



MODEL PERPINDAHAN KALOR PADA MESIN PENGERING PADI

Ninik Rahayu ✉, St. Budi Waluya, dan Wuryanto

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 lantai 1 Kampus Sekaran, Gunungpati, Semarang, 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Januari 2012
Disetujui Februari 2012
Dipublikasikan Mei 2012

Kata kunci
Persamaan Kalor
Metode Pemisahan Variabel
Keadaan Steady
Unsteady.

Abstrak

Matematika merupakan salah satu sarana untuk menyelesaikan suatu permasalahan. Salah satu kajian matematika yang konsep-konsepnya banyak diterapkan dalam bidang lain adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial muncul dalam berbagai bidang sains dan teknologi, bilamana hubungan deterministik yang melibatkan besaran yang berubah secara kontinu (dimodelkan oleh fungsi matematika) dan laju perubahannya (dinyatakan sebagai turunan) diketahui atau dipostulatkan. Ini terlihat misalnya pada masalah perpindahan kalor. Dalam artikel ini akan dikaji permodelan persamaan kalor dan solusi model persamaan kalor. Perpindahan kalor (*Heat Transfer*) adalah transisi energi termal dari suhu panas ke suhu yang lebih dingin. Ketika sebuah objek mempunyai suhu yang berbeda dibandingkan dengan lingkungan atau objek lain, transfer energi panas, juga dikenal sebagai aliran panas, atau pertukaran panas, terjadi sedemikian rupa sehingga tubuh dan sekitarnya mencapai kesetimbangan termal. Langkah-langkah yang dilakukan adalah menentukan masalah, merumuskan masalah, studi pustaka, analisis pemecahan masalah, dan penarikan simpulan. Pembahasan dilakukan untuk menemukan model persamaan kalor pada mesin pengering padi dan menyelesaikan persamaan kalor dengan metode pemisahan variabel. Pembahasan ini dilakukan dalam dua keadaan, yaitu keadaan *steady* (waktu konstan) dan *unsteady* (waktu berubah-ubah). Pada Solusi-solusi tersebut kemudian divisualisasikan dengan menggunakan *Maple*.

Abstract

Mathematics is a tool to solve a problem. A field in mathematics that being applied in other fields is a differential equation. Differential equations arise in various fields of science and technology, where the deterministic relationship involving continuously changing quantities (modeled by mathematical functions) and its rate of change (expressed as a derivative) is known or postulated. This is seen for example in heat transfer problems. In this article will be reviewed modeling of the heat equation and the solution model of the heat equation. Heat transfer (*Heat Transfer*) is the transition temperature of thermal energy from hot to cooler temperatures. When an object has a different temperature than the environment or other objects, heat transfer, also known as heat flow or heat exchange, occurs in such a way that the body and the surroundings reach thermal equilibrium. The Steps of this research are determining the problem, formulating the problem, studying literature, analyzing problem solves, and drawing conclusions. The discussion carried out to find a model of the heat equation on rice dryers and solve the heat equation with variable separation method. The discussion was conducted in two circumstances, namely the steady state (time constant) and unsteady (time varies).

Pendahuluan

Persamaan Diferensial (PD) merupakan cabang dari matematika yang sudah berkembang sejak jaman Isaac Newton dan Leibnitz yang hingga saat ini memiliki peran yang besar serta banyak diterapkan pada berbagai bidang ilmu seperti fisika, teknik, biologi, kimia, ekologi, ekonomi dan ilmu-ilmu lainnya. Penggunaan persamaan differensial untuk menyusun suatu model tentang fenomena dari suatu sistem yang ada di dunia nyata merupakan suatu cara yang sering ditempuh guna membantu mencari solusi dari permasalahan yang ada. Pesatnya perkembangan teknologi komputer juga membantu dalam menemukan penyelesaian persamaan differensial secara numeris, terutama bentuk-bentuk persamaan differensial nonlinear dan parsial yang biasanya tidak dapat diselesaikan secara analitis (Andriani, 2005).

Dalam kehidupan sehari-hari banyak fenomena yang dalam menyelesaikannya menggunakan persamaan diferensial order satu. Contoh penerapan persamaan diferensial order satu sering dijumpai dalam masalah pencairan atau pemekatan suatu cairan, masalah suku bunga bank, masalah pembelahan dan pertumbuhan sel, masalah mekanika klasik, masalah perubahan suhu, radiative cooling time dan lain sebagainya (Waluya, 2006).

Persamaan diferensial muncul dalam berbagai bidang sains dan teknologi, bilamana hubungan deterministik yang melibatkan besaran yang berubah secara kontinu (dimodelkan oleh fungsi matematika) dan laju perubahannya (dinyatakan sebagai turunan) diketahui atau dipostulatkan. Hal ini terlihat pada masalah perpindahan kalor. Perpindahan kalor (*Heat Transfer*) adalah transisi energi termal dari suhu panas ke suhu yang lebih dingin. Ketika sebuah objek mempunyai suhu yang berbeda dibandingkan dengan lingkungan atau objek lain, transfer energi panas, juga dikenal sebagai aliran panas, atau pertukaran panas, terjadi sedemikian rupa sehingga tubuh dan sekitarnya mencapai kesetimbangan termal; ini berarti bahwa lingkungan berada pada suhu yang sama. Perpindahan panas selalu terjadi dari temperatur yang lebih tinggi ke temperatur yang lebih dingin seperti yang dijelaskan oleh hukum kedua termodinamika atau pernyataan Clausius (Ruwanto, 2004).

Dalam hal ini penulis membatasi pembahasan masalah hanya pada perpindahan panas pada mesin pengering padi yang

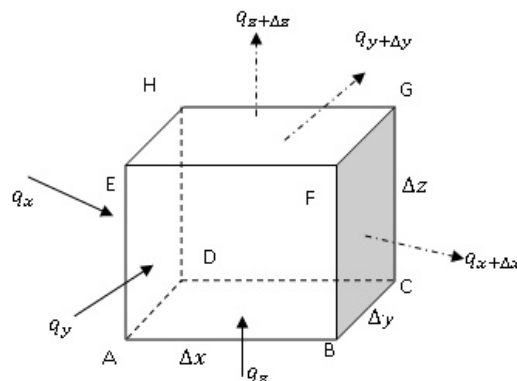
berbentuk tabung di mana mesin dalam keadaan steady (suhu konstan terhadap waktu) dan unsteady (suhu berubah-ubah terhadap waktu). Konsep perpindahan kalor pada sistem pengeringan padi dilakukan pada pipa sebagai ruang pengering. Fenomena semacam ini dapat dimodelkan sebuah persamaan kalor pada sebuah pipa. Persamaan kalor pada pipa akan lebih tepat apabila menggunakan koordinat tabung (*cylindrical coordinates*), karena pipa berbentuk tabung.

Program untuk membuat simulasi yang digunakan adalah program maple. Bahasa yang digunakan maple adalah bahasa aplikasi sebab pernyataan yang merupakan masukan (*input*) pada maple merupakan deklarasi pada bahasa program dan perintah (*comand*) yang sering digunakan pada bahasa aplikasi. (Kartono, 2001).

Pemodelan Persamaan Kalor

Persamaan kalor pada sebuah pipa menggunakan koordinat tabung karena pipa berbentuk tabung (*cylindrical coordinates*), sehingga pemodelan dibentuk ke dalam persamaan kalor yang menggunakan koordinat katesius (x, y, z) yang kemudian diubah ke dalam koordinat tabung (r, ϕ, z). Pemodelan perpindahan kalor pada benda berdimensi tiga harus diperhatikan kalor yang dihantarkan ke dalam dan keluar benda dalam ketiga arah koordinat.

Diberikan penampang balok seperti gambar 1 berikut.



Keterangan :

: Kalor masuk

: Kalor keluar

Gambar 1. Aliran konduksi kalor pada balok tiga dimensi

Menurut hukum konservasi energi bahwa tingkat perubahan sejumlah kalor dalam badan harus sama dengan tingkat kalor yang mengalir keluar. Hukum tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut. "Laju aliran kalor konduksi masuk = Perubahan energi dalam + Laju aliran kalor konduksi keluar". Dalam (Kreith, 1991) disebutkan bahwa Laju konduksi kalor yang keluar dari elemen yang melalui permukaan kanan pada $x+dx$ yaitu q_{x+dx} adalah

$$q_{x+dx} = \left[\left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dydz$$

Dalam termodinamika, suatu sistem termodinamik disebut berada dalam keadaan setimbang (*steady state*) jika sistem tersebut berada dalam keadaan setimbang mekanis, setimbang termal, dan setimbang secara kimia. Apabila ketiga syarat kesetimbangan tersebut tidak dipenuhi, maka sistem termodinamik berada dalam keadaan tak setimbang (*unsteady state*). (Zemansky and Dittman: 1986)

Pandang u sebagai fungsi yang memuat variable (x,y,z) pada koordinat kartesius, sehingga untuk memodelkan perpindahan kalor pada mesin pengering padi diperlukan langkah – langkah sebagai berikut:

Menentukan jumlah kalor persatuan luas persatuan waktu yang masuk ke dalam maupun ke luar elemen balok adalah sebagai berikut :

1. Pada posisi x , jumlah kalor yang masuk maupun ke luar dimodelkan

$$q_{x+\Delta x} = -k \cdot \Delta y \cdot \Delta z \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x \right] \quad (1)$$

2. Pada posisi y , jumlah kalor yang masuk maupun ke luar dimodelkan

$$q_{y+\Delta y} = -k \cdot \Delta x \cdot \Delta z \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta y \right] \quad (2)$$

3. Pada posisi z , jumlah kalor yang masuk maupun ke luar dimodelkan

$$q_{z+\Delta z} = -k \cdot \Delta x \cdot \Delta y \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \Delta z \right] \quad (3)$$

Jumlah total kalor dalam elemen balok pada waktu t adalah

$$Q = m \cdot c \cdot u = c \cdot \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot u$$

Sehingga perubahan kalor pada elemen balok adalah

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = c \cdot \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4)$$

Dari persamaan (1) sampai (4) diperoleh

$$\begin{aligned} q_x + q_y + q_z &= \frac{\partial Q}{\partial t} + [q_{x+\Delta x} + q_{y+\Delta y} + q_{z+\Delta z}] \\ \Leftrightarrow k \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + k \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &+ k \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = c \cdot \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

Kedua ruas dibagi dengan $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, sehingga diperoleh

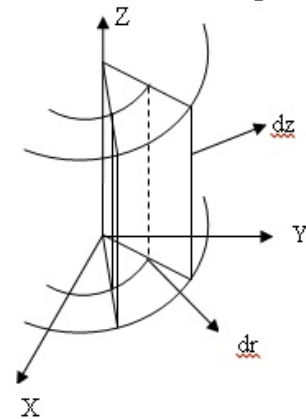
$$\begin{aligned} k \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] &= c \rho \frac{\partial u}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \frac{c \rho}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

Dari uraian di atas, diperoleh model matematika persamaan kalor pada koordinat kartesius sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5)$$

dengan $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ yaitu difusivitas termal (*thermal diffusivity*).

Persamaan kalor (5) akan diubah ke dalam koordinat tabung karena wadah pada mesin pengering padi berbentuk tabung, sehingga persamaan kalor yang menggunakan koordinat di atas dapat diubah ke dalam koordinat tabung di mana $u(r, \phi, z)$.



Gambar 2. Analisis konduksi kalor tiga dimensi dalam koordinat tabung.

Diketahui $x=r \cos \phi$, $y=r \sin \phi$, $z=z$, dengan $r=\sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$, $z=z$

Dari suatu proses transformasi diperoleh nilai dari

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= (\cos \phi)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2(\sin \phi \cos \phi)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{(\sin \phi)^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \\ &+ \frac{(\sin \phi)^2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2(\sin \phi \cos \phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (6)$$

dan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\sin \phi)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2(\sin \phi \cos \phi)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{(\cos \phi)^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{(\cos \phi)^2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2(\sin \phi \cos \phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi}$$

(7)

dengan

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) = \sin \phi \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right) - \frac{2(\cos \phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi}$$

dan

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right) = \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

Kemudian persamaan (6) dan (7) disubstitusikan ke persamaan (5) sehingga diperoleh,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}$$

dengan $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ yaitu difusivitas termal (*thermal diffusivity*).

Jadi persamaan kalor pada mesin pengering padi adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}$$

III. Solusi Persamaan Kalor

Berdasarkan penurunan model pada pembahasan sebelumnya, diperoleh model matematika untuk persamaan kalor pada mesin pengering padi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}$$

1. $0 \leq r \leq R; 0 \leq \phi \leq 2\Pi; 0 \leq z \leq L; t > 0$

2. $u_r(R, \phi, z, t) = 0;$

$$0 \leq \phi \leq 2\Pi; 0 \leq z \leq L; t > 0$$

3. $u(R, \phi, 0, t) = u_1; u(R, \phi, L, t) = u_2;$

$$0 \leq r \leq R; 0 \leq \phi \leq 2\pi; t > 0$$

4. $u(R, \phi, z, 0) = f(r, \phi, z);$

$$0 \leq r \leq R; 0 \leq \phi \leq 2\Pi; 0 \leq z \leq L$$

Permasalahan:

Mesin pengering padi dengan jari – jari = 50 cm, panjang pipa = 200 cm, suhu awal pemanasan = 90° C dan suhu akhir pemanasan = 75° C.

Solusi:

Didefinisikan solusi pemodelan adalah sebagai berikut:

solusi: $u(r, \phi, z, t) = v(r, \phi, z) + w(r, \phi, z, t)$

dengan,

$v(r, \phi, z)$: solusi keadaan mantap / suhu konstan terhadap waktu (*steady state*),

$w(r, \phi, z, t)$: solusi keadaan transien / suhu berubah-ubah terhadap waktu (*unsteady state*)

sehingga diperoleh persamaan:

$$\frac{\partial^2(v+w)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(v+w)}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v+w)}{\partial r} + \frac{\partial^2(v+w)}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial(v+w)}{\partial t}$$

dengan

1. $u_r(50, \phi, z, t) = v_r(50, \phi, z) + w_r(50, \phi, z, t) = 0,$

2. $u(r, \phi, 0, t) = v(r, \phi, 0) + w(r, \phi, 0, t) = 90,$

3. $u(r, \phi, 200, t) = v(r, \phi, 200) + w(r, \phi, 200, t) = 75,$

4. $u(r, \phi, z, 0) = v(r, \phi, z) + w(r, \phi, z, 0) = f(r, \phi, z)$

Solusi Keadaan Steady

Persamaan

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

dengan batas:

$$v_r(50, \phi, z) = 0 \quad (9)$$

$$v(r, \phi, 0) = 90; v(r, \phi, 200) = 75 \quad (10)$$

$$v(r, \pi, z) = v(r, -\pi, z); v_\phi(r, \pi, z) = v_\phi(r, -\pi, z) \quad (11)$$

dengan pemisahan variabel (*separation variables*), diasumsikan solusinya berbentuk:

solusi : $v(r, \phi, z) = R(r) \cdot \theta(\phi) \cdot Z(z)$

kemudian disubstitusikan ke persamaan (8),

diperoleh:

$$R''\theta Z + \frac{R'\theta Z}{r} + \frac{R\theta''Z}{r^2} + R\theta Z'' = 0 \Leftrightarrow \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\theta''}{r^2\theta} = -\frac{Z''}{Z} \quad (12)$$

Masing – masing ruas pada persamaan (12)

disamakan dengan $-\lambda^2$ (konstanta pemisah),

sehingga diperoleh:

$$-\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2 \text{ dan } \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\theta''}{r^2\theta} = -\lambda^2 \quad (13)$$

sehingga persamaan (13) yang kedua dapat ditulis

$$-\frac{r^2 R'' + rR'}{R} - r^2 \lambda^2 = \frac{\theta''}{\theta} \quad (14)$$

masing – masing ruas pada persamaan (14)

disamakan dengan , diperoleh:

$$\frac{\theta''}{\theta} = -\mu^2 \text{ dan } -\frac{r^2 R'' + rR'}{R} - r^2 \lambda^2 = -\mu^2 \quad (15)$$

Dari pemisahan variabel di atas, diperoleh persamaan (13), (14) dan (15), yaitu:

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0 \quad (16)$$

$$\theta'' + \mu^2 \theta = 0 \quad (17)$$

$$r^2 R'' + rR' + (r^2 \lambda^2 - \mu^2)R = 0 \quad (18)$$

$$r^2 R'' + rR' + m^2 R = 0, m^2 = r^2 \lambda^2 - \mu^2$$

Jadi solusi untuk persamaan kalor pada keadaan mantap/suhu konstan terhadap waktu (steady state) adalah sebagai berikut:

$$v_0(r, \phi, z) = (-\frac{3}{40} + 90) = L_0 z + M_0$$

$$v_m(r, \phi, z) = r^m (D_1 \cos m\phi + D_2 \sin m\phi) \\ = r^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi)$$

sehingga

$$v(r, \phi, z) = \frac{L_0 z + M_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi)$$

Untuk menyelesaikan solusi di atas diperlukan nilai awal,

misal $v(1, \phi, z) = g(\phi, z)$ maka

$$g(\phi, z) = \frac{L_0 z + M_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi)$$

dengan deret fourier diperoleh:

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi, z) \sin m\phi \, d\phi,$$

$$B_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi, z) \cos m\phi \, d\phi,$$

$$L_0 z + M_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi, z) \, d\phi$$

Sehingga solusinya adalah

$$v(r, \phi, z) = \frac{L_0 z + M_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi)$$

dengan

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi, z) \sin m\phi \, d\phi, B_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi, z) \cos m\phi \, d\phi,$$

$$L_0 z + M_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi, z) \, d\phi$$

Solusi Keadaan Unsteady

persamaan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (19)$$

Dengan batas:

$$w_r(50, \phi, z, t) = 0 \quad (20)$$

$$w(r, \phi, 0, t) = 0 ; w(r, \phi, 200, t) = 0 \quad (21)$$

$$w(r, \pi, z, t) = w(r, -\pi, z, t) ; \quad (22)$$

$$w_{\phi}(r, \pi, z, t) = w_{\phi}(r, -\pi, z, t)$$

$$w_r(50, \phi, z, t) = 0 \quad (23)$$

Didefinisikan bahwa solusi pada keadaan unsteady adalah

$$\text{Solusi: } w(r, \phi, z, t) = R(r) \cdot \theta(\phi) \cdot Z(z) \cdot T(t) \quad (24)$$

Substitusikan persamaan (24) ke persamaan (20), diperoleh:

$$R'' \theta Z T + \frac{R' \theta Z T}{r} + \frac{R \theta'' Z T}{r^2} + R \theta Z'' T = \frac{R \theta Z T'}{\alpha} \\ \Leftrightarrow \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\theta''}{r^2 \theta} + \frac{Z''}{Z} = \frac{T'}{\alpha T} \quad (25)$$

Masing – masing ruas pada persamaan (25)

disamakan dengan -a^2 (konstanta pemisah), sehingga diperoleh:

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\theta''}{r^2 \theta} + \frac{Z''}{Z} = -a^2 \text{ dan } \frac{T'}{\alpha T} = -a^2 \quad (26)$$

sehingga persamaan (26) dapat ditulis

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\theta''}{r^2 \theta} + a^2 = -\frac{Z''}{Z} \quad (27)$$

masing – masing ruas pada persamaan (27)

disamakan dengan -b^2, diperoleh:

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\theta''}{r^2 \theta} + a^2 = -b^2 \text{ dan } -\frac{Z''}{Z} = -b^2 \quad (28)$$

Persamaan (28) dapat ditulis

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} + c^2 r^2 = -\frac{\theta''}{\theta}, \text{ dengan } c^2 = a^2 + b^2 \quad (29)$$

Masing – masing ruas pada persamaan (29)

disamakan dengan -d^2 , diperoleh:

$$-\frac{\theta''}{\theta} = -d^2 \text{ dan } \frac{r^2 R'' + rR'}{R} + c^2 r^2 = -d^2 \quad (30)$$

Dari pemisahan variable di atas, diperoleh

persamaan (27), (29), (30) yaitu:

$$T' + \alpha^2 \alpha T = 0 \quad (31)$$

$$Z'' - b^2 Z = 0 \quad (32)$$

$$\theta'' - d^2 \theta = 0 \quad (33)$$

$$r^2 R'' + rR' + m^2 R = 0, m^2 = (c^2 r^2 + d^2) \quad (34)$$

Jadi solusi untuk T adalah $T(t) = Ae^{(\frac{\alpha t}{200})^2} \alpha T$

Jadi solusi untuk persamaan kalor pada

keadaan transien /suhu berubah – ubah

terhadap waktu (unsteady state) adalah sebagai

berikut:

$$\begin{aligned}
 w_0(r, \phi, z, t) &= A_0 \\
 w_m n(r, \phi, z, t) &= r^m (D_{1m} \cos m\phi + D_{2m} \sin m\phi) e^{\left(\frac{n\pi}{200}\right)^2 \alpha T} \left(\sin \frac{n\pi}{200} z \right) \\
 &= r^m (P_m \cos m\phi + Q_m \sin m\phi) e^{\left(\frac{n\pi}{200}\right)^2 \alpha T} \left(\sin \frac{n\pi}{200} z \right)
 \end{aligned}$$

Sehingga,

$$w(r, \phi, z, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[r^m (P_m \cos m\phi + Q_m \sin m\phi) e^{\left(\frac{n\pi}{200}\right)^2 \alpha T} \left(\sin \frac{n\pi}{200} z \right) \right]$$

Untuk menyelesaikan solusi di atas, diperlukan nilai awal misal:

$$w(r, \phi, z, 0) = f(r, \phi, z) - v(r, \phi, z) \quad \text{dengan}$$

$$A_0 = \frac{1}{200\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-200}^{200} (f(r, \phi, z) - v(r, \phi, z)) d\phi dz$$

$$P_m = \frac{1}{200\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-200}^{200} (f(r, \phi, z) - v(r, \phi, z)) \cos m\phi d\phi dz$$

$$Q_m = \frac{1}{200\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-200}^{200} (f(r, \phi, z) - v(r, \phi, z)) \sin m\phi d\phi dz$$

Jadi solusi untuk persamaan kalor pada mesin pengering padi adalah

$$u(r, \phi, z, t) = v(r, \phi, z) + w(r, \phi, z, t)$$

dengan

$$v(r, \phi, z) = \frac{L_0 z + M_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi)$$

$$w(r, \phi, z, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[r^m (P_m \cos m\phi + Q_m \sin m\phi) e^{\left(\frac{n\pi}{200}\right)^2 \alpha T} \left(\sin \frac{n\pi}{200} z \right) \right]$$

dimana,

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi, z) \sin m\phi d\phi,$$

$$B_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi, z) \cos m\phi d\phi, \text{ dan}$$

$$L_0 z + M_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi, z) d\phi,$$

$$A_0 = \frac{1}{200\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-200}^{200} (f(r, \phi, z) - v(r, \phi, z)) d\phi dz,$$

$$P_m = \frac{1}{200\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-200}^{200} (f(r, \phi, z) - v(r, \phi, z)) \cos m\phi d\phi dz,$$

$$Q_m = \frac{1}{200\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-200}^{200} (f(r, \phi, z) - v(r, \phi, z)) \sin m\phi d\phi dz$$

IV. Variasi Nilai Awal

4.1. Steady State

Fungsi Trigonometri

$$w(r, \phi, z, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[r^m (P_m \cos m\phi + Q_m \sin m\phi) e^{\left(\frac{n\pi}{200}\right)^2 \alpha T} \left(\sin \frac{n\pi}{200} z \right) \right]$$

$$w(1, \phi, z, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(P_m \cos m\phi + Q_m \sin m\phi) e^{\left(\frac{n\pi}{200}\right)^2 \alpha T} \left(\sin \frac{n\pi}{200} z \right) \right]$$

Untuk menyelesaikan solusi di atas, diperlukan nilai awal misal:

$$w(1, \phi, z, 0) = f(1, \phi, z) - v(1, \phi, z)$$

Diperoleh solusi

$$w(1, \phi, z, 0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(P_m \cos m\phi + Q_m \sin m\phi) \left(\sin \frac{n\pi}{200} z \right) \right]$$

dengan,

$$A_0 = \frac{1}{200\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-200}^{200} (f(r, \phi, z) - v(r, \phi, z)) d\phi dz = 0$$

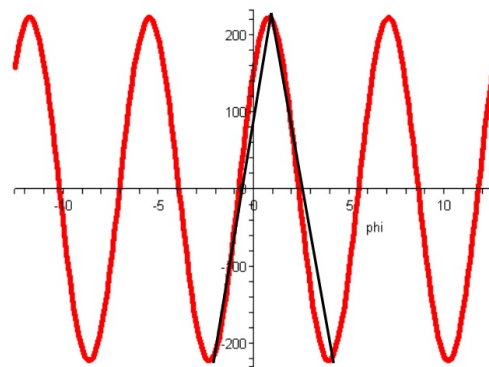
$$P_m = \frac{1}{200\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-200}^{200} [(\cos m\phi + \sin m\phi) \left(\sin \frac{n\pi}{200} z \right)] \cos m\phi d\phi dz = 0$$

$$Q_m = \frac{1}{200\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-200}^{200} [(\cos m\phi + \sin m\phi) \left(\sin \frac{n\pi}{200} z \right)] \sin m\phi d\phi dz = 0$$

Jadi Solusi untuk *unsteady state* adalah

$$w(r, \phi, z, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[r^m (P_m \cos m\phi + Q_m \sin m\phi) e^{\left(\frac{n\pi}{200}\right)^2 \alpha T} \left(\sin \frac{n\pi}{200} z \right) \right]$$

Fungsi Polinomial



Gambar 4. Plot solusi persamaan kalor pada keadaan unsteady dengan $r=100$ (persamaan r terhadap ϕ)

Berikut merupakan persamaan garis r terhadap ϕ .

Pada selang $(-2,2;0,8)$ pada gambar diperoleh persamaan sebagai berikut

Pilih titik $(-2,2;-220)$ dan $(0,8;220)$, diperoleh

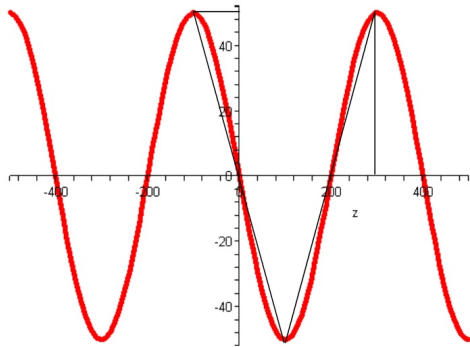
$$\frac{r + 220}{220 + 220} = \frac{\phi + 2,2}{0,8 + 2,2} \Leftrightarrow r = \frac{440}{3} \phi + \frac{308}{3}$$

Pada selang $(0,8;4)$ pada gambar diperoleh persamaan sebagai berikut

Pilih titik $(0,8;220)$ dan $(4;-220)$, diperoleh

$$\frac{r - 220}{-220 - 220} = \frac{\phi - 0,8}{4 - 0,8} \Leftrightarrow r = -137,5\phi + 110$$

Berikut merupakan persamaan garis r terhadap z .



Gambar 5. Plot solusi persamaan kalor pada keadaan *unsteady* dengan $r=100$ (persamaan r terhadap z)

Pada selang $(-100;100)$ pada gambar diperoleh persamaan sebagai berikut

Pilih titik $(0;0)$ dan $(100;-50)$, diperoleh

$$\frac{r-0}{-50-0} = \frac{z-0}{100-0} \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}z$$

Pada selang $(100;300)$ pada gambar diperoleh persamaan sebagai berikut

Pilih titik $(200;0)$ dan $(300;50)$, diperoleh

$$\frac{r-0}{50-0} = \frac{z-200}{300-200} \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}z - 100$$

Jadi

$$f(r, \phi, z) - v(r, \phi, z) = \begin{cases} \left(\frac{440}{3}\phi + \frac{308}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}z\right) = \frac{440}{3}\phi - \frac{1}{2}z + \frac{308}{3} \\ (-137,5\phi + 110) + \left(\frac{1}{2}z - 100\right) = -137,5\phi + \frac{1}{2}z + 10 \end{cases}$$

Sehingga,

$$A_0 = \frac{1}{200\pi} \int_{-200}^{200} \int_{-\pi}^{\pi} (f(r, \phi, z) - v(r, \phi, z)) d\phi dz = \frac{1352}{3},$$

$$P_m = \frac{1}{200\pi} \int_{-200}^{200} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1705}{3}\phi + \frac{338}{3}\right) \cos m\phi d\phi dz = 0,$$

$$Q_m = \frac{1}{200\pi} \int_{-200}^{200} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1705}{3}\phi + \frac{338}{3}\right) \sin m\phi d\phi dz = 0$$

Jadi Solusi untuk *unsteady state* adalah

$$\begin{aligned} w(r, \phi, z, t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[r^m (P_m \cos m\phi + Q_m \sin m\phi) e^{\left(\frac{n\pi}{200}\right)^2 \alpha t} \left(\sin \frac{n\pi}{200} z \right) \right] \\ &= \frac{1352}{3}. \end{aligned}$$

5. Simpulan

Simpulan yang dapat diambil dari hasil pembahasan pada Bab IV adalah sebagai berikut: Model persamaan kalor pada mesin pengering padi yang diperoleh dengan

penurunan model pada koordinat kartesius ke koordinat tabung adalah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

keadaan steady $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$

dan model keadaan *unsteady*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Solusi persamaankalor keadaan steady

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

yang diperoleh dengan menggunakan metode pemisahan

variabel adalah

$$v(r, \phi, z) = \frac{L_0 z + M_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi)$$

Solusi untuk persamaan kalor keadaan *unsteady*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}$$

yang diperoleh dengan menggunakan metode pemisahan

variabel adalah $w(r, \phi, z, t)$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[r^m (P_m \cos m\phi + Q_m \sin m\phi) e^{\left(\frac{n\pi}{200}\right)^2 \alpha t} \left(\sin \frac{n\pi}{200} z \right) \right]$$

DAFTAR PUSTAKA

- Andriani, R. 2005. Persamaan Diferensi Linear dan Aplikasinya. Semarang : Skripsi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Unnes. (tidak diterbitkan)
- Kartono. 2001. Maple untuk Persamaan Diferensial (Edisi Pertama). Yogyakarta: J&J Learning
- Kreith, F. 1991. Prinsip – Prinsip Perpindahan Panas. Jakarta : Erlangga.
- Ruwanto, B. 2004. Asas-Asas Fisika. Jakarta : Yudhistira.
- Waluya, S.B. 2006. Persamaan Diferensial. Yogyakarta : Graha Ilmu.
- Zemansky, M.W and Dittman R. H. 1986. Kalor dan Termodinamika. Bandung: ITB.