



PEMODELAN MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT TUBERKULOSIS DENGAN STRATEGI DOTS

Mustiko Rizki Ramadhan[✉], Stevanus Budi Waluya, dan Muhammad Kharis

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt. 1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima September 2016
Disetujui Oktober 2016
Dipublikasikan November 2018

Keywords:
*Epidemi Model, Tuberculosis,
DOTS, Stability.*

Abstrak

Indonesia merupakan negara ke-4 dengan jumlah pasien tuberculosis (TB) terbanyak di dunia. Penelitian ini membahas model matematika untuk penyebaran penyakit TB dengan strategi DOTS (Directly Observed Treatment Short-course) dengan menggunakan model SEITR, sebagai upaya dalam menekan kasus TB. Tujuan penelitian ini adalah membangun model matematika, menganalisis titik kestabilan, dan menginterpretasikan simulasi model matematika dengan *maple*. Analisis yang dilakukan menghasilkan angka rasio reproduksi dasar (R_0). Setelah menganalisis dua titik kesetimbangan dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal apabila $R_0 < 1$. Sedangkan titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik lokal apabila $R_0 > 1$. Selanjutnya, untuk mengilustrasikan model dilakukan simulasi model menggunakan *maple* menghasilkan beberapa fakta, yaitu semakin kecil nilai peluang individu terinfeksi TB (β) dan semakin besar nilai laju individu TB aktif menjalani pengobatan DOTS (ω) akan memperkecil populasi penderita TB aktif.

Abstract

Indonesia is the 4th in the number of tuberculosis (TB) patients in the world. This study discusses the mathematical models for the spread of TB with DOTS strategy using a SEITR model, in an effort to suppress TB cases. The purpose of this study is to develop a mathematical model, analyze the point of stability, and interpret the simulation of mathematical models with maple. The analysis carried out to produce numbers basic reproduction ratio (R_0). After analyzing two equilibrium point it can be concluded that the disease-free equilibrium point will be the local asymptotically stable if $R_0 < 1$. While the endemic equilibrium point will be the asymptotically stable if $R_0 > 1$. Furthermore, to illustrate the model of the simulation model using maple program produces some of the fact, ie the smaller the probability of individuals infected with TB (β) and the greater the value of the rate of individuals undergoing treatment DOTS for active TB (ω) will reduce the population of active TB.

How to Cite

Ramadhan, M.R., Waluya, S.B., & Kharis, M. (2018). Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Tuberculosis dengan Strategi Dots. *UNNES Journal of Mathematics* 7(2): 130- 141.

PENDAHULUAN

Perkembangan dan kemajuan dunia modern saat ini tidak bisa dipisahkan dari matematika. Hampir seluruh aktivitas manusia berkaitan dengan matematika. Matematika digunakan sebagai alat penting di berbagai bidang, termasuk ilmu pengetahuan alam, rekayasa medis dan ilmu pengetahuan sosial seperti ekonomi dan psikologi. Penggunaan matematika dalam kehidupan sehari-hari nampak pada pengembangan aplikasi matematika pada seluruh aspek kehidupan manusia.

Proses pemodelan matematika yaitu mengetahui masalah pada dunia nyata kemudian dipresentasikan ke dalam pernyataan matematik, sehingga diperoleh pemahaman dari dunia nyata ini menjadi lebih tepat. Menurut Widowati & Sutimin (2007), peran matematika pada masalah kehidupan sehari-hari maupun pada ilmu-ilmu lain disajikan dalam pemodelan matematika. Representasi matematika yang dihasilkan dari pemodelan matematika dikenal sebagai model matematika. Model matematika juga digunakan dalam banyak disiplin ilmu dan berbagai bidang studi yang berbeda.

Penyakit tuberkulosis (TB) merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh mycobacterium tuberculosis. Hal ini merupakan masalah besar karena penyakit menular ini memiliki angka kematian yang tinggi (Shah & Gupta, 2013). Sebagian besar TB menyerang paru-paru tetapi dapat juga mengenai organ tubuh lain. Gejala penderita TB di antaranya batuk-batuk, sakit dada, nafas pendek, hilang nafsu makan, berat badan turun, demam, kedinginan, dan kelelahan (Rafflesia, 2014).

Berdasarkan data World Health Organization (WHO) pada tahun 2014, penderita TB di Indonesia merupakan negara ke-4 dengan jumlah pasien tuberkulosis terbanyak di dunia setelah India, Cina, dan Afrika Selatan. Hal ini disebabkan oleh lingkungan yang tidak sehat, semakin meningkatnya kejadian gizi buruk di sebagian negara berkembang, serta munculnya epidemik HIV/AIDS khususnya di Indonesia. Lebih cepatnya penyebaran TB juga mengakibatkan cukup tingginya jumlah individu latently-infected (individu-individu pengidap penyakit tetapi belum menularkan penyakit) dan jumlah individu actively-infected (individu – individu pengidap penyakit dan dapat menularkan penyakit).

Jia et al, sebagaimana dikutip oleh Atkins (2008) telah memodelkan penyebaran TB

dalam lima kelas dengan membagi kelas latent menjadi dua bagian. Model matematikanya dapat dilihat pada Sistem (1).

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= b - \beta SI - \mu S, \\
 \frac{dE_1}{dt} &= p_1 \beta SI - (k_1 + \mu) E_1, \\
 \frac{dE_2}{dt} &= p_2 \beta SI - (k_2 + \mu) E_2, \\
 \frac{dI}{dt} &= (k_1 E_1 + k_2 E_2) - (r + \mu + \mu_r) I, \\
 \frac{dR}{dt} &= rI - \mu R,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Tim TB *External Monitoring Mission* melakukan monitoring dan evaluasi tahun 2005 hasil menunjukkan bahwa angka penemuan kasus TB di RS cukup tinggi, tetapi angka keberhasilan pengobatan rendah dengan angka putus berobat yang masih tinggi. Kondisi tersebut berpotensi untuk menciptakan masalah besar yaitu peningkatan kemungkinan terjadi resistensi terhadap obat anti tuberkulosis (MDR-TB) (KEMENKES, 2010). Salah satu strategi untuk pengendalian TB di Indonesia yaitu dengan menerapkan strategi DOTS (*Directly Observed Treatment Short-course*) atau pengawasan langsung menelan obat jangka pendek. Dengan misi menurunkan angka kesakitan dan kematian akibat TB dalam rangka pencapaian tujuan pembangunan kesehatan untuk meningkatkan derajat kesehatan masyarakat (KEMENKES, 2011).

Kalu & Inyama (2012), membuat model matematika dengan mempertimbangkan metode penyembuhan dengan DOTS. Dalam model matematika tersebut terbagi menjadi lima kelas yaitu bayi tervaksinasi (M), Susceptible (S), Exposed (L), Infected (I), dan Recovered (R). Model matematikanya dapat dilihat pada Sistem (2).

$$\begin{aligned}
 \frac{dM}{dt} &= cP - (\varphi - \beta)M, \\
 \frac{dS}{dt} &= (1 - c)P + \varphi M + \pi R - (kI + \beta)S, \\
 \frac{dL}{dt} &= kSI - (q + \mu + \beta)L, \\
 \frac{dI}{dt} &= \mu L - (\psi + \eta + \beta)I, \\
 \frac{dR}{dt} &= qL + \psi I - (\pi + \beta)R, \\
 N(t) &= M(t) + S(t) + L(t) + I(t) + R(t).
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Model matematika yang dibahas oleh Kalu & Inyama (2012), menjelaskan bahwasanya individu laten TB dapat sembuh tanpa menjadi individu TB aktif dan individu yang sembuh dapat kembali menjadi individu yang rentan terinfeksi TB.

Berdasarkan uraian di atas penulis tertarik untuk mengetahui sejauh mana pengaruh strategi DOTS dalam pengendalian TB di Indonesia dengan menggunakan tipe SEITR, dengan judul “Pemodelan Matematika Peenyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Strategi DOTS”.

Rumusan masalah dari penelitian ini bagaimana model matematika pada penyebaran penyakit tuberkulosis dengan strategi DOTS, bagaimana analisis titik kesetimbangan pada penyebaran penyakit tuberkulosis dengan strategi DOTS, dan bagaimana simulasi model matematika pada penyebaran penyakit tuberkulosis dengan strategi DOTS menggunakan *software maple*.

Tujuan dari penelitian ini membangun model, menganalisis dan menginterpretasikan simulasi model matematika pada penyebaran penyakit tuberkulosis dengan strategi DOTS.

Model epidemi SEIR merupakan model epidemi yang merupakan perkembangan dari model SIR dengan tambahan kelas *Exposed* dalam artian individu terinfeksi tetapi belum menunjukkan gejala klinis (dalam masa inkubasi) dan belum dapat menularkan penyakit (Haberman, 1977).

Definisi 1. Diberikan sistem persamaan differensial $\dot{x} = f(x)$, Titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik ekuilibrium jika $f(\bar{x}) = 0$ (Perko, 1991).

Definisi 2. Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem $\dot{x} = f(x)$, dengan $f_i \in C(E), i = 1, 2, \dots, n$. Matriks transformasi L dinamakan matriks Jacobi dari fungsi f dan ditulis dengan lambang $J_f(\bar{x})$. Jadi matriks Jacobi dari fungsi f adalah

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

(Kocak, 1991)

Definisi 3. Diberikan matriks Jacobian $J_f(\bar{x})$ dari sistem $\dot{x} = f(x)$, dengan nilai eigen λ .

(1) Jika semua bagian real nilai eigen dari matriks $J_f(\bar{x})$ bernilai negatif, maka titik ekuilibrium \bar{x} dari sistem nonlinear $\dot{x} = f(x)$, stabil asimtotik. (2) Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks $J_f(\bar{x})$ yang bagian realnya positif, maka titik ekuilibrium \bar{x} dari sistem nonlinear $\dot{x} = f(x)$, tidak stabil (Widowati & Sutimin, 2007).

Dalam penelitian ini untuk mencari nilai eigen penulis menggunakan kriteria Routh Hurwitz, definisi dari Routh Hurwitz sendiri

sebagai berikut. Diberikan Polinomial $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$, dengan a_0 positif dan a_k bilangan real, $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Matriks Hurwitz untuk $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$ didefinisikan sebagai matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ yang berbentuk sebagai berikut.

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Pembuat nol dari Polinomial $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$ mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika Pertidaksamaan $\frac{a_1}{a_0} > 0, \frac{a_2}{a_0} > 0, \dots, \frac{a_n}{a_0} > 0$ dipenuhi dan $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0$

(Edelstein-Keshet, 1988)

METODE

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur atau kajian pustaka dengan tahap-tahap: (1) penentuan masalah, (2) perumusan masalah, (3) studi pustaka, (4) analisis dan pemecahan masalah, (5) penarikan kesimpulan. Pemilihan dan perumusan masalah diperlukan untuk membatasi permasalahan sehingga diperoleh bahan kajian yang jelas. Sehingga akan lebih mudah untuk menentukan langkah dalam memecahkan masalah tersebut.

Tahap studi pustaka dilakukan dengan mengkaji sumber-sumber pustaka sehingga diperoleh gambaran umum penyakit tuberkulosis dan populasinya, model matematika, model epidemik SEIR, sistem persamaan diferensial, titik ekuilibrium, nilai eigen dan vektor eigen, analisis kestabilan titik ekuilibrium dan simulasi model dengan *software maple*.

Dalam pembahasan masalah dilakukan beberapa langkah pokok yaitu sebagai berikut.

(1) Membangun model matematika pada penyebaran penyakit tuberkulosis dengan strategi DOTS, (2) Mencari titik kesetimbangan dari model matematika, (3) Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0), (4) Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan, (5) Menginterpretasikan solusi model matematika.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari hasil penelitian diperoleh model matematika pada penyebaran penyakit tuberkulosis dengan strategi DOTS. Dalam

penelitian ini dianalisis dinamika penyebaran penyakit tuberkulosis dalam dua keadaan yang berbeda, yaitu ketika $R_0 < 1$ dan ketika $R_0 > 1$. Dalam penelitian ini untuk mengetahui pengaruh nilai ω dan nilai β , maka dalam penelitian ini dalam simulasi akan memvariasikan nilai ω dan nilai β . Untuk mempertimbangkan pengaruh peluang banyak individu yang terinfeksi TB, dianalisa ketika dinamika populasi $\beta = 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$.

Selanjutnya untuk mempertimbangkan pengaruh pengobatan dengan DOTS, dianalisa ketika dinamika populasi dianalisa untuk kasus endemik ($R_0 > 1$) dengan nilai $\omega = 0,1; 0,2; 0,35; 0,5$ dan untuk kasus non endemik ($R_0 < 1$) dengan nilai $\omega = 0,7; 0,85; 1,15; 1,4$.

Dalam pembentukan model matematika yang dibentuk, terdapat variabel-variabel dan parameter-parameter yang digunakan dalam model, variabel-variabel dan parameter-parameter dapat dilihat pada Tabel 1 dan Tabel 2.

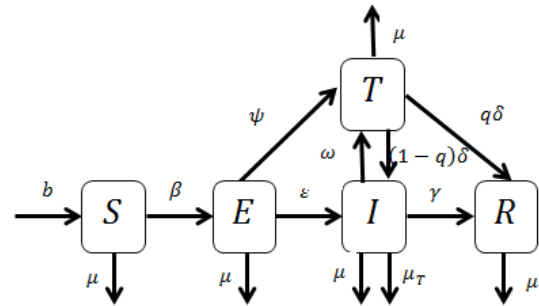
Tabel 1 Daftar Variabel-variabel

Variabel	Keterangan
$S(t)$	Banyak individu yang rentan pada waktu t (dalam ribuan)
$E(t)$	Banyak individu yang laten TB pada waktu t (dalam ribuan)
$I(t)$	Banyak individu yang terinfeksi TB pada waktu t (dalam ribuan)
$T(t)$	Banyak individu yang menjalani pengobatan DOTS (dalam ribuan)
$R(t)$	Banyak individu yang sembuh TB (dalam ribuan)

Tabel 2 Daftar Parameter-parameter

Parameter	Keterangan
b	Laju recruitment (dalam ribuan)
β	Peluang individu terinfeksi TB
ϵ	Laju individu laten TB menjadi individu aktif TB
ψ	Laju individu laten TB menjalani pengobatan DOTS
γ	Laju kesembuhan alami
ω	Laju individu TB aktif menjalani pengobatan DOTS
δ	Peluang individu sembuh dengan pengobatan DOTS
q	Proporsi individu kelas <i>treatment</i> sembuh
μ	Laju kematian alami
μ_T	Laju kematian akibat TB

Model matematika proses penyebaran penyakit tuberkulosis dengan strategi DOTS dalam suatu populasi dapat disajikan dengan diagram transfer seperti pada Gambar 1.



Gambar 1 Diagram Skematik Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Strategi DOTS

Dari Gambar 1 diperoleh model matematika yang dapat dilihat pada Sistem (3).

$$\begin{aligned}
 S' &= \frac{dS}{dt} = b - \beta SI - \mu S, \\
 E' &= \frac{dE}{dt} = \beta SI - (\epsilon + \mu + \psi)E, \\
 I' &= \frac{dI}{dt} = \epsilon E + (1 - q)\delta T - (\omega + \gamma + \mu + \mu_T)I, \quad (3) \\
 T' &= \frac{dT}{dt} = \psi E + \omega I - (\delta + \mu)T, \\
 R' &= \frac{dR}{dt} = \gamma I + q\delta T - \mu R, \\
 N(t) &= S(t) + E(t) + I(t) + T(t) + R(t).
 \end{aligned}$$

Untuk mempermudah analisis model diasumsikan bahwa individu yang menjalani pengobatan DOTS tidak akan putus obat artinya $q = 1$. Sehingga Sistem (3) menjadi,

$$\begin{aligned}
 S' &= \frac{dS}{dt} = b - \beta SI - \mu S, \\
 E' &= \frac{dE}{dt} = \beta SI - (\epsilon + \mu + \psi)E, \\
 I' &= \frac{dI}{dt} = \epsilon E - (\omega + \gamma + \mu + \mu_T)I, \quad (4) \\
 T' &= \frac{dT}{dt} = \psi E + \omega I - (\delta + \mu)T, \\
 R' &= \frac{dR}{dt} = \gamma I + \delta T - \mu R, \\
 N(t) &= S(t) + E(t) + I(t) + T(t) + R(t).
 \end{aligned}$$

Dari Sistem (4) dapat dicari titik kesetimbangannya dengan membuat nol ruas kanan dan didefinisikan $X = \epsilon + \mu + \psi$, $Y = \omega + \gamma + \mu + \mu_T$, dan $Z = \delta + \mu$ pada sistem persamaan tersebut, sehingga diperoleh Sistem (5) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 b - \beta SI - \mu S &= 0 \\
 \beta SI - XE &= 0 \\
 \varepsilon E - YI &= 0 \\
 \psi E + \omega I - ZT &= 0 \\
 \gamma I + \delta T - \mu R &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Persamaan 1 dari Sistem (5) menjadi,

$$\begin{aligned}
 b - \beta SI - \mu S &= 0 \\
 \Leftrightarrow \beta SI + \mu S &= b \\
 \Leftrightarrow S(\beta I + \mu) &= b \\
 \Leftrightarrow S &= \frac{b}{\beta I + \mu}.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Persamaan 3 dari Sistem (5) menjadi,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon E - YI &= 0 \\
 \Leftrightarrow \varepsilon E &= YI \\
 \Leftrightarrow E &= \frac{YI}{\varepsilon}.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Substitusi (7) ke persamaan 2 dari Sistem (5) diperoleh,

$$\begin{aligned}
 \beta SI - XE &= 0 \\
 \Leftrightarrow \beta SI - X \left(\frac{YI}{\varepsilon} \right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow I \left(\beta S - \frac{XY}{\varepsilon} \right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow I = 0 \vee \beta S &= \frac{XY}{\varepsilon} \\
 \Leftrightarrow I = 0 \vee S &= \frac{XY}{\beta \varepsilon}.
 \end{aligned}$$

Kasus $I = 0$

Dari (6) diperoleh,

$$S = \frac{b}{\beta I + \mu} = \frac{b}{\mu}.$$

Dari (7) diperoleh,

$$E = \frac{YI}{\varepsilon} = 0.$$

Persamaan 4 dari Sistem (5) menjadi,

$$\psi E + \omega I - ZT = 0 \Leftrightarrow T = 0.$$

Persamaan 5 dari Sistem (5) menjadi,

$$\gamma I + \delta T - \mu R = 0 \Leftrightarrow R = 0.$$

Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit ($R_0 < 1$) sebagai berikut,

$$P_0 = (S, E, I, T, R) = \left(\frac{b}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right).$$

Kasus $I \neq 0$:

Misalkan $P_1 = (S^*, E^*, I^*, T^*, R^*)$ sehingga Sistem (5) menjadi,

$$b - \beta S^* I^* - \mu S^* = 0$$

$$\beta S^* I^* - X E^* = 0$$

$$\varepsilon E^* - Y I^* = 0
 \tag{8}$$

$$\psi E^* + \omega I^* - Z T^* = 0$$

$$\gamma I^* + \delta T^* - \mu R^* = 0$$

$$\text{Jelas } S^* = \frac{XY}{\beta \varepsilon}
 \tag{9}$$

Sehingga persamaan 1 dari Sistem (6) menjadi,

$$\begin{aligned}
 b - \beta S^* I^* - \mu S^* &= 0 \\
 \Leftrightarrow b - \beta \left(\frac{XY}{\beta \varepsilon} \right) I^* - \mu \left(\frac{XY}{\beta \varepsilon} \right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{XY}{\varepsilon} I^* &= b - \mu \left(\frac{XY}{\beta \varepsilon} \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{XY}{\varepsilon} I^* &= \frac{b\beta \varepsilon - \mu XY}{\beta \varepsilon} = 0 \\
 \Leftrightarrow I^* &= \frac{b\beta \varepsilon - \mu XY}{\beta XY}.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Substitusi (9) dan (10) ke persamaan 2 dari Sistem (8) diperoleh,

$$\begin{aligned}
 \beta S^* I^* - X E^* &= 0 \\
 \Leftrightarrow \beta \left(\frac{XY}{\beta \varepsilon} \right) \left(\frac{b\beta \varepsilon - \mu XY}{\beta XY} \right) - X E^* &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{b\beta \varepsilon - \mu XY}{\beta \varepsilon} &= X E^* \\
 \Leftrightarrow E^* &= \frac{b\beta \varepsilon - \mu XY}{\beta \varepsilon X}.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Substitusi persamaan (10) dan (11) ke persamaan 4 dari Sistem (8) diperoleh,

$$\begin{aligned}
 \psi E^* + \omega I^* - Z T^* &= 0 \\
 \Leftrightarrow \psi \left(\frac{b\beta \varepsilon - \mu XY}{\beta \varepsilon X} \right) + \omega \left(\frac{b\beta \varepsilon - \mu XY}{\beta XY} \right) - Z T^* &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\psi(b\beta \varepsilon - \mu XY)Y + \omega(b\beta \varepsilon - \mu XY)\varepsilon}{\beta \varepsilon XY} - Z T^* &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{(b\beta \varepsilon - \mu XY)(\psi Y + \omega \varepsilon)}{\beta \varepsilon XY} &= Z T^* \\
 \Leftrightarrow T^* &= \frac{(b\beta \varepsilon - \mu XY)(\psi Y + \omega \varepsilon)}{\beta \varepsilon XYZ}.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Substitusikan (10) dan (12) ke persamaan 5 dari Sistem (8) diperoleh,

$$\begin{aligned}
 \gamma I^* + \delta T^* - \mu R^* &= 0 \\
 \Leftrightarrow \gamma \left(\frac{b\beta \varepsilon - \mu XY}{\beta XY} \right) + \delta \left(\frac{(b\beta \varepsilon - \mu XY)(\psi Y + \omega \varepsilon)}{\beta \varepsilon XYZ} \right) - \mu R^* &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\gamma \varepsilon Z (b\beta \varepsilon - \mu XY) + \delta (b\beta \varepsilon - \mu XY)(\psi Y + \omega \varepsilon)}{\beta \varepsilon XYZ} - \mu R^* &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\gamma \varepsilon Z (b\beta \varepsilon - \mu XY) + \delta (b\beta \varepsilon - \mu XY)(\psi Y + \omega \varepsilon)}{\beta \varepsilon XYZ} &= \mu R^* \\
 \Leftrightarrow R^* &= \frac{(b\beta \varepsilon - \mu XY)(\gamma \varepsilon Z + \psi \delta Y + \omega \varepsilon \delta)}{\mu \beta \varepsilon XYZ}.
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik $P_1 = (S^*, E^*, I^*, T^*, R^*)$ dengan

$$\begin{aligned}
 S^* &= \frac{XY}{\beta \varepsilon}, E^* = \frac{b\beta \varepsilon - \mu XY}{\beta \varepsilon X}, I^* = \frac{b\beta \varepsilon - \mu XY}{\beta XY}, \\
 T^* &= \frac{(b\beta \varepsilon - \mu XY)(\psi Y + \omega \varepsilon)}{\beta \varepsilon XYZ},
 \end{aligned}$$

$$R^* = \frac{(b\beta\varepsilon - \mu XY)(\gamma\varepsilon Z + \psi\delta Y + \omega\varepsilon\delta)}{\mu\beta\varepsilon XYZ}$$

Suatu persyaratan agar di dalam populasi akan selalu ada individu TB aktif jika nilai $I^* > 0$. Untuk menentukan angka reproduksi dasar yaitu dengan mengasumsikan $I^* > 0$.

Jelas $I^* = \frac{b\beta\varepsilon - \mu XY}{\beta XY}$.

Jelas $I^* > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{b\beta\varepsilon - \mu XY}{\beta XY} > 0$$

$$\Leftrightarrow b\beta\varepsilon - \mu XY > 0$$

$$\Leftrightarrow b\beta\varepsilon > \mu XY$$

$$\Leftrightarrow \frac{b\beta\varepsilon}{\mu XY} > 1.$$

Jadi rasio reproduksi dasar dapat didefinisikan sebagai

$$R_0 = \frac{b\beta\varepsilon}{\mu XY}$$

Berdasarkan analisa yang telah dilakukan diperoleh Teorema 1 sebagai berikut.

Teorema 1

Dipunyai $R_0 = \frac{b\beta\varepsilon}{\mu XY}$, dari Sistem (4) berdasarkan nilai R_0 tersebut diperoleh:

- (1) Jika $R_0 \leq 1$ maka Sistem (4) hanya mempunyai 1 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (P_0) dengan

$$P_0 = (S, E, I, T, R) = \left(\frac{b}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right).$$

- (2) Jika $R_0 > 1$ maka Sistem (4) mempunyai 2 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (P_0) dan titik ketimbangan endemik $P_1 = (S^*, E^*, I^*, T^*, R^*)$ dengan

$$S^* = \frac{XY}{\beta\varepsilon}, E^* = \frac{b\beta\varepsilon - \mu XY}{\beta\varepsilon X}, I^* = \frac{b\beta\varepsilon - \mu XY}{\beta XY},$$

$$T^* = \frac{(b\beta\varepsilon - \mu XY)(\psi Y + \omega\varepsilon)}{\beta\varepsilon XYZ},$$

$$R^* = \frac{(b\beta\varepsilon - \mu XY)(\gamma\varepsilon Z + \psi\delta Y + \omega\varepsilon\delta)}{\mu\beta\varepsilon XYZ}.$$

Kestabilan kedua titik kesetimbangan yang diperoleh dari masing-masing sistem dianalisis dengan menggunakan nilai eigen dari matriks Jacobian sistem (4). Berikut ini merupakan analisis kestabilan titik kesetimbangan sistem (4). Pada mulanya dibentuk matriks Jacobian dari sistem (4) sehingga diperoleh

$$J^*(E) = \begin{pmatrix} -\beta I - \mu & 0 & -\beta S & 0 & 0 \\ \beta I & -X & \beta S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y & 0 & 0 \\ 0 & \psi & \omega & -Z & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \delta & -\mu \end{pmatrix}$$

Kemudian berdasarkan matriks Jacobian, dianalisis pada kedua titik ekuilibrium. Sehingga diperoleh matriks Jacobian pada titik bebas penyakit P_0 sebagai berikut.

$$J^*(P_0) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\frac{\beta b}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -X & \frac{\beta b}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y & 0 & 0 \\ 0 & \psi & \omega & -Z & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \delta & -\mu \end{pmatrix}$$

dari matriks Jacobian titik kesetimbangan P_0 diperoleh nilai eigen sebagai berikut,

$$\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = -\mu, \lambda_3 = -Z.$$

Perhatikan persamaan berikut,

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \text{ dengan}$$

$$a_0 = 1, a_1 = X + Y, a_2 = XY - \frac{\beta b\varepsilon}{\mu} = XY(1 - R_0).$$

$$\lambda_4 = \frac{-(X + Y) + \sqrt{(X + Y)^2 - 4XY(1 - R_0)}}{2},$$

$$\lambda_5 = \frac{-(X + Y) - \sqrt{(X + Y)^2 - 4XY(1 - R_0)}}{2}.$$

Oleh sebab $\sqrt{(X + Y)^2 - 4XY(1 - R_0)} > 0$ mengakibatkan nilai eigen $\lambda_{4,5}$ merupakan bilangan riil negatif. Jelas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bernilai negatif. Jadi diperoleh titik kesetimbangan P_0 stabil asimtotik lokal apabila $R_0 < 1$ dan tidak stabil apabila $R_0 > 1$.

Selanjutnya dianalisis matriks Jacobian untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan endemik P_1 .

$$J^*(P_1) = \begin{pmatrix} -\beta I^* - \mu & 0 & -\beta S^* & 0 & 0 \\ \beta I^* & -X & \beta S^* & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y & 0 & 0 \\ 0 & \psi & \omega & -Z & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \delta & -\mu \end{pmatrix}$$

hanya dilakukan saat $R_0 > 1$.

Diperoleh salah satu nilai eigen sebagai berikut,

$$\lambda_1 = -\mu \text{ dan } \lambda_2 = -Z.$$

Perhatikan persamaan berikut,

$$b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0, \tag{13}$$

dengan

$$b_0 = 1, b_1 = \mu R_0 + X + Y, b_2 = (X + Y)\mu R_0,$$

$$b_3 = \mu XY(R_0 - 1).$$

Untuk memeriksa apakah akar-akar persamaan (13) mempunyai bagian real negatif digunakan kriteria Routh-Hurwitz yaitu dengan menunjukkan:

- i. $b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0$
- ii. $b_1 \cdot b_2 - b_3 > 0$

Jelas semua parameter bernilai positif, sehingga nilai $b_1 > 0$.

Jelas titik endemik ada saat $R_0 > 1$.

Jadi $R_0 - 1 > 0$, sehingga nilai $b_1, b_2, b_3 > 0$.

Ditunjukkan $b_1 \cdot b_2 - b_3 > 0$

$$\begin{aligned} & \text{Jelas } b_1 \cdot b_2 - b_3 \\ & = (\mu R_0 + X + Y)(X + Y)\mu R_0 - (\mu XY(R_0 - 1)) \\ & = (\mu R_0 + X + Y)(X\mu R_0 + Y\mu R_0) - (\mu XYR_0 - \mu XY) \\ & = \mu X^2 R_0^2 + \mu X^2 R_0 + \mu XYR_0 + \mu^2 YR_0^2 + \mu XYR_0 \\ & \quad + \mu Y^2 R_0 - \mu XYR_0 + \mu XY \\ & = \mu X^2 R_0^2 + \mu X^2 R_0 + \mu XYR_0 + \mu^2 YR_0^2 + \\ & \quad \mu Y^2 R_0 + \mu XY. \end{aligned}$$

Jelas nilai $b_1 \cdot b_2 - b_3 > 0$ apabila $R_0 > 1$.

Jadi nilai eigen λ_1, λ_2 dan bagian real $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ bernilai negatif. Jadi titik kesetimbangan P_1 dikatakan stabil asimtotik lokal apabila $R_0 > 1$. Berdasarkan analisa yang telah dilakukan diperoleh Teorema 2 sebagai berikut.

Teorema 2

Dipunyai $R_0 = \frac{b\beta\varepsilon}{\mu XY}$,

- (1) Titik ekuilibrium P_0 dengan $(S, E, I, T, R) = (\frac{b}{\mu}, 0, 0, 0)$ stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$.
- (2) Titik ekuilibrium $P_1 = (S^*, E^*, I^*, T^*, R^*)$ dengan

$$S^* = \frac{XY}{\beta\varepsilon}, E^* = \frac{\mu Y}{\beta\varepsilon}(R_0 - 1), I^* = \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1),$$

$$T^* = \frac{(\psi Y + \omega\varepsilon)\mu}{\beta\varepsilon Z}(R_0 - 1),$$

$$R^* = \frac{(\gamma\varepsilon + \psi\delta Y + \omega\varepsilon\delta)}{\beta\varepsilon Z}(R_0 - 1).$$

stabil asimtotik lokal jik $R_0 > 1$.

Selanjutnya dilakukan interpretasi model ke dalam bentuk simulasi berbantuan *software maple*. Simulasi diawali dengan memberikan

nilai awal pada parameter-parameter sesuai dengan kondisi nilai R_0 dalam teorema-teorema yang telah diberikan di atas. Simulasi ini diberikan untuk memberikan gambaran geometris dari teorema eksistensi dan kestabilan dari titik-titik kesetimbangan model epidemi SEITR ini.

Pada penelitian ini akan dianalisis dengan nilai parameter-parameter yang dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3 Nilai Parameter-parameter

Parameter	Nilai	Keterangan
b	0,2	Mishra (2013)
β	0,35	Halim (2013)
ε	0,3	Mishra (2013)
ψ	0,7	Halim (2013)
q	1	Diasumsikan
ω	0,55	Halim (2013)
δ	0,91	KEMENKES (2011)
γ	0,25	Halim (2013)
μ	0,0167	Setiawan (2012)
μ_T	0,3	Halim (2013)

Angka kelahiran kasar (*Crude Birth Rate/ CBR*) $b = 0,2$ artinya terdapat 200 individu yang masuk populasi tiap tahunnya. $\beta = 0,35$ artinya terdapat 35 individu yang terinfeksi TB dari 100 kontak antara individu rentan dengan individu TB aktif. Angka kematian kasar (*Crude Death Rate/ CDR*) $\mu = 0,0167$ artinya terdapat 167 individu yang meninggal dari 10000 individu pada populasi tiap tahunnya. Angka kematian akibat penyakit TB $\mu_T = 0,3$ artinya terdapat 3 individu yang meninggal alami dari 10 individu TB aktif tiap tahunnya. $\varepsilon = 0,3$ artinya terdapat 3 individu yang menjadi TB aktif dari 10 individu laten TB tiap tahunnya, $\psi = 0,7$ artinya terdapat 7 individu menjalani pengobatan DOTS dari 10 individu laten TB tiap tahunnya, $\omega = 0,55$ artinya terdapat 55 individu yang menjalani pengobatan DOTS dari 100 individu TB aktif tiap tahunnya. Laju kesembuhan alami individu TB aktif $\gamma = 0,25$ artinya terdapat 25 individu yang sembuh alami dari 100 individu penderita TB aktif tiap tahunnya, $\delta = 0,91$ artinya terdapat 91 individu yang sembuh setelah menjalani pengobatan DOTS dari 100 individu yang menjalani DOTS.

Untuk mengetahui besar pengaruh pengobatan DOTS pada individu TB aktif terhadap penyebaran penyakit TB, dibuat perbedaan laju pada parameter ω . Berikut variasi nilai ω pada Tabel 4.

Tabel 4 Variasi Nilai ω dan nilai $R_0 < 1$ dengan $\beta = 0,35$

ω	R_0
0,7	0,98
0,85	0,87
1,15	0,72
1,4	0,62

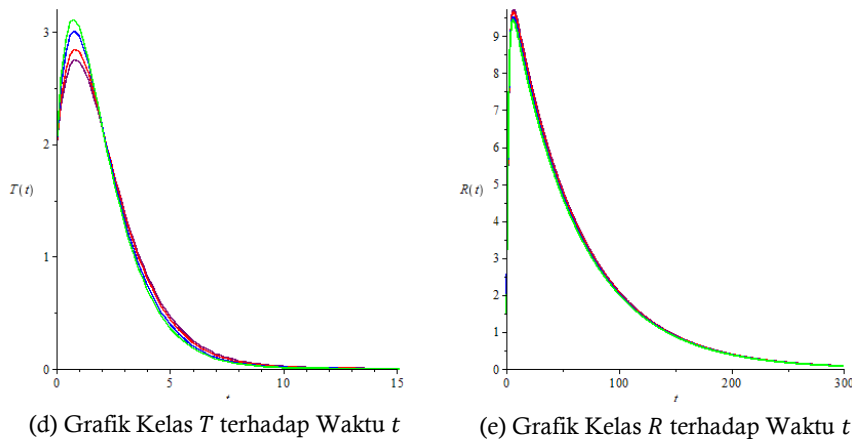
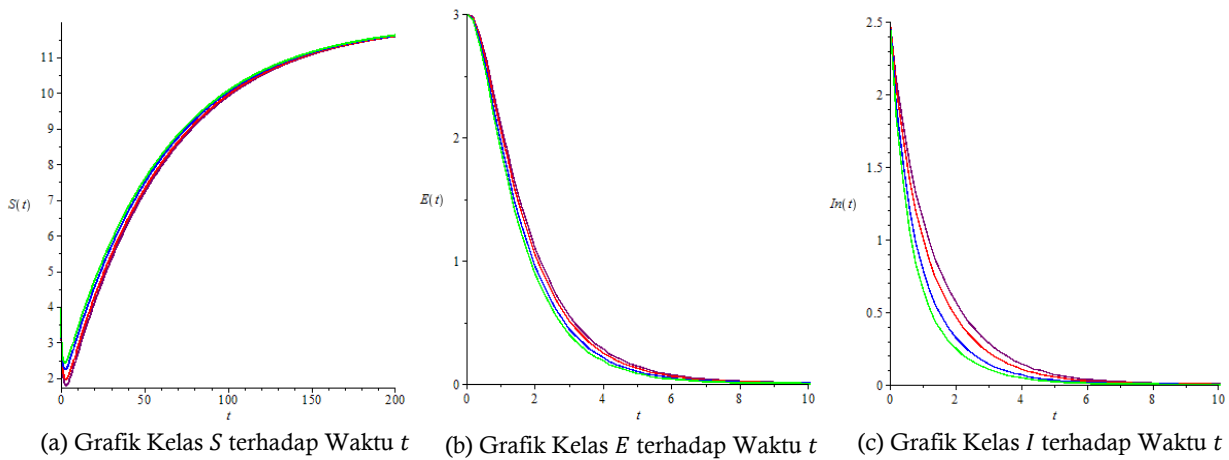
Setelah dilakukan analisis perubahan nilai ω , diperoleh hasil yang tersaji dalam Gambar 4.

Dari Gambar 4 (a) terlihat bahwa banyak individu rentan TB mengalami penurunan pada kondisi awal, hal ini terjadi disebabkan oleh sebagian individu rentan TB menjadi individu laten TB dan

sebagian individu rentan TB meninggal alami. Kemudian banyak individu rentan TB mengalami kenaikan setelah t tertentu, hal ini disebabkan oleh penambahan individu. Setelah mengalami kenaikan banyak individu rentan TB tidak mengalami perubahan atau konstan pada titik 11,98 pada t tertentu.

Dari Gambar 4 (b) terlihat bahwa banyak individu laten TB mengalami penurunan pada kondisi awal, hal ini disebabkan oleh sebagian individu laten TB menjadi individu TB aktif, sebagian individu laten TB menjalani treatment DOTS, dan sebagian individu laten TB meninggal alami hingga konstan di titik 0 pada t tertentu.

Dari Gambar 4 (c) terlihat bahwa banyak individu TB aktif mengalami kenaikan pada kondisi awal, hal ini disebabkan oleh penambahan dari sebagian individu laten TB yang menjadi individu TB aktif. Kemudian banyak individu TB aktif mengalami penurunan pada t tertentu, hal ini disebabkan oleh sebagian individu TB aktif menjalani pengobatan DOTS, sebagian sembuh secara



Gambar 4 Dinamika Banyak Populasi (a) $S(t)$, (b) $E(t)$, (c) $I(t)$, (d) $T(t)$, (e) $R(t)$ terhadap Waktu t dengan $\omega = 0,7; 0,85; 1,15; 1,4$

alami, sebagian mengalami meninggal alami, dan sebagian mengalami meninggal akibat penyakit TB hingga konstan di titik 0 pada t tertentu.

Dari Gambar 4 (d) terlihat bahwa banyak pasien DOTS mengalami kenaikan pada kondisi awal, hal ini disebabkan oleh penambahan sebagian individu laten TB dan individu TB aktif yang menjalani pengobatan DOTS. Kemudian banyak pasien DOTS mengalami penurunan pada t tertentu, hal ini disebabkan oleh sebagian pasien DOTS telah sembuh, sebagian pasien DOTS meninggal alami hingga konstan di titik 0 pada t tertentu.

Dari Gambar 4 (e) terlihat bahwa banyak individu sembuh TB mengalami kenaikan pada kondisi awal, hal ini disebabkan oleh penambahan sebagian pasien DOTS yang berhasil dan sebagian individu TB aktif yang sembuh secara alami. Kemudian mengalami penurunan pada t tertentu, hal ini disebabkan oleh individu yang

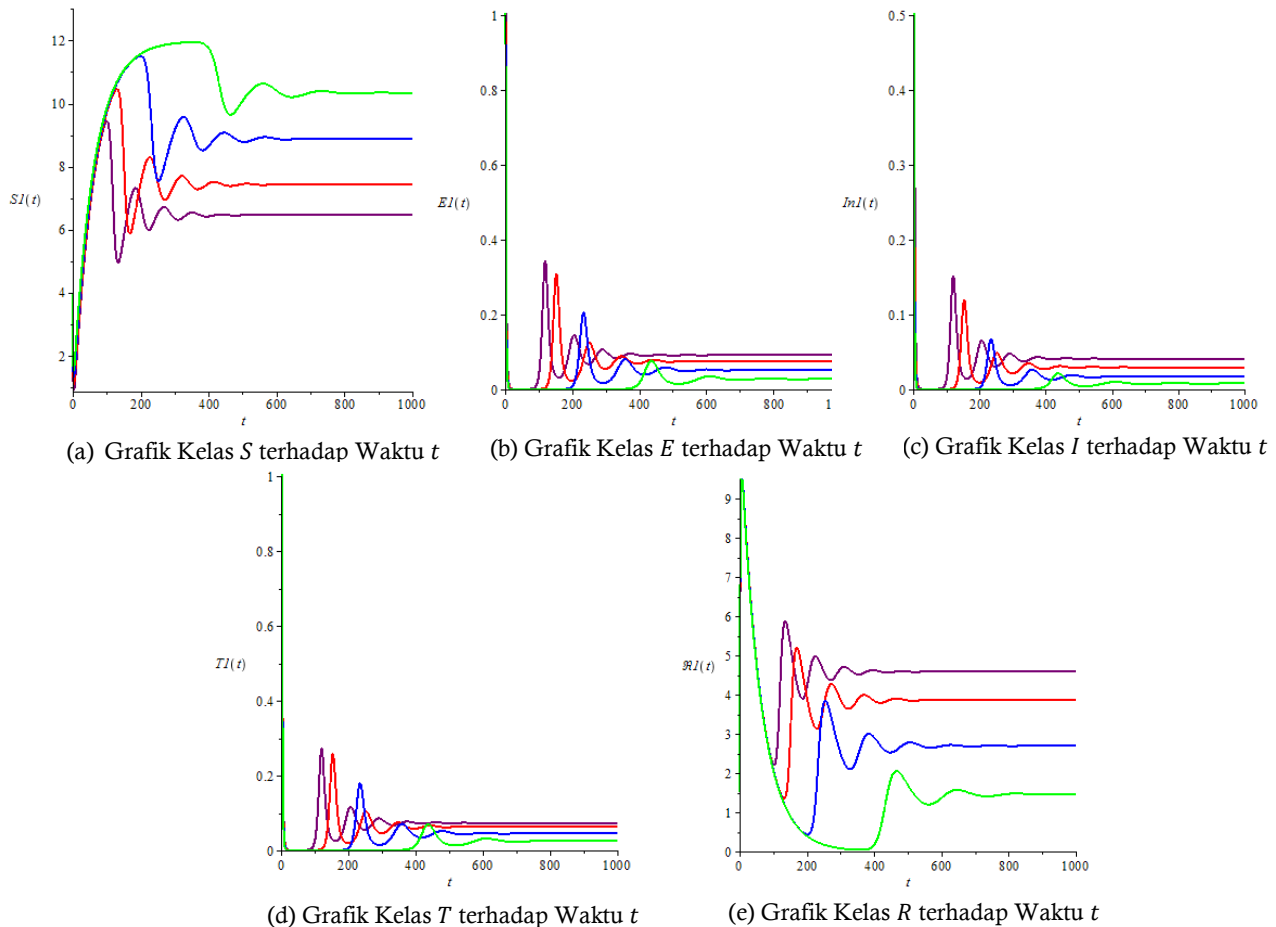
sembuh TB meninggal alami hingga konstan di titik 0 pada t tertentu.

Untuk mengetahui besar pengaruh pengobatan DOTS pada individu TB aktif terhadap penyebaran penyakit TB, dibuat perbedaan laju pada parameter ω . Berikut variasi nilai ω pada Tabel 5.

Tabel 5 Variasi Nilai ω dan Nilai $R_0 > 1$ dengan $\beta = 0,35$

ω	R_0
0,1	1,86
0,2	1,61
0,35	1,35
0,5	1,16

Setelah dianalisis perubahan nilai ω , diperoleh hasil yang tersaji pada Gambar 5.



Gambar 5 Dinamika Banyak Populasi (a) $S(t)$, (b) $E(t)$, (c) $I(t)$, (d) $T(t)$, (e) $R(t)$ terhadap Waktu t dengan $\omega = 0,1; 0,2; 0,35; 0,5$

Dari Gambar 5 (a) terlihat bahwa banyak individu rentan TB $S(t)$ mengalami kenaikan pada kondisi awal, hal ini disebabkan oleh penambahan individu. Kemudian mengalami penurunan pada t tertentu hal ini disebabkan oleh sebagian individu rentan TB menjadi individu laten TB dan sebagian individu rentan TB meninggal alami. Kemudian mengalami dinamika hingga konstan di titik kesetimbangan $S = 6,5; 7,4; 8,9; 10,3$ dengan berturut turut $\omega = 0,1; 0,2; 0,35; 0,5$ pada t tertentu.

Dari Gambar 5 (b) terlihat bahwa banyak individu laten TB $E(t)$ mengalami penurunan pada kondisi awal, hal ini disebabkan oleh sebagian individu laten TB menjadi individu TB aktif, sebagian laten TB menjalani pengobatan DOTS, sebagian individu laten TB meninggal alami. Kemudian banyak individu laten TB mengalami kenaikan pada t tertentu, hal ini disebabkan oleh penambahan sebagian individu rentan. Selanjutnya mengalami dinamika hingga konstan di titik $E = 0,09; 0,07; 0,05; 0,02$ pada t tertentu.

Dari Gambar 5 (c) terlihat bahwa banyak individu TB aktif $I(t)$ mengalami penurunan ketika laju penderita TB aktif menjalani pengobatan DOTS (ω) semakin besar, adapun faktor lain yang menyebabkan penurunan pada kelas $I(t)$ yaitu sebagian individu TB aktif sembuh secara alami, sebagian individu TB aktif meninggal akibat penyakit TB dan sebagian meninggal alami. Kemudian banyak individu TB aktif mengalami kenaikan pada t tertentu, hal ini disebabkan oleh penambahan sebagian individu laten TB yang menjadi individu TB aktif. Selanjutnya mengalami dinamika hingga konstan di titik $I = 0,04; 0,03; 0,02; 0,01$ pada t tertentu.

Dari Gambar 5 (d) terlihat bahwa banyak individu yang mengalami pengobatan DOTS $T(t)$ mengalami penurunan, hal ini disebabkan oleh sebagian pasien DOTS yang telah selesai menjalani pengobatan dan dinyatakan sembuh dan sebagian pasien DOTS meninggal alami. Kemudian banyak individu yang menjalani pengobatan DOTS mengalami kenaikan pada t tertentu, hal ini disebabkan oleh sebagian individu laten TB dan individu TB aktif yang menjalani pengobatan DOTS. Selanjutnya mengalami dinamika hingga konstan di titik $T = 0,07; 0,06; 0,05; 0,03$ pada t tertentu.

Dari Gambar 5 (e) terlihat bahwa banyak individu yang sembuh dari penyakit TB $R(t)$ mengalami penurunan, hal ini disebabkan oleh

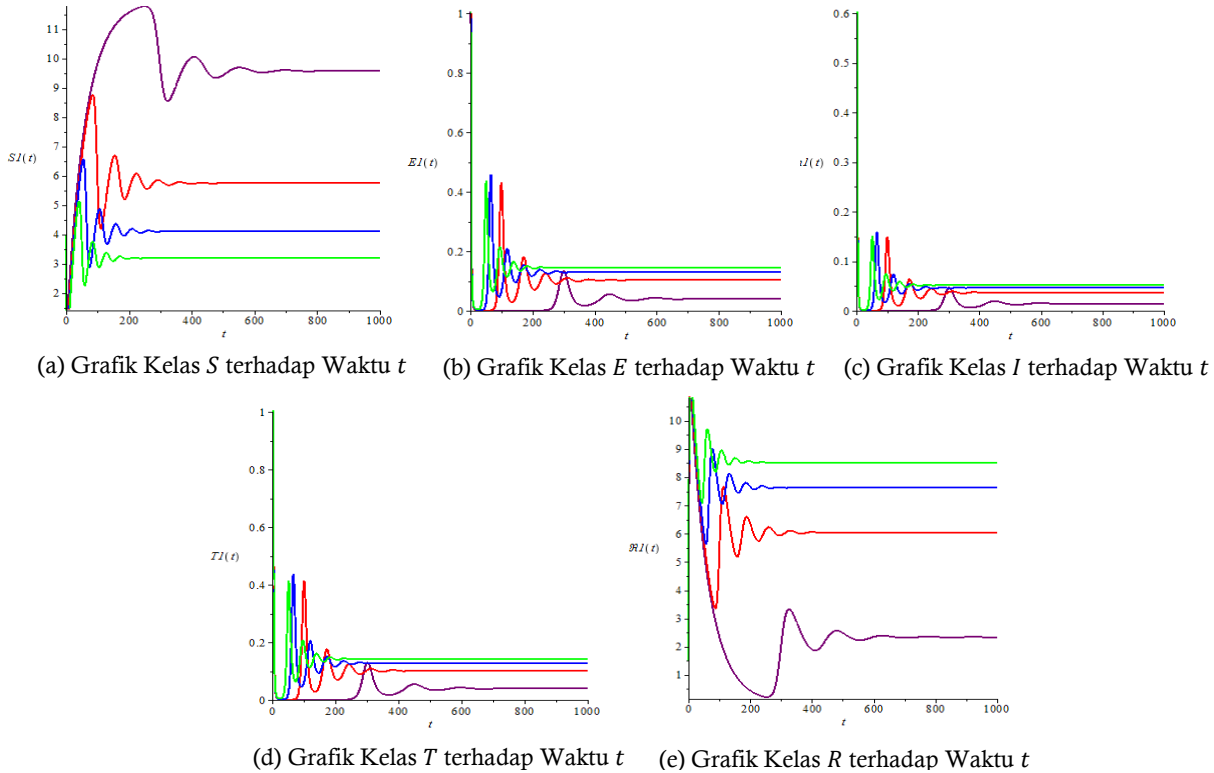
individu meninggal alami. Kemudian banyak individu yang sembuh mengalami kenaikan pada t tertentu, hal ini disebabkan oleh sebagian individu yang menjalani pengobatan DOTS telah sembuh dan sebagian individu TB aktif sembuh alami. Selanjutnya mengalami dinamika hingga konstan di titik $R = 4,7; 3,9; 2,7; 1,5$ pada t tertentu.

Analisis pengaruh β parameter laju kontak individu rentan terinfeksi dengan individu TB aktif dengan cara membuat variasi nilai β yang dapat dilihat pada Tabel 6.

Tabel 6 Variasi Nilai β dan Nilai $R_0 > 1$ dengan $\omega = 0,55$

β	R_0
0,3	1,54
0,5	2,64
0,7	3,3
0,9	3,96

Setelah dianalisis perubahan nilai β , diperoleh hasil yang tersaji pada Gambar 6.



Gambar 6 Dinamika Banyak Populasi (a) $S(t)$, (b) $E(t)$, (c) $I(t)$, (d) $T(t)$, (e) $R(t)$ terhadap Waktu t dengan $\beta = 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$

Dari Gambar 6 (a) terlihat bahwa banyak individu rentan $S(t)$ mengalami kenaikan, hal ini disebabkan oleh penambahan individu. Kemudian banyak individu rentan mengalami penurunan pada t tertentu, hal ini disebabkan oleh sebagian individu yang meninggal alami dan sebagian individu rentan yang terinfeksi TB menjadi laten TB. Dapat dilihat bahwa semakin besar peluang individu terinfeksi TB maka semakin berkurang populasi $S(t)$ begitu juga sebaliknya semakin kecil peluang individu terinfeksi TB maka semakin berkurang populasi $E(t)$. Selanjutnya sistem mengalami dinamika hingga konstan di titik $S = 9,6; 5,7; 4,1; 3,2$ pada t tertentu.

Dari Gambar 6 (b) terlihat bahwa banyak individu laten TB $E(t)$ mengalami penurunan pada kondisi awal, hal ini disebabkan oleh sebagian individu laten TB menjadi individu TB aktif, sebagian individu laten menjalani pengobatan DOTS, dan sebagian individu laten meninggal alami. Kemudian banyak individu laten TB mengalami kenaikan pada t tertentu, hal ini disebabkan oleh individu rentan yang terinfeksi TB. Selanjutnya mengalami

dinamika hingga konstan di titik $E = 0,01; 0,04; 0,046; 0,05$ pada t tertentu.

Dari Gambar 6 (c) terlihat bahwa banyak individu TB aktif $I(t)$ mengalami penurunan pada kondisi awal, hal ini disebabkan oleh sebagian individu TB aktif menjalani pengobatan DOTS, sebagian sembuh secara alami, sebagian meninggal alami, dan sebagian meninggal akibat penyakit TB. Kemudian banyak individu TB aktif mengalami kenaikan pada t tertentu, hal ini disebabkan oleh individu laten TB menjadi individu TB aktif. Selanjutnya mengalami dinamika hingga konstan di titik $I = 0,014; 0,036; 0,046; 0,051$ pada t tertentu.

Dari Gambar 6 (d) terlihat bahwa individu yang menjalani pengobatan DOTS $T(t)$ mengalami penurunan pada kondisi awal, hal ini disebabkan oleh sebagian pasien DOTS telah dinyatakan sembuh dari penyakit TB dan sebagian pasien DOTS meninggal alami. Kemudian banyak individu yang menjalani pengobatan DOTS mengalami kenaikan pada t tertentu, hal ini disebabkan oleh sebagian individu laten TB dan sebagian individu TB

aktif menjalani pengobatan DOTS. Selanjutnya mengalami dinamika hingga konstan di titik $T = 0,039; 0,1; 0,127; 0,142$ pada t tertentu.

Dari Gambar 6 (e) terlihat bahwa banyak individu yang sembuh dari penyakit TB $R(t)$ mengalami penurunan pada kondisi awal, hal ini disebabkan oleh individu yang telah sembuh meninggal alami. Kemudian banyak individu mengalami kenaikan pada t tertentu, hal ini disebabkan oleh sebagian individu TB aktif sembuh secara alami dan sebagian pasien DOTS telah dinyatakan sembuh. Selanjutnya mengalami dinamika hingga konstan di titik $R = 2,3; 6; 7,6; 8,5$ pada t tertentu.

Pada Gambar 6 (b), (c), (d), (e) peluang individu terinfeksi TB (β) sangat berpengaruh pada dinamika populasi, dan diperoleh bahwa semakin besar nilai β maka semakin banyak juga individu di kelas $E(t), I(t), T(t), R(t)$ begitu sebaliknya semakin kecil nilai β maka semakin sedikit individu di kelas $E(t), I(t), T(t), R(t)$.

PENUTUP

Dari penelitian diperoleh model matematika SEITR untuk penyebaran penyakit tuberkulosis dengan strategi DOTS. Analisis model menghasilkan Teorema 1, Teorema 2 mengenai R_0 , titik kesetimbangan endemik dan bebas penyakit serta analisis kestabilan titik kesetimbangan endemik dan bebas penyakit.

Selanjutnya, untuk mengilustrasikan model tersebut maka dilakukan simulasi model menggunakan *software maple* menghasilkan beberapa fakta, yaitu semakin kecil nilai peluang individu terinfeksi TB (β) dan semakin besar nilai laju individu TB aktif menjalani pengobatan DOTS (ω) akan memperkecil populasi penderita TB aktif.

Dalam penulisan ini, penulis membahas model matematika untuk model kestabilan SEITR pada proses penyebaran penyakit tuberkulosis dengan strategi DOTS. Dalam penelitian ini belum ada laju individu gagal pada pengobatan dan laju imigrasi. Oleh karena itu, penulis menyarankan kepada pembaca yang tertarik pada masalah ini untuk mengembangkan model yang sudah dibangun

DAFTAR PUSTAKA

- Atkins, T. 2008. *Modeling Transmission Dynamics of Tuberculosis Including Various Latent Periods*. Florida : Orlando.
- Edelstein-Keshet, L. 1988. *Mathematical Models in Biology*. New York: Random House.
- Haberman, R. 1977. *Mathematical models, An Introduction to Applied Mathematics*. Texas: Prentice-Hall, Inc.
- Halim, N. BT. A. 2013. *Tuberculosis Model: A Mathematical Analysis*. Thesis. Kuala Lumpur : University of Malaya.
- Kalu, A.U & Inyama, S.C. 2012. *Mathematical Model of the Role of Vaccination and Treatment on the Transmission Dynamics of Tuberculosis*. Nigeria : Federal University of Technology, 11 : 1.
- Kementrian Kesehatan Republik Indonesia. 2010. *Pemodelan Manajerial Pelayanan Tuberkulosis dengan Strategi DOTS di Rumah Sakit*. Dikertorat Jenderal Bina Pelayanan Medik. Jakarta.
- Kementrian Kesehatan Republik Indonesia. 2011. *Strategi Nasional Pengendalian TB*. Direktorat Jenderal Pengendalian Penyakit dan Penyehatan Lingkungan. Jakarta.
- Kocak, H. & Hole J. K. 1991. *Dynamic and Bifurcation*. New York : Springer – Verlag.
- Mishra, B. K. 2013. *Mathematical Model on Pulmonary and Multidrug-resistant Tuberculosis Patients with Vaccination*. India : Birla Institute of Technology.
- Perko, L. 1991. *Differential Equations and Dynamical System*. New York : Springer – Verlag Berlin Heidelberg.
- Rafflesia, U. 2014. *Model Penyebaran Penyakit Tuberculosis (TBC)*. Jurnal Gradien, 10: 2.
- Setiawan. 2012. *Kontrol Optimal Penyebaran Tuberculosis dengan Exogenous Reinfection*. Tesis. Depok : Universitas Indonesia.
- Shah, N. H. & Gupta, J. 2013. *Mathematical Modeling of Pulmonary Extra-pulmonary Tuberculosis*. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*. Gujarat : Gujarat University, 4 : 9.
- WHO. 2014. *Who Report of Global TB Control 2014*. Tersedia di http://apps.who.int/iris/bitstream/10665/137094/1/9789241564809_eng.pdf [diakses 5 April 2015].
- Widowati & Sutimin. 2007. *Bahan Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang : Universitas Diponegoro.
- Wiggins, S. 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. (Second Edition). New York: Springer Verlag.