



SOLUSI PERSAMAAN PANAS PADA *HEAT EXCHANGER* MENGGUNAKAN TRANSFORMASI *FOURIER*

Vidiya Safitri[✉], S. B. Waluya

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt. 1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang, 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima : September 2019
Disetujui : Juni 2020
Dipublikasikan Juni 2020

Keywords:

Persamaan Panas
Heat Exchanger
Transformasi Fourier
MATLABR2018a

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji mengenai persamaan panas pada *Heat Exchanger* dalam koordinat silinder R^3 . Selanjutnya persamaan panas tersebut diselesaikan menggunakan Transformasi Fourier dengan kaidah invers dan konvolusi. Penyelesaian dilakukan dengan meninjau perpindahan panas pada *Heat Exchanger* secara radial dan aksial. Penyelesaian tersebut menghasilkan suatu persamaan solusi yang kemudian disederhanakan menjadi bentuk suatu fungsi eror untuk disimulasikan. Selanjutnya simulasi dilakukan dengan beberapa asumsi yakni (a) jenis pipa yang digunakan memiliki nilai koefisien difusivitas termal (K) yang berbeda, (b) suhu awal pemanasan 50°C , dan (c) pemanasan dilakukan pada tiga waktu berbeda yakni saat $t = 300$, $t = 600$ dan $t = 900$. Simulasi tersebut kemudian divisualisasikan dengan menggunakan MATLABR2018a. Adapun hasil yang diperoleh yakni (a) persamaan solusi perpindahan panas pada Heat Exchanger merupakan suatu fungsi simetris, (b) pipa *Heat Exchanger* dengan nilai koefisien difusivitas termal terbesar memiliki perpindahan panas yang terjadi lebih cepat, dan (c) perpindahan panas pada saat $t = 900$ lebih cepat dibanding saat $t = 600$, perpindahan panas pada saat $t = 600$ lebih cepat dibanding saat $t = 300$.

Abstract

This study aims to explain the heat equation in the Heat Exchanger in R^3 cylinder coordinates. Then the heat equation was solved using Fourier transform with inverse and convolution rules. The solution is done by reviewing the heat transfer on the Heat Exchanger radially and axially. It produces a solution equation which is then simplified into the form of an error function to be simulated. Furthermore, the simulation is carried out with several assumptions, namely (a) the type of pipe used has a different coefficient of thermal diffusivity (K), (b) the initial heating temperature is 50°C , and (c) heating is carried out at three different times ie when $t = 300$, $t = 600$ and $t = 900$. The simulation is then visualized using MATLABR2018a. The results obtained are (a) the equation of the heat transfer solution at the Heat Exchanger is a symmetrical function, (b) the Heat Exchanger pipe with the largest thermal diffusivity coefficient has a faster heat transfer, and (c) the heat transfer at $t = 900$ faster than $t = 600$, heat transfer when $t = 600$ is faster than $t = 300$.

How to cite:

Safitri, V. & Waluya, S. B. 2019. Solusi Persamaan Panas pada Heat Exchanger Menggunakan Transformasi Fourier. *UNNES Journal of Mathematics*. 9(1): 77-86.

PENDAHULUAN

Matematika merupakan cabang ilmu yang dapat dikembangkan dalam cabang ilmu yang lain. Hal ini didukung dengan adanya ekspresi matematika yang menyediakan bahasa secara umum, sehingga dapat digunakan oleh cabang ilmu lain untuk berkomunikasi secara efektif (Russel, Robinson & Wagner, 2008). Matematika merupakan salah satu sarana yang diperlukan untuk menyelesaikan suatu permasalahan kehidupan sehari-hari (Rahayu, Waluya & Wuryanto, 2012). Adapun salah satu metode atau kajian matematika yang konsepnya banyak diterapkan dalam menyelesaikan permasalahan sehari-hari adalah persamaan differensial (Rahayu, Waluya & Wuryanto, 2012). Dalam hal ini, teori modern tentang analisis dan persamaan differensial secara umum mencakup transformasi fourier, deret fourier, operator integral dan lain sebagainya (Serov, 2017).

Persamaan differensial adalah persamaan yang memuat derivatif dari satu atau lebih variabel terikat yang terkait pada satu atau lebih variabel bebas (Zill & Cullen, 2009). Persamaan differensial dalam bidang sains dan teknologi menyatakan hubungan deterministik yang melibatkan besaran yang berubah secara kontinu yang dimodelkan oleh suatu fungsi dan laju perubahannya dinyatakan sebagai derivatifnya (Rahayu, Waluya & Wuryanto, 2012). Salah satu permasalahan yang dapat diselesaikan menggunakan konsep persamaan differensial adalah perpindahan panas atau *Heat Transfer* (Holman, 2010). Perpindahan panas dituliskan dalam suatu persamaan panas yang mampu menjelaskan permasalahan fisika berupa perambatan partikel dan energi (Maghfur & Kusumastuti, 2017). Adapun persamaan differensial yang mendasari peristiwa perpindahan panas adalah persamaan differensial parsial (Strauss, 2008). Persamaan differensial parsial memuat derivatif parsial dengan dua atau lebih variabel bebas (Chasnov, 2016).

Panas merupakan peristiwa perpindahan energi yang terjadi akibat adanya perbedaan suhu (Tipler & Mosca, 2008). Laju perpindahan energi yang terjadi dalam peristiwa tersebut disebut sebagai perpindahan panas (Holman, 2010). Perpindahan panas dapat diketahui salah satunya pada *Heat Exchanger*.

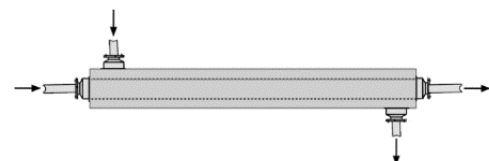
Penelitian terkait permasalahan tentang perpindahan panas telah dilakukan oleh Rahayu, Waluya & Wuryanto (2012), Dita & Widodo (2013), Riza & Popescu (2014),

Choerunnisa & Suhardiyanto (2015). Penelitian terkait metode Transformasi Fourier telah dilakukan oleh Maghfur & Kusumastuti (2017). Kemudian penelitian terkait dengan *Heat Exchanger* telah dilakukan oleh Agung & Arsana (2013), Egidi, Giacomini & Maponi (2018), Wang *et al.*, (2018), Akyurek, Gelis, Sahin & Manay (2018).

METODE

Penelitian ini merupakan suatu studi literatur dimana penulis mengkaji dan memodifikasi penelitian yang telah dilakukan oleh Rahayu, Waluya & Wuryanto (2012), Dita & Widodo (2013) dan Maghfur & Kusumastuti (2017). Rahayu, Waluya & Wuryanto (2012) menganalisis dan memodelkan perpindahan panas pada mesin pengering padi menggunakan metode Pemisahan Variabel. Dalam penelitian tersebut, objek yang digunakan adalah ruang pengering dari mesin pengering padi yang berbentuk silinder. Dita & Widodo (2013) menganalisis karakteristik aliran panas pada logam penghantar listrik. Dalam penelitian tersebut, aliran panas dianalisis menggunakan metode transformasi Laplace yang kemudian visualisasinya dilakukan dengan bantuan MATLAB. Maghfur & Kusumastuti (2017) menganalisis dan memodelkan masalah perpindahan panas pada suatu kabel panjang. Dalam penelitian tersebut panjang kabel diasumsikan mendekati tak hingga, sehingga model matematika untuk perpindahan panasnya dikembangkan dari persamaan panas pada kasus domain tak hingga. Kemudian persamaan diselesaikan menggunakan metode transformasi fourier. Hasil dari penelitian tersebut diperoleh suatu model penyelesaian persamaan difusi panas untuk suatu kabel panjang.

Penelitian ini mengkaji permasalahan yang terkait pada bentuk umum dan penyelesaian persamaan panas menggunakan metode Transformasi Fourier. Kemudian persamaan panas tersebut diimplementasikan pada suatu *Heat Exchanger* yang memiliki tipe *Double-pipe* atau pipa ganda seperti ditunjukkan pada Gambar 1 berikut.



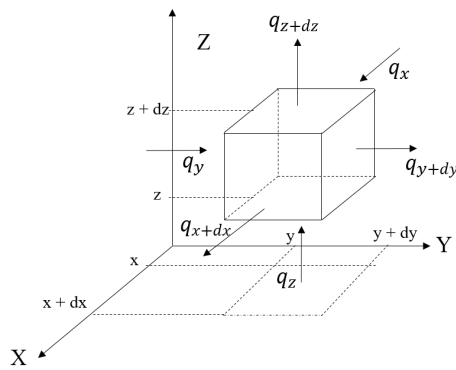
Gambar 1. *Heat Exchanger* tipe *Double-Pipe* (Sumber: Russel, Robinson & Wagner, 2008)

Persamaan panas yang dikaji yakni persamaan panas dimensi tiga dalam koordinat silinder. Selanjutnya solusi persamaan panas yang diperoleh disimulasikan menggunakan program MATLAB2018a. MATLAB merupakan bahasa pemrograman generasi keempat yang mampu menyelesaikan permasalahan berkaitan dengan vektor dan matriks secara sederhana (Irawan, 2012).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bentuk Umum Persamaan Panas

Dipunyai penampang balok sebagai penampang koordinat kartesius pada R^3 seperti Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Perpindahan panas pada penampang koordinat kartesius R^3

dengan

- q_x : Kalor yang masuk searah sumbu X
- q_{x+dx} : Kalor yang keluar searah sumbu X
- q_y : Kalor yang masuk searah sumbu Y
- q_{y+dy} : Kalor yang keluar searah sumbu Y
- q_z : Kalor yang masuk searah sumbu Z
- q_{z+dz} : Kalor yang keluar searah sumbu Z

Misalkan $u = u(x, y, z)$, diketahui bahwa

- 1) Banyaknya panas yang masuk pada balok dari arah X, Y dan Z

$$q_x = -kA \frac{du}{dx}$$

$$q_y = -kA \frac{du}{dy}$$

$$q_z = -kA \frac{du}{dz}$$

- 2) Banyaknya panas yang keluar dari balok

$$q_{x+dx} = -kA \left[\frac{du}{dx} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right]$$

$$q_{y+dy} = -kA \left[\frac{du}{dy} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \right]$$

$$q_{z+dz} = -kA \left[\frac{du}{dz} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) dz \right]$$

- 3) Laju perubahan panas pada balok

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \rho \cdot V \cdot c \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

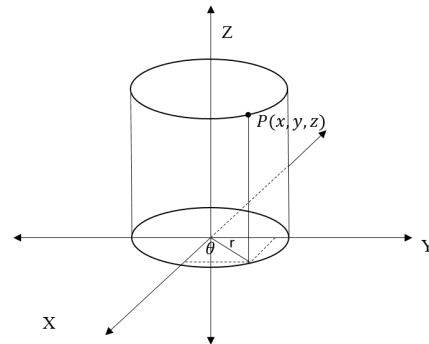
Berdasarkan hukum pertama termodinamika atau hukum kekekalan energi yang menyatakan bahwa “perubahan panas sama dengan jumlah aliran panas yang masuk dikurangi dengan jumlah aliran panas yang keluar”, maka

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = q_x + q_y + q_z - [q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}] \quad (1)$$

Dengan mengoperasikan persamaan (1) dengan persamaan-persamaan yang diketahui, maka diperoleh persamaan panas dimensi tiga koordinat kartesius yakni sebagai berikut.

$$K \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad K = \frac{k}{\rho c} \quad (2)$$

Selanjutnya, dipunyai penampang pipa Heat Exchanger pada koordinat silinder seperti Gambar 3 berikut.



Gambar 3. Penampang pipa HE

Diketahui bahwa

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Sehingga untuk menentukan persamaan panas koordinat tabung ditentukan persamaan-persamaan berikut berdasarkan kaidah turunan parsial dan kaidah rantai.

$$1) \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \theta) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta) + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$2) \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos \theta) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta) + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} \\
 &= -r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y} \\
 3) \quad &\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
 4) \quad &\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\
 &= -r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 &= -r \frac{\partial u}{\partial r} + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
 5) \quad &r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = r^2 \left[\cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \\
 &\left. \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \left[-r \frac{\partial u}{\partial r} + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \\
 &\left. r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\
 \Leftrightarrow &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3) ke persamaan (1) diperoleh

$$K \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4)$$

Selanjutnya, persamaan (4) disebut sebagai persamaan panas dimensi tiga pada koordinat silinder.

Dalam hal ini, oleh sebab perpindahan panas pada pipa simetris maka tidak bergantung pada besarnya sudut yakni θ (Haberman, 2013). Dengan kata lain variabel θ dapat diabaikan. Hal tersebut berakibat bahwa $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$ dan $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$. Sehingga, persamaan panas pada koordinat silinder dapat dituliskan sebagai berikut.

$$K \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5)$$

Penyelesaian Persamaan Panas

Kasus 1

Perpindahan panas pada *Heat Exchanger* dipandang secara radial dengan nilai z yang telah ditentukan (biasanya $z = 0$). Dalam hal ini, perpindahan panas tidak bergantung pada z , sehingga $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. Akibatnya persamaan panas (5) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$K \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6)$$

Perubahan suhu yang terjadi dalam kasus ini terpusat pada titik pusat pipa yakni pada $r = 0$. Sehingga $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ dan $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0$, akibatnya $\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$. Sehingga diperoleh persamaan panas yang lebih sederhana sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 K \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] &= \frac{\partial u}{\partial t} \\
 \Leftrightarrow 2K \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] &= \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7)
 \end{aligned}$$

Kemudian, dilakukan transformasi fourier pada persamaan (7) diperoleh

- 1) $U(\mu, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(r, t) e^{-i\mu r} dr$
- 2) $\hat{f} \left[\frac{\partial}{\partial t} u(r, t) \right] = \frac{\partial}{\partial t} U(\mu, t)$
- 3) $\hat{f} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] = -\mu^2 U(\mu, t)$

Berakibat

$$\begin{aligned}
 2K \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] &= \frac{\partial u}{\partial t} \\
 \Leftrightarrow -2K\mu^2 U(\mu, t) &= \frac{\partial}{\partial t} U(\mu, t) \quad (8)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, persamaan (8) diselesaikan menggunakan kaidah invers dan konvolusi sehingga diperoleh solusi secara berturut-turut sebagai berikut.

$$u(r, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(r) e^{-i\mu r} dr \right] e^{-2K\mu^2 t} e^{i\mu r} dr$$

Dan

$$u(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi Kt}} e^{-\frac{(r-y)^2}{8Kt}} f(y) dy.$$

Misalkan $\omega = \frac{r-y}{2\sqrt{2Kt}}$, maka diperoleh

- 1) $y = r - 2\omega\sqrt{2Kt}$
- 2) $\frac{d\omega}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{2Kt}}$
 $\Leftrightarrow d\omega = -\frac{1}{2\sqrt{2Kt}} dy$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2Kt}} = -d\omega$
- 3) $\omega^2 = \left(\frac{r-y}{2\sqrt{2Kt}} \right)^2$
 $= \frac{(r-y)^2}{8Kt}.$

Berakibat

$$u(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi Kt}} e^{-\frac{(r-y)^2}{8Kt}} f(y) dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(r-y)^2}{4Kt}} f(y) \frac{1}{2\sqrt{2Kt}} dy \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\omega^2} d\omega.
 \end{aligned}$$

Selanjutnya diberikan suatu kondisi awal

$$f(y) = \begin{cases} T, & r_1 \leq y \leq r_2 \\ 0, & \text{untuk } y \text{ yang lain} \end{cases}$$

Jika $y = r - 2\omega\sqrt{2Kt}$, maka

$$\frac{r-r_2}{2\sqrt{2Kt}} \leq \omega \leq \frac{r-r_1}{2\sqrt{2Kt}}$$

Berakibat

$$\begin{aligned}
 u(r, t) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{r-r_2}{2\sqrt{2Kt}}}^{\frac{r-r_1}{2\sqrt{2Kt}}} T e^{-\omega^2} d\omega \\
 \Leftrightarrow u(r, t) &= -\frac{T}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\frac{r-r_1}{2\sqrt{2Kt}}} e^{-\omega^2} d\omega - \int_0^{\frac{r-r_2}{2\sqrt{2Kt}}} e^{-\omega^2} d\omega \right)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, berdasarkan definisi fungsi eror diperoleh

$$\begin{aligned}
 u(r, t) &= -\frac{T}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{r-r_1}{2\sqrt{2Kt}} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{r-r_2}{2\sqrt{2Kt}} \right] \right) \\
 &= -\frac{T}{2} \left(\operatorname{erf} \left[\frac{r-r_1}{2\sqrt{2Kt}} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{r-r_2}{2\sqrt{2Kt}} \right] \right) \quad (9)
 \end{aligned}$$

Dengan

$$\operatorname{erf} \left[\frac{r-r_1}{2\sqrt{2Kt}} \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{r-r_1}{2\sqrt{2Kt}}} e^{-\omega^2} d\omega, \text{ dan}$$

$$\operatorname{erf} \left[\frac{r-r_2}{2\sqrt{2Kt}} \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{r-r_2}{2\sqrt{2Kt}}} e^{-\omega^2} d\omega$$

Kasus 2

Perpindahan panas pada *Heat Exchanger* dipandang secara aksial sepanjang pipa heat exchanger. Dalam hal ini, perpindahan panas tidak bergantung pada r , sehingga $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ dan $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0$. Akibatnya persamaan panas (5) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$K \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (10)$$

Kemudian dilakukan transformasi fourier pada persamaan (10) diperoleh

- 1) $U(\gamma, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(z, t) e^{-i\gamma z} dz$
- 2) $\hat{f} \left[\frac{\partial}{\partial t} u(z, t) \right] = \frac{\partial}{\partial t} U(\gamma, t)$
- 3) $\hat{f} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = -\gamma^2 U(\gamma, t)$

Berakibat

$$\begin{aligned}
 K \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] &= \frac{\partial u}{\partial t} \\
 \Leftrightarrow -K\gamma^2 U(\gamma, t) &= \frac{\partial}{\partial t} U(\gamma, t) \quad (11)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, persamaan (11) diselesaikan menggunakan kaidah invers dan konvolusi sehingga diperoleh solusi secara berturut-turut sebagai berikut.

$$u(z, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\gamma z} dz \right] e^{-K\gamma^2 t} e^{i\gamma z} dz$$

Dan

$$u(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi Kt}} e^{-\frac{(z-y)^2}{4Kt}} f(y) dy$$

Misalkan $\varphi = \frac{z-y}{2\sqrt{Kt}}$, maka diperoleh

- 1) $y = z - 2\varphi\sqrt{Kt}$
- 2) $\frac{d\varphi}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{Kt}}$
 $\Leftrightarrow d\varphi = -\frac{1}{2\sqrt{Kt}} dy$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{Kt}} = -d\varphi$
- 3) $\varphi^2 = \left(\frac{z-y}{2\sqrt{Kt}} \right)^2$
 $= \frac{(r-y)^2}{4Kt}$.

Berakibat

$$\begin{aligned}
 u(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi Kt}} e^{-\frac{(z-y)^2}{4Kt}} f(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(z-y)^2}{4Kt}} f(y) \frac{1}{2\sqrt{Kt}} dy \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\varphi^2} d\varphi.
 \end{aligned}$$

Selanjutnya diberikan suatu kondisi awal

$$f(y) = \begin{cases} T, & z_1 \leq y \leq z_2 \\ 0, & \text{untuk } y \text{ yang lain} \end{cases}$$

Jika $y = z - 2\varphi\sqrt{Kt}$, maka

$$\frac{z-z_2}{2\sqrt{Kt}} \leq \varphi \leq \frac{z-z_1}{2\sqrt{Kt}}$$

Berakibat

$$\begin{aligned}
 u(z, t) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z-z_2}{2\sqrt{Kt}}}^{\frac{z-z_1}{2\sqrt{Kt}}} T e^{-\varphi^2} d\varphi \\
 \Leftrightarrow u(z, t) &= -\frac{T}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\frac{z-z_1}{2\sqrt{Kt}}} e^{-\varphi^2} d\varphi - \int_0^{\frac{z-z_2}{2\sqrt{Kt}}} e^{-\varphi^2} d\varphi \right)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, berdasarkan definisi fungsi eror diperoleh

$$u(z, t) = -\frac{T}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{z-z_1}{2\sqrt{Kt}} \right] - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{z-z_2}{2\sqrt{Kt}} \right] \right) \\ = -\frac{T}{2} \left(\operatorname{erf} \left[\frac{z-z_1}{2\sqrt{Kt}} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{z-z_2}{2\sqrt{Kt}} \right] \right)$$

Dengan

$$\operatorname{erf} \left[\frac{z-z_1}{2\sqrt{Kt}} \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z-z_1}{2\sqrt{Kt}}} e^{-\varphi^2} d\varphi, \text{ dan}$$

$$\operatorname{erf} \left[\frac{z-z_2}{2\sqrt{Kt}} \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z-z_2}{2\sqrt{Kt}}} e^{-\varphi^2} d\varphi$$

SIMULASI

Simulasi dilakukan dengan menerapkan solusi persamaan panas yang telah diperoleh terhadap beberapa jenis bahan pipa Heat Exchanger yang digunakan. Adapun koefisien konduktifitas termal dari masing-masing jenis bahan pipa diperlihatkan pada tabel 1 berikut

Tabel 1. Koefisien Konduktifitas Termal

Jenis logam	k (W/M °C)	ρ (Kg/m ³)	c (J/Kg °C)	K
Baja	43	7850	450	$1,21 \times 10^{-5}$
Temba ga	385	8920	390	$1,11 \times 10^{-4}$
Alumu nium	202	2700	900	$9,7 \times 10^{-5}$
Besi	73	7900	450	$2,3 \times 10^{-5}$

Kasus 1

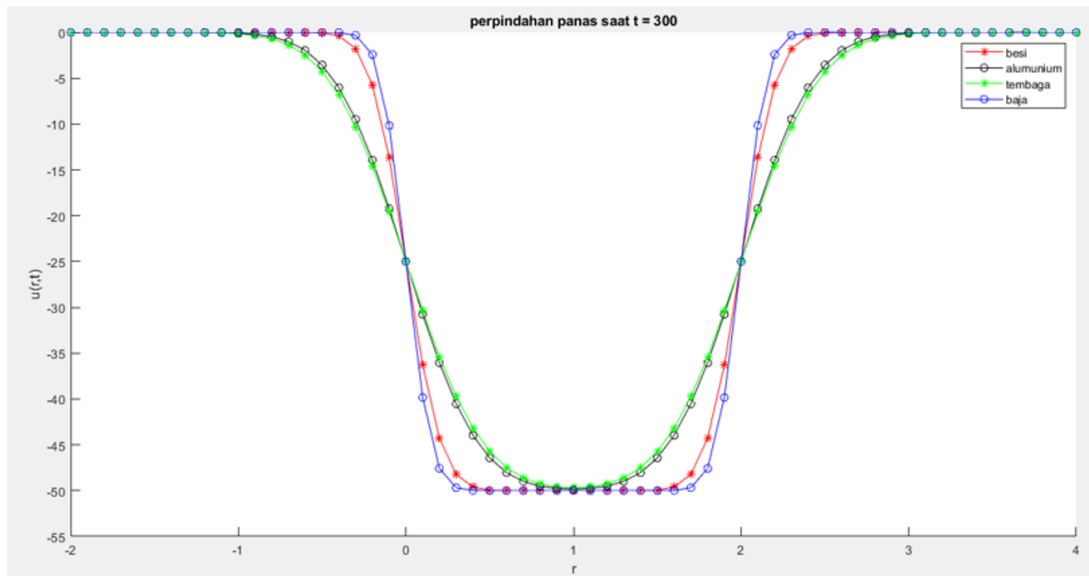
Simulasi dilakukan untuk mengetahui perpindahan panas pada pipa *Heat Exchanger* secara radial. Dalam kasus ini, perpindahan panas yang disimulasikan ditinjau pada jari-jari (r) pipa dengan asumsi berikut.

- 1) $u(r, 0) = 50^\circ\text{C}$
- 2) $0 \leq r \leq 2$
- 3) $t = 300, t = 600, t = 900$

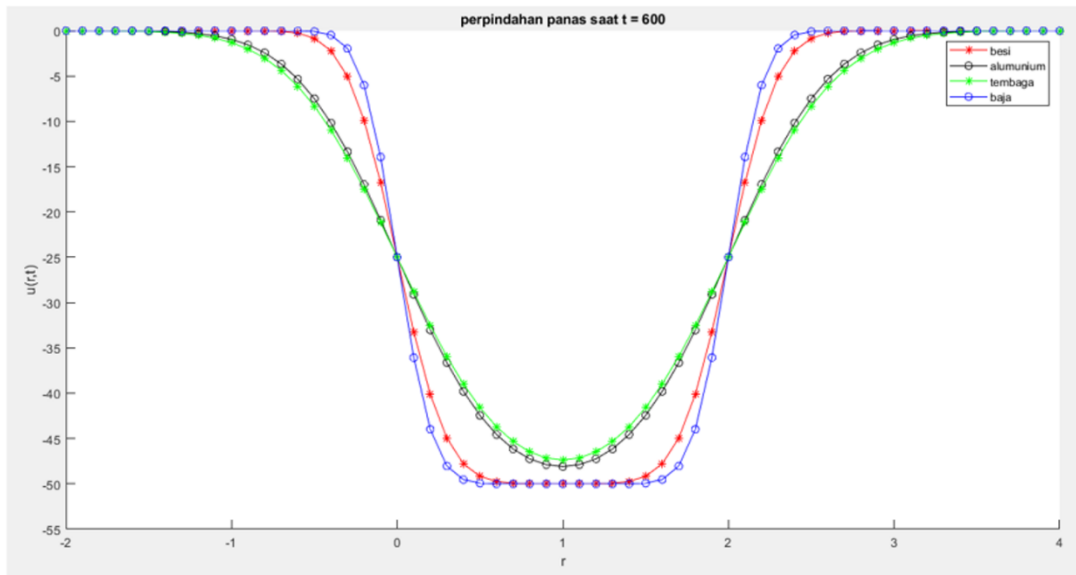
Adapun persamaan solusi yang telah diperoleh ditunjukkan sebagai berikut.

$$u(r, t) = -\frac{T}{2} \left(\operatorname{erf} \left[\frac{r-r_1}{2\sqrt{2Kt}} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{r-r_2}{2\sqrt{2Kt}} \right] \right)$$

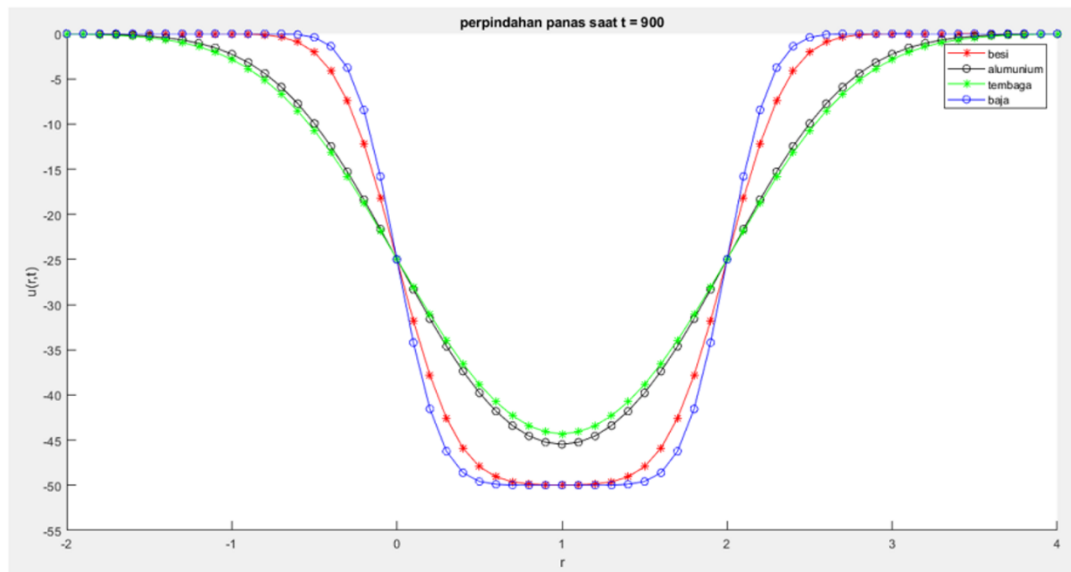
Dengan menerapkan persamaan solusi tersebut diperoleh hasil simulasi seperti ditunjukkan dalam Gambar 4 berikut.



Gambar 4 (a). Perpindahan panas pada $0 \leq r \leq 2$ saat $t = 300$



Gambar 4 (b). Perpindahan panas pada $0 \leq r \leq 2$ saat $t = 600$



Gambar 4 (c). Perpindahan panas pada $0 \leq r \leq 2$ saat $t = 900$

Kasus 2

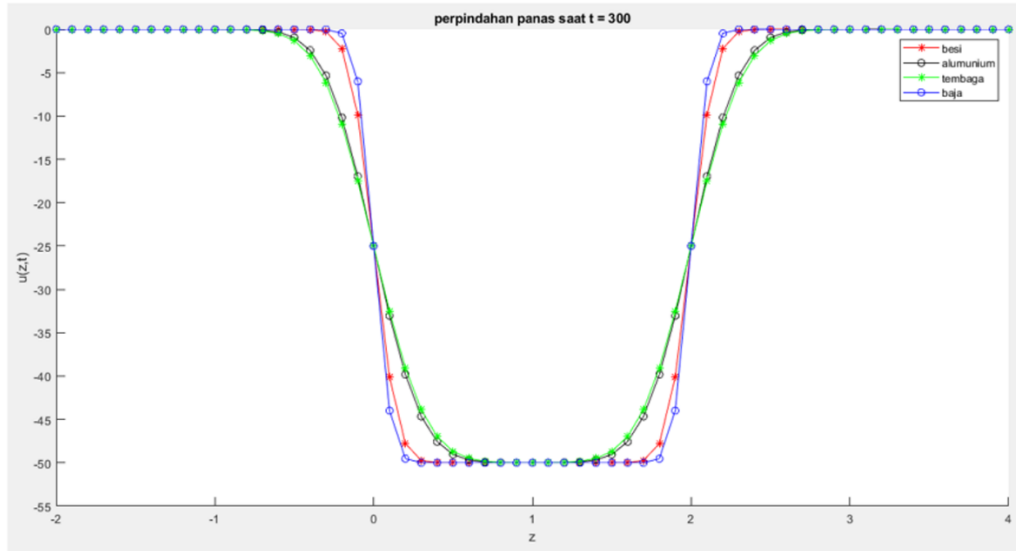
Simulasi dilakukan untuk mengetahui perpindahan panas pada pipa *Heat Exchanger* secara aksial. Dalam kasus ini, perpindahan panas yang disimulasikan ditinjau pada panjang (z) pipa dengan asumsi berikut.

- 1) $u(z, 0) = 50^\circ\text{C}$
- 2) $0 \leq z \leq 2$
- 3) $t = 300, t = 600, t = 900$

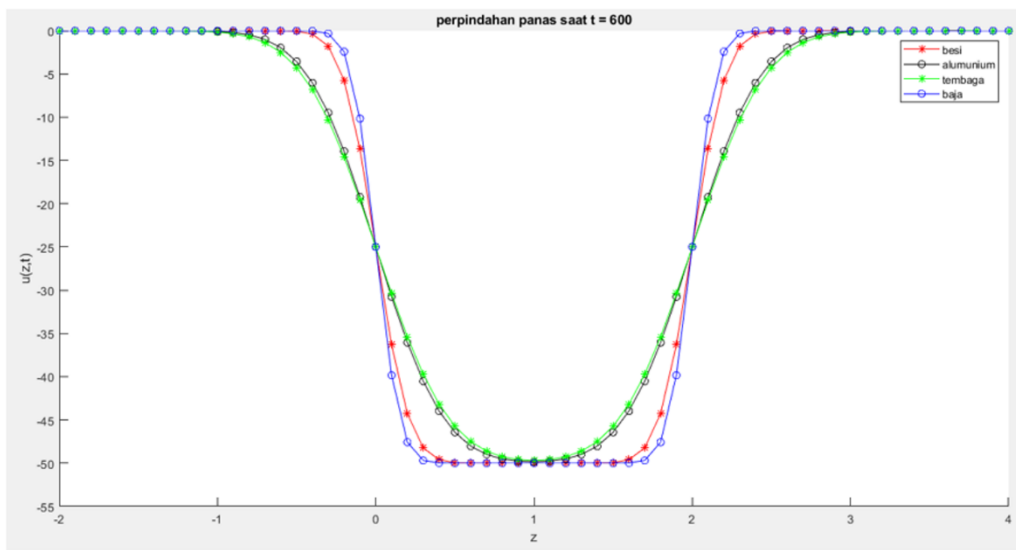
Adapun persamaan solusi yang telah diperoleh ditunjukkan sebagai berikut.

$$u(z, t) = -\frac{T}{2} \left(\operatorname{erf} \left[\frac{z - z_1}{2\sqrt{Kt}} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{z - z_2}{2\sqrt{Kt}} \right] \right)$$

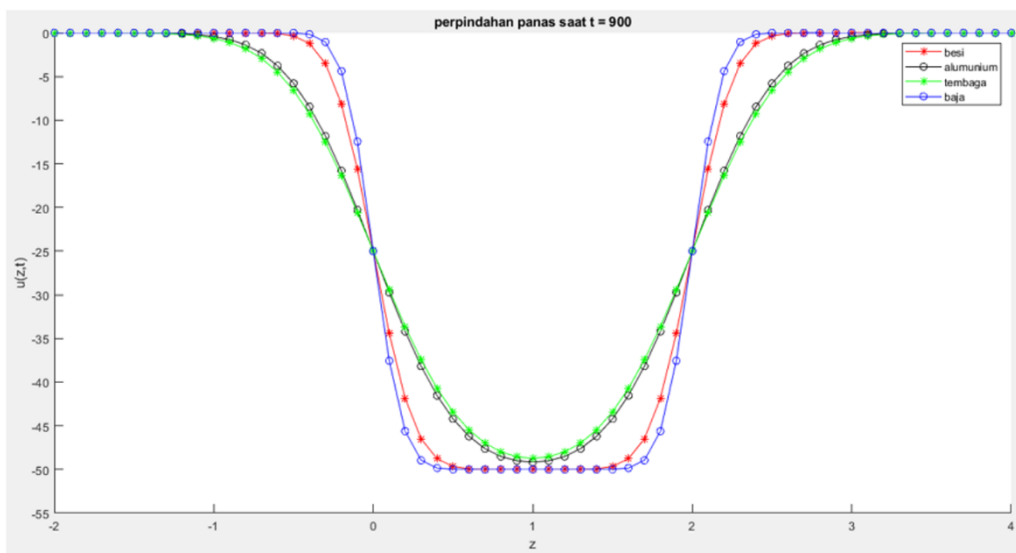
Dengan menerapkan persamaan solusi tersebut diperoleh hasil simulasi seperti ditunjukkan dalam Gambar 5 berikut.



Gambar 5 (a). Perpindahan panas pada $0 \leq z \leq 2$ saat $t = 300$



Gambar 5 (b). Perpindahan panas pada $0 \leq z \leq 2$ saat $t = 600$



Gambar 5 (c). Perpindahan panas pada $0 \leq z \leq 2$ saat $t = 900$

PENUTUP

Persamaan panas pada R^3 koordinat kartesius yakni $K \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t}$, dijabarkan untuk memperoleh persamaan panas *Heat Exchanger* pada R^3 dalam koordinat silinder. Dari hasil penjabaran tersebut diperoleh persamaan panas *Heat Exchanger* pada R^3 dalam koordinat silinder yakni

$$K \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t}$$

dengan

K merupakan koefisien konduktifitas,
 r merupakan jari-jari pipa *Heat Exchanger*,
 $r > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$,
 z merupakan panjang pipa *Heat Exchanger*,
 $z > 0$.

Selanjutnya perpindahan panas pada *Heat Exchanger* ditinjau dalam dua kasus. Kasus yang pertama perpindahan panas ditinjau dari titik pusat menuju dinding pipa sepanjang jari-jari pipa. Dengan kata lain, dalam kasus ini persamaan panas hanya bergantung pada r . Sehingga diperoleh persamaan panas sebagai berikut.

$$2K \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Kemudian, kasus yang kedua yakni perpindahan panas ditinjau dari aliran panas sepanjang pipa. Dengan kata lain, dalam kasus ini persamaan panas hanya bergantung pada z . Sehingga diperoleh persamaan panas sebagai berikut.

$$K \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Penyelesaian persamaan panas pada *Heat Exchanger* dilakukan menggunakan metode Transformasi Fourier. Oleh sebab persamaan panas tersebut ditinjau dalam dua kasus, maka diperoleh dua penyelesaian.

a. Solusi untuk kasus 1

$$u(r, t) = -\frac{T}{2} \left(\operatorname{erf} \left[\frac{r - r_1}{2\sqrt{2Kt}} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{r - r_2}{2\sqrt{2Kt}} \right] \right)$$

b. Solusi untuk kasus 2

$$u(z, t) = -\frac{T}{2} \left(\operatorname{erf} \left[\frac{z - z_1}{2\sqrt{Kt}} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{z - z_2}{2\sqrt{Kt}} \right] \right)$$

Pipa *Heat Exchanger* dengan nilai koefisien konduksi termal terbesar memiliki perpindahan panas yang terjadi lebih cepat. Selain itu, perpindahan panas yang terjadi semakin lama menjadi semakin cepat. Hal ini ditunjukkan

oleh perpindahan panas pada saat $t = 900$ lebih cepat dibanding saat $t = 600$ dan $t = 300$. Permasalahan yang dibahas pada penelitian ini masih terbatas pada satu tipe *Heat Exchanger* dan penerapan solusi persamaan panas yang dikaji hanya pada kondisi awal berupa fungsi konstan. Sehingga, untuk penelitian selanjutnya dapat memperluas kajian pada penerapan solusi persamaan panas dengan kondisi awal berupa fungsi yang lain. Selain itu, penelitian selanjutnya dapat menerapkan persamaan dimensi tiga pada objek yang lain. Kemudian penyelesaian solusi persamaan panas menggunakan Transformasi Fourier dilakukan pada R^3 secara langsung.

DAFTAR PUSTAKA

- Agung, D. P., & Arsana, I. (2013). Pengaruh Temperatur Fluida Masuk Terhadap Kapasitas Penukar Panas Jenis Pembuluh Dan Kawat Pada Konveksi Bebas. *JTM*, 1 (2). 80-85.
- Akyurek, E.F., Gelis, K., Sahin, B., & Manay, E. (2018). Experimental Analysis for Heat Transfer of Nanofluid with Wire Coil Turbulators in a Concentric Tube *Heat Exchanger*, Results in Physics, doi:<https://doi.org/10.1016/j.rinp.2018.02.067>
- Chasnov, J. R. (2016). *Introduction to Differential Equations*. Hong Kong: The Hong Kong University of Science and Technology
- Choerunnisa, N., & Suhardiyanto, H. (2015). Analisis Pindah Panas pada Pipa Utama Sistem Hidroponik dengan Pendinginan Larutan Nutrisi. *JTEP Jurnal Keteknik Pertanian*. 3(1), 1-8.
- Dita, M. F., & Widodo, B. (2013). Karakteristik Aliran Panas dalam Logam Penghantar Listrik. *Jurnal Teknik POMITS*, 2(1), A-1 – A-5.
- Egidi, N., Giacomini, J., & Maponi, P. (2018). A Mathematical Model for the Analysis of the Flow and Heat Transfer Problem in U-shaped Geothermal Exchanger. *Applied Mathematical Modelling* doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.03.024>
- Holman, J. P. (2010). *Heat Transfer (10thed)*. New York: The McGraw-Hill Companies.
- Irawan, R. A. (2012). *Buku Pintar Pemrograman MATLAB: Cara Cepat dan Mudah Mempelajari Bahasa Pemrograman*

Penyelesaian Masalah Komputasi.
Yogyakarta: MediaKom.

- Maghfur, M. A., & Kusumastuti, A. (2017). Penyelesaian Masalah Difusi Panas pada Suatu Kabel Panjang. Seminal Nasional Matematika dan Aplikasinya Universitas Airlangga. 65-72.
- Rahayu, N., Waluya, St. B., & Wuryanto. (2012). Model Perpindahan Kalor Pada Mesin Pengering Padi. *UNNES Journal of Mathematics*, 1(1), 21-27.
- Riza, I., & Popescu, M. C. (2014). An Analytical Solution to Heat Equation. *Journal of Basic & Applied Sciences*, Vol. 10, 267-270.
- Russel, T. W. F., Robinson, A. S., & Wagner, N. J. (2008). *Mass and Heat Transfer Analysis of Mass Contractors*. USA: Cambridge University Press.
- Serov, V. (2017). *Fourier Series, Fourier Transform and Their Applications to Mathematical Physics*. Finland: Springer.
- Strauss, W. A. (2008). *Partial Differential Equations (2nd ed.)*. USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Tipller, P.A. & Mosca, G. (2008). *Physics Scientist and Engineers (6thed.)*. New York: W. H. Freeman and Company.
- Wang, Y., *et al.* (2018). Numerical and Experimental Investigation of The Heat Exchanger with Trapezoidal Baffle, *International Journal of Heat and Mass Transfer*,
[doi:https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.07.045](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.07.045).
- Zill, D. G., & Cullen, M. R. (2009). *Differential Equations with Boundary Value Problems (7th ed.)*. Canada: Brooks/Cole Cengage learning.