingga $A^{*}A$ hermitian $\left(A^{*}A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ sehingga Invers Moore - Penrose dari $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$ adalah

$$A^{+} = A^{*}\left(A^{*}A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Akan dibuktikan bahwa A^{+} yang telah diperoleh merupakan Invers Moore - Penrose yang memenuhi definisi Invers Moore - Penrose

1. $AA^{+}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

2. $A^{+}AA^{+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = A^{+}$$

3. $$(AA^{+})^{*} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right)^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = AA^{+}$$

4. $$(A^{+}A)^{*} = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{*}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{i}{3} & \frac{i}{3} \\ -\frac{i}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{i}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^{*} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{i}{3} & \frac{i}{3} \\ -\frac{i}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{i}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A^{+}A$$

Karena ke empat kriteria terpenuhi maka A^{+} merupakan Invers Moore - Penrose dari A.

4.4 Invers Moore - Penrose Matriks Bebas

Definisi 4.4.1

Diketahui himpunan bilangan kompleks $H = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, dimana dua elemen diantaranya tidak ada yang sama. Himpunan H tersebut dikatakan *bebas* *aljabar*, jika $p\ \ c_1, c_2, \dots, c_n\ \ \neq 0$, untuk setiap polinomial tak nol dengan koefisien rasional tak nol $p\ \ x_1, x_2, \dots, x_n$.

Contoh 4.4.1

1. Suatu himpunan bilangan kompleks $C = \ 2i, 3i$ adalah bukan *bebas aljabar* karena dapat ditemukan suatu polinomial $p\ \ x_1, x_2\ \ = 3x_1 - 2x_2$, sedemikian sehingga $p\ \ 2i, 3i\ \ = 0$.
2. Suatu himpunan bilangan kompleks $C = \ 2i, 2 + 3i$ adalah bukan *bebas aljabar* karena dapat ditemukan suatu polinomial $p\ \ x_1, x_2\ \ = 1{,}5x_1 - x_2 + 2$, sedemikian sehingga $p\ \ 2i, 3i\ \ = 0$.
3. Suatu himpunan bilangan kompleks $C = \ 2{,}3{,}2 + 3i$ adalah *bebas aljabar* karena tidak dapat ditemukan $p\ \ x_1, x_2, x_3$, sedemikian sehingga $p\ \ 2{,}3{,}2 + 3i\ \ = 0$.

Lemma 4.4.1

Misalkan C_1 dan C_2 merupakan himpunan berhingga dari bilangan kompleks, sedemikian sehingga setiap elemen C_2 dapat dinyatakan sebagai bentuk rasional dari suatu elemen C_1, begitu pula sebaliknya, setiap elemen C_1 dapat dinyatakan sebagai bentuk rasional dari sebuah elemen di C_2. Jika C_1 *bebas aljabar* jika dan hanya jika kardinal $C_1 =$ kardinal C_2.

Bukti

$\Rightarrow$ Diketahui himpunan tak kosong dari bilangan kompleks C_1 dan C_2. Kemudian terdapat fungsi injektif dan surjektif dari C_1 ke C_2, juga sebaliknya terdapat fungsi injektif dan surjektif dari C_2 ke C_1. Diketahui pula C_1 adalah *bebas aljabar*. Jika C_2 juga *bebas aljabar*, maka kardinal $C_1 =$ kardinal C_2.

$\Leftarrow$ Diketahui himpunan tak kosong dari bilangan kompleks C_1 dan C_2. Kemudian terdapat fungsi injektif dan surjektif dari C_1 ke C_2, juga sebaliknya terdapat fungsi injektif dan surjektif dari C_2 ke C_1. Diketahui pula C_1 adalah *bebas aljabar*. Jika kardinal $C_1 =$ kardinal C_2, maka C_2 adalah *bebas aljabar*.

Contoh 4.4.2

Diketahui $C_1 = \ 2,3,2+3i\ $ dan $C_2 = \ 4,6,4+6i\ $. Terdapat fungsi $f: C_1 \longrightarrow C_2$ yang didefinisikan dengan $f\ c_i\ = 2c_i$ (di mana $i = 1,2,3$) adalah fungsi bijektif. Karena setiap elemen C_1 dapat dinyatakan sebagai bentuk rasional dari suatu elemen di C_2. Sebaliknya, setiap elemen C_2 dapat dinyatakan sebagai bentuk rasional dari suatu elemen C_1. Dikarenakan $C_1 =$ kardinal $C_2 = 3$ dan C_1 adalah *bebas aljabar*, maka C_2 juga *bebas aljabar*.

Definisi 4.4.2

Suatu matriks dikatakan matriks bebas jika himpunan dari semua elemen-elemen yang tidak nol pada matriks tersebut adalah *bebas aljabar*.

Contoh 4.4.3

Diketahui matriks $A = \begin{matrix} 2+3i & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix}$. Matriks A tersebut adalah matriks bebas karena himpunan dari semua elemen-elemen yang tidak nol dari matriks A tersebut adalah *bebas aljabar*. Dengan pengertian tidak dapat ditemukan $p\ x_1, x_2, x_3, x_4$ sedemikian sehingga $p\ 2+3i, 1,2,3\ = 0$.

Teorema 4.4.2

Term rank dari matriks bebas sama dengan ranknya.

Bukti

Matriks bebas adalah matriks bilangan kompleks dimana himpunan dari semua elemen-elemen tidak nol pada matriks tersebut adalah *bebas aljabar*. Karena elemen-elemennya adalah *bebas aljabar*, maka terdapat baris-baris atau kolom-kolom yang bebas linear. Sedangkan rank dari matriks tersebut adalah jumlah maksimal baris atau kolom yang bebas linear, maka term rank sama dengan ranknya.

Contoh 4.4.4

Diketahui matriks $A = \begin{matrix} 2+3i & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{matrix}$. Matriks tersebut adalah matriks bebas, karena himpunan bilangan elemen tak nol dari matriks tersebut adalah *bebas aljabar*.

$$A = \begin{matrix} 2+3i & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{matrix} \; b_2{\sim}b_1\, 2 \; \begin{matrix} 2+3i & 2 & 3 \\ -4-6i & 0 & -6 \\ 0 & 5 & 0 \end{matrix} \; b_3{\sim}b_1\, \frac{5}{2}$$

$$\begin{matrix} 2+3i & 2 & 3 \\ -4-6i & 0 & -6 \\ \dfrac{-10-15i}{2} & 0 & \dfrac{-15}{2} \end{matrix} \; b_3{\sim}b_2\, \frac{5}{4} \; \begin{matrix} 2+3i & 2 & 3 \\ -4-6i & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Karena jumlah maksimum baris dari matriks A yang bebas linear adalah 2, maka $rank \;\; A \;\; = 2$.

Diagonal parsial dari matriks A tersebut adalah

$2+3i, 4{,}0$, $2{,}0{,}0$, $3{,}0{,}5$, $3{,}4{,}0$, $2{,}0{,}0$ dan $2+3i, 0{,}5$. Karena jumlah maksimal dari elemen tak nol pada semua diagonal parsial matriks A adalah 2, maka $term\ rank\ (A) = 2$.

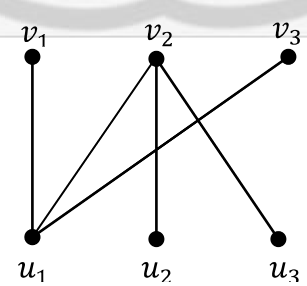
Dari sini terlihat bahwa $rank\ (A) = term\ rank\ (A)$.

Definisi 4.4.3

Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berukuran $m \times n$, di mana $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$. Himpunan $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ adalah himpunan titik-titik sejumlah m dan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah himpunan titik-titik sejumlah n. Di mana U dan V adalah himpunan yang terpisah. Kemudian graf bipartite dari matriks A dinotasikan dengan $B(A)$ didefinisikan sebagai graf yang memiliki titik $U \cup V$ dan himpunan sisi $E = \{(u_i, v_j) \mid u_i \in U, v_j \in V, a_{ij} \neq 0\}$.

Contoh 4.4.5

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2+3i & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$. Graf bipartite $B(A)$ adalah graf yang memiliki titik $U \cup V$, di mana $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ dan $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ serta himpunan sisi $E = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_1, v_3), (u_2, v_2), (u_3, v_2)\}$. Graf bipartitenya dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 4.4.1 Graf bipartite $B(A)$

Definisi 4.4.4

Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berukuran $n \times n$, di mana $i = 1,2,\ldots,n$ dan $j = 1,2,\ldots,n$. Himpunan W= $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ adalah himpunan titik-titik sejumlah n. Digraf dari matriks A dinotasikan dengan $D(A)$ didefinisikan sebagai graf yang memiliki titik W dan himpunan busur

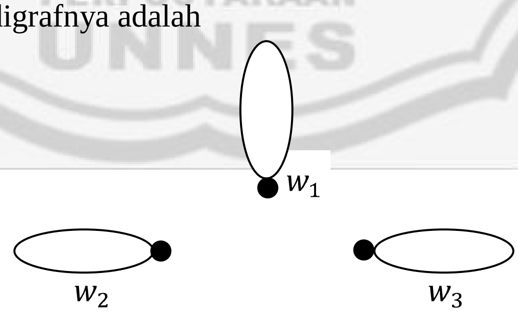
$\mathcal{A} = \{(w_i, w_j) \mid a \neq 0\}$. Berdasarkan definisi tersebut, $D(I_n)$ didefinisikan sebagai graf yang memiliki titik W dan busur $\{(w_i, w_j) \mid w_i, w_j \in W, dengan\ i = j\}$, di mana I_n merupakan matriks identitas yang berukuran $n \times n$.

Contoh 4.4.6

Matriks $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, digrafnya adalah

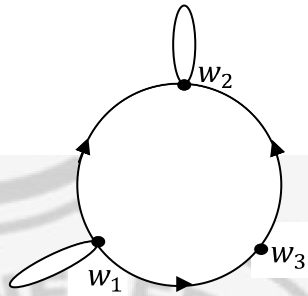
Gambar 4.4.2 $D(I_2)$

Matriks $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, digrafnya adalah



Gambar 4.4.3 $D(I_3)$

Matriks $A = \begin{matrix} 2+3i & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{matrix}$, digrafnya adalah



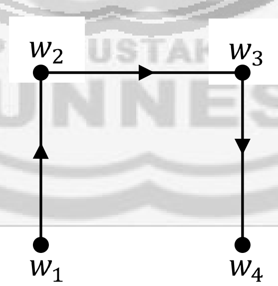
Gambar 4.4.4 $D(A)$

Definisi 4.4.5

Transitive Clousure dari suatu digraf $D(A)$ didefinisikan dengan digraf yang mengandung busur dari w_1 ke w_2, jika pada C dapat ditemukan path dari w_1 ke w_2. Jika tidak dapat ditemukan path dari w_1 ke w_2, maka *transitive clousure* dari digraf tersebut adalah dirinya sendiri. *Transitive clousure dari* $D(A)$ dinotasikan dengan $D\ \ A$.

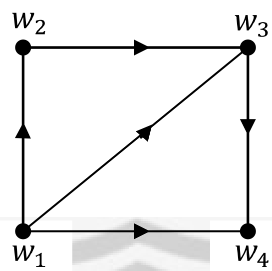
Contoh 4.4.7

Misalkan $D(A)$ adalah



Gambar 4.4.5 $D(A)$

Karena dapat ditemukan path dari w_1 ke w_3 dan path dari w_1 ke w_4, maka *transitive clousurenya* adalah



Gambar 4.4.6 $D(A)$.

Definisi 4.4.6

Diketahui A adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan $r \geq 1$ adalah rank dari matriks A. Matriks $A(1{:}r)$ adalah submatriks dari A yang berukuran $r \times r$ dan memiliki $rank\ r$.

Contoh 4.4.8

Berdasarkan Contoh 4.4.4 diketahui $A = \begin{pmatrix} 2+3i & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ memiliki $rank(A) = 2 = r$, maka $A(I{:}r)$ dapat berupa $A = \begin{pmatrix} 2+3i & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ atau $A = \begin{pmatrix} 2+3i & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Dalam pembahasan berikutnya, matriks bebas yang digunakan adalah matriks bebas yang berukuran $n \times n$ (matriks persegi).

Teorema 4.4.3

Jika $A_{n\times n}$ adalah matriks bebas dengan $rank\ r$ dan $D(I_r) \subseteq D(A(1{:}r))$, maka matriks $A_{n\times n}$ dan ${A^+}_{n\times n}$ dapat dituliskan sebagai $A = \begin{pmatrix} C & K \\ L & 0 \end{pmatrix}$ dan $A^+ = \begin{pmatrix} S & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$ dengan $C = A(1{:}r)$, $D(Ir) \subseteq D(C) \subseteq D(C) \subseteq D(S)$, $B(K) \subseteq B(Y^T)$, $B(L) \subseteq B(X^T)$. Di mana K dan L adalah sub matriks sisa dari $A_{n\times n}$ yang secara berturut-turut berukuran $r \times n - r$ dan $n - r \times r$. Sedangkan S adalah sub matriks dari ${A^+}_{n \times n}$ yang berukuran $r \times r$ dengan $rank\ r$, X, Y dan Z adalah sub matriks dari ${A^+}_{n \times n}$ yang secara berturut-turut berukuran $r \times n - r, n - r \times r,$ dan $n - r \times n - r$.

Bukti

Diketahui $A = \begin{matrix} C & K \\ L & 0 \end{matrix}$ di mana $C = A\ 1{:}r\ , K$ dan L adalah sub matriks sisa dari A yang secara berturut-turut berukuran $r \times n - r$ dan $n - r \times r$. Matriks A tersebut memiliki $A^+ = \begin{matrix} S & X \\ Y & Z \end{matrix}$ di mana S adalah sub matrik A^+ yang berukuran $r \times r$, X, Y dan Z adalah sub matriks dari A^+ yang secara berturut-turut berukuran $r \times n - r, n - r \times r,$ dan $n - r \times n - r$. Dengan Teorema 4.4.2, maka K atau L adalah matriks nol. Jika dipilih K adalah matriks nol dan C bukan matriks nol serta diketahui $B\ K\ \subseteq B\ Y^T\ , B(L) \subseteq B(X^T)$ maka matriks Y adalah matriks nol X adalah bukan matriks nol.

Akan dibuktikan bahwa $A^+ = \begin{matrix} S & X \\ Y & Z \end{matrix}$ adalah Invers Moore - Penrose dari $A = \begin{matrix} C & K \\ L & 0 \end{matrix}$.

1. $AA^+A = \begin{matrix} C & K \\ L & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} S & X \\ Y & Z \end{matrix} \cdot \begin{matrix} C & K \\ L & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} C & K \\ L & 0 \end{matrix}$

$$= \begin{matrix} CS + KY & CX + 0 \\ LS + 0 & LX + 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} C & K \\ L & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} C & K \\ L & 0 \end{matrix}$$

Matriks C adalah sub matriks A yang berukuran $r \times r$ dengan $rank\ r$ dan S adalah sub matriks dari A^+ yang berukuran $r \times r$ dengan $rank\ r$ juga. Oleh karena itu, C dapat dikalikan dengan S dengan matriks hasil berukuran $r \times r$ (dimisalkan dengan CS). Matriks K adalah matriks nol berukuran $r \times 1$ dan dikalikan dengan matriks nol berukuran $1 \times r$. Oleh karena itu, K dan Y dapat dikalikan dengan matriks hasil matriks nol berukuran $r \times r$ (dimisalkan dengan KY). Sehingga $CS + KY$ (bukan matriks nol yang berukuran $r \times r$). Matriks $CS + KY$ dapat dikalikan dengan C yang berukuran $r \times r$. Sehingga menghasilkan matriks yang berukuran $r \times r$ (dimisalkan dengan ($CS + KY\ C$). Matriks CX adalah bukan matriks nol yang berukuran $r \times 1$ dapat dikalikan dengan L yang berukuran $1 \times r$ dan menghasilkan matriks CXL yang berukuran $r \times r$. Kemudian $CS + KY\ C$ dapat dijumlahkan dengan CXL dan menghasilkan matriks $r \times r$ (matriks tersebut adalah C).

Analog untuk elemen-elemen matriks yang lain.

2. $A^+AA^+ = \begin{pmatrix} S & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & K \\ L & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & X \\ Y & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} SC + XL & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & X \\ Y & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$$

Penjelasannya analog dengan kriteria (1).

3. $(AA^+)^* = \left(\begin{pmatrix} C & K \\ L & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & X \\ Y & Z \end{pmatrix}\right)^* = \begin{pmatrix} CS + KY & CX + 0 \\ LS + 0 & LX + 0 \end{pmatrix} = AA^+$

Penjelasannya analog dengan kriteria (1).

4. $(A^+A)^* = \left(\begin{pmatrix} S & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & K \\ L & 0 \end{pmatrix}\right)^* = \begin{pmatrix} SC + XL & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^+A$

Penjelasannya analog dengan kriteria (1).

Karena A^{+} memenuhi ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose sehingga terbukti bahwa Invers Moore - Penrose dari $A = \begin{matrix} C & K \\ L & 0 \end{matrix}$ adalah $A^{+} = \begin{matrix} S & X \\ Y & Z \end{matrix}$.

Akibat 4.4.4

Jika A adalah matriks bebas, jumlah elemen tak nol dari Invers Moore - Penrose A^{+} lebih besar atau sama dengan jumlah elemen tak nol dari matriks A.

Bukti

Pada Teorema 4.4.3 menyatakan bahwa $D\ C\ \subseteq D\ C\ \subseteq D\ S\ , B\ K\ \subseteq B\ Y^{T}\ , B(L) \subseteq B(X^{T})$. Dan berdasarkan tinjauan pustaka mengenai definisi subgraf, subgraf dari $D\ S$ (atau $D\ C$) adalah graf yang semua titik dan busurnya adalah anggota dari himpunan titik dan busur pada $D\ S$ memiliki paling sedikit sebanyak titik dan busur dari $D\ C$. Secara analog, $B\ K\ \subseteq B\ Y^{T}\ , B(L) \subseteq B(X^{T})$ juga terbukti dan $Z = 0$. Oleh karena itu, A^{+} memiliki paling sedikit sebanyak elemen tak nol dari matriks A.

Contoh 4.4.9

Diketahui matriks bebas $A = \begin{matrix} 2+3i & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{matrix}$ memiliki $rank\ A\ = 2 = r$. Dengan menggunakan metode 1 dalam mencari Invers Moore - Penrose $A^{+} = \begin{matrix} \frac{1}{11} - \frac{3}{22}i & \frac{-8}{451} + \frac{12}{451}i & \frac{-10}{451} + \frac{15}{451}i \\ 0 & \frac{4}{41} & \frac{5}{41} \\ \frac{3}{22} & \frac{-12}{451} & \frac{-15}{451} \end{matrix}$. Dari sini dapat dilihat bahwa jumlah elemen tak nol A^{+} lebih besar dari jumlah elemen tak nol A.

Contoh 4.4.10

Diketahui matriks bebas $A = \begin{bmatrix} 2+3i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ memiliki $rank\ A\ = 2 = r$. Dengan menggunakan metode 1 dalam mencari Invers Moore - Penrose $A^{+} = \begin{bmatrix} \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{13} & 0 \\ 0 & \frac{3}{13} & 0 \end{bmatrix}$. Dari sini dapat dilihat bahwa jumlah elemen tak nol A^{+} lebih besar dari jumlah elemen tak nol A.

Dari kedua contoh tersebut dapat dilihat bahwa A^{+} memiliki elemen tak nol lebih besar atau sama dengan jumlah elemen tak nol dari A.

Teorema 4.4.5 berikut menyatakan syarat perlu dan syarat cukup untuk Invers Moore - Penrose A^{+} dari sebuah matriks bebas A adalah bebas.

Teorema 4.4.5

Misalkan A adalah matriks bebas yang berukuran $n \times n$ dengan $rank\, r$. Di mana $A\ 1{:}r$ tidak terletak pada bagian kiri atas dari matriks A semula. Kemudian dapat diambil matriks P dan Q sedemikian sehingga $A' = PAQ$ memenuhi $D\ I{:}r\ \subseteq D\ A\ 1{:}r$ (sehingga A' memiliki submatriks yang berukuran $r \times r$ dengan $rank\, r$ terletak pada kiri atas dari matriks A' tersebut). Di mana P dan Q adalah matriks identitas yang telah dilakukan operasi elementer terhadapnya. Dituliskan bahwa $A' = \begin{bmatrix} C & K \\ L & 0 \end{bmatrix}$ dan $A'^{+} = \begin{bmatrix} S & X \\ Y & Z \end{bmatrix}$

Dengan $C = A'\ 1{:}r$ dan S adalah matriks $r \times r$ dengan $rank\, r$. Pernyataan berikut ini adalah ekuivalen

1. A^{+} adalah bebas
2. A dan A^{+} memiliki jumlah elemen tidak nol (atau nol) yang sama
3. $D\ C\ \subseteq D\ S\ , B\ K\ = B\ Y^{T}\ , B\ L\ = B(X^{T})$ dan $Z = 0$.

Bukti

$1 \Rightarrow 2$ Pernyataan tersebut ekuivalen dengan Lemma 4.4.1.

$2 \Rightarrow 1$ Pernyataan tersebut ekuivalen dengan Lemma 4.4.1.

$2 \Rightarrow 3$ Jika A dan A^{+} memiliki jumlah elemen tidak nol (atau nol) yang sama dan pada Teorema 4.4.3 menyatakan bahwa $D\ C\ \subseteq D\ S\ , B\ K\ \subseteq B\ Y^{T}$, dan $B\ L\ \subseteq B\ X^{T}$, maka $D\ C\ = D\ S\ , B\ K\ = B\ Y^{T}\ , B\ L\ = B\ X^{T}$ dan $Z = 0$.

$3 \Rightarrow 2$ Jika $D\ C\ = D\ S\ , B\ K\ = B\ Y^{T}\ , B\ L\ = B\ X^{T}$ dan $Z = 0$, maka A dan A^{+} memiliki jumlah elemen tidak nol (atau nol) yang sama (pernyataan tersebut benar).

Contoh dari Teorema 4.4.5 mengikuti contoh 4.4.11.

Akibat 4.4.6

Misalkan A adalah sebuah matriks bebas. Jika A^{+} bebas, maka $D\ C\ = D\ C\ = D\ S$.

Bukti

Pada Teorema 4.4.3 menyatakan bahwa $D\ C\ = D\ C\ = D\ S$, dan pada Teorema 4.4.5 menyatakan bahwa $D\ C\ = D\ S$, maka terbukti $D\ C\ = D\ C\ = D\ S$.

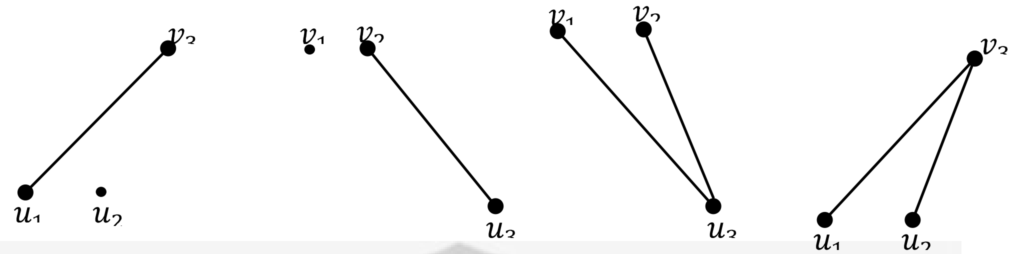
Contoh 4.4.11

Pada gambar 4.4.7 menyatakan hubungan antara matriks bebas dengan Invers Moore - Penrosenya yang tidak bebas, di mana $D\ I_r\ \subseteq D\ C\ \subseteq D\ C\ \subseteq D\ S\ , B\ K\ \subseteq B\ Y^T\ , B\ L\ \subseteq B\ X^T$. Pada gambar 4.4.8 menyatakan hubungan antara matriks bebas dengan Invers Moore - Penrosenya yang bebas juga, di mana $D\ C = D\ S\ , B\ K\ = B\ Y^T\ , B\ L\ = B\ X^T$ dan $Z = 0$.

$$A = \begin{matrix} C & K \\ L & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 2+3i & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{matrix}$$

$$A^{+} = \begin{matrix} S & X \\ Y & Z \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{1}{11} - \frac{3}{22}i & \frac{-8}{451} + \frac{12}{451}i & \frac{-10}{451} + \frac{15}{451}i \\ 0 & \frac{4}{41} & \frac{5}{41} \\ \frac{3}{22} & \frac{-12}{451} & \frac{-15}{451} \end{matrix}$$

$D\ I_2$ $\qquad$ $D\ C\ = D\ C\ = D(S)$



$B(K)$ $B(L)$ $B\ X^T$ $B\ Y^T$

Gambar 4.4.7 Matriks bebas dan Invers Moore - Penrosenya yang tidak bebas

$$A = \begin{bmatrix} C & K \\ L & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{+} = \begin{bmatrix} S & X \\ Y & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{13} & 0 \\ 0 & \frac{3}{13} & 0 \end{bmatrix}$$

$D(I_2)$ $D\ C\ = D\ C\ = D(S)$

$B\ K\ = B\ Y^T$ $B\ L\ = B\ X^T$

Gambar 4.4.8. Matriks Bebas dan

Invers Moore-Penrosenya juga bebas

4.5 Struktur Invers Moore - Penrose Matriks Bebas

Definisi 4.5.1

Diketahui $Q_l = \quad 1,2,\dots,l \quad l\ elemen\ bilangan\ bulat\ positif$ adalah himpunan berurut dari l elemen dan $Q_{k,l} = \ \gamma\ \gamma = \ \gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_k\ ,k \leq l$ adalah elemen dari Q_l. Untuk suatu $i \in \gamma, \gamma - i$ menotasikan himpunan dengan jumlah elemen sama dengan kardinal $\gamma \setminus \ i$ dan untuk setiap $i \notin \gamma,\ i;\gamma$ menotasikan himpunan dengan jumlah elemen sama dengan kardinal $\ i,\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_k$.

Contoh 4.5.1

Misalkan $\gamma \in Q_{3,4} = \quad 1,2,3\ ,\ 1,2,4\ ,\ 2,3,4\ ,\ 1,3,4$ kemudian jika diambil $i = 2$, maka $\gamma \setminus \ i \ = \quad 1,3\ ,\ 1,4\ ,\ 3,4$. Dan jika diambil $i = 1$, maka $\gamma \in Q_{3,4}$ yang bisa diambil adalah {2,3,4} karena tidak memuat bilangan 1. Sehingga $\ i;\gamma \ = \ 1,2,3,4$.

Definisi 4.5.2

Misalkan A adalah suatu matriks bebas berukuran $n \times n$, kemudian γ adalah elemen dari $Q_{n,1}$ dan δ adalah elemen dari $Q_{n,1}$. Matriks $A\ \gamma\ \delta$ adalah matriks yang berukuran kardinal $\gamma\ \times$ kardinal δ di mana elemen ke $\ i,j$ sama dengan $a_{\gamma_i \delta_j}$. Matriks $A\ i{:}\gamma\ j{:}\delta$ adalah matriks yang berukuran kardinal $\ i;\gamma\ \times$ kardinal $\ j{:}\delta$.

Contoh 4.5.2

Misalkan A adalah suatu matriks yang berukuran 3×3, di mana

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \ \text{dan}\ rank\ A\ = 2 = r.$$

Dengan $Q_{r,n} = Q_{2,3} = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$. Dan γ, δ adalah himpunan bilangan elemen dari $Q_{2,3}$. Kemudian jika diambil $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\} = \{1,3\}$ dan $\delta = \{\delta_1, \delta_2\} = \{1,3\}$. Matriks $A[\gamma|\delta]$ adalah matriks yang berukuran 2×2, dengan

Elemen ke $(1,1)$ sama dengan $a_{\gamma_1\delta_1} = a_{11}$,

Elemen ke $(1,2)$ sama dengan $a_{\gamma_1\delta_2} = a_{13}$,

Elemen ke $(2,1)$ sama dengan $a_{\gamma_2\delta_1} = a_{31}$, dan

Elemen ke $(2,2)$ sama dengan $a_{\gamma_2\delta_2} = a_{33}$ (dari matriks A semula).

Sehingga $A[\gamma|\delta] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Teorema 4.5.1

Jika A merupakan suatu matriks bebas yang berukuran $n \times n$, dengan $rank\ r \geq 2$ dan elemen dari matriks A dinotasikan dengan a_{ij} serta elemen dari Invers Moore - Penrose A^+ dinotasikan dengan α_{ij}, maka

$$\alpha_{ij} = \frac{\sum_{\gamma \in Q_{r-1,m}, j \notin \gamma} \sum_{\delta \in Q_{r-1,n}, i \notin \delta} detA[\gamma|\delta]\, detA[\jmath;\gamma|\imath;\delta]}{\sum_{\rho \in Q_{r,m}} \sum_{\tau \in Q_{r,n}} detA[\rho|\tau]\, detA[\rho|\tau]}$$

Bukti

Untuk matriks A yang berukuran 3×3 dengan $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $r(A) = 2$.

Berdasarkan Teorema 4.4.5, akan dicari $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}$, dan α_{22}.

Mencari $_{\rho \in Q_{r,m}} \quad _{\tau \in Q_{r,n}} detA\ \rho\ \tau\ detA\ \rho\ \tau$

ρ dan τ	$A\ \rho\ \tau$	$A\ \rho\ \tau$	$detA\ \rho\ \tau$	$detA\ \rho\ \tau$	$detA\ \rho\ \tau\ detA\ \rho\ \tau$
$\rho =\ 1,2$ $\tau =\ 1,2$	$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$	$ad - bc$	$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$	$ad - bc$	$ad - bc\ ^2$
$\rho =\ 1,2$ $\tau =\ 1,3$	$\begin{matrix} a & 0 \\ c & 0 \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} a & 0 \\ c & 0 \end{matrix}$	0	0
$\rho =\ 1,2$ $\tau =\ 2,3$	$\begin{matrix} b & 0 \\ d & 0 \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} b & 0 \\ d & 0 \end{matrix}$	0	0
$\rho =\ 1,3$ $\tau =\ 1,2$	$\begin{matrix} a & b \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} a & b \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	0
$\rho =\ 1,3$ $\tau =\ 1,3$	$\begin{matrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	0
$\rho =\ 1,3$ $\tau =\ 2,3$	$\begin{matrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	0
$\rho =\ 2,3$ $\tau =\ 1,2$	$\begin{matrix} b & c \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} b & c \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	0
$\rho =\ 2,3$ $\tau =\ 1,3$	$\begin{matrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	0
$\rho =\ 2,3$ $\tau =\ 2,3$	$\begin{matrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	0
				Jumlah	$= \ ad - bc\ ^2$

Mencari $\gamma\in Q_{r-1,m}, j \notin \gamma \quad \delta\in Q_{r-1,n}, i\notin\delta \; detA\ \gamma\ \delta\ \ detA\ \jmath;\gamma\ \imath;\delta$ untuk α_{11}

i, j, γ, δ	$A\ \rho\ \tau$	$detA\ \rho\ \tau$	$A\ \rho\ \tau$	$detA\ \rho\ \tau$	$detA\ \rho\ \tau\ detA\ \rho\ \tau$
$j = 1, \gamma = 2$ $i = 1, \delta = (2)$	d	d	$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$	$ad - bc$	$d(ad - bc)$
$j = 1, \gamma = 2$ $i = 1, \delta = (3)$	0	0	$\begin{matrix} a & 0 \\ c & 0 \end{matrix}$	0	0
$j = 1, \gamma = 3$ $i = 1, \delta = (2)$	0	0	$\begin{matrix} a & b \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	0
$j = 1, \gamma = 3$ $i = 1, \delta = (3)$	0	0	$\begin{matrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	0
				Jumlah	$= d(ad - bc)$

Sehingga diperoleh $\alpha_{11} = \frac{d(ad-bc)}{ad-bc\ ^2} = \frac{d}{ad-bc}$.

Dan dengan cara yang sama diperoleh $\alpha_{12} = \frac{-b}{ad-bc}$

$$\alpha_{21} = \frac{-c}{ad-bc}$$

$$\alpha_{22} = \frac{a}{ad-bc}$$

Sehingga $A^{+} = \begin{matrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} & 0 \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

Dan untuk matriks yang berukuran lainnya, dibuktikan dengan cara yang sama.

Contoh 4.5.3

Diketahui matriks bebas $A = \begin{matrix} 2+3i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$. Akan di cari A^{+} dengan menggunakan Teorema 4.5.1. Karena baris 1 dan 2 dari matriks A adalah bebas linear, maka $rank\ A\ = 2 = r$.

Sesuai dengan Teorema 4.4.5, akan dicari $\alpha_{11}, \alpha_{22,}$ dan α_{12}.

Mencari $_{\rho \in Q_{r,m}}$ $_{\tau \in Q_{r,n}} detA\ \rho\ \tau\ detA\ \rho\ \tau$

ρ dan τ	$A\ \rho\ \tau$	$A\ \rho\ \tau$	$detA\ \rho\ \tau$	$detA\ \rho\ \tau$	$detA\ \rho\ \tau\ detA\ \rho\ \tau$
$\rho =\ 1,2$ $\tau =\ 1,2$	$\begin{matrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}$	$4+6i$	$\begin{matrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}$	$4+6i$	$-20+48i$
$\rho =\ 1,2$ $\tau =\ 1,3$	$\begin{matrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix}$	$6+9i$	$\begin{matrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix}$	$6+9i$	$-45+108i$
$\rho =\ 1,2$ $\tau =\ 2,3$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{matrix}$	0	0
$\rho =\ 1,3$ $\tau =\ 1,2$	$\begin{matrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	0
$\rho =\ 1,3$ $\tau =\ 1,3$	$\begin{matrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	0
$\rho =\ 1,3$ $\tau =\ 2,3$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	0	0

$\rho = \ 2,3$ $\tau = \ 1,2$	$\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{matrix}$	0	$\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{matrix}$	0	0
$\rho = \ 2,3$ $\tau = \ 1,3$	$\begin{matrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{matrix}$	0	$\begin{matrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{matrix}$	0	0
$\rho = \ 2,3$ $\tau = \ 2,3$	$\begin{matrix}2 & 3\\ 0 & 0\end{matrix}$	0	$\begin{matrix}2 & 3\\ 0 & 0\end{matrix}$	0	0
				Jumlah	$= -65 + 156i$

Mencari ${}_{\gamma \in Q_{r-1,m}, j \notin \gamma}$ ${}_{\delta \in Q_{r-1,n}, i \notin \delta}\, detA\ \gamma\ \delta\ detA\ j;\gamma\ i;\delta$ untuk α_{11}

i, j, γ, δ	$A\ \rho\ \tau$	$detA\ \rho\ \tau$	$A\ \rho\ \tau$	$detA\ \rho\ \tau$	$detA\ \rho\ \tau\ detA\ \rho\ \tau$
$j = 1, \gamma = \ 2$ $i = 1, \delta = (2)$	2	2	$\begin{matrix}2+3i & 0\\ 0 & 2\end{matrix}$	$4 + 6i$	$8 + 12i$
$j = 1, \gamma = \ 2$ $i = 1, \delta = (3)$	3	3	$\begin{matrix}2+3i & 0\\ 0 & 3\end{matrix}$	$6 + 9i$	$18 + 27i$
$j = 1, \gamma = \ 3$ $i = 1, \delta = (2)$	0	0	$\begin{matrix}2+3i & 0\\ 0 & 0\end{matrix}$	0	0
$j = 1, \gamma = \ 3$ $i = 1, \delta = (3)$	0	0	$\begin{matrix}2+3i & 0\\ 0 & 0\end{matrix}$	0	0
				Jumlah	$= 26 + 39i$

Sehingga diperoleh $\alpha_{11} = \frac{2-3i}{13}$. Dan dengan cara yang sama diperoleh $\alpha_{22} = \frac{2}{3}$ dan

$\alpha_{23} = \frac{3}{13}$. Sehingga $A^{+} = \begin{bmatrix} \frac{2}{13} - \frac{3}{13i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{13} & 0 \\ 0 & \frac{3}{13} & 0 \end{bmatrix}$.

Definisi 4.5.3

Misalkan $z = a + bi$, berdasarkan definisi mengenai harga mutlak bilangan kompleks yang dinotasikan dengan $|z|$, di mana $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Kemudian untuk panjang suatu vektor atau norm dari $v = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ dalam C^n didefinisikan dengan

$$\|v\| = \left(|z_1|^2, |z_2|^2, \dots, |z_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2 + \cdots + \bar{z}_n z_n\right)^{\frac{1}{2}}$$

Contoh 4.5.3

Misalkan $v = (2 + i, 1 + 2i)$, maka

$$\|v\| = \left(|2+i|^2, |2+i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left((2-i)(2+i) + (1-2i)(1+2i)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (10)^{\frac{1}{2}}$$

Teorema 4.5.2

Jika $r = 0$, maka $A^{+} = A^{T} = 0$ sehingga $B(A)$ dan $B(A^{+})$ tidak memiliki titik. Jika $r = 1$, maka baris dan kolom dari A dapat ditukar dan A atau A^{T} memiliki bentuk $\begin{bmatrix} v & 0 \end{bmatrix}$. Di mana v adalah vektor yang tidak nol. Sehingga $A^{+} = \frac{A^{*}}{\|v\|^2}$. Oleh karena itu, (u_i, v_j) adalah sebuah titik di $B(A^{+})$ jika dan hanya jika $B(A)$ terdapat titik (u_i, v_j).

Bukti

Jika $r = 0$, maka $A^{+} = A^{T} = 0$. Hal tersebut bersesuaian dengan sifat dari Invers Moore - Penrose yang ke tiga, yang menyatakan bahwa Invers Moore - Penrose dari matriks nol adalah matriks transposnya sendiri. Sehingga graf bipartite dari A dan A^{+}nya tidak memiliki titik.

Jika $r = 1$, maka dengan penukaran baris dan kolom, matriks A memiliki bentuk $\begin{bmatrix} v & 0 \end{bmatrix}$, di mana v merupakan vektor yang tak nol. Misalkan A adalah matriks berukuran $2 \times 2 (r = 1)$, dengan $A = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i & a_2 + b_2 i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, di mana $v = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i & a_1 + b_1 i \end{bmatrix}$. Karena A adalah yang tidak *full rank*, maka akan dipergunakan metode 1 untuk mencari Invers Moore - Penrose dari A, dengan $k = 1$.

Langkah 1 Mengambil $A_{11} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \end{bmatrix}$.

Langkah 2 Karena pada langkah 1 mengambil submatriks A_{11} yang sudah terletak pada kiri atas dari matriks A semula, maka tidak perlu melakukan penukaran elemen-elemen baris atau kolom.

Langkah 3 Mengambil matriks satuan $I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = P = Q$.

Langkah 4 Menghitung.

$$PAQ = A = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i & a_2 + b_2 i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Langkah 5 Mengambil

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ 0 \end{bmatrix}, B^{*} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 i & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian mencari $(B^{*}B)^{-1} = \left({a_1}^2 + {b_1}^2\right)^{-1}$.

$$F = {A_{11}}^{-1}.A_{12} = \; a_1 + b_1 i \;^{-1}. \; a_1 + b_1 i \; = \frac{a_2 + b_2 i}{a_1 + b_1 i}$$

$$C = \; I_r \quad F \; = \; 1 \quad \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + \; a_1 a_2 - b_1 b_2 \; i}{{a_1}^2 + {b_1}^2} \; ,$$

$$C^* = \frac{1}{\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 - \; a_1 a_2 - b_1 b_2 \; i}{{a_1}^2 + {b_1}^2}}$$

$$C^* = \frac{1}{\frac{a_1 - b_1 i \quad a_2 - b_2 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2}}$$

Kemudian mencari $\; CC^* \;^{-1} = \frac{{a_1}^2 + {b_1}^2}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2}$

Langkah 6 Dan diperoleh A^+ dengan menggunakan rumus

$$A^+ = QC^* \; CC^* \;^{-1} \; B^* B \;^{-1} B^* P$$

$$A^+ = \; 1 \quad \frac{1}{\frac{a_1 - b_1 i \quad a_2 - b_2 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2}} \; . \; \frac{{a_1}^2 + {b_1}^2}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} \; .$$

$$\frac{1}{{a_1}^2 + {b_1}^2} \; . \; a_1 - b_1 i \quad 0 \quad 1$$

$$A^+ = \begin{matrix} \frac{a_1 - b_1 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} & 0 \\ \frac{a_2 - b_2 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} & 0 \end{matrix}$$

Akan dilakukan pengecekan apakah A^+ yang diperoleh dengan menggunakan metode 1 tersebut memenuhi ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose.

1. $AA^{+}A = \begin{matrix} a_1 + b_1 i & a_2 + b_2 i \\ 0 & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \frac{a_1 - b_1 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} & 0 \\ \frac{a_2 - b_2 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} a_1 + b_1 i & a_2 + b_2 i \\ 0 & 0 \end{matrix}$

$= \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} a_1 + b_1 i & a_2 + b_2 i \\ 0 & 0 \end{matrix}$

$= \begin{matrix} a_1 + b_1 i & a_2 + b_2 i \\ 0 & 0 \end{matrix}$

$= A$

2. $A^{+}AA^{+} = \begin{matrix} \frac{a_1 - b_1 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} & 0 \\ \frac{a_2 - b_2 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} a_1 + b_1 i & a_2 + b_2 i \\ 0 & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \frac{a_1 - b_1 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} & 0 \\ \frac{a_2 - b_2 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} & 0 \end{matrix}$

$$= \begin{matrix} \frac{{a_1}^2 + {b_1}^2}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} & \frac{a_1 - b_1 i \quad a_2 - b_2 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} \\ \frac{a_2 - b_2 i \quad a_1 - b_1 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} & \frac{{a_2}^2 + {b_2}^2}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \frac{a_1 - b_1 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} & 0 \\ \frac{a_2 - b_2 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} & 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \frac{a_1 - b_1 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} & 0 \\ \frac{a_2 - b_2 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} & 0 \end{matrix}$$

$= A^{+}$

3. $AA^{+\;*} = \begin{matrix} a_1 + b_1 i & a_2 + b_2 i \\ 0 & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \frac{a_1 - b_1 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} & 0 \\ \frac{a_2 - b_2 i}{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2} & 0 \end{matrix}^{*}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{*}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= AA^{+}$$

4. $$(A^{+}A)^{*} = \left(\begin{pmatrix} \frac{a_1-b_1 i}{a_1{}^2+b_1{}^2+a_2{}^2+b_2{}^2} & 0 \\ \frac{a_2-b_2 i}{a_1{}^2+b_1{}^2+a_2{}^2+b_2{}^2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1+b_1 i & a_2+b_2 i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{*}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a_1{}^2+b_1{}^2}{a_1{}^2+b_1{}^2+a_2{}^2+b_2{}^2} & \frac{a_1-b_1 i \;\; a_2-b_2 i}{a_1{}^2+b_1{}^2+a_2{}^2+b_2{}^2} \\ \frac{a_2-b_2 i \;\; a_1-b_1 i}{a_1{}^2+b_1{}^2+a_2{}^2+b_2{}^2} & \frac{a_2{}^2+b_2{}^2}{a_1{}^2+b_1{}^2+a_2{}^2+b_2{}^2} \end{pmatrix}^{*}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a_1{}^2+b_1{}^2}{a_1{}^2+b_1{}^2+a_2{}^2+b_2{}^2} & \frac{a_1-b_1 i \;\; a_2-b_2 i}{a_1{}^2+b_1{}^2+a_2{}^2+b_2{}^2} \\ \frac{a_2-b_2 i \;\; a_1-b_1 i}{a_1{}^2+b_1{}^2+a_2{}^2+b_2{}^2} & \frac{a_2{}^2+b_2{}^2}{a_1{}^2+b_1{}^2+a_2{}^2+b_2{}^2} \end{pmatrix}$$

$$= A^{+}A$$

Karena A^{+} yang diperoleh tersebut memiliki ke empat kriteria dari Invers Moore - Penrose, maka Invers Moore - Penrose dari $A = \begin{pmatrix} a_1+b_1 i & a_2+b_2 i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ adalah

$$A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{a_1-b_1 i}{a_1{}^2+b_1{}^2+a_2{}^2+b_2{}^2} & 0 \\ \frac{a_2-b_2 i}{a_1{}^2+b_1{}^2+a_2{}^2+b_2{}^2} & 0 \end{pmatrix}$$

A^{+} tersebut dapat diuraikan menjadi

$A^{+} = \frac{1}{a_1{}^2+b_1{}^2+a_2{}^2+b_2{}^2} \begin{pmatrix} a_1-b_1 i & 0 \\ a_2-b_2 i & 0 \end{pmatrix}$, di mana $a_1{}^2+b_1{}^2+a_2{}^2+b_2{}^2 = \; v \; ^2$ dan $\begin{pmatrix} a_1-b_1 i & 0 \\ a_2-b_2 i & 0 \end{pmatrix}$ adalah transpose konjugat dari A. Sehingga Invers Moore - Penrose dari matriks A yang memiliki $r = 1$, dapat diperoleh dengan $A^{+} = \frac{A^{*}}{\|v\|^{2}}$. Dan A^{+} memiliki bentuk $\begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix}$, di mana w adalah vektor yang tidak nol. Serta hal ini mengakibatkan, bahwa $B(A)$ memiliki titik (u_1, v_1), (u_1, v_2) dan $B(A^{+})$ memiliki titik (u_1, v_1), (u_1, v_2). Dalam pengertian bahwa (u_j, v_i) adalah titik dari $B(A^{+})$ jika dan hanya jika (u_j, v_i) adalah titik dari $B(A)$.

Untuk matriks yang berukuran lain dan $r = 1$, dibuktikan dengan cara yang sama.

Contoh 4.5.5

Jika diketahui $A = \begin{bmatrix} 2+3i & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dengan $rank(A) = 1$. Akan dicari Invers Moore - Penrose dari A.

Dimisalkan $v = (i \quad 2 \quad 3)$, sehingga $\|v\| = \left((2^2 + 3^2) + 2^2 + 3^2\right)^{\frac{1}{2}} = (26)^{\frac{1}{2}}$ dan $\|v\|^{2} = 26$.

Kemudian $A^{*} = \begin{bmatrix} 2-3i & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga

$$A^{+} = \frac{A^{*}}{\|v\|^{2}}$$

$$A^{+} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 2-3i & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{+} = \begin{bmatrix} \frac{2}{26} - \frac{3i}{26} & 0 & 0 \\ \frac{2}{26} & 0 & 0 \\ \frac{3}{26} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

BAB 5

PENUTUP

5.1 SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan tentang Invers Moore – Penrose dari matriks kompleks yang dibatasi pada Invers Moore – Penrose matriks bebas berukuran $n \times n$, dapat disimpulkan, yaitu sebagai berikut.

1. Invers Moore – Penrose matriks kompleks memiliki sifat-sifat
    a. Jika A adalah matriks persegi yang *non-singular*, maka Invers Moore - Penrose dari A adalah A^{+}. Dengan kata lain $A^{+} = A^{-1}$.
    b. Invers Moore - Penrose bersifat *reversible.* Dalam pengertian bahwa Invers Moore - Penrose juga memiliki invers, yaitu $(A^{+})^{+} = A$.
    c. Invers Moore - Penrose dari matriks nol adalah matriks transposnya sendiri.
    d. Perkalian dengan skalar terhadap matriks A adalah berbanding terbalik terhadap perkalian skalar dengan A^{+}. Dengan kata lain $(kA)^{+} = k^{-1}A^{+}$.
    e. Invers Moore - Penrose dari suatu matriks adalah tunggal.
    f. Pada Invers Moore - Penrose berlaku $(A^{*})^{+} = (A^{+})^{*}$.
2. Metode dalam mencari Invers Moore – Penrose matriks kompleks
    a. Pada metode pertama ini dipergunakan untuk mencari Invers Moore - Penrose dari suatu matriks A yang *tidak full rank.*

b. Metode kedua ini diberlakukan untuk matriks A yang *full rank*, dibedakan menjadi 2, yaitu bila matriks $A \in \mathbb{C}_{mxn}\, full\, colom\, rank$ dan bila matriks $A \in \mathbb{C}_{mxn}\, full\, row\, rank$.

3. Tidak semua matriks bebas memiliki Invers Moore – Penrose yang bebas
4. Syarat yang harus dipenuhi agar Invers Moore – Penrose dari suatu matriks bebas juga merupakan matriks bebas adalah
   a. $A_{n\times n}$ dan $A^{+}{}_{n\times n}$ memiliki jumlah elemen tidak nol (atau nol) yang sama
   b. Digraf dari sub matriks $A_{n\times n}$ yang berukuran $r \times r$ dengan rank r. Graf bipartit dari sub matriks $A^{+}{}_{n\times n}$ yang berukuran $r \times n - r$ sama dengan graf bipartit dari transpose sub matriks $A^{+}{}_{n\times n}$ yang berukuran $n - r \times r$, begitu pula graf bipartit dari sub matriks $A_{n\times n}$ yang berukuran $n - r \times r$ sama dengan graf bipartit dari transpose sub matriks $A^{+}{}_{n\times n}$ yang berukuran $r \times n - r$. Sub matriks $A^{+}{}_{n\times n}$ yang berukuran $n - r \times n - r$ sama dengan nol.

5.2 SARAN

Berdasarkan simpulan di atas disarankan untuk penelitian berikutnya dapat dibahas mengenai Invers Moore – Penrose dari matriks kompleks dan matriks bebas yang berukuran $m \times n$, dan jenis-jenis matriks invers lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1984. *Aljabar Linear Elementer, edisi ketiga.* Bandung : Erlangga.

Anton, H & C. Rosses. 2004. *Aljabar Linear Elementer, Versi Aplikasi, Edisi Kedelapan Jilid I.* Alih bahasa Refina Indriasari dan Irzam Harmein. Jakarta: Erlangga.

Britz, T. 2007. The Moore-Penrose Inverse Of A Free Matrix. *Electronic Journal of Linear Algebra* ISSN 1081-3810, Vol 16, pp. 208-215. Tersedia di http://math.technion.ac.il/iic/ela.html [diakses 02-03-2010]

Halim, S. Invers Secara Umum. *Diktat Aljabar Linear*, halaman 31-34. Teknik Industri UK Petra. Tersedia di http://en.wikipedia.org/wiki/invers(matematic)/ [diakses 8-01-2011].

Lipschuntz ,S & M. Lipson. 2004. *Aljabar Linear, edisi ketiga.* Jakarta: Erlangga.

Supriyono. 1992. *Bahan Ajar Analisis Kompleks.* Penerbit: Institut Teknologi Bandung.

Rahayu, S. 2007. *Matriks Invers Tergeneralisir Atas Bilangan Real*. Skripsi. Semarang: FMIPA Universitas Negeri Semarang.

Wikipedia, *Matriks_(Matematic).* Tersedia di http://en.wikipedia.org/wiki/matriks(matematic)/ [diakses 08-01-2011].

Wikipedia, *Moore Penrose Pseudoinvers.* Tersedia di http://en.wikipedia.org/wiki/Moore Penrose_pseudoinvers/. [diakses 08-01-2011].

Wikipedia, *Graf (Matematika).* Tersedia di http://en.wikipedia.org/wiki/graf(matematic)/ [diakses 14-01-2011].

Wikipedia, *Transitif Clousure.* Tersedia di http://en.wikipedia.org/wiki/Transitif-Clousure/ [diakses 14-01-2011].