PENGANTAR GEOMETRI NON-EUCLID DENGAN PENDEKATAN ETNOMATEMATIKA

Khathibul Umam Zaid Nugroho, M.Pd.
Prof. Dr. YL. Sukestiyarno, M.S.
Dr. Sugiman, M.Si.
Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si.

ISBN: 978-623-421-319-5

Khathibul Umam Zaid Nugroho, S.Kom., M.Pd.
Prof. Dr. YL. Sukestiyarno, M.S.
Dr. Sugiman, M.Si.
Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si.

Pengantar Geometri Non-Euclid dengan Pendekatan Etnomatematika

Guepedia.com

Pengantar Geometri Non-Euclid dengan Pendekatan Etnomatematika

Penulis:
Khathibul Umam Zaid Nugroho, S.Kom., M.Pd.
Prof. Dr. YL. Sukestiyarno, M.S.
Dr. Sugiman, M.Si.
Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.S

Editor: Guepedia

Tata Letak: Guepedia

Sampul: Guepedia

Diterbitkan Oleh:
Guepedia
The First On-Publisher in Indonesia

Email: guepedia@gmail.com
FB. Guepedia
Twitter. Guepedia
Website: www.guepedia.com

ISBN: 978-623-421-319-5
Member of Guepedia Group

Cetakan, Desember 2022

ISBN: 978-623-421-319-5

KATA PENGANTAR

Puji syukur Alhamdulillah kami panjatkan kehadirat Allah SWT, Tuhan Yang Maha Pangasih dan Penyayang, atas Rahmat dan Hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan penulisan buku sederhana tentang **Geometri Non-Euclid dengan Pendekatan Etnomatematika**. Buku ini adalah buku referensi yang ditulis berdasarkan penelitian dengan judul: **Kemampuan Spasial Mahasiswa Selama Pembelajaran Geometri *Non-Euclide* Melalui Pendekatan Etnomatematika Ditinjau Dari Teori APOS.**

Penulis menyadari bahwa buku ini dapat diselesaikan berkat dukungan dan bantuan baik secara langsung maupun tidak langsung dari berbagai pihak. Oleh karena itu, kepada semua pihak yang telah membantu dan memberikan dukungan terhadap selesainya penulisan buku ini penulis sampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya dan penulis haturkan terima kasih. Kami mengucapkan terima kasih juga kepada para panelis sebagai reviewer buku ini, para sampel penelitian, dan semua pihak yang membantu kelancaran penelitian untuk menghasilkan buku ini.

Buku ini dilengkapi dengan Rencana Pembelajaran Semester Mata Kuliah Geometri Non-Euclid. Demikian, semoga bermanfaat sebagai referensi dalam pengembangan teori pembelajaran geometri maupun dalam penelitian lebih lanjut. Amien ya Robbal ‘alamin.

Bengkulu,   Januari 2023

Penulis,

DAFTAR ISI

BAB I
KEMAMPUAN SPASIAL GEOMETRI NON-EUCLID MELALUI PENDEKATAN ETNOMATEMATIKA

Disusun oleh
Khathibul Umam Zaid Nugroho, M.Pd.
Prof. Dr. YL. Sukestiyarno, M.S.
Dr. Sugiman, M.Si.
Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si.

BAB I

KEMAMPUAN SPASIAL GEOMETRI NON-EUCLID MELALUI PENDEKATAN ETNOMATEMATIKA

Pembelajaran geometri dengan pendekatan dunia nyata, konsep luas dapat diperluas ke bentuk lain. Seperti menghubungkan 'luas' dengan 'besar' lainnya; menyelidiki hubungan antara luas dan keliling; menghubungkan unit pengukuran dengan kenyataan; juga, mengintegrasikan beberapa aktivitas geometri (Fauzan, Slettenhaar, & Plomp, 2002). Dalam pembelajaran geometri (secara umum matematika), hubungan dengan kenyataan menjadi suatu proses yang signifikan. Itu adalah muncul dari matematisasi realitas. Seperti ide dari Freudenthal bahwa realitas sebagai kerangka yang melekat pada matematika itu sendiri (Gravemeijer (2008); Plomp & Nieveen (2013)). Selama pembelajaran geometri, kita dapat memaknai proses matematisasi mahasiswa dalam memecahkan masalah maupun dalam upaya pencapaian konsep atau prinsip tertentu. Proses kognitif tersebut adalah proses matematisasi yang dapat dianalisis melalui dekomposisi genetik mahasiswa (Cooley, Trigueros, & Baker (2007); Widada, Herawaty, Widiarti, et al. (2020); Widada, Agustina, Serlis, Dinata, & Hasari (2019)). Dekomposisi genetik adalah suatu kumpulan terstruktur dari aktivitas mental yang dilakukan seseorang untuk mendeskripsikan bagaimana konsep/prinsip matemati-ka dapat dikembangkan dalam pikirannya (Cooley et al. (2007); Widada (2002). Analisis dekomposisi genetik adalah analisis terhadap suatu dekomposisi genetik berdasarkan aktivitas aksi, proses, objek, dan skema (APOS Theory) yang dilakukan seseorang dalam aktivitas matematisasi (Widada, 2017).

1.1 Kemampuan Spasial Geometri

Menurut Teori kecerdasan ganda Gardner, membedakan antara lima cabang kecerdasan spasial (Bosnyak & Kondor, 2008) yaitu persepsi spasial: fiksasi arah vertikal dan horizontal terlepas dari informasi yang merepotkan; visualisasi: itu adalah kemampuan menggambarkan situasi ketika komponen bergerak dibandingkan satu sama lain; rotasi mental: rotasi padatan tiga dimensi secara mental; relasi spasial: kemampuan mengenali hubungan antara bagian-bagian yang solid; dan orientasi spasial: kemampuan memasuki situasi spasial tertentu.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa kemampuan visualisasi spasial dan rotasi mental calon guru rendah; calon guru laki-laki memiliki kualifikasi yang lebih baik daripada guru perempuan dalam rotasi mental tetapi kemampuan visualisasi spasial tidak berbeda menurut jenis kelamin. Apalagi calon guru dengan rata-rata akademik yang lebih tinggi memiliki kemampuan spasial yang lebih baik. Mengintegrasikan aplikasi lingkungan virtual seperti Google Earth dll ke dalam kursus studi sosial dan menggunakannya dalam kursus ini dapat membantu meningkatkan kemampuan spasial calon guru (Yurt & Tünkler, 2016).

Penelitian lain menyatakan bahwa ada perbedaan yang signifikan antara keberhasilan visualisasi spasial siswa sehubungan dengan jenis kelamin siswa, prestasi matematika, minat geometri dan tingkat kecerdasan visual/spasial. Selain itu, terdapat korelasi positif, signifikan tetapi rendah antara keberhasilan visualisasi spasial dengan kemampuan kecerdasan visual/spasial siswa (Eskisehir & Ozlem, 2015).

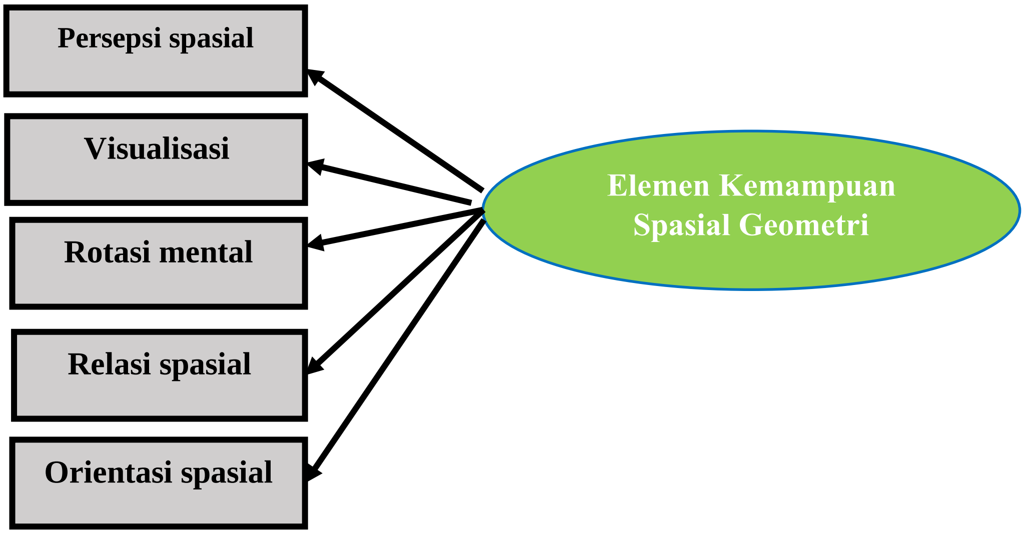
Spasial secara umum adalah sesuatu yang berkenaan dengan ruang atau tempat. Sedangkan kemampuan spasial adalah kemampuan seseorang untuk menangkap ruang dengan segala implikasinya. Kemampuan spasial adalah kemampuan membayangkan, membanding, menduga, menentukan, menkonstruksi, mempresentasikan, dan menemukan informasi dari stimulus visual dalam konteks ruang.

Kemampuan spasial sebagai konsep abstrak yang didalamnya meliputi relasi spasial (kemampuan untuk mengamati hubungan posisi objek dalam ruang), kerangka acuan (tanda yang dipakai sebagai patokan untuk menentukan posisi objek dalam ruang), hubungan proyektif (kemampuan untuk melihat objek dari berbagai sudut pandang), konsversi jarak (kemampuan untuk memperkirakan jarak antara dua titik), representasi spasial (kemampuan untuk merepresentasikan relasi spasial dengan memanipulasi secara kognitif), dan rotasi mental (membayangkan perputaran objek). Kemampuan spasial juga termasuk mempresentasikan dunia melalui gambaran-gambaran mental dan ungkapan artistik.

Indikator kemampuan spasial menurut Wahyudin (2015:85) adalah menyatakan kedudukan antar unsur-unsur suatu bangun ruang; mengidentifikasi dan mengkalasifikasi gambar-gambar geometri; membayangkan bentuk atau posisi suatu obyek geometri yang dipandang dari sudut pandang tertentu; mengkonstruksi dan mempresentasikan model-model geometri yang digambar pada bidang datar dalam konteks ruang; menginvestigasi suatu obyek geometri.

Kemampuan spasial seseorang dapat diketahui dengan menggunakan sebuah tes atau soal. Tes ini mengungkap sesuatu yang berhubungan dengan benda-benda yang konkret melalui visualisasi. Tipe soal yang diberikan akan menyajikan suatu kombinasi dari dua bentuk pendekatan terdahulu dengan pengukuran kemampuan ini. Menurut Gürbüz, Erdem, & Gülburnu (2018) bahwa Kemampuan spasial dapat secara singkat digambarkan sebagai aktivitas berpikir multidimensi, khususnya dalam geometri. Ini memungkinkan untuk memahami dan membuat ruang-ruang konkret dengan menjiwai, menggerakkannya dalam pikiran, dan melihat serta menggambar semua bagian dari model geometris. Tidak hanya komponen spasial yang merupakan bagian integral dari struktur matematika, tetapi representasi spasial semakin banyak dimasukkan dalam matematika. Sebagian besar representasi konkrit dan bergambar dari ide-ide aritmatika, geometris dan aljabar tampaknya sangat bergantung pada atribut spasial. Dalam proses kognitif dimungkinkan untuk melihat penalaran, asosiasi, perkiraan, intuisi, bentuk dalam ruang, rumus dan simbol dalam bangunan matematika. Berpikir pendek kurang memadai dalam memahami matematika yang kompleks, abstrak, dan multidimensional karena matematika memerlukan kemampuan penalaran yang merupakan tindak berpikir tingkat tinggi. Penalaran sangat penting dalam memahami dan mengasosiasikan topik matematika.

Berdasarkan Maier (1998) bahwa elemen-elemen kemampuan spasial adalah kemampuan persepsi spasial, kemampuan visualisasi, kemampuan rotasi mental, kemampuan relasi spasial, dan kemampuan orientasi spasial. Kemampuan persepesi spasial adalah kemampuan yang membutuhkan letak benda yang sedang diamati secara horizontal ataupun vertikal. Kemampuan visualisasi adalah kemampuan untuk menunjukan aturan perubahan atau perpindahan penyusun suatu bangun baik tiga dimensi ke dua dimensi ataupun sebaliknya. Kemampuan rotasi mental adalah kemampuan untuk memutar benda dua dimensi dan tiga dimensi secara tepat dan akurat. Kemampuan relasi spasial adalah kemampuan memahami susunan dari suatu obyek dan bagiannya serta hubungannya satu sama lain. Kemampuan orientasi spasial adalah kemampuan untuk mengamati suatu benda dari berbagai keadaan (Maier, 1998). Berdasarkan uraian elemen kemampuan spasial, dapat digambarkan diagramnya, lihat Gambar 1.1.



Gambar 1.1 Elemen-elemen Kemampuan Spasial Geometri

Struktur deduktif aksiomatik dibangun berdasarkan konsep pangkal. Itu adalah suatu entitas sebagai konsep primitif. Konsep tersebut tidak didefinisikan. Objek-objek yang merupakan unsur primitif dimaknai tanpa membutuhkan pendefinisian. Itu adalah dimaksudkan untuk menghindari terjadinya berputar-putarnya pendefinisian. Entitas tersebut telah memiliki makna yang jelas tanpa adanya pengertian yang membatasinya. Setelah konsep pangkal, struktur deduktif aksiomatik diisi dengan definisi suatu konsep. Itu meliputi satu atau lebih batasan dari suatu konsep. Hubungan antar konsep yang diterima kebenarannya tanpa pembuktian merupakan unsur yang juga membangun struktur tersebut, Itu adalah suatu aksioma. Aksioma dibutuhkan untuk menghindari terjadinya berputar-putarnya pembuktian. Elemen selanjutnya adalah teorema. Teorema merupakan pernyataan yang bernilai benar yang dapat dibuktikan dalam suatu struktur deduktif.

Geometri adalah mata pelajaran wajib bagi siswa pendidikan matematika (Nugroho, Widada, & Herawaty, 2019). Benda-benda itu abstrak, sehingga siswa sering mengalami kesulitan untuk memahaminya (Widada, Herawaty, Nugroho, & Anggoro, 2019). Oleh karena itu, guru harus dapat mengelola pembelajaran geometri dengan tepat. Itu dilakukan melalui refleksi pada kemampuan awal siswa. Guru harus melakukan analisis kebutuhan, analisis konsep, dan analisis tugas (Nugroho et al., 2019).

Geometri merupakan suatu struktur deduktif dalam matematika. Struktur tersebut dimulai dari unsur primitif yang terdiri dari titik, garis dan bidang. Aksioma-kasioma dalam geometri menjadi pernyataan pangkal. Itu adalah suatu pernyataan yang benar tanpa harus dibuktikan dalam strukturnya (Frassia & Serpe, 2017). Aksioma merupakan pernyataan benar yang berfungsi untuk menghindari berputar-putarnya pembuktian. Dalam geometri, terdapat pengertian yang membatasi suatu konsep. Itu adalah suatu definisi. Pernyataan-pernyataan yang merupakan knsekuensi logis dalam struktur deduktif dalam geometri adalah suatu teorema. Teorema harus dibuktikan kebenarannya dalam struktur tersebut. Oleh karena itu, siswa wajib memiliki proses kognitif yang matang (Dubinsky & McDonald, 2000). Selain itu, hasil penelitian Wu & Ma (2006) menyarankan agar menyelidiki mengapa siswa sekolah dasar mengalami kesulitan dalam segiempat, dan untuk geometri lanjut mahasiswa kesulitan memahami dan membuktikan sifat-sifat segiempat Sacherri (survei awal peneliti). Temuan awal menunjukkan bahwa segiempat, kecuali persegi dan persegi panjang, jarang ditampilkan dalam buku teks, dan dalam kehidupan sehari-hari mereka. Sebab siswa adalah makhluk psikologis yang mampu melakukan pemrosesan informasi secara aktif.

1.2 Kemampuan Spasial Geometri Euclid dan Non-Euclide

Sistem geometri merupakan suatu struktur matematis yang dibagun oleh himpunan semua titik dengan entitas dasar titik, garis dan bidang. Sistem tersebut dibangun berdasarkan aksioma insidensi (Eves, 1972). Eves menyatakan bahwa ada tiga sistem geometri yaitu Geometri Euclid, Geometri Lobachevsky dan Geometri Riemann. Euclid membangun geometri (*the elements*) dengan mendasarkan lima aksioma, lima postulat dan duapuluh tiga definisi (Hitchman, 2018). Lima aksioma Euclid adalah sebagai berikut.

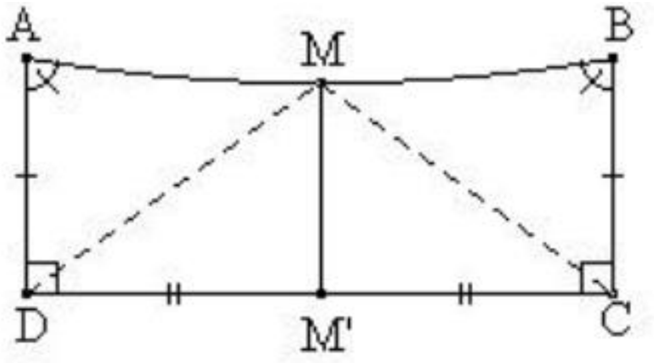
(1) Melalui dua titik berbeda dapat dibuat tepat satu garis. Selalu dapat menarik suatu garis dari suatu titik ke suatu titik yang lain.
(2) Melalui tiga titik berbeda dan alui tiSelalu dapat membuat ruas garis tak terbatas banyaknya pada suatu garis.
(3) Selalu dapat melukis suatu lingkaran berpusat di suatu titik dengan jari-jari ruas garis yang ditentukan.
(4) Semua sudut siku-siku satu sama lain sama besar.
(5) Jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus dan membuat jumlah sudut-sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku, kedua garis itu jika diperpanjang tak terbatas akan bertemu di pihak tempat kedua sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku.

Aksioma kesejajaran Euclid (Aksioma ke-5) adalah prinsip dasar membagun sistem Geometri Euclid, namum aksioma tersebut diperdebatkan, sehingga pada awal abad 20, muncul dua aksioma baru. Pertama adalah aksioma kesejajaran Lobachevsky. Aksioma tersebut menjadi prinsip utama untuk membangun Geometri Lobachevsky. Kedua adalah aksioma kesejajaran Riemann, yang kemudian menjadi prinsip dasar sistem Geometri Riemann. Selanjutnya dapat dibahas tentang Kemampuan Spasial Geometri Lobachevsky, Kemampuan Spasial Geometri Riemann, dan Kemampuan Spasial Geometri Euclid.

Berdasarkan uraian di atas, etnomatematika menyajikan konsep-konsep matematika (geometri) dari kurikulum sekolah sedemikian hingga konsep-konsep terkait dengan budaya dan pengalaman sehari-hari siswa (Hitchman, 2018). Itu dimaksudkan untuk meningkatkan kemampuan peserta didik menguraikan hubungan yang bermakna dan memperdalam pemahaman mereka tentang matematika. Pendekatan etnomatematika pada kurikulum matematika dimaksudkan untuk menjadikan matematika sekolah lebih relevan dan bermakna bagi siswa dan meningkatkan kualitas pendidikan mereka secara keseluruhan. Dalam konteks ini, menerapkan perspektif etnomatematika dalam kurikulum matematika sekolah membantu mengembangkan pembelajaran intelektual, sosial, emosional, dan politik siswa dengan menggunakan referensi budaya mereka yang unik untuk menyampaikan pengetahuan, keterampilan, dan sikap mereka. Kurikulum semacam ini memberikan cara bagi siswa untuk mempertahankan identitas mereka sekaligus berhasil secara akademis.

Sampai abad ke-19, pandangan tentang geometri berlandaskan *The Elements* dari Euclid. Geometri sebagai suatu sistem yang deduktif aksiomatik. Itu adalah suatu ilmu tentang sifat-sifat matematika dengan konsep dasar himpunan semua titik. Hubungan antar objek-objek geometri, yaitu titik, garis dan bidang berada dalam ruang Euclid (Anonimous, 2010). Prinsip-prinsip dalam geometri merupakan teorema-teorema dan sifat-sifat lainnya adalah hasil menelaah tentang titik, garis dan bidang, serta ruang fisik dan hubungan matematisnya. Namun, pada awal abad ke-20 banyak ilmuan yang menelaah aksioma kesejajaran Euclid, diantaranya Lobachevsky dan Riemann. Hasil telaah mereka adalah munculnya aksioma baru tentang kesejajaran garis-garis. Lobachevsky menyatakan bahwa “melalui satu titik di luar suatu garis terdapat minimal dua garis yang sejajar dengan garis tersebut.” Dengan aksioma inilah terbangun sistem geometri hiperbolik. Itu adalah salah satu alternatif dari Geometri Euclid. Pendapat berbeda dari Riemann, bahwa “tidak ada garis-garis yang sejajar”(Hitchman, 2018). Riemann-pun membangun suatu geometri eliptik. Oleh karena itu terdapat tiga ruang dalam sistem geometri, yaitu ruang parabolik (Geometri Euclid), ruang hiperbolik (Geometri Lobachevksy), dan ruang eliptik (Geometri Riemann) (Clayton, 2010).

Dalam perkembang geometri, terdapat satu definisi yang sangat penting yaitu konsep tentang segiempat Sacherri. Definisi: Segiempat ABCD dengan sudut alas siku-siku (sudut D dan sudut C) dan sisi-sisinya kongruen (AD=BC) disebut segiempat Saccheri. Sisi di seberang alas adalah puncak, dan sudut yang dibentuk oleh sisi dan puncak adalah sudut puncak (sudut A sama dengan sudut B). DM’=M’C dan AM=MB. (Ross, 2010). Representasi definisi tersebut lihat Gambar 1.1.



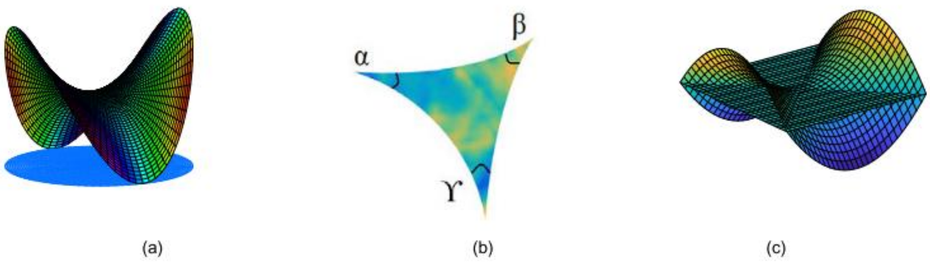
Gambar 1.2 Segiempat Sacherri

Untuk itu, cara pandang untuk memahaminya dibutuhkan kemampuan spasial, yaitu kemampuan spasial Geometri Euclid, kemampuan spasial Geometri Lobachevksy, dan kemampuan spasial Geometri Riemann. Selanjutnya tiga kemapuan tersebut dibahas satu-per-satu sebagai berikut.

1.1.1 Kemampuan Spasial Geometri Lobachevsky

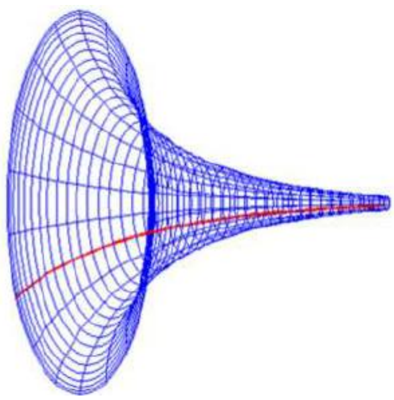
Geometri Lobachevsky yang juga disebut dengan Geometri Hiperbolik dikembangkan oleh ahli matematika Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) dan János Bolyai (1802-1860). Pengembangannya dimulai dengan mengkritsi tentang postulat kesejajaran Euclid (postulat kelima) (Márquez Díaz, 2018). Bolyai, juga Lobachvesky memberikan pendekatan berbeda dengan Euclid, yaitu dari titik di luar garis, ada garis yang tak terhingga banyaknya yang dapat ditarik sejajar dengan garis yang diberikan. Awalnya, kontribusi ini diremehkan oleh komunitas matematika, sehingga dilupakan selama beberapa tahun.

Teori yang dikembangkan oleh Lobachevsky, dinamai dengan "Theory of parallels". Itu merupakan sistem yang berbeda dengan Geometri Euclid (Coolidge, 2008). Dalam geometri Lobachevsky, mengawali teori kesejajaran dengan postulatnya adalah “Diberi garis dan titik di luarnya, setidaknya terdapat dua kesejajaran dengan garis yang melalui titik tersebut. Hal ini menunjukkan bahwa jumlah sudut segitiga lebih kecil dari 180º. Ini hal sangat berbeda dengan sifat dalam Geometri Euclidean, yaitu jumlah sudut segitiga sama persis dengan 180º. Faktor skala adalah fundamental untuk jenis penegasan ini, karena jika seorang pengamat berada di bidang hiperbolik, dia tidak akan melihat adanya perbedaan antara itu dan bidang Euclidean. Gambar 1.29 mengilustrasikan bidang hiperbolik, diwakili oleh geometri tipe pelana. Geometri ini khususnya, adalah salah satu pendekatan dari apa yang kemudian disebut sebagai geometri lokal alam semesta, yang dicirikan bahwa kelengkungan yang terakhir adalah negatif, suatu aspek yang akan dibahas nanti.

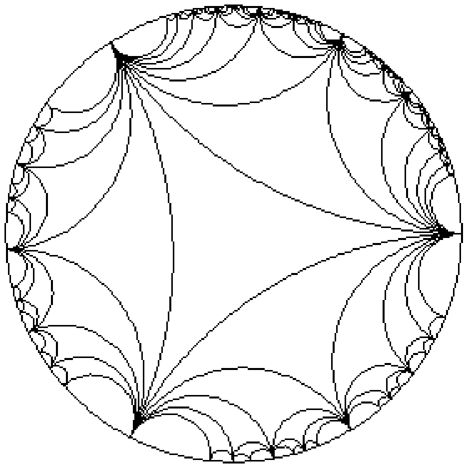


Gambar 1.3 Representasi Spasial Geometri Lobachevsky (Márquez Díaz, 2018)

Berdasarkan Gambar 1.3, representasi spasial Geometri Lobachevsky untuk Gambar (a) mewakili bidang hiperbolik dari geometri Bolyai-Lobachevsky, dari mana segitiga dengan geometri hiperbolik digambar di kursi (b), yang jumlah sudut α, β dan ϒ kurang dari pada 180^o. Jika diperhatikan bahwa di bawah bidang hiperbolik adalah bidang Euclidean, dengan jumlah sudutnya tepat 180^o. (c) Saat membuat superposisi antara bidang Euclidean dan bidang hiperbolik, perbedaannya terkenal, karena saat memproyeksikan segitiga pada bidang dan permukaan lengkung, jumlah total sudut pada kedua bidang tidak akan sama dengan 180^o (Márquez Díaz, 2018). Representasi Geometri Lobachevsky dapat dilihat pada Gambar 1.4 (a) dan (b).



Gambar 1.4 (a) Pseudosphere (https://www.researchgate.net/figure)

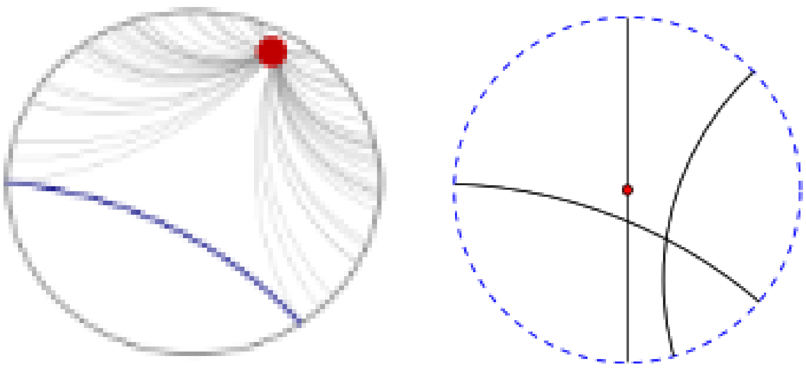


Gambar 1.4 (b) Poincaré disk

https://mathworld.wolfram.com/PoincareHyperbolicDisk.html)

Berdasarkan Gambar 1.4(a) merupakan representasi spasial grafis dari jenis geometri hiperbolik yaitu pseudosfer yang dibangun di atas ruang melengkung; yang memainkan peran yang sangat penting dalam menjelaskan teori umum relativitas Einstein. Pseudosfer diperoleh dari revolusi permukaan ketika lingkungan traksi memutar asimtotnya. Rotasi ini menghasilkan kelengkungan Gauss negatif yang konstan, di mana setiap titik di permukaan adalah titik sadel. Metrik di *pseudosphere* dapat ditransfer ke unit disk dan singularitas pseudosphere sesuai dengan horoskop di bidang hiperbolik. Sedangkan Gambar 1.4(b) adalah cakram Poincaré, itu adalah menghasilkan n proyeksi, dan menampilkan karakteristik fraktal secara keseluruhan. Cakram Poincaré terdiri dari piringan terbuka yang garis lurusnya adalah untaian Euclidean yang ujungnya berada di garis depan piringan (Márquez Díaz, 2018).

Geometri hiperbolik berbeda dari geometri Euclidean dengan postulat paralel (Aksioma ke-5) yaitu (1) Garis lurus dapat ditarik antara dua titik. (2) Setiap garis lurus yang diakhiri dapat diperpanjang tanpa batas waktu. (3) Sebuah lingkaran dapat digambar dengan sembarang titik dan jari-jari. (4) Semua sudut siku-siku sama. (5) Pada bidang datar, jika diberi garis dan tidak ada titik di atasnya, paling banyak satu garis yang sejajar dengan garis tersebut dapat ditarik melalui titik tersebut (Qu, 2022). Dalam geometri hiperbolik, ada jumlah garis tak terhingga yang sejajar dengan garis yang diberikan melalui titik tersebut. Himpunan garis geodesik dari titik merah ke batas bola Poincare yang sejajar dengan garis biru lihat Gambar 1.5. Juga, dapat dilihat melalui youtube dengan link: https://www.youtube.com/watch?v=zQo_S3yNa2w.



Gambar 1.5 Bola Poincare Garis-garis yang Sejajar (Qu, 2022)

Berdasarkan uraian di atas, dalam merepresentasikan secara spasial, maka secara teoretik terdapat lima elemen spasial geometri Lobachevsky. Lima elemen tersebut adalah sebagai berikut.

1) Visualisasi Etnomatematika

Penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa pendekatan etnomatematika merupakan Langkah awal untuk memahami konsep dan prinsip Geometri Lobachevsky (Widada, Herawaty, Hudiria, et al., 2020). Widada et al. (2020) menyatakan bahwa pembelajaran geometri dapat didekati melalui budaya lokal. Budaya kue lupis di Bengkulu, Indonesia memberikan representasi positif bagi siswa dalam memulai pembelajaran segitiga pada sistem Geometri Lobachevsky. Mereka menemukan secara empiris bahwa dalam segitiga, sejumlah besar sudut dalam valid kurang dari atau sama dengan seratus delapan puluh derajat. Oleh karena itu pembelajaran matematika yang memiliki objek abstrak termasuk geometri hendaknya dimulai dari sesuatu yang berakar pada budaya lokal.

Terdapat peningkatan proses kognitif mahasiswa setelah mengikuti pembelajaran geometri Lobachevsky dengan pendekatan etnomatematika. Para mahasiswa mampu membangun ciri-ciri garis sejajar Lobachevsky yang biasanya tidak mereka temukan dalam pembelajaran biasa (Herawaty, Khrisnawati, Widada,

& Mundana, 2020). Dalam pembelajaran geometri tentang aksioma Lobachevsky, mahasiswa dihadapkan pada permasalahan nyata yang berkaitan dengan budaya menangkap ikan menggunakan bubu. Siswa menggunakan lembar kegiatan untuk memicu proses kognitif mereka dalam memahami dan mencapai prinsip garis Paralel Garis. Sedemikian hingga mahasiswa mampu membuat pernyataan tentang aksioma Garis Paralel Lobachevsky (Herawaty et al., 2020).

Mahasiswa dapat mempelajari geometri non-Euclidean, khususnya aksioma paralel Lobachevsky, dengan titik tolak permasalahan nyata yang berkaitan dengan budaya lokal (Widada & Herawaty, 2022b). Dalam aktivitas tersebut, mahasiswa melakukan aktivitas pembelajaran geometri melalui benda-benda budaya lokal dan mereka mampu memvisualisasikan kesejajaran garis pada Geometri Lobachevsky.

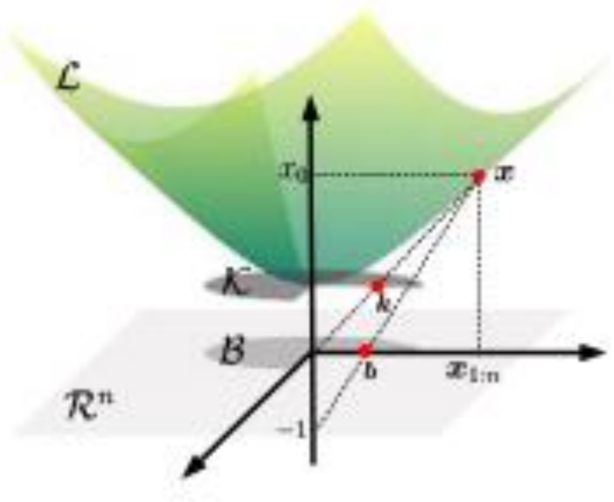
Dengan demikian, secara teoretik mahasiswa yang berada pada elemen spasial visualisasi etnomatematika Geometri Lobachevsky adalah mahasiswa dapat memvisualisasikan kesejajaran garis pada Geometri Lobachevsky berdasarkan benda-benda budaya lokal. Dekomposisi genetik teoretik mahasiswa tersebut adalah dapat melakukan aktivitas aksi dan proses sehingga menghasilkan objek visual tentang kesejajaran garis pada Geometri Lobachevsky berdasarkan benda-benda budaya lokal.

2) Visualisasi Mental

Hasil penelitian menunjukkan bahwa berdasarkan rekaman wawancara, subyek mampu mengambil tindakan dengan menginisialisasi proses memindahkan sketsa garis ke dalam dokumen. Kemudian, subjek mampu mengenkapsulasi proses-proses tersebut menjadi objek garis Paralel Garis. Selain itu, siswa dapat menyimpulkan bahwa terdapat banyak garis yang sejajar dengan g di atas kertas kerjanya (Herawaty et al., 2020).

Sudah menjadi budaya masyarakat Bengkulu dan sekitarnya mengenai alat tangkap yang disebut bubu. Menurut Widada & Herawaty (2022b), mahasiswa menggunakan lembar kegiatan untuk memicu proses kognitif mereka dalam memahami dan mencapai prinsip garis sejajar. Pengapian yang diharapkan adalah aksioma garis paralel Lobachevsky. Siswa mengalami peningkatan proses kognitif tentang geometri Lobachevsky berdasarkan budaya Bubu setempat. Ini adalah cerminan dari kemampuan tingkat tinggi. Mahasiswa-mahasiswa tersebut dapat membangun fitur garis paralel yang biasanya tidak mereka temukan dalam pelajaran regular.

Dalam Geometri Lobachevsky direpresentasikan titik-titik dalam ruang hiperbolik dengan model geometri sebagai sistem koordinat secara umum adalah dua model. Dua model tersebut adalah model Lorentz dan model bola Poincar´e (disingkat model Poincare) (Qu, 2022). Model Pincare dapat dilihat Gambar 1.30(b), sedangkan visualisasi model Lorentz dapat dilihat pada Gambar 1.6.



Gambar 1.6 Visualisasi model Lorentz (Qu, 2022)

Menurut (Qu, 2022), visualisasi Model Lorentz adalah lembar atas hiperboloid 2 lembar. Secara numerik lebih stabil dan ruang yang cukup untuk pengoptimalan. Hal ini merupakan model-model visual mental dari Geometri Lobachevsky.

Dengan demikian, secara teoretik mahasiswa yang berada pada elemen spasial visualisasi mental Geometri Lobachevsky adalah mahasiswa dapat memvisualisasikan kesejajaran garis pada Geometri Lobachevsky dalam representasi ikonik (gambar) berdasarkan benda-benda budaya lokal. Mahasiswa dapat melakukan aktivitas aksi dan proses sehingga menghasilkan objek dalam bentuk representasi ikonik tentang kesejajaran garis pada Geometri Lobachevsky berdasarkan benda-benda budaya lokal.

3) Relasi ikonik

Hasil penelitian menujukkan bahwa mahasiswa yang belajar Geometri Lobachevsky melalui pendekatan etnomatematika mampu membangun pernyataan yang disimpan dalam sistem pemrosesan informasinya dalam bentuk skema. Pernyataan tersebut adalah "ada garis tak terhingga yang sejajar dengan g". Dia menyatakan bahwa latar belakang pernyataan itu adalah titik P di luar garis g, garis yang tak terhingga adalah garis yang melalui titik P (Herawaty et al., 2020). Hasil ini mendukung penelitian-penelitian Widada & Herawaty (2022a) dan Widada & Herawaty, (2022b) bahwa mahasiswa menyatakan bahwa mahasiswa mampu mengorganisasikan kegiatan dan membuat algoritma yang membentuk konsep/prinsip dengan benar. Siswa fungsional juga dapat melakukan proses abstraksi dengan menggunakan aturan dalam sistem matematika. Itu adalah kumpulan aktivitas mental terstruktur yang dilakukan oleh subjek untuk menggambarkan bagaimana konsep/prinsip matematika dapat dikembangkan dalam pikirannya. Hal ini bermakna bahwa siswa dapat meringkas dua atau lebih sifat dalam aksioma Garis Paralel Lobachevsky melalui etnomatematika dalam bentuk jebakan. Bubu adalah alat tangkap tradisional masyarakat pedesaan di Bengkulu. Proses kognitif selanjutnya adalah siswa dapat mengkonstruksi objek tentang garis tak terhingga yang sejajar dengan garis tertentu. Kegiatan enkapsulasi menghasilkan pemahaman yang benar berdasarkan sifat anyaman tikar. Melalui pendekatan etnomatematika siswa dapat mencapai proses kognitif trans level (Widada & Herawaty, 2022b).

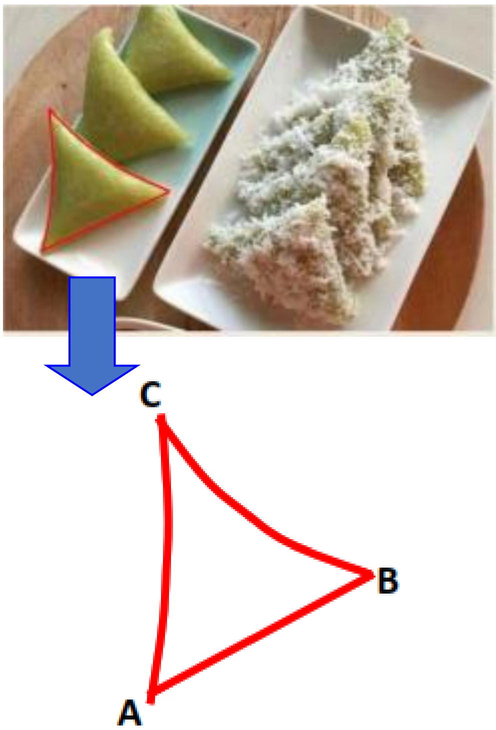
Dengan demikian, secara teoretik mahasiswa yang berada pada elemen spasial relasi ikonik Geometri Lobachevsky adalah mahasiswa dapat membuat pengertian/pernyataan tentang kesejajaran garis pada Geometri Lobachevsky berdasarkan representasi ikonik. Dekomposisi genetik teoretik mahasiswa tersebut adalah mahasiswa dapat melakukan aktivitas aksi, proses dan enkapsulasi sehingga menghasilkan objek mental dalam bentuk pengertian/pernyataan tentang kesejajaran garis pada Geometri Lobachevsky berdasarkan representasi ikonik.

4) Relasi simbolik

Hasil penelitian Widada, Herawaty, Jumri, & Wulandari (2020) menyatakan bahwa siswa memiliki pemahaman yang sangat lengkap. Ia mampu menghubungkan secara tepat dan logis setiap objek yang dibutuhkan. Itu juga pemahaman konseptual. Proses kognitif siswa mencapai skema yang matang. Ia memanggil kembali skema tersebut dalam memori jangka panjang dan diproses melalui kemampuan pemahaman prosedural dengan baik. Itu adalah pencapaian pemahaman metakognitif.

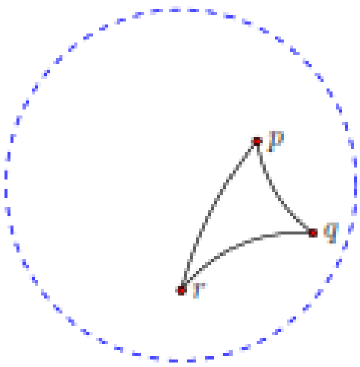
Pada elemen spasial ini, siswa mampu memahami kognisi secara umum, serta kesadaran dan pengetahuan tentang kognisi sendiri. Siswa memiliki pengetahuan strategis berupa strategi berpikir, dan pemecahan masalah. Kemampuannya juga tampak dalam bentuk pengetahuan kontekstual dan kondisional. Terakhir, ia memiliki pengetahuan diri terkait dengan kekuatan dan kelemahan diri tentang kognisi dan pembelajaran (Brijlall & Bansilal, 2011). Siswa dengan respons relasional mampu mengidentifikasi dan menggunakan struktur konseptual yang mendasarinya. Dilanjutkan oleh siswa abstrak yang diperluas yang dapat membangun struktur umum dan menunjukkan perluasan di luar konteks yang diberikan oleh aslinya (Slavin, 2006).

Dalam suatu penelitian tentang sifat-sifat geometri Lobachevsky, peneliti tersebut memanfaatkan budaya lokal sebagai media pembelajaran. Salah satu sifat yang diteliti adalah jumlah besar sudut dalam suatu segitiga. Penelitian tersebut menemukan siswa yang dapat merepresentasikan segitiga yang diperoleh dari keliling kue Lupis. Segitiga tersebut diberi nama untuk setiap sudutnya menjadi ΔABC. ΔABC terbentuk dari tiga ruas garis, yaitu $AB \cup BC \cup CA$. Namun setiap ruas garis merupakan ruas garis yang melengkung ke dalam (Widada, Herawaty, Hudiria, et al., 2020). Subjek penelitian kemudian menggambarnya seperti pada Gambar 1.7.



Gambar 1.7. Segitiga ABC terbentuk dari *Lupis* (Widada, Herawaty, Hudiria, et al., 2020)

Berdasarkan penelitian Widada, Herawaty, Hudiria, et al. (2020) tersebut, mahasiswa mampu menyatakan bahwa “jumlah besar sudut dalam segitiga adalah kurang dari atau sama dengan 180^{o}”. Itu adalah capaian belajar mahasiswa yang bersesuaian dengan Teorema Lobachevsky. Mereka belajar dengan pendekatan kue *lupis*, sebagai *starting-poin* pembelajar geometri. Secara deduktif, segitiga pada Geometri Lobachevsky adalah sebagaimana direpresentasikan pada Gambar 1.8.



Gambar 1.8 Gambar Segitiga pada Geometri Hiperbolik (Hitchman, 2018)

Selanjutnya, ada mahasiswa dapat membuat pernyataan kesejajaran Lobachevsky secara simbolik. Siswa mampu mengkoordinasikan proses aksi benda-benda dari sifat-sifat garis sejajar, sehingga mampu menghasilkan skema yang matang dari aksioma Garis Paralel Lobachevsky. Juga, dapat menerapkan skema untuk menyimpulkan keberadaan garis sejajar dengan garis tertentu. Garis-garis itu banyaknya tek berhingga (Widada et al., 2020). Dalam pembelajaran geometri melalui pendekatan budaya lokal, ada mahasiswa yang mampu menyatakan suatu aksioma kesejajaran secara simbolik yaitu: $(\exists\ g)$ & $(\exists\ P \notin g)$, $(\exists\ g1$ & $g2)$ $(g1 \cap g2 = P) \ni g1//g$ & $g2//g$ (Herawaty et al., (2020); Widada et al. (2020). Pernyataan tersebut adalah simbolisasi dari pernyataan yang telah diungkapkan sebelumnya yaitu “melalui titik P di luar garis g, ada garis g1 dan garis g2 yang sejajar dengan g”. Hal ini berarti bahwa berdasarkan visualisasi mental, mahasiswa dapat membuat hubungan secara simbolik tentang kesejajaran garis-garis pada Geometri Lobachevsky.

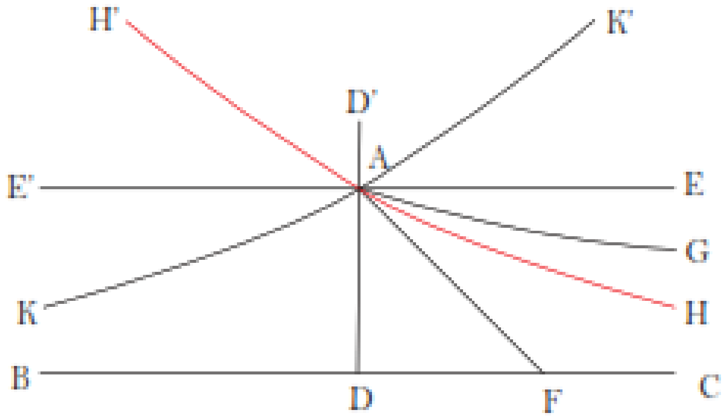
Mahasiswa melalui aktivitas kognitifnya mampu menyatakan teorema tentang jumlah sudut dalam segitiga secara simbolik. Pernyataan tersebut adalah bahwa $(\angle ABC) + m\ (\angle ACB) + m\ (\angle BAC) \leq 180^o$ (W Widada, Herawaty, Hudiria, et al., 2020). Itu memberikan gambaran bahwa sebuah segitiga memiliki jumlah besar sudut-sudut di dalamnya adalah tidak lebih dari 180^o. Mahasiswa juga mampu menyimpulkan bahwa terdapat geometri yang berbeda dengan Geometri Euclid yaitu Geometri Lobachevsky. Dalam pembelajaran Geometri Lobachevsky tingkat retensi dituntut lebih seperti tingkat kognitif semi-trans tingkat menengah ke atas hingga tingkat extended-trans (Widada, Herawaty, Ma’rifah, & Yunita, 2019). Hal ini menunjukkan bahwa dapat membuat hubungan antar titik, garis dan hubungan antar dua garis sudut dalam suatu segitiga secara visual.

Dengan demikian, secara teoretik mahasiswa yang berada pada elemen spasial relasi simbolik Geometri Lobachevsky adalah mahasiswa dapat membuat hubungan secara simbolik antar titik dan garis-garis pada Geometri Lobachevsky berdasarkan visualisasi mental. Dekomposisi genetik teoretik mahasiswa tersebut adalah dapat melakukan aktivitas aksi, proses dan objek sehingga menghasilkan skema dalam bentuk hubungan secara simbolik antar titik dan garis-garis pada Geometri Lobachevsky berdasarkan visualisasi mental.

5) Membangun Geometri Formal (Lobachevsky) (materi ini akan dibahas di Bab IV)

Hasil penelitian didapatkan bahwa mahasiswasiswa yang memiliki kemampuan dalam kategori abstrak yang diperluas yang mampu membangun Geometri Lobachevsky secara formal. Mahasiswa tersebut memberikan beberapa kemungkinan kesimpulan yang benar. Prinsip abstrak digunakan untuk menafsirkan fakta konkret dan tanggapan yang sesuai yang terpisah dari konteks. Pembuktian prinsip kesejajaran dilakukan secara konsisten sehingga membangun struktur baru (Widada, Herawaty, Jumri, & Wulandari, 2020).

Berdasarkan aksioma kesejajaran Lobachevsky yang diungkap di atas, maka akibatnya adalah bahwa "melalui titik A di luar garis g = (BDC), terdapat takhingga banyaknya garis yang sejajar dengan garis g. Menurut Braver (2007) bahwa garis-garis lain yang berada di antara dua sudut siku-siku yang menghadap BC, garis-garis yang terletak di antara kesejajaran, yaitu garis-garis di dalam sudut HAK = $2\prod(p)$ termasuk dalam kelas garis potong. Di sisi lain, yang terletak di antara salah satu paralel dan EE' (yaitu yang berada di dalam salah satu dari dua sudut EAH = $\pi/2 - \prod(p)$ atau E´AK = $\pi/2 - \prod(p)$) seperti AG, termasuk ke kelas garis tidak berpotongan. Demikian pula, di sisi lain garis EE´, perpanjangan AH´ dan AK´ dari AH dan AK sejajar dengan BC; yang lainnya adalah garis potong jika terletak pada sudut K'AH', tetapi merupakan garis bukan potong jika terletak pada salah satu sudut K'AH' atau H'AE'. Konsekuensinya, dengan anggapan bahwa $\prod(p) = \pi/2$, garis bisa hanya berupa garis potong atau paralel. Namun, jika diasumsikan bahwa $\prod(p) < \pi/2$, maka kita harus menerima dua paralel, satu di setiap sisi. Selain itu, di antara baris yang tersisa, harus dibedakan antara yang dipotong dan yang tidak dipotong. Di bawah salah satu asumsi, tanda paralelisme yang membedakan adalah bahwa garis menjadi garis potong ketika mengalami deviasi terkecil ke arah sisi di mana garis sejajar itu berada. Jadi, jika AH sejajar dengan DC, maka terlepas dari seberapa kecil sudut HAF, garis AF akan memotong DC. Hal tersebut dapat direpresentasikan dalam Gambar 1.9.



Gambar 1.9 Representasi Garis-garis yang Sejajar dengan g = (BDC) (Braver, 2007)

Penelitian lain menunjukkan bahwa mahasiswa memiliki kemampuan pemahaman faktual, konseptual, prosedural dan metakognitif sangat baik. Mereka mampu memberikan lebih dari satu interpretasi dari sebuah argumen. Itu adalah kemampuan untuk mengasosiasikan integrasi antar interpretasi sehingga membentuk ide baru. Juga, mampu melakukan kegiatan pemecahan masalah, memberikan penjelasan penyelesaian dengan benar. Mahasiswa mampu membuat solusi untuk membangun struktur baru yaitu Geometry Lobachevksy. Mereka mampu mendemonstrasikan pemikiran multidimensi, dan dapat menghubungkan dengan barang-barang di luar yang sudah ada sehingga terbentuklah ide-ide baru. Berdasarkan analisis dekomposisi genetik dapat disimpulkan bahwa kualitas respon siswa berada di antara level abstrak relasional dan abstraksi diperpanjang, sehingga siswa termasuk dalam klasifikasi level abstrak. Hasil penelitian lain menunjukkan bahwa pada tingkat abstrak yang diperluas, yang tertinggi, siswa dapat menggeneralisasikan struktur melebihi apa yang diberikan, dapat melihat struktur dari berbagai perspektif, dan mentransfer ide ke area baru. Mereka mungkin memiliki kompetensi untuk menggeneralisasi, berhipotesis, mengkritik, berteori, dan sebagainya (Widada, Sunardi, Herawaty, Pd, & Syefriani, 2018). Karakter siswa yang berada pada level abstrak mampu menggunakan semua pernyataan yang diberikan untuk menyelesaikan masalah, dapat menjelaskan hubungan pernyataan yang diberikan dengan argumentasi dalam menyelesaikan masalah, mampu menjelaskan kegunaan setiap pernyataan yang digunakan untuk menyelesaikan masalah, sebagai hasil dari pernyataan yang terbukti, dapat menjelaskan pernyataan yang disusun sebagai hasil dari pernyataan yang ada dengan menggunakan argumen yang baik dan menarik kesimpulan yang telah dibuat di atas kertas dan pensil, tetapi belum dapat membuat bukti, dan dia mencoba membuat yang baru pernyataan yang lebih dari pernyataan aslinya mengacu pada pernyataan yang sudah ada, tetapi gagal membuktikan kebenarannya (Sunardi, 2006). Dengan demikian, pada tingkat abstrak yang diperluas, siswa mampu memahami sistem aksioma deduktif, dan membangun sistem baru. Dengan memikian, mahasiswa mampu membuktikan bahwa melalui titik T yang tidak terletak pada garis g, tidak banyak garis yang sejajar dengan g. Mahasiswa mampu membandingkan struktur deduktif Geometri Lobachevsky dengan Geometri Euclid. Akhirnya, mahasiswa abstrak yang diperluas mampu mempresentasikan beberapa elemen dan melewati saling ketergantungan antara satu sama lain, sehingga menjadi satu kesatuan yang terintegrasi. Dia menggeneralisasi ke struktur baru.

Dalam mebangun Geometri Formal, Lobachevsky memulai dengan menelaah Aksioma ke-5 Euclid tentang kesejajaran. Menurut Braver (2007) bahwa dalam geometri, telah teridentifikasi beberapa ketidaksempurnaan, yang dianggap bertanggung jawab atas fakta sains, selain dari terjemahannya ke dalam analisis, tidak mengambil langkah maju dari keadaan Euclid. Ketidaksempurnaan tersebut adalah ketidakjelasan dalam gagasan dasar tentang besaran geometris, ketidakjelasan dalam metode dan cara merepresentasikan pengukuran besaran tersebut, dan akhirnya, celah penting dalam teori kesejajaran. Hingga saat ini, semua upaya matematikawan untuk mengisi celah tersebut masih belum membuahkan hasil.

Prinsip kesejajaran garis-garis Euclid menjadi perdebatan, sehingga Lobachevsky mengajukan *The Theory of Parallels* (TP). Terdapat 37 TP yang dibangun oleh Lobachevsky (Braver, 2007). 37 TP tersebut adalah TP 1-15 membahas tentang *Preliminary Theorems*, TP 16 membahas tentang *The Definition* *of Parallelism*, TP 17 membahas *Parallelism is Well-Defined,* TP 18 membahas *Parallelism is Symmetric*, TP 19 tentang *The Saccheri-Legendre,* Theorem TP 20 adalah *The Three Musketeers Theorem*, TP 21 adalah *Lemma* Kecil, TP 22 adalah tentang Tegak Lurus secara Umum, TP 23 adalah tentang Fungsi ∏, TP 24 adalah tentang Konvergensi Kesejajaran, TP 25 adalah tentang Paralelisme Transitif, TP 26 adalah tentang Segitiga Bulat, TP 27 adalah tentang Sudut Padat, TP 28 adalah tentang Teorema Prisma, TP 29 adalah tentang Lingkaran atau Kekurangannya (Bagian I), TP 30 lanjutan tentang Lingkaran atau Kekurangannya (Bagian II), TP 31 adalah tentang Definisi Horocycle, TP 32 mengenai Horocycle sebagai Batas-Lingkaran, TP33 tentang Horocycles Konsentris, TP 34 tentang Horosfer, TP 35 tentang Trigonometri Bola, TP 36 tentang Rumus Dasar, dan TP 37 membahas Trigonometri Bidang.

Seperti telah dikemukan di depan bahwa dalam pembelajaran geometri melalui pendekatan budaya lokal, ada mahasiswa yang mampu menyatakan suatu aksioma kesejajaran secara simbolik yaitu: (∃ g) & (∃ P∉ g), (∃ g1 & g2) (g1∩g2 =P) ∋ g1//g & g2//g (Herawaty et al., (2020); Widada et al. (2020)). Itu adalah pernyataan tentang kesejajaran Lobachevsky. Sebab dalam Geometri Euclid, terdapat penyimpangan tentang kekakuan dalam Geometri (Braver, 2007). Sekanjutnya Braver menyatakan bahwa Lobachevsky menganggap bahwa sepasang garis tegak lurus yang berpotongan di titik P. Garis-garis tersebut yaitu sumbu horizontal dan vertical, secara alami membagi bidang menjadi empat kuadran. Lobachevsky menegaskan bahwa setiap garis melalui titik P harus memasuki salah satu dari dua kuadran bawah di bawah sumbu horizontal. Ini tampak begitu jelas sehingga membuat komentar tidak diperlukan, tetapi saya ingin membahasnya sejenak karena ini akan berfungsi dengan baik untuk mengilustrasikan pergeseran filosofis yang mendalam yang mengambil alih disiplin matematika dalam waktu lima puluh tahun setelah kematian Lobachevsky.

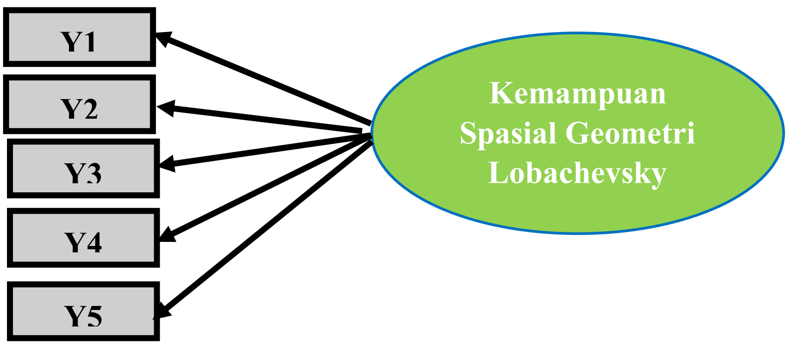
Dengan demikian, secara teoretik mahasiswa yang berada pada elemen spasial membangun Geometri Lobachevsky Formal adalah mahasiswa dapat membuat pernyataan baru dan membuktikannya sebagai akibat wajar (*corollary*) dari pernyataan tentang kesejajaran garis-garis pada Geometri Lobachevsky.

Dekomposisi genetik teoretik mahasiswa tersebut adalah dapat melakukan aktivitas aksi, proses, objek dan menghubungkan skema-skema tentang kesejajaran garis-garis pada Geometri Lobachevsky untuk membuat pernyataan baru dan membuktikannya sebagai akibat wajar (*corollary*) dari pernyataan dalam sistem geometri tersebut.

Berdasarkan uraian di atas, maka kemampuan Spasial Geometri Lobachevsky adalah kemampuan seseorang untuk memahami, menyimpan, mengingat, dan menciptakan gambaran mental tentang bentuk dan ruang hiperbolik yang diukur berdasarkan elemen-elemen sebagai berikut:

1) visualisasi etnomatematika (Y1);
2) visualisasi mental (Y2);
3) relasi ikonik (Y3).
4) relasi simbolik (Y4)
5) membangun geometri formal (Lobachevsky) (Y5)

Dalam pembelajaran geometri, kemampuan siswa dalam membuktikan teorema merupakan kemampuan yang cukup tinggi. Salah satu teorema yang sulit ditentukan adalah garis paralel Lobachevsky (Widada, Herawaty, Hudiria, Prakoso, et al., 2020). Kemampuan spasial Geometri berperan penting dalam memahami konsep dan prinsip Geometri Lobachevsky, juga dalam proses pemecahan masalah yang berkaitan dengan geometri hiperbolik. Dengan demikian hubungan antara variabel laten Kemampuan Spasial Geometri Lobachevsky dan variabel-variabel indikatornya adalah sebagai berikut (lihat Gambar 1.10).



Gambar 1.10 Hubungan Kemampuan Spasial Geometri Lobachevsky dan Indikatornya

Keterangan: Y1: visualisasi etnomatematika,
Y2: visualisasi mental,
Y3: relasi ikonik,
Y4: relasi simbolik,
Y5: membagun geometri formal (Lobachevsky)

Berdasarkan uraian tentang karakteristik elemen-elemen kemampuan spasial Geometri Lobachevsky secara teoretik dapat dirangkum dalam Tabel 1.1.

Tabel 1.1 Karakteristik Teoretik Kemampuan Spasial Geometri Lobachevsky

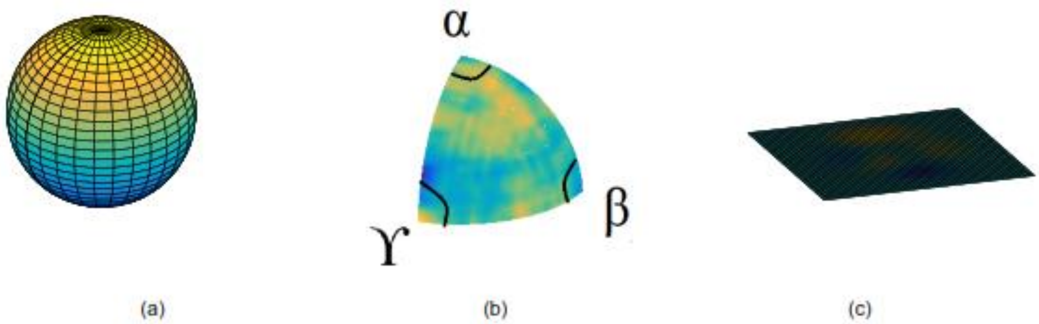
Jenis Spasial	Karakteristik	Karakteristik berdasarkan APOS
Visualisasi Etnomatematika	Mahasiswa dapat memvisualisasikan kesejajaran garis pada Geometri Lobachevsky berdasarkan benda-benda budaya lokal	Mahasiswa dapat melakukan aktivitas aksi dan proses sehingga menghasilkan objek visual tentang kesejajaran garis pada Geometri Lobachevsky berdasarkan benda-benda budaya lokal
Visualisasi Mental	Mahasiswa dapat memvisualisasikan kesejajaran garis pada Geometri Lobachevsky dalam representasi ikonik (gambar) berdasarkan benda-benda budaya lokal	Mahasiswa dapat melakukan aktivitas aksi dan proses sehingga menghasilkan objek dalam bentuk representasi ikonik tentang kesejajaran garis pada Geometri Lobachevsky berdasarkan benda-benda budaya lokal
Relasi ikonik	Mahasiswa dapat membuat pengertian/pernyataan tentang kesejajaran garis	Mahasiswa dapat melakukan aktivitas aksi, proses dan enkapsulasi

Jenis Spasial	Karakteristik	Karakteristik berdasarkan APOS
	pada Geometri Lobachevsky berdasarkan representasi ikonik	sehingga menghasilkan objek mental dalam bentuk pengertian/pernyataan tentang kesejajaran garis pada Geometri Lobachevsky berdasarkan representasi ikonik.
Relasi simbolik	Mahasiswa dapat membuat hubungan secara simbolik antar titik dan garis-garis pada Geometri Lobachevsky berdasarkan visualisasi mental	Mahasiswa dapat melakukan aktivitas aksi, proses dan objek sehingga menghasilkan skema dalam bentuk hubungan secara simbolik antar titik dan garis-garis pada Geometri Lobachevsky berdasarkan visualisasi mental
Membangun Geometri Lobachevsky	Mahasiswa dapat membuat pernyataan baru dan membuktikannya sebagai akibat wajar (*corollary*) dari pernyataan tentang kesejajaran garis-garis pada Geometri Lobachevsky.	Mahasiswa dapat melakukan aktivitas aksi, proses, objek dan menghubungkan skema-skema tentang kesejajaran garis-garis pada Geometri Lobachevsky untuk membuat pernyataan baru sebagai skema yang matang dan membuktikannya sebagai akibat wajar (*corollary*)

Jenis Spasial	Karakteristik	Karakteristik berdasarkan APOS
		dari pernyataan dalam sistem geometri tersebut.

1.3.2 Kemampuan Spasial Geometri Riemman

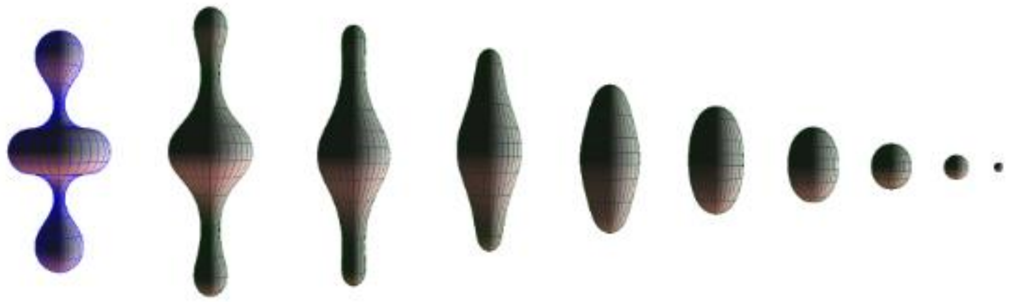
Selain Geometri Lobachevsky, ada geometri lain yang bertentangan dengan postulat kelima Euclid. Itu dikembangkan oleh Bernhard Riemann (1826-1866), seorang murid Gauss. Riemann mendefinisikan geometri sebagai geometri elips (Geometri Riemann) (Coolidge, 2008). Geometri Riemann berbeda dengan geometri Bolyai-Lobachevsky. karena garis-garisnya tidak terbatas tetapi tertutup, oleh karena itu, jumlah sudut dalam lebih besar dari 180º. Geometri kelengkungan konstan positif ini, dicirikan karena tidak ada garis paralel dari titik luar, oleh karena itu, tidak mungkin untuk menggambar apapun. Untuk Riemann, membangun jenis geometri ini melibatkan penggunaan berbagai elemen yang ditentukan oleh koordinat yang dijelaskan oleh metrik Euclidean yang sangat kecil (Márquez Díaz, 2018). Model paling representatif dari jenis geometri n-dimensi ini adalah bola-n, seperti yang diilustrasikan pada Gambar 1.11.



Gambar 1.11 Representasi Spasial Geometri Riemann

(Márquez Díaz, 2018)

Gambar 1.11 adalah Representasi Spasial Geometri Riemman. Pada Gambar 1.11 (a) adalah bola yang mewakili geometri Riemman elips, seperti halnya Bola Bumi. Pada bagian (b) merepresentasikan tiga kota di permukaan bumi yang dihubungkan oleh sebuah segitiga. Segitiga yang terbangun menjadi salah satu sifat dari Geometri Riemann yaitu jumlah sudut internal α, β dan ϒ lebih dari 180º. Segitiga tersebut berada di permukaan elips. Bagian (c) merupakan bidang yang berbeda dengan bidang Euclidean, secara spasial keduannya akan sangat berbeda dalam geodesik pada skala besar (Márquez Díaz, 2018). Bila divisualisasi, maka model geometri Riemann adalah sebagaimana Gambar 1.11.



Gambar 1.12 Visualisasi Ricci flow Geometri Riemann (Bosch, 2018)

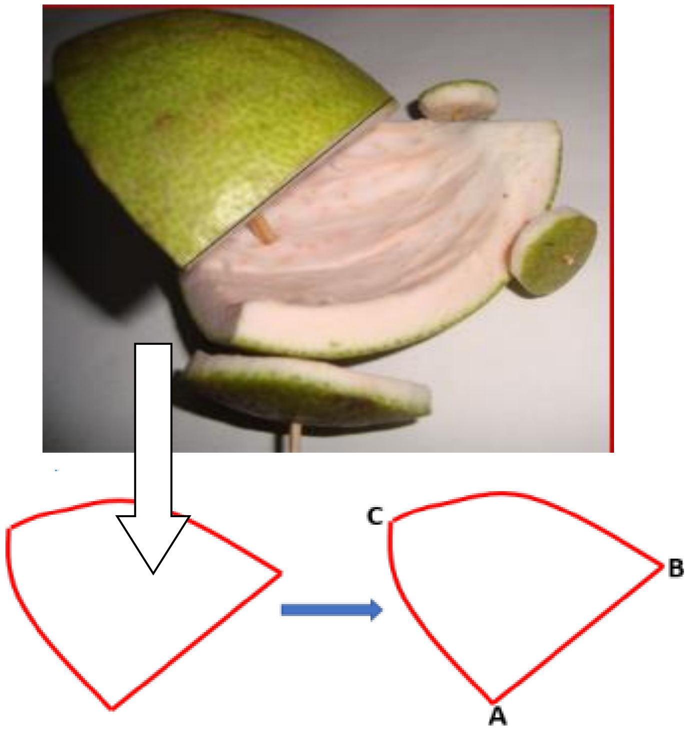
Gambar 1.12 merupakan suatu visualisasi Ricci flow. Model Hamilton merupakan suatu Ricci flow. Hal itu dikarenakan Hemilton ingin memiliki semacam persamaan difusi nonlinear. Dia mengembangkan beberapa metrik berdasarkan kelengkungannya justru menjadi alasan mengapa ia berevolusi menjadi metrik yang lebih merata. Jika ditafsirkan secara visual, dapat dilihat bahwa objek geometris awal pada Gambar 1.12 berkembang menjadi objek geometris yang lebih rata, yaitu bola (Bosch, 2018).

Dalam kehidupan sehari-hari, Geometri Riemann memiliki impelemtasi yang sangat dekat dengan budaya masyarakat. Belum lama ini even besar Piala Dunia Qatar 2022 telah usai yang dimenangkan oleh Tim Sepabola Argentina. Pertandingan berlangsung 29 hari dengan banyak pertandingan 64 kali. Dalam setiap pertandingan yang diperebutkan oleh para pemain adalah bola. Pertandingan sepak bola menjadi budaya yang paling diminati dan terkenal di masyarakat dunia. Oleh karena itu, bola menjadi salah satu model untuk merepresentasikan Geometri Riemann (eliptik) sebagai etnomatematika. Perhatikan bola Qatar 2022 yang diperebutkan setiap pemain untuk tujuan mejalakan ke gawang lawan (Gambar 1.13).

Gambar 1.13 Bola Qatar sebagai Representasi Etnomatematika Geometri Eliptik (https://www.detik.com/edu/edutainment/d-6426406/)

1) Visualisasi Etnomatematika

Widada, Herawaty, Widiarti, Aisyah, & Tuzzahra (2020) menyatakan bahwa melalui budaya lokal (etnomatematika) yaitu media kulit jeruk bali dapat diketahui secara empiris sifat segitiga dengan jumlah besar sudut lebih dari 180 derajat. Hal ini tentunya menjadi pemicu bagi kami untuk menghadirkan sifat formal dan teruji dalam struktur Riemann Geometri dalam pembelajaran di kelas. Oleh karena itu, guru dapat merancang pembelajaran yang memudahkan siswa dalam memahami konsep dan prinsip bangun ruang yang bersifat abstrak melalui media konkrit. Penelitian tersebut menyatakan bahwa, dengan memanfaatkan kulit jeruk bali, anak-anak membuat mobil. Mainan mobil-mobilan dari kulit jeruk bali merupakan salah satu mainan tradisional yang dimiliki Indonesia. Namun, mainan itu tidak diketahui dari mana asalnya. Ini adalah mainan yang sangat ramah lingkungan. Mainan tersebut dulunya sangat digemari oleh anak-anak Indonesia, namun hingga saat ini masih menjadi warisan bangsa sebagai kearifan lokal yang ramah lingkungan. Itu sangat dekat dengan pikiran siswa. Mobil mainan dari kulit jeruk dapat dilihat pada Gambar 1.14.



Gambar 1.14 Representasi Mainan Anak dari Kulit Jeruk (Widada, Herawaty, Widiarti, et al., 2020)

Hasil penelitian Widada, Herawaty, Widiarti, et al. (2020) seperti terlihat Gambar 1.14, subjek penelitian mulai membuat pemahaman baru bahwa segitiga tidak selalu terbentuk dari ruas garis lurus. Subjek juga menyatakan bahwa ukuran sudut dalam harus berbeda. Hal ini merupakan pembelajaran geometri yang akan berdampak pada proses kognitif siswa. Level berpikir geometris siswa meningkatkan penalaran geometris dan pembuktian sifat-sifatnya. Dalam merancang pembelajaran, pandangan bahwa penalaran bersifat geometris, bahkan dalam konteks mencoba menyelesaikan soal-soal geometri sekolah bersifat tidak rutin.

Dengan demikian, secara teoretik mahasiswa yang berada pada elemen spasial visualisasi etnomatematika Geometri Riemman adalah mahasiswa dapat memvisualisasikan kesejajaran garis pada Geometri Riemman berdasarkan benda-benda budaya lokal. Dekomposisi genetik teoretik mahasiswa tersebut adalah dapat melakukan aktivitas aksi dan proses sehingga menghasilkan objek visual tentang kesejajaran garis pada Geometri Lobachevsky berdasarkan benda-benda budaya lokal.

2) Visualisasi Mental

Berdasarkan Gambar 1.14 tentang representasi mainan anak dari kulit jeruk, maka penelitian Widada, Herawaty, Widiarti, et al. (2020) menemukan bahwa subjek penelitian mengukur lima segitiga ABC. Itu adalah mengukur lima buah segitiga kulit jeruk bali. Mereka melakukan kegiatan geometri yang dapat meningkatkan kemampuan spasial yaitu visualisasi mental, karena jeruk bali adalah bola dunia mini. Dalam penelitian tersebut, melalui visualisasi mental, subjek penelitian dapat menggeneralisasi konsep dan prinsip yang diperoleh dari jeruk ke dalam geometri bola dunia (yaitu Geometri Riemman). Dalam hal kesejajaran garis, dapat dikatakan bahwa untuk setiap pasangan garis berbeda l dan m, selalu ada titik P pada kedua garis (Anonimous, 1986). Hal ini berarti bahwa tidak ada garis-garis yang sejajar dalam Geometri Riemman.

Secara visual mahasiswa memiliki kemampuan untuk memandang bumi dalam skala kecil, seperti bola dan jeruk. Aktivitas mental dan fisik dalam pembelajaran geometri dapat dideskripsikan melalui dekomposisi genetiknya. Ada tiga komponen yaitu dekomposisi genetik dari aktivitas memahami aksioma dan teorema-teorema Riemann, penerapan pendekatan etnomatematika dalam pembelajaran geometri dalam kerangka *frame analysis method/micro-genetic* untuk pengumpulan data; dan terakhir analisis data dalam konteks APOS (action-process-object-schema) (Brijlall & Bansilal, 2011).

Berdasarkan aktivitas mahasiswa selama pembelajaran geometri melalui media jeruk bali, mereka dapat memvisualisasikan bahwa tidak ada garis-garis yang sejajar jika dibuat pada permukaan kulit jeruk tersebut (Widada, Herawaty, Widiarti, et al., 2020). Hasil-hasil peneltian tersebut bermakna bahwa mahasiswa dapat memvisualisasikan kesejajaran garis pada Geometri Riemman dalam representasi visual dalam bentuk gambar berdasarkan benda-benda budaya lokal.

Dengan demikian, secara teoretik mahasiswa yang berada pada elemen spasial visualisasi mental Geometri Riemman adalah mahasiswa dapat memvisualisasikan kesejajaran garis pada Geometri Riemman dalam representasi ikonik (gambar) berdasarkan benda-benda budaya lokal. Mahasiswa dapat melakukan aktivitas aksi dan proses sehingga menghasilkan objek dalam bentuk representasi ikonik tentang kesejajaran garis pada Geometri Riemman berdasarkan benda-benda budaya lokal. Itu adalah suatu interiorisasi antar aksi-aksi sedemikian hingga menjadi suatu proses yang kemudian dienkapsulasi mejadi suatu objek Geometri Riemman.

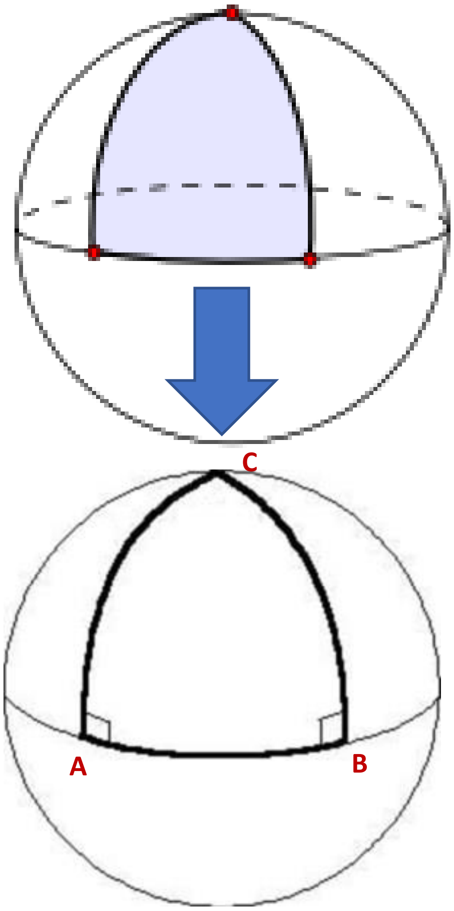
3) Relasi ikonik

Melalui proses kognitif berdasarkan visualisasi mental, mahasiswa dapat membangun relasi ikonik. Hasil penelitian (Widada, Herawaty, Widiarti, et al., 2020) mahasiswa dapat membuat segitiga yang tidak biasa, yaitu segitiga dengan sisi melengkung berdasarkan mainan anak dari kulit jeruk Bali (aktivitas aksi) lihat Gambar 2… Mereka merepresentasikan dalam hubungan ikonik sebagai segitiga ABC gabungan tiga sisi AB, BC dan CA (aktivitas proses berdasarkan internalisasi dalam sistem pemrosesan informasinya). Selanjunya mahasiswa mengukur sudut dalamnya sebagai aktivitas geometri yang dapat meningkatkan kemampuan spasial karena jeruk bali adalah bola dunia mini. Sehingga mahasiswa mampu menggeneralisasi konsep dan prinsip yang diperoleh dari jeruk ke dalam geometri bola dunia atau lebih umum. Pada akhirnya, mahasiswa mampu menyimpulkan bahwa dalam segitiga ABC berlaku: besar sudut ABC ditambah besar sudut ACB dan ditambah besar sudat BAC adalah lebih dari serratus delapan puluh derajat (proses-proses berdasarkan aktivitas mental diperoleh objek). Dengan demikian melalui media kulit jeruk bali dapat diketahui secara empiris sifat segitiga dengan jumlah besar sudut lebih dari 180 derajat (enkapsulasi berdasarkan aktivitas aksi, proses dan pemanggilan objek sebelumnya dalam sistem memori). Itu merupakan hubungan ikonik dalam memahami salah satu sifat geometri Riemman.

Dengan demikian, secara teoretik mahasiswa yang berada pada elemen spasial relasi ikonik Geometri Riemman adalah mahasiswa dapat membuat pengertian/pernyataan tentang kesejajaran garis pada Geometri Riemman berdasarkan representasi ikonik. Dekomposisi genetik teoretik mahasiswa tersebut adalah mahasiswa dapat melakukan aktivitas aksi, proses dan enkapsulasi sehingga menghasilkan objek mental dalam bentuk pengertian/pernyataan tentang kesejajaran garis pada Geometri Riemman berdasarkan representasi ikonik.

4) Relasi simbolik

Mahasiswa melakukan aktivitas proses atas objek yang diperoleh dari pernyataan dalam bentuk relasi ikonik, dan representasi mental yang diperoleh melalui tematisasi dalam bentuk relasi simbolik berupa skema. Hasil penelitian Widada, Herawaty, Widiarti, et al. (2020) mahasiswa merepresentasikan dalam relasi ikonik bahwa segitiga ABC yaitu AB **U** BC **U** CA, sebagai bentuk skema yang matang tentang definisi segitiga berdasarkan aktivitas aksi, proses dan objek yang koheren. Sehingga, mahasiswa mampu menyimpulkan bahwa dalam segitiga ABC berlaku: m (∠ABC) + m (∠ACB) + m (∠BAC) > 180º, lihat Gambar 1.15 adalah segitiga pada permukaan bola bumi (double elliptic).

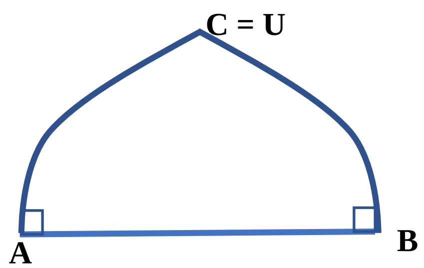


Gambar 1.15 Segitiga pada Permukaan Bola Bumi

Dengan demikian, secara teoretik mahasiswa yang berada pada elemen spasial relasi simbolik Geometri Riemman adalah mahasiswa dapat membuat hubungan secara simbolik antar titik dan garis-garis pada Geometri Riemman berdasarkan visualisasi mental. Dekomposisi genetik teoretik mahasiswa tersebut adalah dapat melakukan aktivitas aksi, proses dan objek yang koheren sehingga menghasilkan skema yang matang dalam bentuk hubungan secara simbolik antar titik dan garis-garis pada Geometri Riemman berdasarkan relasi ikonik.

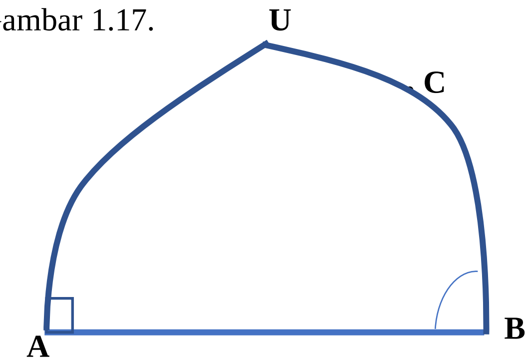
5) Membangun Geometri Formal (Riemann) (materi ini akan dibahas dalam Bab V)

Mahasiswa dapat mengajukan bukti dari *conjectures* yang diperolehnya sehingga terbangun sifat-sifat kesejajaran garis-garis Geometri Riemman, dan teorema-teorema lanjutannya, serta konsep-konsep lainnya yang barkaitan. Berdasarkan tahap relasi simbolik mahasiswa mampu menyimpulkan bahwa dalam segitiga ABC berlaku bahwa m (∠ABC) + m (∠ACB) + m (∠BAC) > 180°. Oleh karena itu, berdasarkan skema tersebut mahasiswa mampu melakukan aksi dan proses untuk men-*trigger* skema-skema yang ada dalam memorinya. Aktivitas internaslisasi, enkapsulasi dan tematisasi antar skema tersebut mereka mampu membuktikan bahwa m (∠ABC) + m (∠ACB) + m (∠BAC) > 180° (May, 2012). Menurut (May, 2012), ada dua kasus dalam pembuktian ini. **Pertama**, mahasiswa membuktikan bahwa pada ellipsoid (bola bumi), segitiga ABC dengan titik A dan titik B pada garis lintang dan dan titik C pada kutub U (utara). Perhatikan Kembali gambar segitiga di atas permukaan bola bumi pada Gambar 1.16. Berdasarkan gambar segitiga tersebut, dapat direpresentasikan sebagai berikut.



Gambar 1.16 Segitiga pada Permukaan Bola Bumi C di Kutub Utara

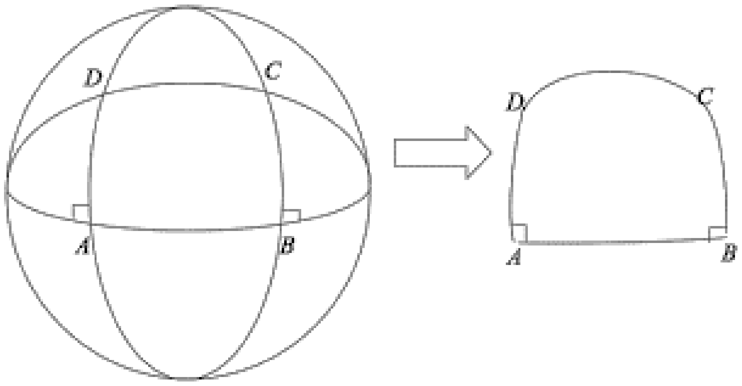
Berdasarkan Gambar 1.16 Berarti bahwa AB = jarak polar, m(∠A) = 90^o, dan m(∠B) = 90^o dengan m(∠C) > 0^o. Hal ini berarti bahwa m(∠A) + m(∠B) + m(∠C) > 180^o. Dengan demikian jumlah besar sudut dalam segitiga lebih dari serratus delapan puluh derajat. **Kasus kedua**, mahasiswa membuat segitiga ABC dengan titik A dan titik B pada garis lintang dan dan titik C tidak terletak pada kutub U (utara). Perhatikan Gambar 1.17.



Gambar 1.17 Segitiga pada Permukaan Bola Bumi C Tidak di Kutub Utara

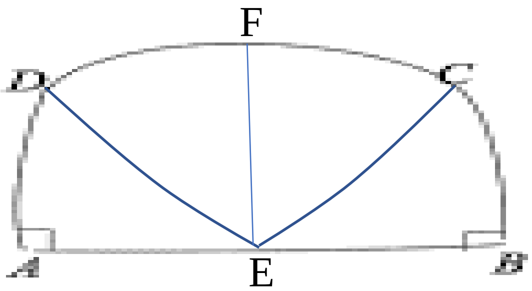
Berdasarkan Gambar 1.17, BC > jarak polar, m(∠B) > 90^o, dan m(∠A) = 90^o. Hal ini berarti bahwa m(∠A) + m(∠B) + m(∠C) > 180^o. Dengan demikian jumlah besar sudut dalam segitiga lebih dari serratus delapan puluh derajat. Karena yang mungkin hanya 2 kasus tersebut, maka pada segitiga ABC berlaku bahwa m(∠A) + m(∠B) + m(∠C) > 180^o. Aktivitas tersebut adalah bahwa mahasiswa melakukan aktivitas aksi, proses, objek secara koheren dan menginterkoneksitaskan skema-skema tentang kesejajaran garis-garis pada Geometri Riemman untuk membuat pernyataan tentang jumlah besar sudut dalam suatu segitiga dan membuktikannya dalam sistem geometri elliptik.

Dalam Geometri Riemman, misalkan ABCD suatu segiempat dengan m(∠DAB) = m(∠CBA) = 90^o, dan AD = BC, dapat dibuktikan bahwa m(∠ADC) = m(∠BCD) > 90^o. Buktinya adalah sebagai berikut: Berdasarkan yang diketahui bahwa diberikan segiempat ABCD dengan m(∠DAB) = m(∠CBA) = 90^o, dan AD = BC, mahasiswa membuat representasi gambar segiempat tersebut pada permukaan bola bumi (double elliptics) lhat Gambar 1.18.



Gambar 1.18 Segiempat ABCD, m(∠DAB) = m(∠CBA) = 90º, AD = BC

Selanjutnya misalkan, titik E adalah titik tengah ruas AB, titik F adalah adalah titik tengah ruas CD. Berarti bahwa AE=EB dan DF = FC. Tari garis EF yang melalui kutub U dan kutub S, kemudian Tarik garis DE dan CE, sehingga dapat direpresentasikan pada Gambar 1.19.



Gambar 1.19 Segiempat Sacherri dengan E dan F Titik tengah AB dan CD

Berdasarkan Gambar 1.19, (1) Perhatikan △BCE dan △ADE. Karena AD=BC, ∠DAE = ∠CBE dan AE = EB, dengan aksioma sisi, sudut, sisi maka △BCE≅△ADE. Karena itu, maka ∠ADE = ∠BCE…. (*). (2) Perhatikan △CEF dan △DEF. Karena △BCE≅△ADE maka DE=CE; dan EF=EF, CF = DF. Sehingga melalui Aksioma sisi, sisi, sisi maka △CEF≅△DEF; akibatnya ∠ECF = ∠EDF….(**). Dari (*) dan (**); dan m(∠ADE) + m(∠EDF) = m(∠ADC) dan m(∠BCE) + m(∠ECF) = m(∠BCD), yang berarti bahwa ∠ADC = ∠BCD ….. (a).

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa ∠ADC>90º. Klaim: Jumlah besar sudut dalam segiempat ABCD adalah lebih dari 360º. Bukti dari Klaim ini adalah perhatikan kembali segiempat ABCD sesuai dengan persyaratan yang diberikan, yaitu m(∠DAB) = m(∠CBA) = 90º, dan AD = BC. Berdasarkan pernyataan yang telah dibuktikan sebelumnya bahwa jumlah besar sudut dalam suatu segitiga adalah lebih dari 180^o. Perhatikan lagi bahwa segiempat ABCD terbentuk dari dua segitiga ABC dan ABD. Akibatnya m(∠DAB) + m(∠ABC) + m(∠BCD) + m(∠CDA) > 360^o, dan Klaim terbukti. … (b).

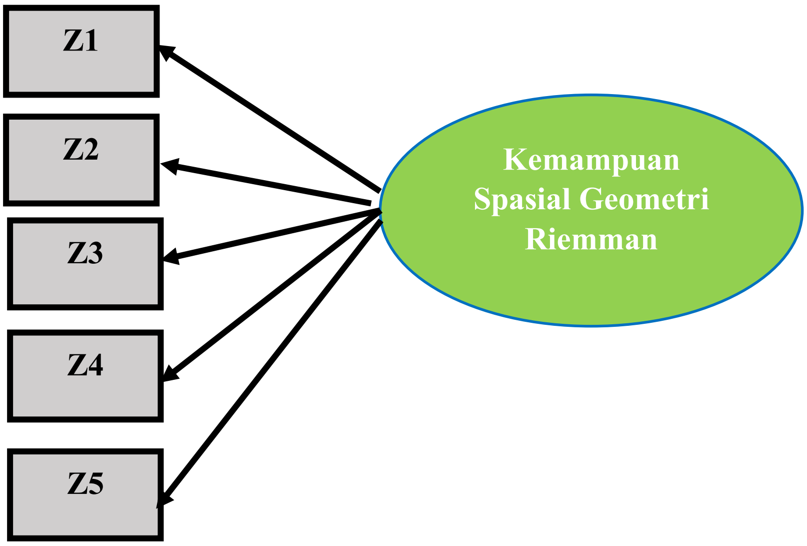
Berdasarkan (b), m(∠DAB) + m(∠ABC) + m(∠BCD) + m(∠CDA) > 360^o, sedangkan m(∠DAB) = m(∠CBA) = 90^o, berarti bahwa m(∠BCD) + m(∠CDA) > 180^o. Berdasarkan (1) ∠ADC = ∠BCD berarti 1.m(∠ADC) > 180^o; jadi m(∠ADC) > 90^o. Dengan demikian terbukti bahwa m(∠ADC) = m(∠BCD) > 90^o.

Dengan demikian, secara teoretik mahasiswa yang berada pada elemen spasial membangun Geometri Riemman Formal adalah mahasiswa dapat membuat pernyataan baru dan membuktikannya sebagai akibat wajar (*corollary*) dari pernyataan tentang kesejajaran garis-garis pada Geometri Reimman. Dekomposisi genetik teoretik mahasiswa tersebut adalah dapat melakukan aktivitas aksi, proses, objek yang koheren dan menghubungkan skema-skema tentang kesejajaran garis-garis pada Geometri Riemman untuk membuat pernyataan baru sebagai skema yang matang dan membuktikannya sebagai akibat wajar (*corollary*) dari pernyataan dalam sistem geometri tersebut.

Berdasarkan uraian di atas, maka kemampuan Spasial Geometri Riemman adalah kemampuan seseorang untuk memahami, menyimpan, mengingat, dan menciptakan gambaran mental tentang bentuk dan ruang eliptik atau eliptik rangkap dua (*double elliptic*) yang diukur berdasarkan elemen-elemen sebagai berikut:

1) visualisasi etnomatematika (Z1);
2) visualisasi mental (Z2);
3) relasi ikonik (Z3).
4) relasi simbolik (Z4)
5) membangun geometri formal (Riemman) (Z5).

Pembelajaran geometri merupakan salah satu hal yang ditakuti siswa. Mereka kesulitan memahami konsep geometri. Siswa mengalami masalah dengan keselarasan aksioma Lobachevsky, serta keselarasan aksioma Riemann. Oleh karena itu, diperlukan pembelajaran yang memudahkan siswa untuk membayangkan aksioma-aksioma tersebut secara lebih konkrit, meskipun geometri tidak selalu dapat dibawa dalam dunia konkrit (Widada, Herawaty, Widiarti, Aisyah, et al., 2020). Berdasakan definisi konseptual kemampuan spasial Geometri Riemann tersebut di atas, dapat dibuat diagram hubungan antara Kemampuan Spasial Geometri Riemman dan indikatornya, lihat Gambar 1.20.



Gambar 1.20 Hubungan Kemampuan Spasial Geometri Riemman dan Indikatornya

Keterangan: Z1: visualisasi etnomatematika,
Z2: visualisasi mental,
Z3: relasi ikonik,
Z4: relasi simbolik,
Z5: membagun geometri formal (Riemman)

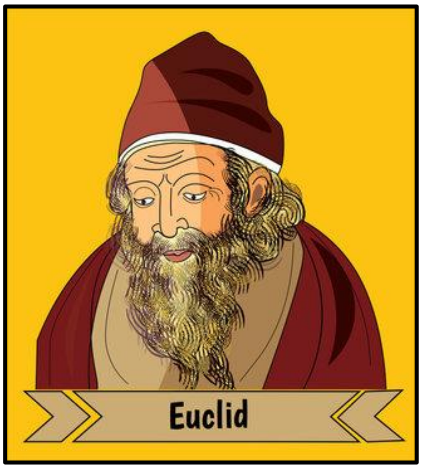
BAB II
STRUKTUR DEDUKTIF AKSIOMATIK DALAM SISTEM GEOMETRI

Disusun oleh
Khathibul Umam Zaid Nugroho, M.Pd.
Prof. Dr. YL. Sukestiyarno, M.S.
Dr. Sugiman, M.Si.
Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si.

BAB II

STRUKTUR DEDUKTIF AKSIOMATIK DALAM SISTEM GEOMETRI

2.1 Objek Geometri



Geometri secara dekduktif aksiomatik disusun pertama kali oleh Euclid melalui *the elements.* Objek geometri merupakan suatu yang mendasar dalam suatu struktur deduktif aksiomatik geometri. Objek tersebut adalah fakta, konsep, relasi-operasi, dan prinsip Gagne (Baah-Duodu Samuel, 2012). Gagne membagi objek matematika ke dalam dua kelompok, yaitu objek langsung dan objek tak langsung. Objek langsung terdiri atas fakta, skill, konsep dan prinsip. Objek tak-langsung terdiri dari transfer belajar, kemampuan inkuiri, kemampuan memecahkan masalah, disiplin diri, dan apresiasi terhadap struktur matematika.

Menurut Gagne (Baah-Duodu Samuel, 2012), fakta matematika adalah konvensi arbitrer dalam matematika seperti simbol matematika. Fakta bahwa 2 adalah simbol untuk kata dua, + adalah simbol untuk operasi penjumlahan, dan sinus adalah nama yang diberikan untuk fungsi khusus dalam trigonometri. Fakta dipelajari melalui berbagai teknik hafalan seperti hafalan, drill, praktek, timed test, permainan, dan kontes. Orang dianggap telah mempelajari suatu fakta ketika mereka dapat menyatakan fakta tersebut dan memanfaatkannya secara tepat dalam sejumlah situasi yang berbeda. Dengan demikian, fakta merupakan sebarang semufakatan dalam matematika. Fakta meliputi istilah (nama), notasi (lambang), dan konvensi (semufakatan). Konsep adalah pengertian (ide) abstrak yang memungkinkan seseorang menggolong-golongkan objek atau kejadian, dan menentukan apakah suatu objek atau kejadian merupakan contoh atau bukan contoh dari ide abstrak itu.

Konsep dalam matematika adalah ide abstrak yang memungkinkan orang untuk mengklasifikasikan objek atau peristiwa dan menentukan apakah objek dan peristiwa tersebut merupakan contoh atau bukan contoh dari ide abstrak tersebut. Dalam hal ini, contoh konsepnya adalah himpunan, himpunan bagian, persamaan, pertidaksamaan, segitiga, kubus, jari-jari, dan eksponen. Seseorang yang telah mempelajari konsep segitiga mampu mengklasifikasikan himpunan bangun ruang menjadi subhimpunan segitiga dan non-segitiga. Konsep dapat dipelajari baik melalui definisi atau dengan pengamatan langsung (Baah-Duodu Samuel, 2012). Dengan demikian, konsep dalam matematika adalah ide abstrak yang dapat digunakan untuk mengelompokkan objek-objek ke dalam kelompok masing-masing dan menentukan apakah suatu objek merupakan contoh atau bukan contoh dari ide abstrak tersebut. Sedangkan ungkapan yang membatasi suatu konsep adalah definisi.

Objek matematika yang paling kompleks adalah prinsip. Prinsip adalah urutan konsep bersama dengan hubungan di antara konsep-konsep ini. Pernyataan berikut adalah contoh prinsip. ”Kuadrat sisi miring segitiga siku-siku sama dengan jumlah kuadrat kedua sisi lainnya.” ”Dua segitiga kongruen jika dua sisi dan sudut yang dilingkupi salah satu segitiga sama dengan dua sisi dan sudut yang dilingkupi segitiga lainnya.” Prinsip dapat dipelajari melalui proses penyelidikan ilmiah, pelajaran penemuan terbimbing, diskusi kelompok, penggunaan strategi pemecahan masalah, dan demonstrasi. Seorang siswa telah mempelajari prinsip-prinsip ketika dia dapat mengidentifikasi konsep-

konsep yang termasuk dalam prinsip, menempatkan konsep-konsep itu dalam hubungan yang benar satu sama lain, dan menerapkan prinsip tersebut pada situasi tertentu.

Sebagai seorang guru matematika, kita harus mengembangkan teknik pengujian dan observasi untuk membantu kita mengenali sudut pandang siswa terhadap konsep dan prinsip yang kita ajarkan. Kita semua kadang-kadang menghafal bukti teorema, tanpa memahami konsep dan prinsip yang terlibat dalam pembuktian, untuk lulus ujian. Meskipun akal-akalan ini adalah suatu bentuk pembelajaran, bukan itu yang diharapkan guru agar siswa belajar dengan membuktikan teorema.

Definisi dibedakan atas tiga jenis, yaitu: 1) Definisi Analitik, 2) Definisi Genetik, 3) Definisi dengan Rumus (Soedjadi, 1993).

Definisi Analitik.

Suatu Definisi dikatakan bersifat Analitik bila definisi tersebut menyebut genus proksimal (keluarga terdekat) dan diferensia spesifika (pembeda khusus). Sebagai contoh, definisi kerucut, sebagai berikut "Kerucut adalah Limas Segi tak hingga beraturan". Definisi Kerucut adalah analitik sebab, menyebut genus proksimal yaitu limas dan diferensia spesifika yaitu tak hingga beraturan.

Definisi Genetik

Suatu definisi dikatakan bersifat genetik bila definisi tu definisi dikatakan bersifat genetik bila definisi tersebut menunjukkan atau mengungkapkan cara terjadinya konsep yang didefinisikan. Contoh, definisi fungsi polinomial berikut, "Fungsi Polinomial adalah suatu fungsi yang terjadi bila fungsi konstan dan fungsi identitas di operasikan dengan penambahan, pengurangan dan perkalian."

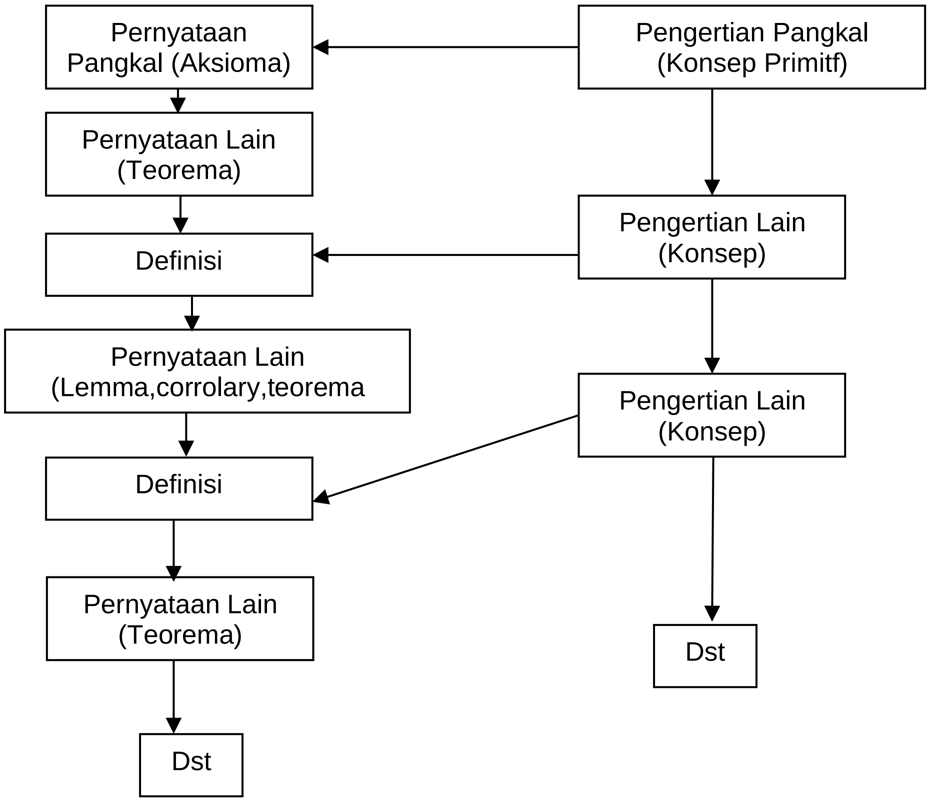
Definisi dengan Rumus

Suatu definisi tidak selalu dinyatakan dengan ungkapan kalimat biasa, tetapi dapat juga di ungkapkan dengan kalimat matematika, yakni berbentuk rumus. Contoh, definisi irisan dua himpunan. Misal A dan B dua himpunan. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$.

Selanjutnya menurut Soedjadi (1995), komponen definisi terdiri dari latar belakang, Genus, istilah yang didefinisikan, dan atribut. Latar Belakang definisi adalah bagian yang menjadi dasar untuk membicarakan subjek dari definisi tersebut. Genus adalah keluarga dari subjek definisi. Genus dapat di pandang sebagai konsep terdekat yang berhubungan dengan definisi yang dibicarakan. Istilah yang didefinisikan adalah ungkapan yang diberikan pada subjek pembicaraan dari definisi. Dan Atribut adalah ciri atau sifat yang dimiliki oleh suatu konsep, sehingga dengan ciri tersebut suatu subjek dapat dikategorikan sebagai contoh atau bukan contoh dari definisi.

Perhatikan contoh definisi irisan dua himpunan, dengan menggunakan rumus di atas. Dari definisi tersebut sebagai Latar Belakang adalah "dua himpunan A dan B", genusnya adalah "himpunan", Istilah yang didefinisikan adalah "$A \cap B$", dan Atributnya adalah "$\{x \mid x \in A$ dan $x \in B\}$".

Dalam struktur deduktif aksiomatik, selain definisi, masih di kenal beberapa istilah yaitu pengertian pangkal (istilah primitif, *undefined term),* pernyataan pangkal (aksioma), teorema, lemma, dan corrolary. Menurut Soedjadi (1993) dapat disusun skema dari struktur deduktif aksiomatik, sebagai berikut:



Gambar 2.1 Struktur Deduktif Aksiomatik

Berdasarkan Gambar 2.1, terlihat bahwa objek-objek matematika memiliki peran yang sangat penting dalam membangun struktur deduktif aksiomatik. Batasan suatu konsep dapat disusun dari pengertian pangkal, yang juga melibatkan fakta, maupun operasi. Rangkaian konsep-konsep beserta hubungannya akan di bentuk Lemma, atau Teorema, atau corrolary. Dengan struktur itu pula, memungkinkan matematika berkembang secra luas. Matematika dapat di konstruksi sendiri, sesuai dengan keinginan, asalkan tidak kontradiksi dengan struktur matematika yang telah ada.

Bagian ini tidak dimaksudkan untuk mengungkapkan berbagai pengertian tentang matematika semenjak awal sejarahnya. Bagian ini juga tidak dimaksudkan untuk mengemukakan berbagai definisi secara lengkap komponen-komponennya. Beberapa definisi atau ungkapan pengertian matematika hanya dikemukakan terutama terfokus pada tinjauan pembuat definisi itu. Hal sedemikian dikemukakan dengan maksud agar pembaca dapat menangkap dengan mudah keseluruhan pandangan para ahli matematika. Hakikat matematika menunjuk kepada segi-segi penting dan mendasar dalam matematika. Demikian sehingga banyak muncul definisi atau pengertian tentang matematika yang beraneka ragam. Atau dengan kata lain tidak terdapat satu definisi tentang matematika yang tunggal dan disepakati oleh semua tokoh atau pakar matematika (pada tulisan berikut ini lebih banyak dikutip dari (Soedjadi, 1993)).

Dengan demikian, **Fakta** (abstrak) berupa konvensi-konvensi yang diungkap dengan simbol tertentu. Simbol bilangan "3" secara umum sudah dipahami sebagai bilangan "tiga". Jika disajikan angka "3" orang sudah dengan sendirinya menangkap maksudnya yaitu "tiga". Dalam geometri juga terdapat simbol-simbol tertentu yang merupakan konvensi, misalnya "//" yang bermakna "sejajar", "O" yang bermakna "lingkaran" dan sebagainya. Dalam aljabar dikenal (a, b) sebagai pasangan berurutan. **Konsep** adalah idea abstrak yang dapat digunakan untuk menggolongkan atau mengklasifikasikan sekumpulan objek. "Segitiga" adalah nama suatu konsep abstrak. Dengan konsep itu sekumpulan objek dapat digolongkan sebagai contoh segitiga ataukah bukan contoh. **Definisi** adalah ungkapan yang membatasi suatu konsep. Definisi digolongkan dalam definisi analitis, yaitu definisi yang menyebutkan genus proksimum (genus terdekat) dan diferensia spesifika (pembeda khusus). Sedangan definisi digolongkan kepada definisi ginetik, yaitu definisi yang menyebutkan bagaimana konsep itu terbentuk atau terjadi. **Operasi** (abstrak) adalah pengerjaan hitung, pengerjaan aljabar dan pengerjaan matematika yang lain. Sebagai contoh misalnya "penjumlahan", "perkalian", "gabungan", "irisan". Pada dasarnya operasi dalam matematika adalah suatu fungsi yaitu relasi khusus, karena operasi adalah aturan untuk memperoleh elemen tunggal dari satu atau lebih elemen yang diketahui. Semesta dari elemen-elemen yang diketahui maupun elemen yang diperoleh dapat sama tetapi dapat juga berbeda. Elemen tunggal yang diperoleh disebut hasil operasi. Terakhir, **prinsip** (abstrak) adalah objek matematika yang komplek. Prinsip dapat terdiri atas beberapa fakta, beberapa konsep yang dikaitkan oleh suatu relasi ataupun operasi. Secara sederhana dapatlah dikatakan bahwa prinsip adalah hubungan antara berbagai objek dasar matematika. Prinsip dapat berupa "aksioma", "teorema", "sifat" dan sebagainya.

2.2 Karakteristik Geometri

Menurut (Soedjadi, 1993), beberapa karakteristik matematika adalah sebagai berikut:

a. Memiliki objek kajian abstrak

Dalam matematika objek dasar yang dipelajari adalah abstrak, sering juga disebut objek mental. Objek-objek itu merupakan objek pikiran. Objek dasar itu meliputi (1) fakta, (2) konsep, (3) operasi ataupun relasi dan (4) prinsip. Dari objek dasar itulah dapat disusun suatu pola dan struktur matematika.

b. ***Bertumpu pada kesepakatan***

Dalam matematika kesepakatan merupakan tumpuan yang amat penting. Kesepakatan yang amat mendasar adalah aksioma dan konsep primitif. Aksioma diperlukan untuk menghindarkan berputar-putar dalam pembuktian. Sedangkan konsep primitif diperlukan untuk menghindarkan berputar-putar dalam pendefinisian. Aksioma juga disebut sebagai postulat (sekarang) ataupun pernyataan-pangkal (yang sering dinyatakan tidak perlu dibuktikan). Sedangkan konsep primitif yang juga disebut sebagai undefined term ataupun pengertian-pangkal tidak perlu didefinisikan.

c. ***Berpola pikir deduktif***

Dalam matematika sebagai "ilmu" hanya diterima pola pikir deduktif. Pola pikir deduktif secara sederhana dapat dikatakan pemikiran "yang berpangkal dari hal yang bersifat umum diterapkan atau diarahkan kepada hal yang bersifat khusus". Pola pikir deduktif ini dapat terwujud dalam bentuk yang amat sederhana tetap juga dapat terwujud dalam bentuk yang tidak sederhana. Berikut ini dikemukakan dua contoh, yaitu pola pikir deduktif yang sederhana dan yang tidak sederhana.

d. Memiliki simbol yang kosong dari arti

Dalam matematika jelas terlihat banyak sekali simbol yang digunakan, baik berupa huruf ataupun bukan huruf. Rangkaian simbol-simbol dalam matematika dapat berbentuk suatu model matematika. Model matematika dapat berupa persamaan, pertidaksamaan, bangun geometrik tertentu, dsb. Makna huruf dan tanda itu tergantung dari permasalahan yang mengakibatkan terbentuknya model itu. Jadi secara umum huruf dan tanda dalam model $x + y = z$ masih kosong dari arti, terserah kepada yang akan memanfaatkan model itu. Kosongnya arti simbol maupun tanda dalam model-model matematika ke dalam berbagai pengetahuan. Kosongnya arti itu memungkinkan matematika memasuki medan garapan dari ilmu bahasa (linguistik).

e. Memperhatikan semesta pembicaraan

Semesta pembicaraan bermakna sama dengan universal set. Semesta pembicaraan dapat sempit dapat pula luas. Bila lingkung pembicaraannya bilangan, maka simbol-simbol diartikan bilangan. Bila lingkup pembicaraannya transformasi, maka simbol-simbol itu diartikan suatu transformasi. Lingkup pembicaraan itulah yang disebut dengan semesta pembicaraan. Berikut ini disajikan beberapa contoh sederhana.

f. ***Konsisten dalam sistemnya***

Dalam matematika terdapat banyak sistem. Ada sistem yang mempunyai kaitan satu sama lain, tetapi juga ada sistem yang dapat dipandang terlepas satu sama lain. Misal dikenal sistem-sistem aljabar, sistem-sistem geometri. Sistem aljabar dan sistem goemetri tersebut dapat dipandang terlepas satu sama lain, tetapi di dalam sistem aljabar sendiri terdapat beberapa sistem yang lebih "kecil" yang terkait satu sama lain. Demikian juga dalam geometri, terdapat beberapa sistem yang "kecil" yang berkaitan satu sama lain. Dalam aljabar terdapat sistem aksioma dari group, sistem aksioma dari ring, sistem aksioma dari field dan sebagainya. Masing-masing sistem aksioma itu memiliki keterkaitan tertentu. Di dalam masing-masing sistem dan strukturnya itu berlaku ketat azasan atau konsistensi. Ini juga dikatakan bahwa dalam setiap sistem dan strukturnya tersebut tidak boleh terdapat kontradiksi. Suatu teorema ataupun suatu definisi harus menggunakan istilah atau konsep yang telah ditetapkan terlebih dahulu. Konsistensi itu baik dalam makna maupun dalam hal nilai kebenarannya. Kalau telah ditetapkan atau disepakati bahwa $a + b = x$ dan $x + y = p$, maka $a + b + y$ haruslah sama dengan p.

Tetapi antara sistem atau struktur yang satu dengan sistem atau struktur yang lain tidak mustahil terdapat pernyataan yang intensinya saling kontradiksi. Sebagai akibat dari adanya sistem geometri Euclides dan sistem geometri non-Euclides, dijumpai dua pernyataan yang kontradiktif.

Geometri Euclides memiliki teorema yang berbunyi: "Jumlah besar sudut-sudut sebuah segitiga adalah seratus depalan puluh derajat" **Geometri non-Euclides memiliki teorema yang berbunyi**: "Jumlah besar sudut-sudut sebuah segitiga lebih (besar) dari seratus delapan puluh derajat" Keduanya bernilai benar dalam masing-masing sistem dan strukturnya. Hal-hal semacam itulah yang tidak dibenarkan terdapat dalam matematika.

Hakim Tertinggi Geometri

Kebenaran merupakan hal teramat penting dalam ilmu pengetahuan maupun di luar ilmu pengetahuan (digunakan istilah ilmu pengetahuan, hanya untuk memberi tekanan, sebenarnya cukup ilmu saja). Dalam kehidupan sehari-hari juga dikenal kebenaran dan ketidakbenaran. Tindakan atau ucapan seseorang sering digolongkan kepada "benar" dan "tidak benar", meski dalam perkembangan dewasa ini dimungkinkan penggolongan itu tidak hanya dikotomik seperti itu. Sesuatu yang dinilai benar ataupun salah umumnya dapat dinyatakan dalam bentuk pernyataan atau "statement".

Dari itu jelas bahwa pernyataan menduduki tempat yang penting dalam hal "nilai kebenaran" atas sesuatu hal. Dalam keilmuan biasanya dikenal tiga jenis kebenaran, yaitu: Kebenaran koherensi atau konsistensi adalah kebenaran suatu pernyataan yang didasarkan kepada kebenaran-kebenaran yang telah diterima terlebih dahulu. Kebenaran korelasional adalah kebenaran suatu pernyataan yang didasarkan kepada "kecocokannya" dengan realitas atau kenyataan yang ada. Kebenaran pragmatik adalah kebenaran suatu pernyataan yang didasarkan atas manfaat atau kegunaan dari intensi pernyataan itu. Selanjutnya perhatian dua pernyataan ini.

a) Sebuah garis lurus memotong sebuah sudut pada tepat dua buah titik.
b) Sebuah garis lurus memotong sebuah sudut pada tak hingga banyak titik.

Hakim atau penentu kebenaran suatu pernyataan dalam matematika adalah "struktur yang disepakati untuk digunakan". Hal tersebut juga menunjukkan bahwa pembuatan definisi dalam matematika sebenarnya ada kebebasan, namun sebelum disepakati atau dimasukkan dalam struktur tertentu, belum dapat diberi nilai benar ataupun salah. Dalam hal ini yang dimaksudkan dengan segitiga adalah "kerangkanya", sehingga untuk strukturnya diperlukan pengertian "daerah segitiga" yang akan berakibat dengan "luas daerah segitiga", yang disingkat dengan "luas segitiga". Tentu saja hal ini akan berpengaruh pada definisi-definisi dan teorema yang terkait dengannya. Penentuan benar ataupun salah sebagaimana dijelaskan di atas tidak selalu berlaku dalam ilmu pengetahuan lain. Dalam ilmu pengetahuan alam, misalnya, kebenaran dapat dirujukkan kepada kenyataan yang ada atau realitas. Dalam keadaan semacam itu dapat dikatakan bahwa "hakim tertinggi ilmu pengetahuan alam adalah realitas". Ini berarti sesuai dengan kebenaran korelasional.

2.3 Elemen-elemen dalam Geometri

Geometri Euclides walaupun dibangun dengan memungut beberapa istilah dan asumsi dasar, tetaplah merupakan materi yang terkait dengan dunia nyata. Dalam matematika modern dikenal konsep teori aksiomatik yang memuat 4 komponen pokok, yaitu: (1) istilah-istilah tidak terdefinisikan (istilah primitif), (2) Istilah-istilah yang terdefinisi, (3) Aksioma-aksioma dan (4) Teorema-teorema.

Istilah tak terdefinisikan (primitif) yaitu entitas - yang tidak diberi makna riil apapun. Sebagai contoh dapat di temukan istilah titik . Dalam hal ini titik adalah titik, tidak ada istilah lain yang dapat menerangkan apa itu titik. Sedangkan istilah yang terdefinisikan adalah pengertian (konsep) yang dapat dijelaskan dan dibatasi oleh istilah primitif. Aksioma adalah suatu pernyataan yang berhubungan dengan istilah-istilah yang diberikan dan pernyataan tersebut diberi nilai benar, dan harus dianggap memang begitu hendaknya.

Langkah selanjutnya adalah pengembangan operasional dari istilah-istilah tadi, sehingga didapat suatu pernyataan benar atau salah, yang dalam langkah pembuktiannya memanfaatkan bantuan aksioma. Jika kita telaah kembali geometri Euclide dan membandingkannya langsung dengan elemen-elemen dalam geometri sebagai suatu teori aksiomatik, mangka dapat disimpulkan bahwa geometri Euclides merupakan interpretasi dari pernyataan langsung terhadap bangun-bangun bebas dari dunia nyata. Jadi merupakan suatu material. Sedangkan geometri dalam matematika modern nyaris lepas dari interpretasi terhadap dunia fisik. Geometri modern hanya bersandar pada konsep-konsep yang berupa istilah dan struktur aksiomanya.

2.4 Struktur Dasar Geometri Euclides

Euclides menulis 13 bagian buku yang terangkum dalam bukunya "The Elements". Dalam membangun geometrinya, Euclides memulai dengan 5 aksioma, 5 postulat dan 23 definisi. Perlu diperhatikan bahwa Euclides membedakan pengertian aksioma dan pengertian postulat berlaku khusus untuk sain tertentu sedang aksioma berlaku umum.

Dari 23 definisi Euclides akan dikutip 6 definisi yang akan dikaji lebih lanjut dalam begian 2.2. yaitu:

(1) Titik adalah yang tidak mempunyai bagian.
(2) Garis adalah panjang tanpa lebar.
(3) Bidang adalah yang hanya mempunyai panjang dan lebar.
(4) Bidang datar ialah suatu bidang yang terletak rata garis garis padanya.
(5) Suatu lingkaran adalah suatu bangun datar yang termuat dalam suatu garis sedemikian hingga semua geris lurus yang melalui titik dalam bangun tersebut dan mengenai garis tadi sama panjangnya.

(6) Garis-garis lurus sejajar ialah garis-garis lurus yang terletak dalam suatu bidang datar dan jika diperpanjang tidak terbatas maka tidak akan bertemu pada arah yang manapun.

Postulat-postulat dalam geometri Euclides:

(1) Semua sudut siku adalah sama besarnya.

(2) Menarik garis lurus dari sebarang titik ke titik yang lain dapat selalu dilakukan.

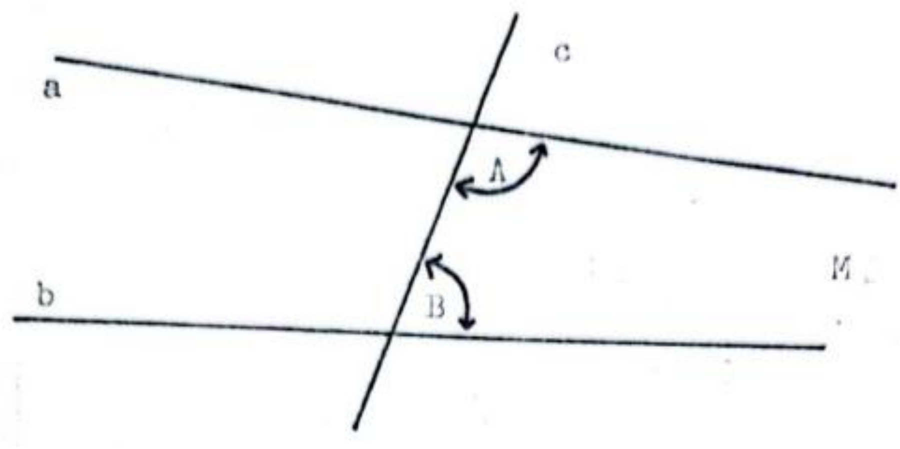
(3) Memperpanjang suatu garis lurus secara kontinyu maka diperoleh garis lurus.

(4) Selalu dapat dilakukan melukis lingkaran dengan sebarang titik pusat dan sebarang jarak.

(5) Jika ada 2 garis lurus yang dipotong garis ke tiga sehingga terdapat sudut dalam senihak yang kurang dari sudut siku, maka dua garis yang pertama akan bermotongan pada bidang yang memuat sudut dalam yang kurang dari sudut siku tersebut.

Dari ke 5 postulat Euclides ternyata aksioma yang terakhir tadi (yang dikenal sebagai postulat kesejajaran Euclides) yang paling menimbulkan rangsangan bagi ahli-ahli matematika sepanjang masa, selalu berusaha mengotak-atik postulat kesejajaran tadi. Untuk lebih jelasnya, postulat kesejajaran tadi dapat dilihat pada ilustrasi berikut ini:

Diketahui: Garis a dan garis b yang dipotong oleh garin c, sehingga terdapat sudut A dan B yang lebih kecil dari sudut siku.



Gambar 2.2 Kesejajaran dua garis

Berdasarkan Gambar 2.2, dapat dipostulatkan bahwa garis a dan b akan berpotongan pada bidang M yang memuat sudut-sudut A dan B.

Seperti sudah disinggung pada bagian atas, Euclides dalam membangun geometrinya membedakan atara postulat dan aksioma.Disini akan dikutip beberapa aksioma Euclides sebagai berikut:

(1) Benda-benda yang sama dengan suatu benda yang sama, maka satu sama lain akan sama.
(2) Benda-benda yang berimpit satu sama lain, maka benda-benda tersebut sama.

Kiranya cukup dikutip dua aksioma saja, karena dalam mengkonstruksi geometri modern nantinya terlihat bahwa pengertian postulat dan aksioma dieliminir sebagai aksioma ataupun "unsur primitif".

2.5 Geometri Euclid melalui Etnomatematika

Sistem geometri merupakan suatu struktur matematis yang dibagun oleh himpunan semua titik dengan entitas dasar titik, garis dan bidang. Sistem tersebut dibangun berdasarkan aksioma insidensi (Eves, 1972). Eves menyatakan bahwa ada tiga sistem geometri yaitu Geometri Euclid, Geometri Lobachevsky dan Geometri Riemann. Euclid membangun geometri (*the elements*) dengan mendasarkan lima aksioma, lima postulat dan duapuluh tiga definisi (Hitchman, 2018). Lima aksioma Euclid adalah sebagai berikut.

(1) Melalui dua titik berbeda dapat dibuat tepat satu garis. Selalu dapat menarik suatu garis dari suatu titik ke suatu titik yang lain.

(2) Melalui tiga titik berbeda dan alui tiSelalu dapat membuat ruas garis tak terbatas banyaknya pada suatu garis.

(3) Selalu dapat melukis suatu lingkaran berpusat di suatu titik dengan jari-jari ruas garis yang ditentukan.

(4) Semua sudut siku-siku satu sama lain sama besar.

(5) Jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus dan membuat jumlah sudut-sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku, kedua garis itu jika diperpanjang tak terbatas akan bertemu di pihak tempat kedua sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku.

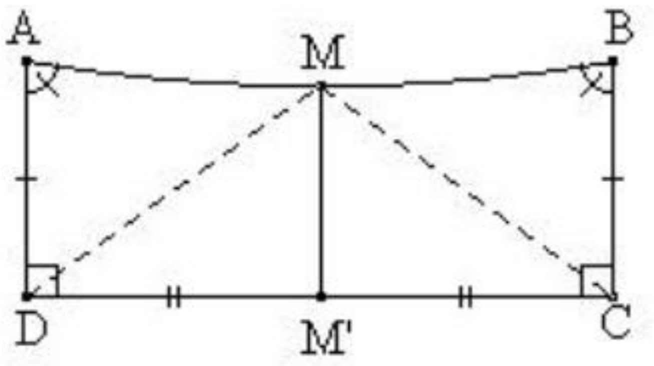
Aksioma kesejajaran Euclid (Aksioma ke-5) adalah prinsip dasar membagun sistem Geometri Euclid, namum aksioma tersebut diperdebatkan, sehingga pada awal Abad XX, muncul dua aksioma baru. Pertama adalah aksioma kesejajaran Lobachevsky. Aksioma tersebut menjadi prinsip utama untuk membangun Geometri Lobachevsky. Kedua adalah aksioma kesejajaran Riemann, yang kemudian menjadi prinsip dasar sistem Geometri Riemann. Selanjutnya dapat dibahas tentang Kemampuan Spasial Geometri Lobachevsky, Kemampuan Spasial Geometri Riemann, dan Kemampuan Spasial Geometri Euclid.

Berdasarkan uraian di atas, etnomatematika menyajikan konsep-konsep matematika (geometri) dari kurikulum sekolah sedemikian hingga konsep-konsep terkait dengan budaya dan pengalaman sehari-hari siswa (Hitchman, 2018). Itu dimaksudkan untuk meningkatkan kemampuan peserta didik menguraikan hubungan yang bermakna dan memperdalam pemahaman mereka tentang matematika. Pendekatan etnomatematika pada kurikulum matematika dimaksudkan untuk menjadikan matematika sekolah lebih relevan dan bermakna bagi siswa dan meningkatkan kualitas pendidikan mereka secara keseluruhan. Dalam konteks ini, menerapkan perspektif etnomatematika dalam kurikulum matematika sekolah membantu mengembangkan pembelajaran intelektual, sosial, emosional, dan politik siswa dengan menggunakan referensi budaya mereka yang unik untuk menyampaikan pengetahuan, keterampilan, dan sikap mereka. Kurikulum semacam ini memberikan cara bagi siswa untuk mempertahankan identitas mereka sekaligus berhasil secara akademis.

Sampai abad ke-19, pandangan tentang geometri berlandaskan *The Elements* dari Euclid. Geometri sebagai suatu sistem yang deduktif aksiomatik. Itu adalah suatu ilmu tentang sifat-sifat matematika dengan konsep dasar himpunan semua titik. Hubungan antar objek-objek geometri, yaitu titik, garis dan bidang berada dalam ruang Euclid (Anonimous, 2010). Prinsip-prinsip dalam geometri merupakan teorema-teorema dan sifat-sifat lainnya adalah hasil menelaah tentang titik, garis dan bidang, serta ruang fisik dan hubungan matematisnya. Namun, pada awal abad ke-20 banyak ilmuan yang menelaah aksioma kesejajaran Euclid, diantaranya Lobachevsky dan Riemann. Hasil telaah mereka adalah munculnya aksioma baru tentang kesejajaran garis-garis. Lobachevsky menyatakan bahwa "melalui satu titik di luar suatu garis terdapat minimal dua garis yang sejajar dengan garis tersebut." Dengan aksioma inilah terbangun sistem geometri hiperbolik. Itu adalah salah satu alternatif dari Geometri Euclid. Pendapat berbeda dari Riemann, bahwa "tidak ada garis-garis yang sejajar"(Hitchman, 2018). Riemann-pun membangun suatu geometri eliptik. Oleh karena itu terdapat tiga ruang dalam sistem geometri, yaitu ruang parabolik (Geometri Euclid), ruang hiperbolik (Geometri Lobachevksy), dan ruang eliptik (Geometri Riemann) (Clayton, 2010).

Definisi Segiempat Sacherri

Dalam perkembang geometri, terdapat satu definisi yang sangat penting yaitu konsep tentang **segiempat Sacherri**. Definisi: Segiempat ABCD dengan sudut alas siku-siku (sudut D dan sudut C) dan sisi-sisinya kongruen (AD=BC) disebut segiempat Saccheri. Sisi di seberang alas adalah puncak, dan sudut yang dibentuk oleh sisi dan puncak adalah sudut puncak (sudut A sama dengan sudut B). DM'=M'C dan AM=MB. (Ross, 2010). Representasi definisi tersebut lihat Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Segiempat Sacherri

Untuk itu, cara pandang untuk memahaminya dibutuhkan kemampuan spasial, yaitu kemampuan spasial Geometri Euclid, kemampuan spasial Geometri Lobachevksy, dan kemampuan spasial Geometri Riemann .

Dalam memahami Geometri Euclid, dibutuhkan kemampuan spasial parabolik. Postulat-postulat dalam geometri Euclid yang sangat berpengaruh terhadap kemampuan spasial parabolik adalah

(1) Semua sudut siku adalah sama besarnya.

(2) Menarik garis lurus dari sebarang titik ke titik yang lain dapat selalu dilakukan.

(3) Memperpanjang suatu garis lurus secara kontinyu maka diperoleh garis lurus.

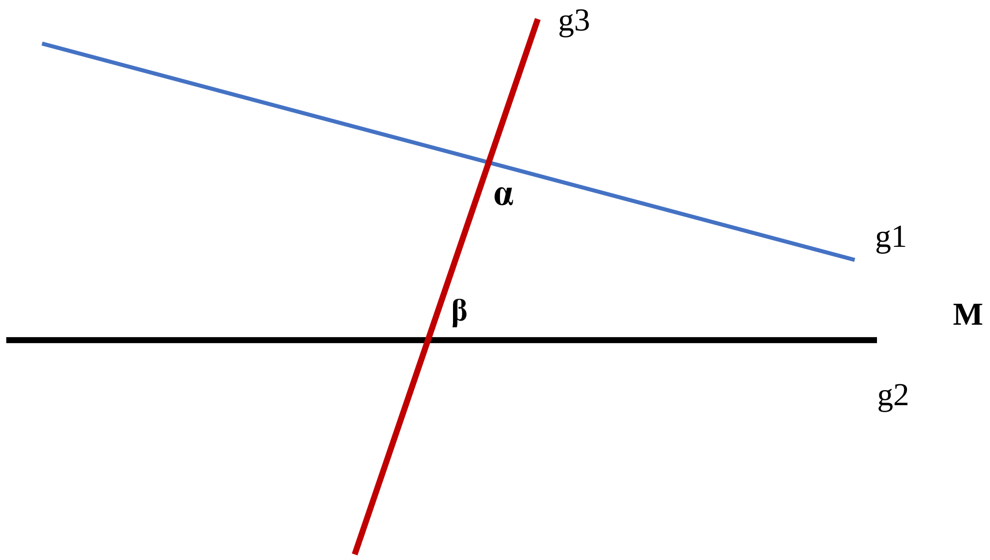
(4) Selalu dapat dilakukan melukis lingkaran dengan sebarang titik pusat dan sebarang jarak.

(5) Jika ada 2 garis lurus yang dipotong garis ke tiga sehingga terdapat sudut dalam sepihak yang kurang dari sudut siku, maka dua garis yang pertama akan bermotongan pada bidang yang memuat sudut dalam yang kurang dari sudut siku tersebut (Eves, 1972).

Menggunakan ide yang mirip dengan Saccheri, Legendre menunjukkan bahwa jumlah sudut sebuah segitiga tidak boleh lebih besar dari dua sudut siku-siku; namun buktinya bertumpu pada asumsi garis tak terbatas. Legendre juga memberikan bukti tentang jumlah yang tidak kurang dari dua sudut siku-siku, tetapi lagi-lagi terdapat kekurangan, yaitu dia membuat asumsi yang setara dengan postulat kelima (Marshall & Scott, 2010).

Banyak usaha yang dilakukan oleh para ilmuan yang mencoba membuktikan postulat kelima dengan menggunakan empat postulat sebelumnya. Menurut (Marshall & Scott, 2010) bahwa satu upaya dilakukan oleh Proclus (410–485), namun gagal. Meskipun usahanya akhirnya gagal, Proclus menemukan pernyataan yang setara untuk postulat kelima. Ini sekarang dikenal sebagai Aksioma Playfair adalah sebagai berikut. Diberi garis dan titik tidak pada garis, adalah mungkin untuk menarik tepat satu garis melalui titik yang diberikan sejajar dengan garis.

Postulat Euclid yang ke-5 adalah postulat kesejajaran Euclid. Postulat kesejajaran Euclid dapat digambarkan sebagai berikut. Misalkan garis g1 dan garis g2 yang dipotong oleh garis g3, sehingga terdapat sudut α dan β yang kurang dari sudut siku, maka dapat dipostulatkan bahwa garis g1 dan garis g2 akan berpotongan pada bidang M yang memuat sudut-sudut α dan β.



Gambar 2.3 Ilustrasi Aksioma Kesejajaran Euclid

Jika diperhatikan Gambar 2.3 tentang representasi aksioma kesejajaran Euclid, dapat ditemukan dalam budaya Indonesia pada saat merayakan hari ulang tahun kemerdekaan 17 Agustus pada setiap tahunnya. Itu merupakan suatu budaya yang dapat menjadi starting-point pembelajaran Geometri Euclid. Kegiatan tersebut dapat diilustrasikan pada Gambar 2.4. Melalui budaya 17-an tersebut dapat memudahkan peserta didik membangun pengetahuan tentang geometri. Berdasarkan *model of*, peserta didik memanfaatkannya untuk diproses secara internal dalam sistem kognisinya sedemikian hingga diperoleh *model for* untuk mencapai konsep dan prinsip kesejajaran garis-garis dalam Geometri Euclid.

Gambar 2.4 Budaya Masyarakat Padang Savana Pulau Rinca dan Pulau Komodo
(https://amp.kompas.com/travel/read/2016/01/23/153000727)

Berdasarkan Gambar 2.4 permainan masyarakat masyarakat Padang Savana Pulau Rinca dan Pulau Komodo di Pulau Flores Nusa Tenggara Timur. Permainan tersebut merepresentasikan adanya garis-garis yang berpotongan terhadap garis sejajar dan sudut-sudut perpotongannya sama besar, dalam kasus tersebut besar sudutnya adalah 90^o. Hal itu menjadi salah sautu etnomatematika yang menjembatani proses kognitif siswa dalam memahami aksioma kesejajaran Euclid.

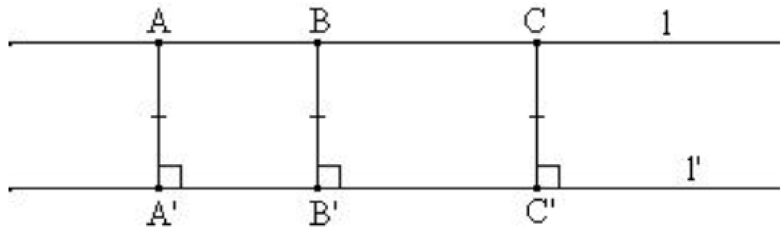
Proses kognitif mahasiswa yang dimulai dengan budaya yang ada di sekitarnya memudahkannya untuk mencapai suatu konsep dan prinsip

Geometri Euclid dengan benar. Itu merupakan aktivitas aksi-aksi yang diinteriorisasi menjadi suatu proses, dan proses-proses tersebut dienkapsulasi menjadi suatu objek. Interkonesitasnya ditematisasi menjadi suatu skema yang matang (Dubinsky & McDonald, 2000). Itu adalah skema tentang konsep dan prinsip Geometri Euclid.

Pada bagian lainnya di masyarakat Sleman Yogyakarta juga ditemukan kegiatan olahraga tradisional yang diadakan Kementerian Pemuda dan Olahraga RI, yang dilaksanakan di Lapangan Denggung, perhatikan Gambar 2.5.

Gambar 2.5 Permainan Tradisional Sleman
(https://www.solopos.com/rindu-permainan-dan-olahraga-tradisional-datanglah-ke-lapangan-denggung-539585)

Gambar 2.5 merepresentasikan bahwa permainan tradisional yang dua papan kayu tersebut adalah sejajar, sebab jika berpotongan maka pemainnya bisa jatuh. Itu merupakan salah satu etnomatematika yang menjadi media untuk menvisualisasikan tentang definsi dua gari sejajar dalam Geometri Euclid. Dalam geometri Euclid, garis sejajar sering digambarkan sebagai garis yang berjarak sama di mana-mana, seperti rel kereta api (Ross, 2010). Sifat ini setara dengan postulat kesejajaran Euclid, mamun deskripsi ini tidak benar dalam geometri hiperbolik. Sifat tersebut dapat juga dikatakan bahwa: Jika l dan l' adalah garis sejajar berbeda yang memiliki dua titik A dan B pada l berjarak sama dari l', maka l dan l' memiliki ruas tegak lurus persekutuan yaitu ruas terpendek dari l ke l'. Representasinya dapat dilihat Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Representasi Kesejajaran Euclid

Berdasarkan Maier (1998), ada lima elemen spasial dalam geometri yang dapat dimodifikasi sebagai berikut: Persepsi Spasial, Visualisasi Enaktif, Rotasi Mental, Relasi spasial, dan Orientasi Spasial. Budaya lokal dan pendekatan etnomatematika dapat dimanfaatkan sebagai proses matematisasi horizontal menuju geometri formal dalam Geometri Euclid.

2.6 Beberapa kelemahan Geometri Euclides sebagai sintem deduktif aksiomatik

Dalam bentuk yang paling sederhana, sistem deduktif matematik modern dibangun oleh 4 komponen utama, yaitu:

(1) Unsur-unsur tak terdefinisi (unsur primitif) yang memuat istilah-istilah dasar, dimana pada istilah-istilah ini tidak dapat didefinisikan tanpa menggunakan istilah itu sendiri.
(2) Seperangkat pernyataan yang mengaitkan istilah-istilah diatas dan pernyataan tadi diterima sebagai bernilai benar tanpa menuntut suatu langkah pembuktian. struktur ini dikenal sebagai akniona.
(3) Definisi-definisi yang merupakan pembatasan-pembatasan tanpa pengoperasian lebih lanjut dari pada struktur aksioma tadi.
(4) Teorema-teorema yang merupakan konsekwensi logis dari ke 3 komponen pertama(sebelumnya).

Bertitik tolak dari hal ini dapat kita lihat beberapa kelemahan dalam geometri Euclides sebagai sistem deduktif aksiomatik, antara lain:

Kelemahan Pertama

Euclides berusaha untuk dapatt mendefinisikan semua unsur dalam geometri sampai pada definisi garis dan titik. Jika kita tinjau kembali definisi Euclides tentang titik yaitu yang tidak mempunyai bagian. Terhadap definisi ini, apabila diajukan pertanyaan: apa yang dimaksud dengan bagian ?, maka tidak akan di temui penjelasan tentang apa yang dimaksud dengan " bagian ". Hal ini akan terulang pada waktu Euclides mendefinisikan garis sebagai panjang tanpa lebar. Tentunya pertanyaan senada akan timbul: apa itu panjang dan apa yang dimaksud dengan lebar.

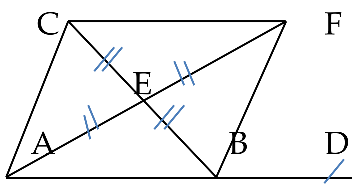
Kelemahan Kedua

Hampir pada setiap bagian, Euclides membuktikan teoremanya dengan mengadakan / memberikan gambar-gambar geometri. Padahal dalam praktek sering timbul gambar-gambar yang digunakan kadang-

kadang meragukan malahan menyesatkan. Salah satu teorema mengatakan:

Dalam sebuah Segitiga apabila salah satu sisinya diperpanjang maka sudut luar segitiga tersebut lebih besar dari pada sudut-sudut dalam yang tidak bersisian.

Untuk lebih jelasnya lihat ilustrasi berikut:



Langkah-langkah yang ditempuh adalah sebagai berikut:

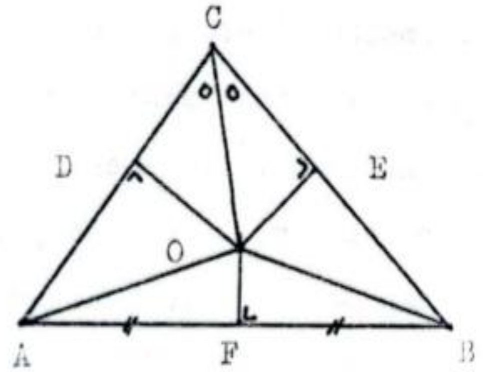
1. Perpanjang sisi AB samapi titik D.
2. Ambil titik tengah sisi BC, misalkan titik E
3. Perpanjang garis AE sedemikian hingga AE = EF.
4. Diperoleh segitiga ACE sama dan sebangun dengan segitiga BFE (sisi,sudut,sisi).
5. Akibatnya sudut ACE dan sudut FBE sama besar.
6. Selanjutnya haruslah sudut DBE lebih besar dari sudut FBE maka sudut DBE jugn lebih besar dari sudut ACE.
7. Untuk membuktikan sudut-sudut yang lain dapat dilakukan dengan menggunakan langkah satu sampai dengan tujuh.

Berdasarkan tahapan/langkah pembuktian di atas, dapat tercatat ada satu hal yang mendasar, yang dilakukan tanpa ada argumentasi syah terhadap langkah tersebut, yaitu bahwa sudut DBE lebih besar dari sudut FBE.

Dalam hal ini sebenarnya Euclides menerapkan prinsip pemisahan ruang secara diam-diam tanpa menyadari bahwa hal ini tidak selamanya musti berlaku, kecuali jika dianggap sebagai sautu aksioma. Tanpa prinsip pemisahan ruang boleh jadi titi F tidak berada dalan sudut DBE, tentu saja akan menggugurkan pembuktian diatas.

Pada batas tertentu, pembuktian dengan mongandalkan seperti uraian diatas memang hanya pada taraf minta pertanggungjawaban atas langkah-langkah yang diambil. namun kadangkala malahan menjerumuskan pada pengambilan kesimpulan yang sungguh- sungguh menyesatkan. Hal ini dapat kita lihat pada contoh berikut ini:

Diketahui: segitiga ABC sembarang



Lebih lanjut dapat dijelaskan:

1. Ambil F titik tengah sisi AB.
2. Tarik garis OF tegak lurus AB dan OC adalah garis bagi sudut ACB.
3. Tarik OD tegak lurus AC .
4. Tarik OE tegak lurus BC.
5. Hubungkan AO dan BO.
6. Segitiga COD sama dan sebangun dengan segitiga COE (sudut,sudut,sisi).
7. Akibatnya: DO = EO dan DC = EC.
8. Segitiga AFO sama dan sebangun dengan segitiga BFO, sehingga AO = BO.
9. Segitiga ADO sama dan sebangun dengan segitiga BEO, sehingga AD = BE.

10. Akhirnya kita peroleh AD + DC = BE + EC atau AC = BC.
11. Dengan cara yang sama maka akan diperoleh bahwa AB = BC = AC atau sotiap segitiga pastilah segitiga sama sisi. Tentu saja kesimpulan diatas teramat membingungkan, sebab tidak sesuai dengan kenyataan yang kita lihat sehari-hari. Apabila kita kaji lebih dalan, tahapan-tahapan pembuktian tadi ada yang tidak didasarrkan pada alasan yang kuat, yaitu pada langkah nomor dua. Belum pasti bahwa CO dan FC berpotongan dalam daerah dalam (interior) dari segitiga ABC. Sangatt boleh jadi bahwa CO dan FO berpotongan di luar daerah interior segitiga ABC, sehingga pengertian diatas adalah tidak sah.

Demikianlah beberana hal yang merupakan titik-titik lemah dari/dalam bangun-bangun geometri Euclides yang merupakan atau sebagai suatu sistem deduktif matematika modern.

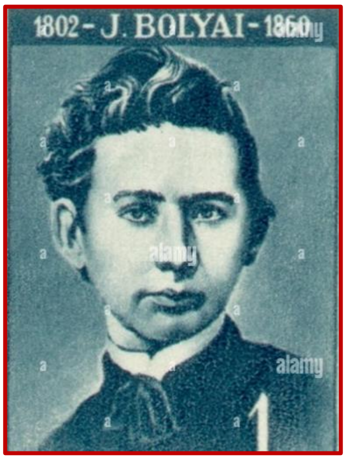
Banyak pakar-pakar matematika (matematikawan) pada abad XIX, antara lain: Pasch (1843-1930), Peano (1858-1932) dan Hilbert (1862-1943) yang turut membangun formulasi logic geometri Euclides, sehingga penataan kembali yang menyangkut struktur aksiomanya akan menunjukkan bahwa geometri Euclides sebagai sistem yang sah dapat diterima sebagai bentuk bagian matematika yang utuh.

BAB III
STRUKTUR AKSIOMATIK GEOMETRI NETRAL

Disusun oleh
Khathibul Umam Zaid Nugroho, S.Kom., M.Pd.
Prof. Dr. YL. Sukestiyarno, M.S.
Dr. Sugiman, M.Si.
Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si.

BAB III

STRUKTUR AKSIOMATIK GEOMETRI NETRAL



Sistem geometri merupakan suatu struktur matematis yang dibagun oleh himpunan semua titik dengan entitas dasar titik, garis dan bidang. Sistem tersebut dibangun berdasarkan aksioma insidensi (Eves, 1972). Eves menyatakan bahwa ada tiga sistem geometri yaitu Geometri Euclid, Geometri Lobachevsky dan Geometri Riemann. Euclid membangun geometri (*the elements*) dengan mendasarkan lima aksioma, lima postulat dan duapuluh tiga definisi (Hitchman, 2018). Lima aksioma Euclid adalah sebagai berikut.

(1) Melalui dua titik berbeda dapat dibuat tepat satu garis. Selalu dapat menarik suatu garis dari suatu titik ke suatu titik yang lain.

(2) Melalui tiga titik berbeda dan alui tiSelalu dapat membuat ruas garis tak terbatas banyaknya pada suatu garis.

(3) Selalu dapat melukis suatu lingkaran berpusat di suatu titik dengan jari-jari ruas garis yang ditentukan.

(4) Semua sudut siku-siku satu sama lain sama besar.

(5) Jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus dan membuat jumlah sudut-sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku, kedua garis itu jika diperpanjang tak terbatas akan bertemu di pihak tempat kedua sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku.

Aksioma kesejajaran Euclid (Aksioma ke-5) adalah prinsip dasar membagun sistem Geometri Euclid, namum aksioma tersebut diperdebatkan, sehingga pada awal abad 20, muncul dua aksioma baru. Pertama adalah aksioma kesejajaran

Lobachevsky. Aksioma tersebut menjadi prinsip utama untuk membangun Geometri Lobachevsky. Kedua adalah aksioma kesejajaran Riemann, yang kemudian menjadi prinsip dasar sistem Geometri Riemann. Selanjutnya dapat dibahas tentang Kemampuan Spasial Geometri Lobachevsky, Kemampuan Spasial Geometri Riemann, dan Kemampuan Spasial Geometri Euclid (Dodgson, 1990).

Berdasarkan uraian di atas, etnomatematika menyajikan konsep-konsep matematika (geometri) dari kurikulum sekolah sedemikian hingga konsep-konsep terkait dengan budaya dan pengalaman sehari-hari siswa (Hitchman, 2018). Itu dimaksudkan untuk meningkatkan kemampuan peserta didik menguraikan hubungan yang bermakna dan memperdalam pemahaman mereka tentang matematika. Pendekatan etnomatematika pada kurikulum matematika dimaksudkan untuk menjadikan matematika sekolah lebih relevan dan bermakna bagi siswa dan meningkatkan kualitas pendidikan mereka secara keseluruhan. Dalam konteks ini, menerapkan perspektif etnomatematika dalam kurikulum matematika sekolah membantu mengembangkan pembelajaran intelektual, sosial, emosional, dan politik siswa dengan menggunakan referensi budaya mereka yang unik untuk menyampaikan pengetahuan, keterampilan, dan sikap mereka. Kurikulum semacam ini memberikan cara bagi siswa untuk mempertahankan identitas mereka sekaligus berhasil secara akademis.

Sampai abad ke-19, pandangan tentang geometri berlandaskan *The Elements* dari Euclid. Geometri sebagai suatu sistem yang deduktif aksiomatik. Itu adalah suatu ilmu tentang sifat-sifat matematika dengan konsep dasar himpunan semua titik. Hubungan antar objek-objek geometri, yaitu titik, garis dan bidang berada dalam ruang Euclid (Anonimous, 2010). Prinsip-prinsip dalam geometri merupakan teorema-teorema dan sifat-sifat lainnya adalah hasil menelaah tentang titik, garis dan bidang, serta ruang fisik dan hubungan matematisnya. Namun, pada awal abad ke-20 banyak ilmuan yang menelaah aksioma kesejajaran Euclid, diantaranya Lobachevsky dan Riemann. Hasil telaah mereka adalah munculnya aksioma baru tentang kesejajaran garis-garis. Lobachevsky menyatakan bahwa “melalui satu titik di luar suatu garis terdapat minimal dua garis yang sejajar dengan garis tersebut.” Dengan aksioma inilah terbangun sistem geometri hiperbolik. Itu adalah salah satu alternatif dari Geometri Euclid. Pendapat berbeda dari Riemann, bahwa “tidak ada garis-garis yang sejajar”(Hitchman, 2018). Riemann-pun membangun suatu geometri eliptik. Oleh karena itu terdapat tiga ruang dalam sistem geometri, yaitu ruang parabolik (Geometri Euclid), ruang hiperbolik (Geometri Lobachevksy), dan ruang eliptik (Geometri Riemann) (Clayton, 2010)(Dillon, 2018).

Berapa banyak dari apa yang diketahui tentang geometri bergantung pada "postulat kesejajaran" terlepas dari rumusan mana yang diambil? Berapa banyak dari apa yang diterima begitu saja yang benar-benar terlepas dari postulat Kelima Euclid? Lepas dari kelemahan-kelemahan Geometri Euclid dalam suatu sistem deduktif matematika, titik perhatian utama para matematikawan terfokus pada masalah kesejajaran. Beberapa matematikawan mencoba membuktikan aksioma kesejajaran Euclide dengan aksioma lainnya sebagai tumpuan, diharapkan aksioma kesejajaran tadi hanyalah sebuah teori, beberapa ahli lainnya bahkan mencoba melepaskan diri dari aksioma kesejajaran dengan mencoba mengkonstruksikan aksioma baru yang lain sama sekali dari aksioma kesejajaran euelide. Berbagai upaya tadi justru mengakhiri geometri baru yang didalamnya berlaku sifat-sifat yang jauh berbeda dari geometri Euclide,dan dikenal sebagai geometri non Euclide.yang masuk dalam kelompok geometri non-Euclide adalah geometri Lobachevsky dan geometri Riemman (Anonimous, 2013)(Coolidge, 2008).

Pada bagian berikut akan dibahas geometri netral dengan beberapa sifatnya. geometri netral ini merupakan bagian-bagian dasar yang sama dalam membangun geometri Euclide dan geometri Lobachevsky

3.1 Struktur Aksioma

Istilah yang tidak didefinisikan

Istilah yang tidak didefinisikan disebut juga konsep primitif. Ada lima istilah yang tidak terdefinisi yaitu *titik, garis, bidang (setengah bidang), jarak* *dan ukuran sudut*. Sistem aksioma menunjukan bagaimana istilah-istilah tak terdefinisi ini berhubungan satu sama lain. Dalam geometri yang akan dibangun ini ada tiga istilah primitif utama, juga jarak dan ukuran sudut. Misal S adalah himpunan semua titik dalam geometri (himpunan semesta dalam geometri), tiga istilah tersebut adalah:

(1) Titik-titik, membentuk himpunan S. S adalah himpunan semua titik dalam geometri.
(2) Garis, merupakan himpunan bagian dari S.
(3) Bidang, merupakan himpunan bagian lain dari S.

Dengan uraian tersebut, kami menyebut **himpunan semua titik sebagai bidang dan akan dilambangkan dengan S**. Itu berarti bahwa titik itu ada. Namun, ini sering tidak tidak dipemikirkan, tetapi digunakan itu secara implisit. Oleh karena itu, dibutuhkan aksioma untuk memastikan bahwa titik itu benar-benar ada saat dibutuhkan. Definisi-definisi selanjutnya akar dikombinasikan dan deskripsinya dengan kelompok aksioma yang membangun geometri. Kelompok aksioma tersebut membangun sistem geometri yang dikenal sebagai geometri netral (geometri mutlak).

3.2 Kelompok Aksioma Insidensi

Misal S adalah himpunan semua titik Geometri dengan struktur aksioma yang paling sederhana dimana hanya dikaitkan oleh 5 aksioma dasar akan menghasilkan suatu sistem geometri insidensi yang merupakan sistem deduktif yang terjadi fundamental dalam mengkonstruksi sistem-sistem geometri lainnya. Pandang himpunan semesta S. Misalkan tiga titik A, B, dan C anggota dari S dikatakan kolinear jika terdapat satu garis ℓ sehingga $A, B, C \in \ell$. Tiga titik tersebut tidak kolinier jika sebaliknya. Pada Aksioma 2 (di bawah ini), bahwa setiap pasang titik adalah kolinear.

Kemudian diberikan struktur aksioma yang terulang dalam sistem aksioma berikut ini.

Aksioma 1 (Aksioma Eksistensi)

Himpunan semua titik membentuk himpunan tak kosong. Ada lebih dari satu titik di himpunan tersebut.

Aksioma 2 (Aksioma Insidensi)

Setiap garis adalah himpunan bagian dari S. *Untuk setiap pasang titik berbeda* A *dan* B *terdapat tepat satu garis* ℓ *sehingga* $A \in \ell$ *dan* $B \in \ell$.

Aksioma 3 (Bidang)

Jika ada tiga titik berbeda yang tak segaris (tidak kolinier) maka ada tepat satu bidang yang memuat ketiga titik tersebut.

Aksioma 4

Jika ada dua titik terletak pada suatu bidang maka garis yang memuat kedua titik tersebut akan terletak pada bidang tersebut.

Aksioma 5

Jika bidang U *memotong bidang* V, *maka perpotongan* U *dan* V *adalah sebuah garis.*

Aksioma 6

Setiap garis memuat paling sedikit dua titik sedang bidang memuat paling sedikit tiga titik yang tidak segaris.

Selanjutnya dibuat beberapa definisi dari konsep-konsep Geometri Netral.

Definisi 1

Suatu titik P *dikatakan terletak pada garis* ℓ *jika* P $\in \ell$. *Suatu titik Q dikatakan berada di luar* ℓ *jika* Q $\notin \ell$. *Dua garis* ℓ *dan* m *dikatakan sejajar jika* $\ell \cap m = \emptyset$.

Perhatikan bahwa kita telah mengecualikan garis yang sejajar dengan dirinya sendiri! Berdasarkan Definisi 1, garis a dikatakan sejajar dengan garis b jika dan hanya jika dua garis a dan b sebidang, dan garis a tidak bersekutu dengan b.

Geometri dengan aksioma di atas ditambah dengan konsep kesejajaran sebagai unsur menurut definisi satu memungkinkan kita memiliki sistem-sistem geometri sederhana dengan jumlah (banyaknya) unsur yang hingga. sebagai contoh , misalkan metri terdiri atas 4 titik A, B, C dan D, serta garis g terdiri atas 2 titik. Bidang terdiri atas tepat 3. Sehingga geometri dapat ditulis sebagai berikut: {A,B,C,D} himpunan semua titik titik. Sedang garis garis: g1={A,B}, g2 ={A,C}, g3 ={A,D}, g4 ={B,C}, g5 {B,D}, g6 ={C,D}. Kemudian untuk bidang: V1= {A,B,C} , V2 ={A,B,D} V3={A,C,D}, V4 ={B,C,D}. Selanjutnya dapat diperlihatkan bahwa geometri ini memenuhi struktur aksioma insidensi.

Teorema 1

Jika a dan b adalah dua garis berbeda yang tidak sejajar, maka terdapat tepat satu titik P *sehingga* P *terletak pada a dan b.*

Bukti:

Andaikan dua garis a dan b berpotongan lebih dari satu, misal dua titik yaitu P dan Q maka berlaku:

P $\in$ a dan P $\in$ b;

Q $\in$ a dan Q $\in$ b.

Menurut Aksioma 2 haruslah garis a sama dengan garis b. Hal ini bertentangan dengan yang diketahui garis a dan b adalah berbeda yang tidak sejajar, berarti bahwa pengandaian dua garis a dan b berpotongan lebih dari satu adalah salah, yang benar adalah terdapat tepat satu titik P sehingga P terletak pada a dan b. Kesimpulannya adalah jika a dan b adalah dua garis berbeda yang tidak sejajar, maka terdapat tepat satu titik P sehingga P terletak pada a dan b (Terbukti). ■

Secara jelas teori ini menyatakan kemungkinan dengan dua garis berbeda yang tidak berpotongan yang membawa ke konsep kesejajaran. Konsep ini akan diimbangi oleh sebuah definisi ada uraian berikut.

Teorema 2

Diketahui sebuah garis g, dan sebuah titik T *di luar garis g* (T$\notin$ *g), maka ada tepat satu bidang yang memuat garis dan titik tersebut.*

Bukti:

Menurut aksioma maka ada titik P $\in$ g dan Q $\in$ g. Diketahui bahwa T $\notin$ g maka P, Q, dan T tidak segaris, sehingga P, Q dan T titik yang berlainan. Karena P, Q dan T titik yang berlainan dan tidak segaris, maka berdasarkan Aksioma 3, melalui titik-titik P, Q, T tepat satu bidang V yang memuat tiga titik tersebut. Selanjutnya karena P $\in$ g dan Q $\in$ g maka berdasarkan Aksioma 4 dapat disimpulkan bahwa g $\subset$ V atau garis g terletak pada bidang V (Terbukti).■

3.3 Aksioma tentang Jarak

Pengertian jarak merupakan salah satu titik lemah dalam geometri Euclide, di sebuah berpangkat pada ketidak jelaskan letak konsep sejarah yaitu meliputi tentang definisi aksioma atau bahkan penyangkut teorema sebab sejarah segala diam-diam dan mendadak digunakan menjelaskan konsep keantaraan dua titik.

Dalam geometri netral konsep jarak dibangun dengan kategorinya secara jelas sebagai satu aksioma tersendiri pertama-tama definisikan lebih dulu fungsi j (sebut fungsi jarak) adalah sebagai berikut:

Definisi 2

Misalkan S himpunan semua titik, fungsi jarak J difenisikan sebagai berikut:

J : SxS → R, R = himpunan bilangan real, fungsi j diaksiomakan memenuhi:

1) $J(P, Q) \geq 0$, untuk setiap $P \in S$, $Q \in S$.

2) $J(P, Q) = 0 \leftrightarrow P = Q$.

3) $J(P, Q) = J(P, Q)$, untuk setiap $P \in S$, $Q \in S$.

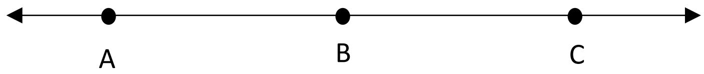
Secara diam diam Euclide mengunakan harga mutlak untuk menyatakan jarak antara dua titik ,memang fungsi yang didefinisi $j(P, Q) = |P-Q|$ memenuhi oksioma fungsi jarak. Secara eksplisit dalam Geometri Netral aksioma tersebut adalah sebagai berikut.

Aksioma 7 (Aksioma Jarak)

Untuk setiap pasangan titik P *dan* Q *terdapat bilangan real* d(P, Q), *yang disebut jarak dari* P *ke* Q. *Untuk setiap garis ℓ terdapat korespondensi satu-ke-satu dari ℓ ke* R *sehingga jika* P *dan* Q *adalah titik-titik pada garis yang bersesuaian dengan bilangan real x dan y, maka* $d(P, Q) = |x - y|$.

3.4 Konsep Keantaraan

Konsep keantaraan dalam geometri hingga sekarang masih kurang tepat., Konsep ini didasarkan pada suatu gambar seperti berikut ini



Dari gambar di atas dikatakan bahwa B terletak antara A dan C. Namun demikian penggunaan konsep yang hanya didasarkan pada gambar tidak dapat dipertahankan. Oleh karena itu proses suatu definisi yang menggambarkan secara deskriptif keantaraan tiga titik.

Definisi 3

Misalkan ada tiga titik A, B, C *yang segaris. Dikatakan* B *terletak di antara* A *dan* C, *tulis* (ABC) *jika dan hanya jika* J(A,B) +J(B,C) = J(A,C) *(disingkat:* AB +BC=AC*).*

Dengan memanfaatkan definisi di atas dan berdasarkan pada aksioma jarak, maka membuat suatu sistem koordinasi saat dijelaskan keantaraan dari tiga titik. Berikut ini akan disajikan beberapa teori yang menyatakan masalah keantaraan.

Teorema 3

Jika (ABC), *maka* (CBA).

Bukti:

Misal A, B, C ∈ S. Berdasarkan hipotesis tiga titik tersebut berkalu (ABC). Karena (ABC) maka berlaku AB + BC = AC (menurut Definisi 3). Sedangkan menurut Aksioma 7 dan Definis 2, maka AB = BA, BC

= CB dan AC = CA. Itu berarti bahwa AB + BC = AC maka BA + CB = CA, atau CB + BA = CA.

Jadi terbukti bahwa jika (ABC), maka (CBA). ■

Selanjutnya, didefinisikan beberapa konsep yaitu ruas garis, sinar dan sudut. Itu adalah upaya menjelaskan kosep kesejajaran di titik jauh tak hingga kembali diperlukan pengertian garis tak hingga. Berikut ini diberikan batasan-batasan sebagai upaya awal untuk menjalankan masalah kesejajaran dititik dengan jarak tak hingga.

Definisi 4

Ruas garis AB, *ditulis* $\overline{AB}$ *didefinisikan sebagai:*

$\overline{AB}$= {X ∈ S | (AXB)} U {A} U {B}

Berdasarkan Definisi 4, diperoleh bahwa $\overline{AB}$ = $\overline{BA}$. Selanjutnya batasan tentang setengah garis (disebut juga sinar) tertuang dalam definisi berikut.

Definisi 5

Sinar AB, *ditulis* $\overrightarrow{AB}$ *didefinisikan*:

$\overrightarrow{AB}$= {X ∈ S | (ABX) } U $\overline{BA}$.

Sesuai dengan Definisi 5, maka $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$, untuk lebih jelasnya lihat ilustrasi berikut ini.

(1) $\overline{BA}$ = {X ∈ S | (A×B) } ∪ {A} ∪ {B}, lihat bagian gambar yang diarsir.

(2) $\overrightarrow{AB}$ = {X ∈ S | (ABX) } ∪ $\overline{BA}$, lihat bagian gambar yang di arsir.

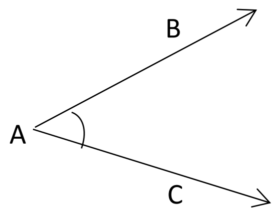
Dengan menggunakan pengertian setengah garis (Definisi 5), dapat melangkah lebih lanjut yaitu konsep sudut. Berikut ini definisi tentang sudut.

3.5 Sudut dan Segitiga

Definisi 6

Suatu sudut, misalnya sudut BAC (*tulis* ∠BAC)) *adalah himpunan titik-titik* $\overrightarrow{AB}$ U$\overrightarrow{AC}$ *dan* $\overrightarrow{AB}$ *tidak segaris dengan* $\overrightarrow{AC}$.

Selanjutnya lihat Gambar 3.1 Sudut BAC berikut ini:



Gambar 3.1 Sudut BAC

Berdasarkan Definisi 6, sudut adalah gabungan dari dua sinar yang tidak berlawanan AB dan AC yang berbagi titik ujung yang sama. Sudut ini dilambangkan dengan ∠BAC atau ∠CAB. Titik A disebut titik sudut dan sinar disebut sisi sudut.

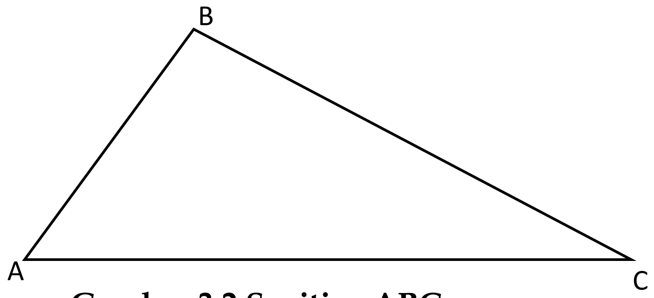
Apabila diperhatikan tampak bahwa ∠BAC yang terbentuk di atas dapat pula kita kembangkan dengan membentuk ruas garis BC sehingga terbentuk sebuah segitiga. Selanjutnya akan dibahas tentang batasan format dari suatu segitiga.

Dua sinar AB dan AC yang titik ujungnya sama adalah sinar yang berhadapan jika kedua sinar tersebut tidak sama tetapi AB = AC. Jika tidak, maka dua sinar tersebut tidak berlawanan.

Definisi 7

Jika ada 3 titik A, B, C *tak segaris, maka segitiga* ABC (ditulis ΔABC) *adalah* $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$.

Sebagai ilustrasi dari Definisi 7 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.2 Segitiga ABC

Satu konsep yang memainkan peranan besar dalam mambahas segitiga adalah konsep kekongruenan segitiga. Terlebih dahulu kita lihat batasan kekongruenan ruas-ruas garis.

Definisi 8

Misalkan ada ruas garis $\overline{AB}$ *dan* $\overline{CD}$. Ruas garis AB dan CD disebut kongruen (ditulis: $\overline{AB} \simeq \overline{CD}$) jika dan hanya jika AB = CD.

$\overline{AB} \simeq \overline{CD}$: Ruas garis AB dan CD kongruen.

Perlu diperhatikan bahwa kekongruenan merupakan relasi ekivalensi, artinya memenuhi sifat-sifat:

(1) $\overline{AB} \simeq \overline{AB}$

(2) $\overline{AB} \simeq \overline{CD}$ maka $\overline{CD} \simeq \overline{AB}$

(3) Jika $\overline{AB} \simeq \overline{CD}$ dan $\overline{DC} \simeq \overline{EF}$ maka $\overline{AB} \simeq \overline{EF}$.

Latihan 1

1) Jika (ABC) maka AB U BC = AC. Buktikanlah!
2) Jika ada 3 titik A, B, C yang tidak segaris dan membentuk sudut $\angle BAC$, maka $\angle BAC = \angle CAB$. Buktikanlah!

Berikut ini akan diberikan pengertian titik tengah dari suatu ruas garis yang diketahui, kemudian disertakan pula sebuah teorema menyangjut keunikan (ketunggalan) dari titik tengah suatu garis.

Definisi 9

Misalkan ada ruas garis $\overline{AB}$ *dan* M *disebut sebagai titik tengah* $\overline{AB}$ *jika* $M \in \overline{AB}$ *dan* $\overline{AM} \simeq \overline{MB}$

Teorema 4

Misalkan $\overline{AB}$ *suatu ruas garis dan* M *adalah titik tengah* $\overline{AB}$, *maka* M *merupakan satu-satunya titik tengah* $\overline{AB}$.

Latihan 2

Buktikan Teorema 4 (Petunjuk: Jika Q juga merupakan titik tengah $\overline{AB}$, maka haruslah M dan Q berhimpit).

Dalam uraian di muka telah dijelaskan/ditampilkan satu contoh kelemahan dalam langkah logis pembuktian sebuah teorema pada geometri Euclides. Euclides secara diam-diam berasumsi bahwa sebuah garis yang diperpanjang terus-menurus tidak mungkin akan kembali ke titik pangkal garis itu.

Alternatif lain adalah kita bangun satu aksioma yang akan menjamin bahwa garis tersebut tidak mungkin kembali ke titik pangkalnya. Asumsi tersebut dalam sistem aksiomatis geometri netral termasuk dalam kelompok aksioma jarak dan dikenal sebagai aksioma pemisahan ruang.

3.6 Aksioma Pemisahan Ruang

Misalkan sebuah bidang V yang memuat sebuah garis g. Oleh garis g, bidang V terbagi menjadi 3 bagian: H1, H2 dan garis g. Himpunan titik-titik pada V yang tak terletak pada g adalah gabungan dua himpunan yang bersifat:

(1) Setiap bagian adalah himpunan konvex.

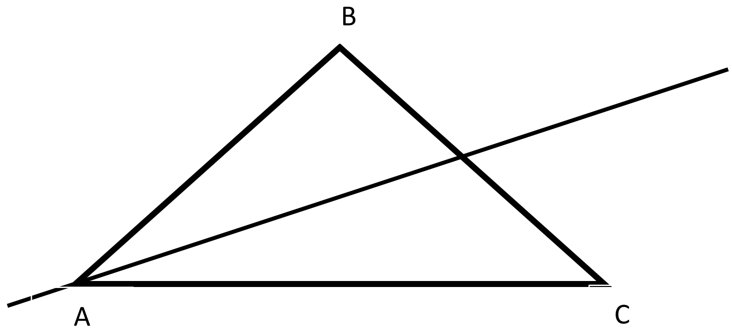
(2) Jika titik P anggota salah satu bagian dan Q anggota bidang yang lainnya maka $\overline{PQ}$ memotong garis g.

H1 dan H2 masing-masing disebut setengah bidang, g disebut tepi setengah bidang. Sedangkan yang dimaksud himpunan konvex dibatasi oleh definisi berikut.

Definisi 10 (Himpunan Konvex)

Suatu himpunan H subset S ($H \subset S$) disebut konvex jika dan hanya jika ($P \in H, Q \in H \rightarrow \overline{PQ} \subset H$).

Contoh dari aksioma pemisahan ruang dapat kita ambil sebuah segitiga ABC dan garis G memotong ruas BC dititik D serta garis G melalui titik A. Lihat Gambar 3.3 berikut:



Gambar 3.3 Pemisahan Ruang

Selanjutnya, jika ℓ adalah sebuah garis dan $A \notin \ell$ maka kita akan menggunakan notasi H_A untuk menyatakan setengah bidang yang dibatasi oleh ℓ yang memuat A.

Definisi 11

Misalkan ℓ adalah sebuah garis dan misalkan A dan B adalah dua titik di luar. Dikatakan bahwa A dan B berada di sisi yang sama dari ℓ jika $AB \cap \ell = \emptyset$. Dikatakan bahwa A dan B berseberangan dengan ℓ jika $AB \cap \ell \neq \emptyset$.

Teorema 5 (Teorema Pasch)

Misalkan △ABC adalah segitiga dan misalkan ℓ adalah garis sehingga tidak ada satupun dari A, B, dan C yang terletak di ℓ. Jika ℓ memotong AB, maka ℓ juga memotong AC atau BC.

Bukti:

Misalkan △ABC diberikan dan misalkan ℓ menjadi garis yang memenuhi kondisi di atas. Misalkan H_1 dan H_2 adalah dua setengah bidang yang ditentukan oleh ℓ. Titik A dan B berada di sisi berlawanan dari ℓ. Tanpa kehilangan sifat umum, kita dapat berasumsi bahwa $A \in H_1$ dan $B \in$

H_3. Sekarang C ada di H_1 atau di H_3. Jika $C \in H1$ maka $BC \cap \ell \neq \emptyset$ dan jika $C \in H2$ maka $AC \cap \ell \neq \emptyset$, dan bukti selesai. ■

Teorema berikut akan menjelaskan sifat-sifat dari setengah bidang.

Teorema 6

(1) H1 dan H2 himpunan tidak kosong.

(2) H1 mengandung paling sedikit dua titik.

(3) H2 mengandung paling sedikit tiga titik.

(4) Segitiga setengah bidang terletak pada tepat satu bidang.

(5) Setiap setengah bidang memiliki tepat satu tepi.

(6) Jika himpunan H dan G tak kosong dan konvex maka berlaku $H \cap G$ juga konvex

Latihan 3

1. Buktikan dua pernyataan berikut:
   a) Jika P dan Q terletak pada sisi-sisi g yang berhadapan dan Q dan T terletak pada sisi yang berhadapan maka P dan T terletak pada sisi yang sama.
   b) Jika P dan Q pada sisi yang sama, maka P dan T pada sisi yang berhadapan.
2. Buktikan Teorema 6.
3. Buktikan bahwa misalkan ℓ adalah garis dan misalkan $A, D \in \ell$ adalah titik-titik yang berlainan. Jika B dan E berseberangan dengan ℓ maka $AB \cap DE = \emptyset$. (sering disebut **Teorema-Z**).

3.7 Ukuran Sudut

Definisi 12

Sinar $\overrightarrow{AD}$ berada di antara sinar $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ jika D berada di bagian dalam ∠BAC.

Aksioma 8 (Busur Derajat)

Untuk setiap sudut ∠BAC terdapat bilangan m(∠BAC), yang disebut ukuran ∠BAC, sehingga:

a. $0^o \leq m(\angle BAC) \leq 180^o$, *untuk setiap sudut ∠BAC;*
b. $m(\angle BAC) = 0^o$ *jika dan hanya jika* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$;
c. *Untuk setiap bilangan real r,* $0 < r < 180$ *dan untuk setiap setengah bidang H yang dibatasi oleh* $\overrightarrow{AB}$ *terdapat sinar unik* $\overrightarrow{AD}$ *sehingga* $D \in H$ *dan* $m(\angle BAD) = r^o$;
d. *Jika* $\overrightarrow{AD}$ *antara* $\overrightarrow{AB}$ *dan* $\overrightarrow{AC}$ *maka* $m(\angle BAD) + m(\angle DAC) = m(\angle BAC)$.

Definisi 13

Sudut ∠BAC dan ∠EDF adalah kongruen (ditulis ∠BAC ≅ ∠EDF), jika m(∠BAC) = m(∠EDF).

Definisi 14

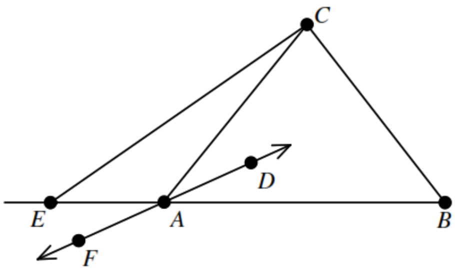
Sudut ∠BAC siku-siku jika $m(\angle BAC) = 90^o$; ∠BAC adalah sudut lancip jika $m(\angle BAC) < 90^o$. ∠BAC adalah sudut tumpul jika $m(\angle BAC) > 90^o$.

Teorema 7 (Teorema *Cross Bar*)

Diketahui △ABC, *misalkan* D *adalah titik di dalam* ∠BAC, *maka ada titik G sehingga G terletak pada kedua sinar* $\overrightarrow{AD}$ *dan* $\overrightarrow{BC}$.

Bukti:

Sebagai ilustrasi, perhatikan Gambar 3.4 berikut ini.



Gambar 3.4 Garis *Cross Bar* pada Segitiga ABC

Diberi sinar $\overrightarrow{AD}$ antara sinar $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$. Mari kita gunakan pembuktian dengan kontradiksi dan asumsikan bahwa $\overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{BC} = \emptyset$. Misalkan AF adalah sinar yang berlawanan dengan AD. Jika AF ∩ BC = P, maka (BPC) dan berdasarkan teorema (Misalkan ℓ adalah garis, misalkan A ∈ ℓ, dan misalkan B sebagai titik eksternal untuk ℓ. Jika C adalah titik antara A dan B, maka B dan C berada di sisi yang sama dari ℓ), maka dperoleh bahwa P terletak di bagian dalam ∠CAB. Akan tetapi, hal ini bertentangan dengan Lemma (bahwa misalkan ℓ adalah garis, misalkan A ∈ ℓ, dan misalkan B sebagai titik eksternal untuk ℓ. Jika C ∈ sinar $\overrightarrow{AB}$ dan C ≠ A, maka B dan C berada pada sisi yang sama dari ℓ) itu mengatakan bahwa tidak ada titik pada sinar yang berlawanan yang dapat berada di dalam sudut. Jadi, diperolah bahwa AF ∩ BC = ∅. Sekarang, ini berarti bahwa AD ∩ BC = ∅ karena baik $\overrightarrow{AD}$ maupun sinar lawannya tidak memotong $\overrightarrow{BC}$. Oleh karena itu B dan C berada di sisi yang sama dari garis AD. Misalkan E titik pada garis AC sehingga (CAE). Kemudian, C dan E berada pada sisi yang berlawanan dari AD, dan dengan Teorema Z (lihat Latihan 3 No. 3), B dan E berada pada sisi yang berlawanan dari AD. Maka diperoleh bahwa B berada di bagian dalam ∠DAE, yang berarti B dan E berada di sisi yang sama pada garis $\overrightarrow{AD}$. Itu adalah suatu kontradiksi. Jadi, yang benar haruslah

$\overrightarrow{AD} \cap \text{BC} \neq \emptyset$. Kesimpulan ada titik G sehingga G terletak pada kedua sinar $\overrightarrow{\text{AD}}$ dan $\overrightarrow{\text{BC}}$.■

Latihan 4

1. Misalkan ℓ adalah garis, misalkan A ∈ ℓ, dan misalkan B adalah titik luar untuk ℓ. Jika C adalah titik antara A dan B, maka B dan C berada di sisi yang sama dari ℓ. Buktikan!
2. Suatu titik D berada di dalam sudut ∠BAC jika dan hanya jika sinar AD memotong bagian dalam segmen BC. Buktikan!

Definisi 15

Dua sudut ∠BAD dan ∠DAC membentuk pasangan linier jika AB dan AC adalah sinar yang berlawanan.

Teorema 8 (Teorema Pasangan Linier)

Jika sudut ∠BAD dan ∠BAC membentuk pasangan linier, maka m(∠BAD) + m(∠DAC) = ∠180^o.

Definisi 16

Dua sudut ∠BAC dan ∠EDF bersuplemen jika m(∠BAC) + m(∠EDF) = 180^o.

Definisi 17

Dua garis ℓ dan m saling tegak lurus jika terdapat titik A ∈ ℓ ∩ m dan titik B ∈ ℓ dan C ∈ m sehingga ∠BAC merupakan sudut siku-siku. Ini akan dilambangkan dengan ℓ ⊥ m.

Definisi 18

Jika A dan B adalah titik-titik yang berbeda, garis bagi AB adalah garis ℓ melalui titik tengah AB sehingga sinar AB $\perp$ ℓ.

Latihan 5

1. Buktikan Teorema 18.
2. Suatu titik D berada di dalam sudut $\angle BAC$ jika dan hanya jika sinar AD memotong bagian dalam segmen BC. Buktikan!

3.8 Bagaimana Mengukur Sudut dan Jarak Berinteraksi?

Terdapat aksioma tentang sudut kongruen dan segmen kongruen. Apakah ini saling terhubung? Untuk melihat apakah ada hubungannya, maka perlu melihat objek yang mengandung segmen dan sudut, yang paling sederhana dari benda-benda ini adalah segitiga. Perhatikan definisi berikut ini.

Definisi 19

Dua segitiga dikatakan kongruen jika terdapat korespondensi satu-ke-satu dari titik-titik sudut kedua segitiga sedemikian rupa sehingga sudut-sudut yang bersesuaian kongruen dan sisi-sisi yang bersesuaian kongruen.

Perlu diperhatikan bahwa definisi di atas mengatakan bahwa cara untuk mengetahui apakah dua segitiga kongruen adalah dengan menemukan enam kongruensi yang ada dalam definisi: kongruensi tiga sudut dan kongruensi tiga ruas.

Selanjutnya digunakan istilah Sisi-Sudut-Sisi dalam geometri ini. Euclid membuktikannya sebagai proposisi keempatnya (walaupun ada beberapa masalah dengan pembuktiannya). Dapat dilakukan hal yang sama, tetapi lima aksioma yang dimiliki sejauh ini tidak cukup kuat untuk mengimplikasikan proposisi Sisi-Sudut-Sisi (SAS). Ada geometri yang memenuhi lima aksioma, tetapi tidak dengan proposisi S-Sd-S. Jadi, harus menambahkannya sebagai aksioma lain sebagai berikut.

Aksioma 20 (Axiom Sisi-Sudut-Sisi atau S-Sd-S)

Jika $\triangle ABC$ *dan* $\triangle DEF$ *adalah segitiga sehingga* $AB \cong DE$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ *dan* $BC \cong EF$, *maka* $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Perhatikan bahwa sudah terlalu banyak mempertimbangkan konsekuensi dari aksioma-aksioma yang tidak terkait dengan Aksioma Kesejajaran. Padahal, tujuan banyak matematika pada masa antara Euclid dan Bolyai-Lobachevskii-Gauss adalah untuk membuktikan bahwa Postulat Kesejajaran bergantung pada yang lain.

3.9 Teorema Sudut-Sisi-Sudut

Meskipun dapat menggunakan S-Sd-S hanya untuk menunjukkan kongruensi segitiga, terkadang lebih mudah untuk bekerja dengan informasi lainnya.

Teorema 9 (Sudut-Sisi-Sudut, Sd-S-Sd)

Diketahui segitiga △ABC dan △DEF dengan ∠CAB ≅ ∠FDE, AB≅ DE, dan ∠ABC ≅ ∠DEF, maka △ABC ≅ △DEF.

Bukti:

Misalkan △ABC dan △DEF seperti yang diberikan. Terdapat titik C'∈ $\overrightarrow{AC}$ sehingga AC′ ≅ DF (Aksioma Jarak). Kemudian oleh S-Sd-S △ABC′ ≅ △DEF dan ∠ABC′ ≅ ∠DEF oleh CPCTC. Kami diberi bahwa ∠ABC ≅∠DEF jadi kami harus memiliki ∠ABC≅∠ABC′. Kemudian dengan Aksioma Ukuran Sudut, diperoleh bahwa sinar BC = BC′. Namun, BC hanya dapat memotong AC di satu titik, jadi C = C' dan disimpulkan bahwa △ABC ≅ △DEF.

Selanjutnya diperoleh hasil:

Teorema 10

Jika dalam △ABC dengan ∠ABC ≅ ∠ACB maka AB ≅ AC.

Teorema 11 (Keberadaan Tegak Lurus)

Untuk setiap garis ℓ dan untuk setiap titik luar P, terdapat garis m melalui P sehingga ℓ ⊥ m.

Bukti:

Misalkan ℓ menjadi garis dan P titik bukan pada ℓ. Setidaknya ada dua titik berbeda A, B ∈ ℓ. Dengan Aksioma Busur Derajat terdapat titik Q di seberang ℓ dari P sehingga ∠PAB ≅ ∠QAB. Ada titik P′ ∈ $\overrightarrow{AQ}$ sehingga AP′ ≅ AP oleh Aksioma Penggaris. Misalkan m = PP'. Karena P dan P′ berada di sisi berlawanan dari ℓ, PP'∩ ℓ = {F}. Jika A = F, maka ∠BFP dan ∠BFP′ saling sumplemen dan kongruen, sehingga harus siku-siku dan ℓ ⊥ m.

Jika A ≠ F maka △FAP ≅ △FAP′ oleh S-Sd-S, jadi ∠AFP≅∠AFP′ dan keduanya merupakan suplemen berdasarkan konstruksi, jadi sudut siku-siku dan m ⊥ ℓ. (Terbukti)■

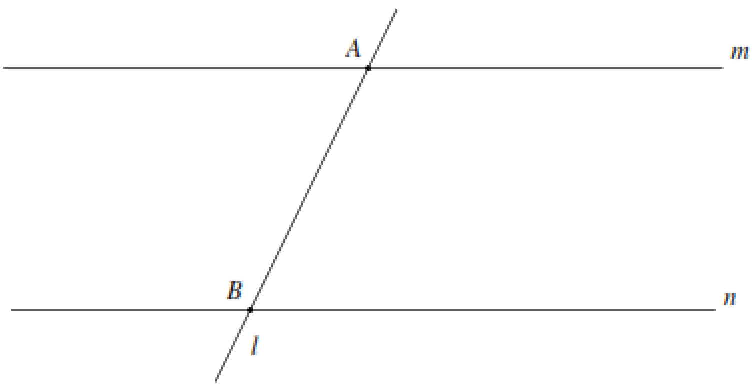
3.10 Sudut Interior Alternatif

Definisi 20

Misalkan ₤ adalah himpunan garis pada bidang. Garis ℓ melintang dari ₤ jika:

a. ℓ 6∈ ₤, dan
b. ℓ ∩ m ≠ ∅ untuk semua m ∈ ₤.

Misalkan ℓ melintang ke m dan n di titik A dan B, berturut-turut. Dikatakan bahwa setiap sudut perpotongan ℓ dan m serta ℓ dan n memiliki sisi transversal di ℓ dan sisi non-transversal yang tidak terdapat di ℓ. Lihat Gambar 3.5 berikut ini.



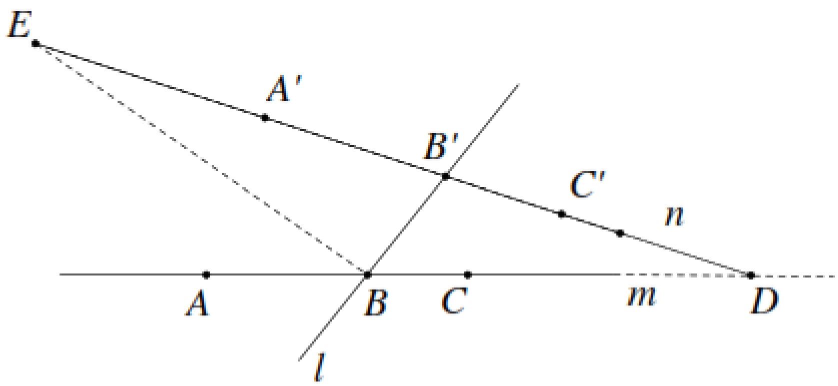
Gambar 3.4 Kesejajaran Dua Garis m dan n

Definisi 21

Sudut persimpangan m dan ℓ dan salah satu dari n dan ℓ adalah sudut dalam berseberangan jika sisi transversalnya berlawanan arah dan berpotongan, *dan jika sisi nontransversalnya terletak pada sisi berlawanan dari ℓ. Dua dari sudut ini adalah sudut yang berkorespondensi jika sisi transversalnya memiliki arah yang sama dan sisi nontransversalnya terletak pada sisi yang sama dari ℓ.*

Teorema 12 (Teorema Sudut dalam Alternatif)

Jika dua garis yang dipotong oleh transversal memiliki sepasang sudut dalam berseberangan yang kongruen, maka kedua garis tersebut sejajar.



Gambar 3.6 Garis Transversal melalui n dan m

Perhatikan Gambar 3.6. Misalkan m dan n adalah dua garis yang dipotong oleh transversal ℓ. Biarkan titik-titik persimpangan masing-masing menjadi B dan B′. Pilih titik A pada m di satu sisi ℓ, dan pilih A′∈ n di sisi yang sama dari ℓ dengan A. Demikian juga, pilih C ∈ m di sisi berlawanan dari ℓ dari A. Pilih C′ ∈ n di sisi yang sama sisi ℓ sebagai C. Kemudian sisi berlawanan dari ℓ dari A′. Diketahui bahwa ∠A’B’B~=∠CBB’. Asumsikan bahwa garis m dan n tidak sejajar; yaitu, mereka memiliki persimpangan kosong. Mari kita nyatakan titik persimpangan ini dengan D. D berada di satu sisi ℓ, jadi dengan mengubah pelabelan, jika perlu, kita dapat mengasumsikan bahwa D terletak di sisi ℓ yang sama dengan C dan C′. Ada satu titik unik E pada sinar B′A sehingga BE ~= BD. Karena, BB ~= BB′, kita dapat menerapkan Aksioma S-Sd-S untuk membuktikan bahwa △EBB′~= △DBB′. Dari definisi segitiga kongruen, maka ∠DB′B~= ∠EBB′. Sekarang, suplemen ∠DBB′ kongruen dengan suplemen ∠EB′B. Suplemen dari ∠EB′B adalah ∠DB′B dan ∠DB′B ~= ∠EBB′. Oleh karena itu, ∠EBB′ kongruen dengan suplemen dari ∠DBB′. Karena sudut berbagi sisi, mereka sendiri saling melengkapi. Jadi, E ∈ n dan kami telah menunjukkan bahwa {D, E} ⊂ n atau m ∩ n lebih dari satu titik. Kontradiksi ini memberi kita bahwa m dan n harus sejajar. (Terbukti)■

Corollary 1

Jika m dan n adalah garis berbeda yang keduanya tegak lurus terhadap garis ℓ, maka m dan n adalah sejajar.

Bukti:

ℓ adalah transversal ke m dan n. Sudut interior alternatif adalah sudut siku-siku. Semua sudut siku-siku kongruen, sehingga berlaku Teorema Sudut Interior Alternatif. m dan n sejajar.■

Corollary 2

Jika P adalah titik bukan pada ℓ, maka garis tegak lurus yang diturunkan dari P ke ℓ adalah unik.

Bukti:

Asumsikan bahwa m tegak lurus terhadap ℓ melalui P , berpotongan ℓ di Q. Jika n adalah tegak lurus lain terhadap ℓ melalui P memotong ℓ di R, maka m dan n adalah dua garis berbeda yang tegak lurus terhadap ℓ.

Dengan akibat wajar di atas, mereka sejajar, tetapi masing-masing berisi P. Jadi, garis kedua tidak dapat dibedakan, dan garis tegak lurusnya unik.■

Titik di mana garis tegak lurus ini memotong garis ℓ, disebut kaki garis tegak lurus.

Corollary 3

Jika ℓ adalah sembarang garis dan P adalah sembarang titik yang tidak terletak di ℓ, terdapat setidaknya satu garis m melalui P yang tidak memotong ℓ.

Bukti:

Dengan Corollary 2 ada garis unik, m, melalui P tegak lurus dengan ℓ. Sekarang ada garis unik, n, melalui P tegak lurus dengan m. Secara wajar 1 ℓ dan n sejajar.■

Perhatikan bahwa meskipun kita telah membuktikan bahwa ada garis melalui P yang tidak berpotongan ℓ, kita belum (dan tidak dapat) membuktikan bahwa garis tersebut unik.

3.11 Teorema Sudut Eksterior Lemah

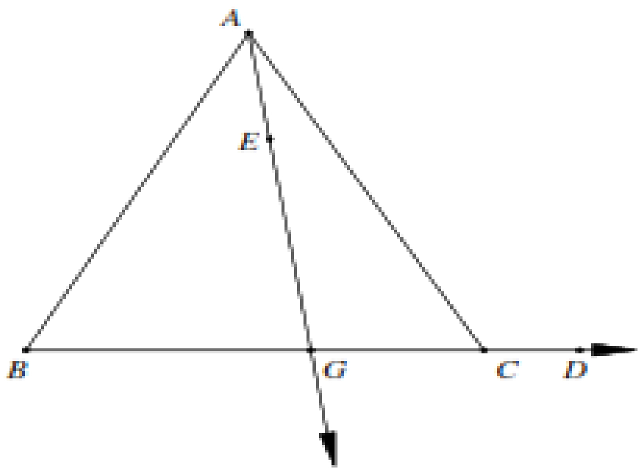
Misalkan △ABC adalah sembarang segitiga pada bidang. Segitiga ini memberi kita bukan hanya tiga segmen, tetapi sebenarnya tiga garis.

Definisi 22

Sudut pelengkap sudut sebuah segitiga disebut sudut luar segitiga. Dua sudut segitiga yang tidak bertetangga dengan sudut luar ini disebut sudut dalam jauh.

Teorema 13 (Teorema Sudut Luar)

Sudut luar sebuah segitiga lebih besar daripada salah satu sudut dalam jauhnya. (Lihat Gambar 3.7 di bawah ini.)



Gambar 3.7 Sudut Luar pada Segitiga ABC

Bukti:

Berdasarkan Pernyataan Teorema 13, akan ditunjukkan bahwa ∠ACD > ∠A. Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa ∠ACD > ∠B. Kemudian dengan menggunakan teknik yang sama, dapat dibuktikan hal yang sama untuk dua sudut luar lainnya. Sekarang, ∠A < ∠ACD ∠A≅∠ACD atau ∠A > ∠ACD. Jika ∠A = ∠BAC ≅ ∠ACD, maka menurut Teorema Sudut dalam Alternatif, garis AB dan CD sejajar. Ini tidak mungkin, karena keduanya mengandung B. Asumsikan bahwa ∠A > ∠ACD. Maka terdapat sinar $\overrightarrow{AE}$ di antara sinar $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ sehingga ∠CAE ≅ ∠ACD. Dengan Teorema bahwa sinar $\overrightarrow{AE}$ memotong BC di titik G. Sekali lagi dengan Teorema Sudut Interior Alternatif garis AE dan CD sejajar. Ini adalah kontradiksi. Jadi, ∠A < ∠ACD.

Lemma 1 (Kekongruenan Sd-Sd-S)

Pada segitiga $\triangle ABC$ *dan* $\triangle DEF$ *diketahui bahwa* $AC \cong DF$, $\angle A \cong \angle D$, *dan* $\angle B \cong \angle E$, *maka* $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bukti:

Jika $AB \cong DE$, kita selesaikan Sudut-Sisi-Sudut. Jadi, mari kita asumsikan bahwa $AB \ncong DE$. Kemudian, kita harus memiliki $AB < DE$ atau $AB > DE$. Jika $AB < DE$, maka ada titik $H \in DE$ sehingga $AB \cong DH$. Kemudian dengan Teorema S-Sd-S $\triangle ABC \cong \triangle DHF$. Jadi, $\angle B \cong \angle DHF$. Tetapi $\angle DHF$ berada di luar $\triangle FHE$, jadi dengan Teorema Sudut Luar $\angle DHF > \angle E \cong \angle B$. Jadi, $\angle DHF > \angle B$, dan kita memiliki kontradiksi. Oleh karena itu, AB tidak kurang dari DE. Dengan argumen serupa, kami dapat menunjukkan bahwa asumsi bahwa $AB > DE$ mengarah ke kontradiksi serupa. Dengan demikian, hipotesis kami bahwa $AB \ncong DE$ tidak valid. Jadi, $AB \cong DE$ dan $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (berdasarkan Sd-S-Sd).

Latihan 6

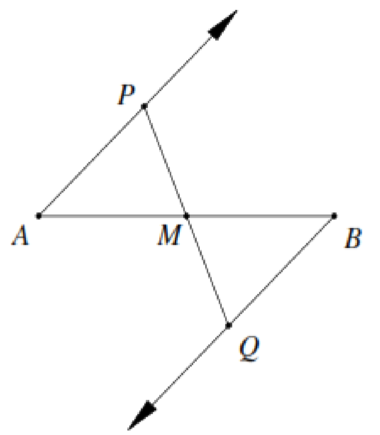
1. Buktikan bahwa dua segitiga siku-siku kongruen jika hipotenusa dan kaki salah satunya kongruen dengan hipotenusa dan kaki lainnya.
2. Buktikan bahwa: Pada segitiga $\triangle ABC$ dan $\triangle DEF$ diketahui bahwa $AC \cong DF$, $AB \cong DE$, dan $BC \cong EF$, maka $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (Lemma Kekongruenan S-S-S).

Lemma 2

Setiap ruas garis memiliki titik tengah yang unik.

Bukti:

Misalkan AB adalah sembarang ruas garis pada suatu bidang, dan misalkan C adalah sembarang titik yang tidak terletak pada garis AB. Terdapat sinar unik $\overrightarrow{BX}$ di seberang garis AB dari P sehingga ∠PAB ≅ ∠XBA. Ada titik unik Q pada sinar $\overrightarrow{BX}$ sehingga AP ≅ BQ. Q berada di seberang garis AB dari P . Karena P dan Q berada pada sisi berlawanan garis AB, P Q ∩ AB ≠ ∅. Biarkan M menunjukkan titik persimpangan ini. Entah M terletak di antara A dan B, A terletak di antara M dan B, B terletak di antara A dan M, M = A, atau M = B. Kita ingin menunjukkan bahwa M terletak di antara A dan B, jadi anggap saja tidak. Karena ∠PAB ≅ ∠QBA, dengan konstruksi, kita dapatkan dari Teorema Sudut Dalam Alternatif bahwa garis AP dan BQ sejajar. Jika M = A maka A, P, dan M kolinear pada garis AP dan garis AP = AB yang memotong garis BQ. Kita dapat membuang kasing M = B dengan cara yang sama. Perhatikan Gambar 3.8 berikut ini.



Gambar 3.8 M Titik Tengah Ruas Garis AB

Jadi, asumsikan bahwa A terletak di antara M dan B. Ini berarti bahwa garis PA akan memotong sisi MB dari △MBQ pada titik antara M dan B. Jadi, menurut Teorema Pasch, garis tersebut harus memotong MQ atau BQ. Itu tidak dapat memotong sisi BQ karena garis AP dan BQ sejajar. Jika garis AP berpotongan dengan MQ maka harus berisi MQ untuk P, Q, dan M adalah kolinier.

Jadi, M = A yang telah kami tunjukkan tidak mungkin. Jadi, kita telah menunjukkan bahwa A tidak dapat terletak di antara M dan B. Dengan cara yang sama, kita dapat menunjukkan bahwa B tidak dapat terletak di antara A dan M. Dengan demikian, kita mempunyai bahwa M harus terletak di antara A dan B. Ini berarti bahwa ∠AMP ≅ ∠BMQ karena merupakan sudut vertikal. Dengan Sudut-Sudut-Sisi kami memiliki △AMP ~= △BMQ. Jadi, AM ≅ MB dan M adalah titik tengah AB. (Terbukti).■

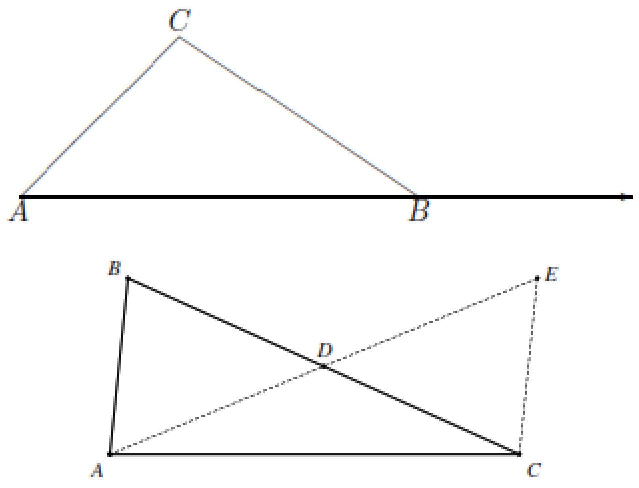
3.12 Teorema Saccheri-Legendre

Corollary 4

Jumlah ukuran derajat dari setiap dua sudut segitiga kurang dari 180^{o}. (Ini mengikuti dari Teorema Sudut Luar).

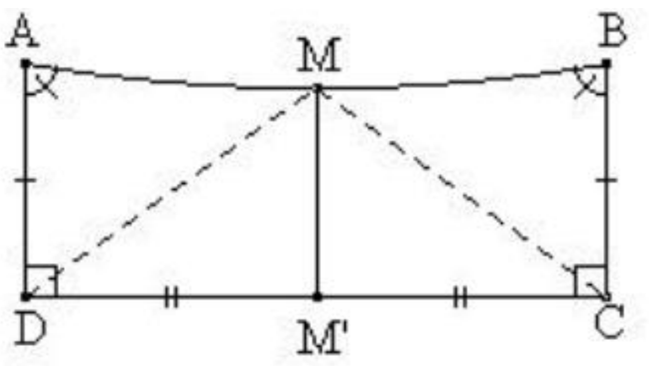
Bukti:

Misal diberikan segitiga ABC, akan ditunjukkan bahwa $\angle A + \angle B < 180^{\circ}$. Dari Teorema Sudut Luar, $\angle A < \angle CBD$ $\angle A + \angle B < \angle CBD + \angle B = 180^{o}$, karena merupakan sudut tambahan. (Lihat Gambar 3.9).



Gambar 3.9 Sudut Luar Segitiga ABC

Dalam perkembang geometri, terdapat satu definisi yang sangat penting yaitu konsep tentang segiempat Sacherri. Definisi: Segiempat ABCD dengan sudut alas siku-siku (sudut D dan sudut C) dan sisi-sisinya kongruen (AD=BC) disebut segiempat Saccheri. Sisi di seberang alas adalah puncak, dan sudut yang dibentuk oleh sisi dan puncak adalah sudut puncak (sudut A sama dengan sudut B). DM'=M'C dan AM=MB. (Ross, 2010). Representasi definisi tersebut lihat Gambar 3.10.



Gambar 3.10 Segiempat Sacherri

Girolamo Saccheri adalah seorang pendeta Yesuit yang hidup dari tahun 1667 hingga 1733. Sebelum meninggal ia menerbitkan sebuah buku berjudul Euclid Freed of Every Flaw. Itu tidak diperhatikan selama lebih dari satu setengah abad sampai ditemukan kembali oleh matematikawan Italia Beltrami.

Dia ingin membuktikan Postulat Kelima Euclid dari aksioma lainnya. Untuk melakukannya dia memutuskan untuk menggunakan argumen reductio ad absurdum. Dia mengambil negasi dari Postulat Paralel dan mencoba sampai pada kontradiksi. Dia mempelajari keluarga segiempat yang kemudian disebut segiempat Saccheri. Misalkan S adalah segiempat cembung di mana dua sudut yang berdekatan adalah sudut siku-siku. Segmen yang menghubungkan kedua simpul ini disebut basis. Sisi yang berlawanan dengan alas adalah puncak dan dua sisi lainnya disebut sisi. Jika sisi-sisinya kongruen satu sama lain maka ini disebut segiempat Saccheri. Sudut yang mengandung puncak disebut sudut puncak.

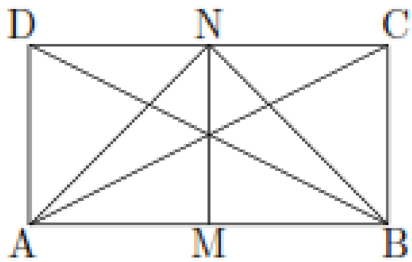
Corollary Segiempat Saccheri

Pada segiempat Saccheri berlaku:

a. sudut puncak kongruen, dan
b. garis yang menghubungkan titik tengah alas dan puncak—disebut garis tinggi- adalah tegak lurus terhadap keduanya.

Bukti:

Misal ABCD adalah segiempat Saccheri, lihat ilustrasi Gambar 3.10a berikut ini.



Gambar 3.10a Segiempat Saccheri ABCD

Pandang Gambag 3.10a, misalkan M titik tengah AB dan N titik tengah CD. Diketahui bahwa $\angle DAB = \angle ABC = 90^o$. Kemudian, AD ≅ BC dan AB ≅ AB, sehingga dengan S-Sd-S △DAB ≅ △CBA, yang mengimplikasikan bahwa BD ≅ AC. Juga, karena CD ≅ CD maka kita dapat menerapkan kriteria S-S-S untuk melihat bahwa △CDB ≅ △DCA. Berarti bahwa ∠D ≅ ∠C. (bagian a terbukti)

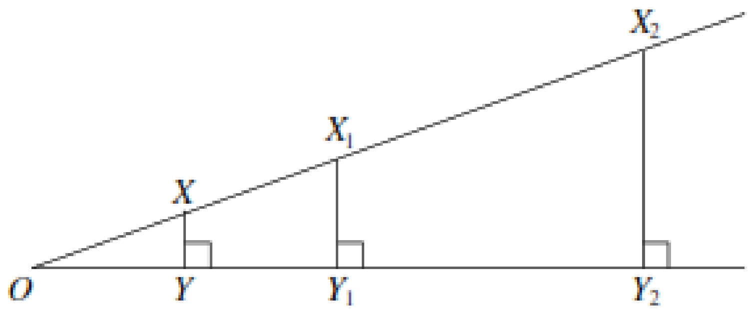
Selanjutnya, ditunjukkan bahwa garis MN tegak lurus terhadap garis AB dan CD. Karena DN ≅ CN, AD ≅ BC, dan ∠D ≅ ∠C, dengan S-Sd-S maka △ADN ≅ △BCN. Ini berarti AN ≅ BN. Juga, AM ≅ BM dan MN ≅ MN. Oleh S-S-S, maka △ANM ≅ △BNM dan selanjutnya ∠AMN ≅ ∠BMN. Keduanya adalah sudut suplementer, oleh karena itu harus sudut siku-siku. Jadi MN tegak lurus AB. Dengan menggunakan pembuktian analog dan segitiga △DMN dan △CMN, dan dapat ditunjukkan bahwa MN tegak lurus CD. (bagian b juga terbukti).■

Aksioma Archimedes menyiratkan aksioma Aristoteles

(1) Jika ada ruas $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ dengan $\overline{AB} < \overline{CD}$, maka ada bilangan asli n sedemikian hingga $\overline{CD} < n. \overline{AB}$

(2) Diberikan sudut lancip ∠XOY. Untuk sembarang ruas garis AB, terdapat titik Y’ pada sinar r(0, Y) sehingga X’Y’> AB; di mana X’Y'

tegak lurus terhadap OY dengan kaki Y' pada sinar r(0, Y). Sebagai ilustrasi lihat Gambar 3.11.



Gambar 3.11 Ilustrasi Aksioma Archimedes

Teorema 14 (Teorema Saccheri-Legendre)

Jumlah ukuran derajat dari ketiga sudut dalam suatu segitiga adalah kurang dari atau sama dengan 180◦ (ditulis $\angle A + \angle B + \angle C \leq 180^o$).

Bukti:

Andaikan bahwa kita memiliki segitiga $\triangle ABC$ di mana $\angle A + \angle B + \angle C > 180^o$. Jadi ada $x \in R^+$ sehingga $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o + x$. Misalkan D titik tengah BC dan E titik unik pada sinar AD sehingga DE ~= AD. Kemudian dengan S-Sd-S, $\triangle BAD = \triangle CED$. Ini membuat $\angle B = \angle DCE$ $\angle E = \angle BAD$. Dengan demikian,

$$\angle A + \angle B + \angle C = (\angle BAD + \angle EAC) + \angle B + \angle ACB$$

$$= \angle E + \angle EAC + (\angle DCE + \angle ACD)$$

$$= \angle E + \angle A + \angle C$$

Jadi, △ABC dan △ACE memiliki jumlah sudut yang sama, meskipun tidak harus kongruen. Perhatikan bahwa ∠BAE + ∠CAE = ∠BAC, jadi ∠CEA + ∠CAE = ∠BAC. Tidak mungkin untuk kedua sudut ∠CEA dan ∠CAE memiliki ukuran sudut lebih besar dari ½∠BAC, jadi setidaknya salah satu sudut memiliki ukuran sudut kurang dari atau sama dengan ½∠BAC. Oleh karena itu, ada segitiga △ACE sehingga jumlah sudutnya adalah 180◦+ x tetapi salah satu sudutnya berukuran kurang dari atau sama dengan ½∠A◦. Ulangi konstruksi ini untuk mendapatkan segitiga lain dengan jumlah sudut 180 + x tetapi salah satu sudutnya berukuran kurang dari atau sama dengan $\frac{1}{4}$∠A. Sekarang ada n ∈ Z+ sehingga $\frac{1}{2^n}$∠A ≤ x, dengan sifat Archimedean dari bilangan real. Jadi, setelah sejumlah iterasi terbatas dari konstruksi di atas, kita memperoleh segitiga dengan jumlah sudut 180◦ + x di mana salah satu sudut berukuran kurang dari atau sama dengan $\frac{1}{2^n}$∠A ≤ x. Maka dua sudut lainnya harus dijumlahkan menjadi angka yang lebih besar dari 180◦ yang bertentangan dengan Corrolary 4. (Terbukti)■

3.13 *The Defect of a Triangle* (Cacat Segitiga)

Karena jumlah sudut segitiga apa pun dalam geometri netral tidak lebih dari 180◦, kita dapat menghitung selisih antara angka 180 dan jumlah sudut segitiga tertentu.

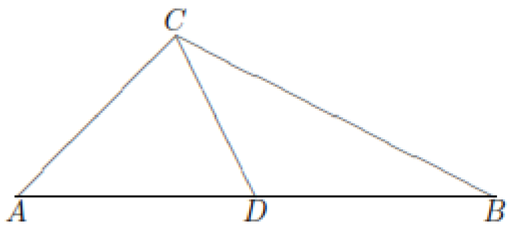
Definisi 23

The Defect of a Triangle △ABC *adalah bilangan* δ(ABC) = *defect*(△ABC) = 180º − (∠A + ∠B + ∠C).

Dalam geometri Euclidean memiliki segitiga yang *defect*-nya nol. Apakah ini selalu terjadi? Teorema Saccheri-Legrendre menunjukkan bahwa mungkin tidak demikian. Apakah defect segitiga dipertahankan? Artinya, jika kita memiliki satu segitiga defect, apakah semua sub dan super-segitiga rusak? Dengan defect, yang kami maksud adalah segitiga *defect* positif.

Teorema 15 (Penjumlahan *Defect*)

Misalkan $\triangle ABC$ adalah sembarang segitiga dan misalkan D adalah titik antara A dan B. Maka $\delta(ABC) = \delta(ACD) + \delta(BCD)$.



Bukti:

Karena sinar $\overrightarrow{CD}$ terletak di $\angle ACB$, kita tahu itu

$\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD$, dan karena $\angle ADC$ dan $\angle BDC$ adalah sudut tambahan, $\angle ADC + \angle BDC = 180^\circ$. Karena itu,

$$\begin{aligned}\delta(ABC) &= 180^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C)\\ &= 180^\circ - (\angle A + \angle B + \angle ACD + \angle BCD)\\ &= 180^\circ + 180^\circ - (\angle A + \angle B + \angle ACD + \angle BCD + \angle ADC + \angle BDC)\\ &= \delta(ACD) + \delta(BCD). \blacksquare\end{aligned}$$

Corollary 5

$\delta(ABC) = 0$ jika dan hanya jika $\delta(ACD) = \delta(BCD) = 0$.

Catatan 1: Persegi panjang adalah segiempat yang semua sudutnya siku-siku. Belum dapat dibuktikan tentang ada atau tidaknya persegi panjang dalam Geometri Netral. Meskipun demikian, hasil berikut ini sangat berguna.

Teorema 20

Jika ada segitiga dengan *defect* 0, maka ada persegi panjang. Jika ada persegi panjang, maka setiap segitiga memiliki *defect* 0.

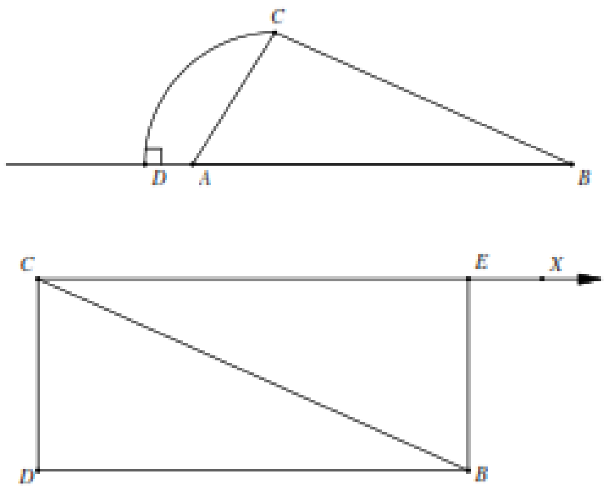
Pertama-tama, mari kita uraikan buktinya dalam lima langkah.

a) Buatlah segitiga siku-siku yang memiliki defect 0.
b) Dari segitiga siku-siku defect 0, buatlah persegi panjang.
c) Dari satu persegi panjang, buatlah persegi panjang besar secara sembarang.
d) Buktikan bahwa semua segitiga siku-siku defect 0.
e) Jika setiap segitiga siku-siku memiliki defect 0, maka setiap segitiga memiliki defect 0.

Setelah menguraikan buktinya, masing-masing langkah relatif mudah.

a) Buatlah segitiga siku-siku yang memiliki defect 0. Asumsikan bahwa kita memiliki segitiga $\triangle ABC$ sehingga $\delta(ABC) = 0$. Kita dapat mengasumsikan bahwa $\triangle ABC$ bukan segitiga siku-siku, atau kita sudah selesai. Sekarang, setidaknya dua sudut lancip karena jumlah sudut dari dua sudut selalu kurang dari 180◦. Mari kita asumsikan bahwa $\angle A$ dan $\angle B$ adalah akut. Juga, misalkan D kaki C pada garis

AB. Kita perlu tahu bahwa D terletak di antara A dan B. Asumsikan tidak; yaitu, asumsikan bahwa A terletak di antara D dan B. Ini berarti bahwa ∠CAB berada di luar △CAD dan, oleh karena itu, ∠A > ∠CDA = 90◦. Ini membuat A tumpul, sebuah kontradiksi. Demikian pula, jika B terletak di antara A dan D, kita dapat menunjukkan bahwa ∠B tumpul. Jadi, kita harus memiliki D yang terletak di antara A dan B. Hal ini membuat △ADC dan △BDC segitiga siku-siku. Berdasarkan Akibat Akibat 1 di atas, karena △ABC memiliki defect 0, masing-masing memiliki defect 0, dan kita memiliki dua segitiga siku-siku dengan defect 0. Lihat Gambar 3.13.

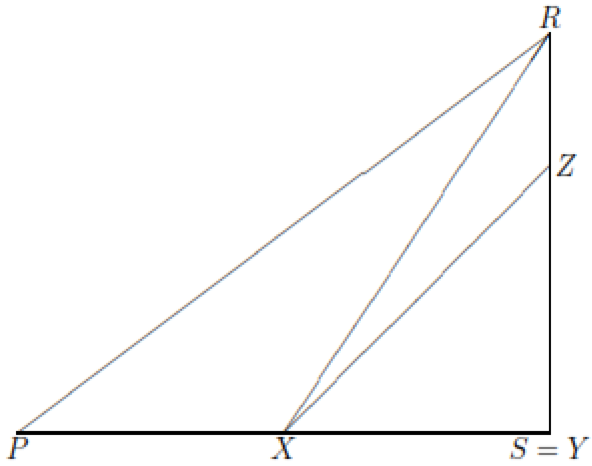


Gambar 3.12 Segitiga dengan Defect 0

b) Dari segitiga siku-siku defect 0, buatlah persegi panjang. Ini adalah segitiga siku-siku defect 0. Ambil △CBD dari Langkah 1, yang memiliki sudut siku-siku di D. Ada sinar unik CX di sisi berlawanan BC dari D sehingga ∠DBC ≅ ∠BCX. Lalu ada satu titik unik E pada sinar CX sehingga CE ≅ BD. Jadi, △CDB ~= △BEC oleh S-Sd-S. Maka ∠BEC = 90◦ dan △BEC juga harus memiliki defect 0. Sekarang, jelas, karena defect (△CDB) = 0 ∠DBC + ∠BCD = 90◦ dan, karenanya, ∠ECB + ∠BCD = ∠ECD = 90◦. Demikian juga, ∠EBD = 90◦ dan □CDBE adalah persegi panjang.

c) Dari satu persegi panjang, buatlah persegi panjang besar yang sewenang-wenang. Diberi sembarang segitiga siku-siku $\triangle XY\,Z$, kita dapat membuat persegi panjang $\square PQRS$ sehingga $PS > XZ$ dan $RS>YZ$. Dengan menerapkan Aksioma Archimedes, kita dapat menemukan bilangan n sehingga kita menyalin ruas BD pada persegi panjang di atas pada sinar ZX untuk mencapai titik P sehingga $n \cdot BD \cong PZ$ dan X terletak di antara P dan Z. Kita membuat n salinan dari persegi panjang kita duduk di $PZ = PS$. Ini memberi kita persegi panjang dengan simpul P, Z = S, Y, dan beberapa titik lainnya. Sekarang, dengan menggunakan teknik yang sama, kita dapat menemukan bilangan m dan titik R pada sinar ZY sehingga $m.BE \cong RZ$ dan Y terletak di antara R dan Z. Sekarang, membuat salinan m persegi panjang, memberi kita persegi panjang yang diperlukan berisi $\triangle XYZ$.

d) Buktikan bahwa semua segitiga siku-siku memiliki defect 0. Biarkan $\triangle XY\,Z$ menjadi sembarang segitiga siku-siku. Pada Langkah 3 kita dapat menyematkannya dalam persegi panjang $\square PQRS$. Karena $\triangle PQR \sim= \triangle P\,SR$, kita memiliki $\angle RP\,S + \angle P\,RS = 90^\circ$ dan kemudian, $\triangle PRS$ memiliki cacat 0. Dengan menggunakan *Corollary* dan Teorema Segitiga Defect kita menemukan defect $(\triangle RXY) = 0$ sehingga, cacat $(\triangle XY\,Z) = 0$. Oleh karena itu, setiap segitiga memiliki defect 0.



Gambar 3.13 segitiga siku-siku memiliki defect 0

e) Jika setiap segitiga siku-siku memiliki cacat 0, maka setiap segitiga memiliki defect 0. Seperti pada langkah pertama, gunakan kaki sebuah titik untuk menguraikan segitiga menjadi dua segitiga siku-siku, yang masing-masing memiliki defect 0, dari Langkah d. Jadi, segitiga asli memiliki defect 0. Konsekuensinya: Jika ada segitiga dengan defect positif, maka semua segitiga memiliki defect positif.

Latihan 7

1. Buktikan bahwa dalam segitiga △ABC sudut yang lebih besar terletak di hadapan sisi yang lebih besar dan sisi yang lebih besar terletak di depan sudut yang lebih besar; yaitu, AB > BC jika dan hanya jika ∠C > ∠A.
2. Diberikan △ABC dan △A'B'C', jika AB ≅ A'B' dan BC ≅ B'C', maka ∠B < ∠B' jika dan hanya jika AC < A'C'. Buktikan!
3. Jika A, B, dan C adalah tiga titik takkolinear, maka |AC| < |AB| + |BC| (Pertidaksamaan Segitiga). Buktikan!
4. Jika ada segitiga dengan defect positif, maka semua segitiga memiliki defect positif. Buktikan!

BAB IV
STRUKTUR AKSIOMATIK GEOMETRI LOBACHEVSKY (Pendekatan Etnomatematika)

Disusun oleh
Khathibul Umam Zaid Nugroho, S.Kom., M.Pd.
Prof. Dr. YL. Sukestiyarno, M.S.
Dr. Sugiman, M.Si.
Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si.

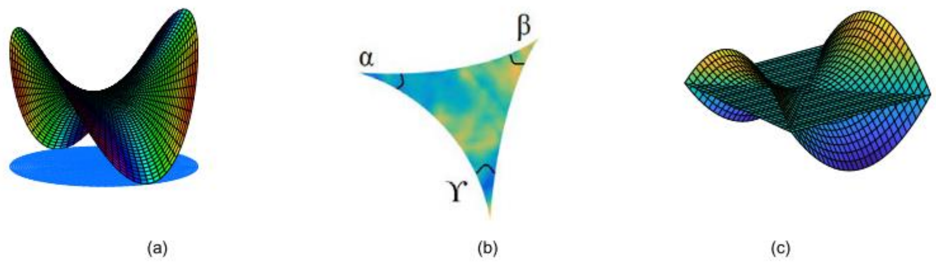
BAB IV

STRUKTUR AKSIOMATIK GEOMETRI LOBACHEVSKY

Geometri Lobachevsky yang juga disebut dengan Geometri Hiperbolik dikembangkan oleh ahli matematika Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) dan János Bolyai (1802-1860). Pengembangannya dimulai dengan mengkritsi tentang postulat kesejajaran Euclid (postulat kelima) (Márquez Díaz, 2018). Bolyai, juga Lobachvesky memberikan pendekatan berbeda dengan Euclid, yaitu dari titik di luar garis, ada garis yang tak terhingga banyaknya yang dapat ditarik sejajar dengan garis yang diberikan. Awalnya, kontribusi ini diremehkan oleh komunitas matematika, sehingga dilupakan selama beberapa tahun.


Nikolai Ivanovich Lobachevsky

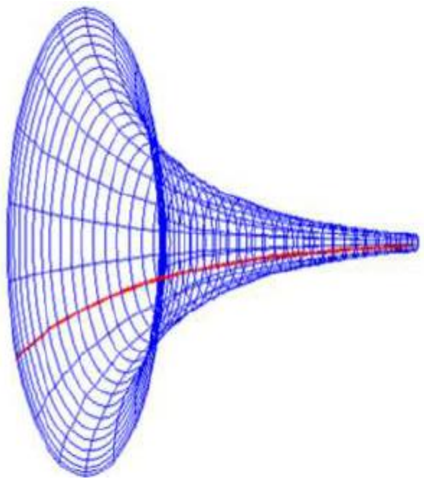
Teori yang dikembangkan oleh Lobachevsky, dinamai dengan "Theory of parallels". Itu merupakan sistem yang berbeda dengan Geometri Euclid (Coolidge, 2008). Dalam geometri Lobachevsky, mengawali teori kesejajaran dengan postulatnya adalah “Diberi garis dan titik di luarnya, setidaknya terdapat dua kesejajaran dengan garis yang melalui titik tersebut. Hal ini menunjukkan bahwa jumlah sudut segitiga lebih kecil dari 180^o. Ini hal sangat berbeda dengan sifat dalam Geometri Euclidean, yaitu jumlah sudut segitiga sama persis dengan 180^o. Faktor skala adalah fundamental untuk jenis penegasan ini, karena jika seorang pengamat berada di bidang hiperbolik, dia tidak akan melihat adanya perbedaan antara itu dan bidang Euclidean. Gambar 4.1 mengilustrasikan bidang hiperbolik, diwakili oleh geometri tipe pelana. Geometri ini khususnya, adalah salah satu pendekatan dari apa yang kemudian disebut sebagai geometri lokal alam semesta, yang dicirikan bahwa kelengkungan yang terakhir adalah negatif, suatu aspek yang akan dibahas nanti.



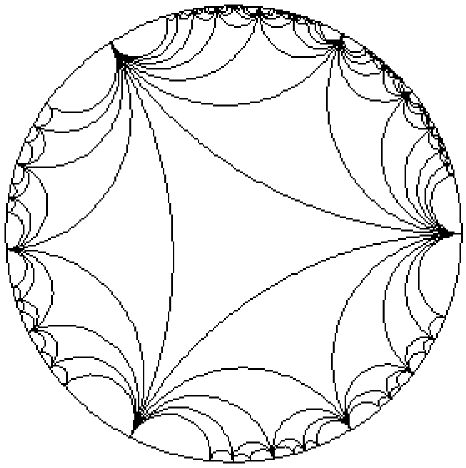
Gambar 4.1 Representasi Spasial Geometri Lobachevsky

(Márquez Díaz, 2018)

Representasi spasial Geometri Lobachevsky untuk Gambar 2.3 mewakili bidang hiperbolik dari geometri Bolyai-Lobachevsky, dari mana segitiga dengan geometri hiperbolik digambar di kursi Gambar 4.1(b), yang jumlah sudut α, β dan ϒ kurang dari pada 180^o. Jika diperhatikan bahwa di bawah bidang hiperbolik adalah bidang Euclidean, dengan jumlah sudutnya tepat 180^o. (c) Saat membuat superposisi antara bidang Euclidean dan bidang hiperbolik, perbedaannya terkenal, karena saat memproyeksikan segitiga pada bidang dan permukaan lengkung, jumlah total sudut pada kedua bidang tidak akan sama dengan 180^o (Márquez Díaz, 2018). Representasi Geometri Lobachevsky dapat dilihat pada Gambar 4.2 (a) dan (b).



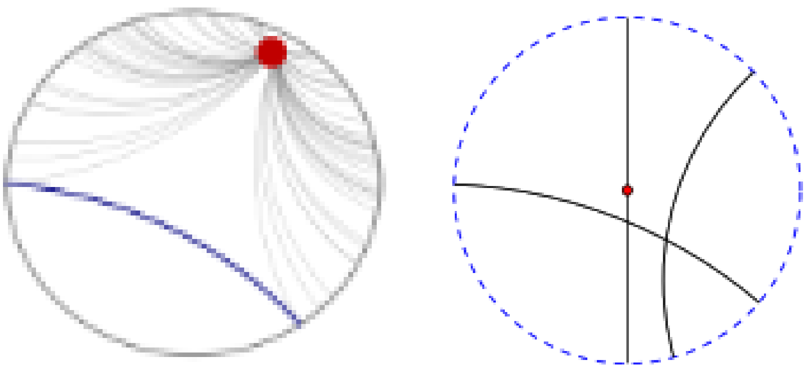
Gambar 4.2 (a) Pseudosphere
(https://www.researchgate.net/figure)



Gambar 4.2 (b) Poincaré disk
https://mathworld.wolfram.com/PoincareHyperbolicDisk.html)

Berdasarkan Gambar 4.2(a) merupakan representasi spasial grafis dari jenis geometri hiperbolik yaitu pseudosfer yang dibangun di atas ruang melengkung; yang memainkan peran yang sangat penting dalam menjelaskan teori umum relativitas Einstein. Pseudosfer diperoleh dari revolusi permukaan ketika lingkungan traksi memutar asimtotnya. Rotasi ini menghasilkan kelengkungan Gauss negatif yang konstan, di mana setiap titik di permukaan adalah titik sadel. Metrik di *pseudosphere* dapat ditransfer ke unit disk dan singularitas pseudosphere sesuai dengan horoskop di bidang hiperbolik. Sedangkan Gambar 4.2(b) adalah cakram Poincaré, itu adalah menghasilkan n proyeksi, dan menampilkan karakteristik fraktal secara keseluruhan. Cakram Poincaré terdiri dari piringan terbuka yang garis lurusnya adalah untaian Euclidean yang ujungnya berada di garis depan piringan (Márquez Díaz, 2018).

Geometri hiperbolik berbeda dari geometri Euclidean dengan postulat sejajar (Aksioma ke-5) yaitu (1) Garis lurus dapat ditarik antara dua titik. (2) Setiap garis lurus yang diakhiri dapat diperpanjang tanpa batas waktu. (3) Sebuah lingkaran dapat digambar dengan sembarang titik dan jari-jari. (4) Semua sudut siku-siku sama. (5) Pada bidang datar, jika diberi garis dan tidak ada titik di atasnya, paling banyak satu garis yang sejajar dengan garis tersebut dapat ditarik melalui titik tersebut (Qu, 2022). Dalam geometri hiperbolik, ada jumlah garis tak terhingga yang sejajar dengan garis yang diberikan melalui titik tersebut. Himpunan garis geodesik dari titik merah ke batas bola Poincare yang sejajar dengan garis biru lihat Gambar 4.4. Juga, dapat dilihat melalui youtube dengan link: https://www.youtube.com/watch?v=zQo_S3yNa2w.



Gambar 4.3 Bola Poincare Garis-garis yang Sejajar (Qu, 2022)

3.1 Aksioma kesejajaran Lobachevsky

Sesuai uraian di atas, di awal tahun 1800-an James Boylai, Carl Friedrich Gauss dan Nikolai Lobashevsky secara mandiri mengambil langkah berikutnya. Alih-alih mencoba menetapkan postulat sejajar sebagai teorema dalam geometri Euclid, mereka mendefinisikan geometri baru berdasarkan empat postulat Euclid pertama ditambah alternatif untuk postulat sejajar:

Aksioma 4.1 (Bolyai–Lobachevsky/Postulat Kesejajaran Hiperbolik)

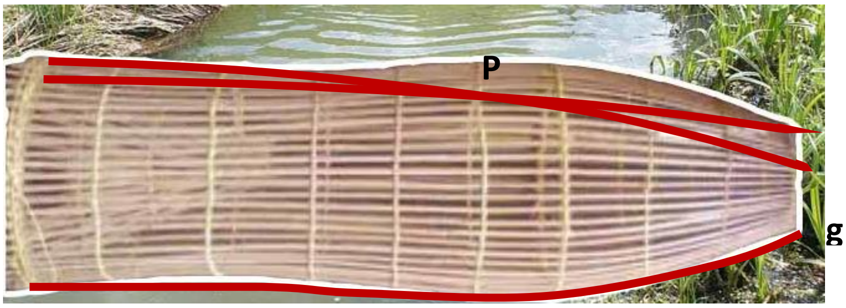
Diberikan sebuah garis dan sebuah titik yang tidak berada pada garis tersebut, terdapat paling sedikit dua garis sejajar yang melalui titik tersebut.

4.1.1 Aksioma kesejajaran Lobachevsky dalam Etnomatematika

Dalam merepresentasikan Aksioma Kesejajaran Lobachevsky secara spasial, maka secara teoretik terdapat lima elemen spasial geometri Lobachevsky. Lima elemen tersebut adalah sebagai berikut.

1) Visualisasi Etnomatematika

Secara visualisasi kesejajaran garis pada Geometri Lobachevsky berdasarkan benda-benda budaya lokal dapat direpresentasikan sebagaimana Gambar 4.4.

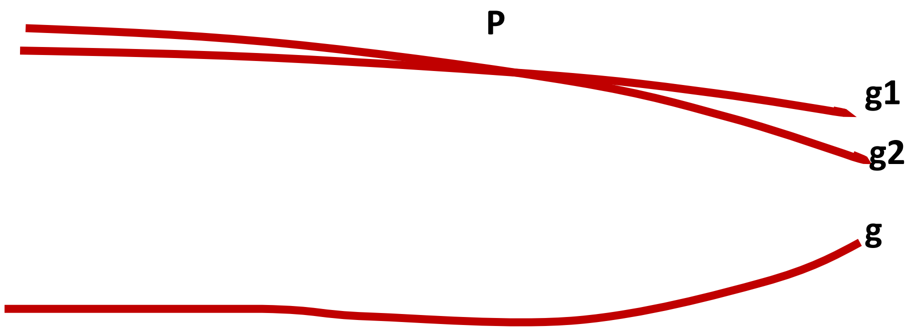


Gambar 4.4 Visualisasi Kesejajaran Garis pada "Bubu"

Berdasarkan Gambar 4.3 bahwa pada alat tangkap ikan yang ada di daerah Bengkulu yaitu "bubu", maka melalui titik P yang tidak berada pada garis g, maka ada dua garis lain yang sejajar dengan g.

2) Visualisasi Mental

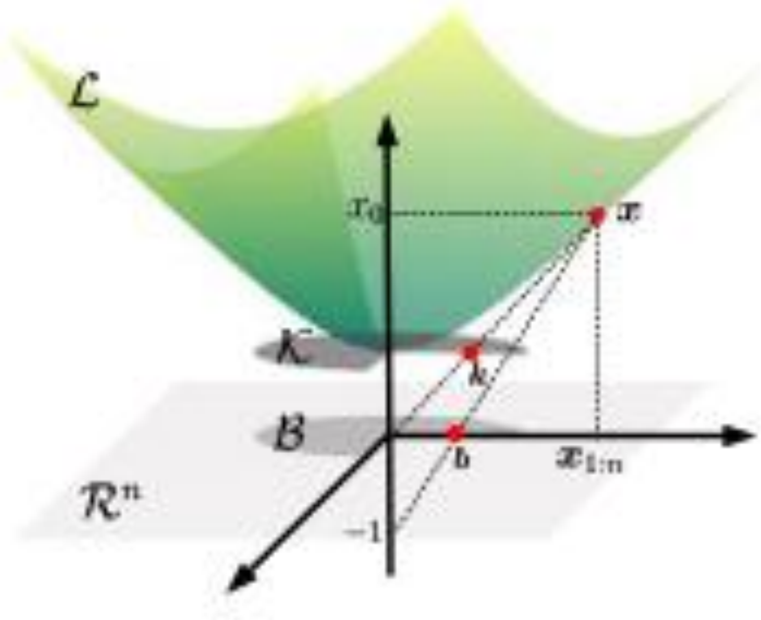
Hasil penelitian menunjukkan bahwa berdasarkan rekaman wawancara, subyek mampu mengambil tindakan dengan menginisialisasi proses memindahkan sketsa garis ke dalam dokumen. Kemudian, subjek mampu mengenkapsulasi proses-proses tersebut menjadi objek garis Kesejajaran Garis. Selain itu, siswa dapat menyimpulkan bahwa terdapat banyak garis yang sejajar dengan g di atas kertas kerjanya (Herawaty, Khrisnawati, Widada, & Mundana, 2020). Itu dapat divisualisasikan dalam bidang datar sebagaimana pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Visualisasi Aksioma Kesejajaran Lobachevsky

Gambar 4.5 adalah visualisasi Aksioma Kesejajaran Lobachevsky berdasarkan suatu budaya masyarakat Bengkulu dan sekitarnya mengenai alat tangkap yang disebut "bubu". Menurut Widada & Herawaty (2022b), mahasiswa menggunakan lembar kegiatan untuk memicu proses kognitif mereka dalam memahami dan mencapai prinsip garis sejajar. Pengapian yang diharapkan adalah aksioma garis sejajar Lobachevsky. Siswa mengalami peningkatan proses kognitif tentang geometri Lobachevsky berdasarkan budaya Bubu setempat. Ini adalah cerminan dari kemampuan tingkat tinggi. Mahasiswa-mahasiswa tersebut dapat membangun fitur garis sejajar yang biasanya tidak mereka temukan dalam pelajaran regular.

Dalam Geometri Lobachevsky direpresentasikan titik-titik dalam ruang hiperbolik dengan model geometri sebagai sistem koordinat secara umum adalah dua model. Dua model tersebut adalah model Lorentz dan model bola Poincar´e (disingkat model Poincare) (Qu, 2022). Model Pincare dapat dilihat Gambar 4.3, sedangkan visualisasi model Lorentz dapat dilihat pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6 Visualisasi model Lorentz (Qu, 2022)

Menurut (Qu, 2022), visualisasi Model Lorentz adalah lembar atas hiperboloid 2 lembar. Secara numerik lebih stabil dan ruang yang cukup untuk pengoptimalan. Hal ini merupakan model-model visual mental dari Geometri Lobachevsky.

3) Relasi ikonik

Berdasarkan visualisasi Kesejajaran Geometri Lobachevsky Gambar 4.5, maka pernyataan dapat direpresentasikan dalam suatu hubungan berdasarkan visualisasi mental adalah sebagai berikut.

"Melalui titik P di luar garis g ada minimal dua garis lain yang sejajar dengan garis g." (Aksioma Kesejajaran Lobachevsky)

Dengan demikian, dalaml relasi ikonik Geometri Lobachevsky itu adalah suatu pernyataan tentang kesejajaran garis sebagai representasi ikonik.

4) Relasi simbolik

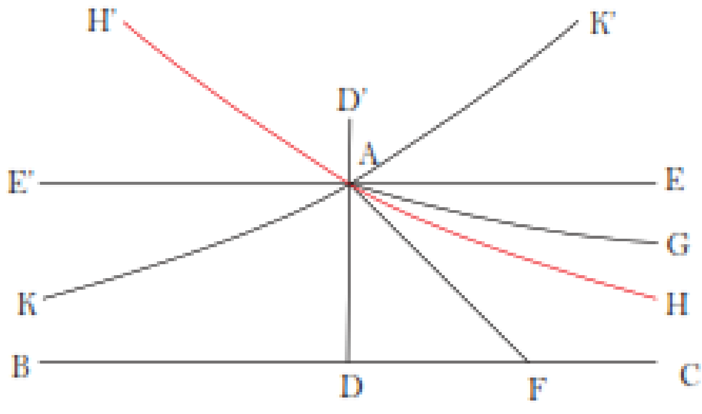
Berdasarkan pernyataan tentang *Aksioma Kesejajaran Lobachevsky*, maka pernyataan tersebut dapat direpresentasikan secara simbolik. Representasi tersebut adalah sebgai berikut:

“(Ǝ g) & (Ǝ P∉ g), (Ǝ g1 & g2) (g1∩g2 =P) ∋ g1//g & g2//g.”

Pernyataan tersebut adalah simbolisasi dari pernyataan yang telah diungkapkan sebelumnya yaitu “melalui titik P di luar garis g, ada garis g1 dan garis g2 yang sejajar dengan g”. Itu adalah hubungan secara simbolik antar titik dan garis-garis pada Geometri Lobachevsky berdasarkan visualisasi mental.

3.1.2 Membangun Geometri Lobachevsky berdasarkan Etnomatematika

Berdasarkan etnomatematika, scara formal, kesejajaran Lobachevsky dapat direpresentasikan dalam Gambar 4.7.



Gambar 4.7 Representasi Garis-garis yang Sejajar dengan g = (BDC) (Braver, 2007)

Berdasarkan aksioma kesejajaran Lobachevsky dan Gambar 4.7, berakibat secara logis bahwa “melalui titik A di luar garis g = (BDC), terdapat takhingga banyaknya garis yang sejajar dengan garis g. Menurut Braver (2007) bahwa garis-garis lain yang berada di antara dua sudut siku-siku yang menghadap BC, garis-garis yang terletak di antara kesejajaran, yaitu garis-garis di dalam sudut HAK = $2\prod(p)$ termasuk dalam kelas garis potong. Di sisi lain, yang terletak di antara salah satu sejajar dan EE' (yaitu yang berada di dalam salah satu dari dua sudut EAH = $\pi/2 - \prod(p)$ atau E´AK = $\pi/2 - \prod(p)$) seperti AG, termasuk ke kelas garis tidak berpotongan. Demikian pula, di sisi lain garis EE´, perpanjangan AH´ dan AK´ dari AH dan AK sejajar dengan BC; yang lainnya adalah garis potong jika terletak pada sudut K'AH', tetapi merupakan garis bukan potong jika terletak pada salah satu sudut K'AH' atau H'AE'. Konsekuensinya, dengan anggapan bahwa $\prod(p) = \pi/2$, garis bisa hanya berupa garis potong atau sejajar. Namun, jika diasumsikan bahwa $\prod(p) < \pi/2$, maka kita harus menerima dua sejajar, satu di setiap sisi. Selain itu, di antara baris yang tersisa, harus dibedakan antara yang dipotong dan yang tidak dipotong. Di bawah salah satu asumsi, tanda sejajarisme yang membedakan adalah bahwa garis menjadi garis potong ketika mengalami deviasi terkecil ke arah sisi di mana garis sejajar itu berada. Jadi, jika AH sejajar dengan DC, maka terlepas dari seberapa kecil sudut HAF, garis AF akan memotong DC.

Oleh karena itu, Lobachevsky mengajukan *The Theory of Parallels* (TP) Braver (2007), yaitu terdapat 37 TP yang dibangun oleh Lobachevsky (Braver, 2007). 37 TP tersebut adalah TP 1-15 membahas tentang *Preliminary Theorems*, TP 16 membahas tentang *The Definition of Parallelism*, TP 17 membahas *Parallelism is Well-Defined*, TP 18 membahas *Parallelism is Symmetric*, TP 19 tentang *The Saccheri-Legendre*, Theorem TP 20 adalah *The Three Musketeers Theorem*, TP 21 adalah *Lemma* Kecil, TP 22 adalah tentang Tegak Lurus secara Umum, TP 23 adalah tentang Fungsi $\prod$, TP 24 adalah tentang Konvergensi Kesejajaran, TP 25 adalah tentang Sejajarisme Transitif, TP 26 adalah tentang Segitiga Bulat, TP 27 adalah tentang Sudut

Padat, TP 28 adalah tentang Teorema Prisma, TP 29 adalah tentang Lingkaran atau Kekurangannya (Bagian I), TP 30 lanjutan tentang Lingkaran atau Kekurangannya (Bagian II), TP 31 adalah tentang Definisi Horocycle, TP 32 mengenai Horocycle sebagai Batas-Lingkaran, TP33 tentang Horocycles Konsentris, TP 34 tentang Horosfer, TP 35 tentang Trigonometri Bola, TP 36 tentang Rumus Dasar, dan TP 37 membahas Trigonometri Bidang.

Dengan demikian, secara formal dalam Geometri Lobachevsky terdapat akibat wajar (*corollary*) dari pernyataan tentang kesejajaran garis-garis pada Geometri Lobachevsky yaitu melalui titik P di luar garis g terdapat tak berhingga garis lain yang sejajar dengan g. Pernyataan ini dibuktikan pada bagian berikut ini.

3.2 Teorema-teorema Kesejajaran dalam Geometri Lobachevsky dan Pembuktiannya

Sistem aksiomatik yang dihasilkan dikenal sebagai geometri hiperbolik. Konsistensi dibuktikan pada akhir 1800-an oleh Beltrami, Klein, dan Poincar'e, yang masing-masing menciptakan model geometri hiperbolik dengan mendefinisikan titik, garis, dll., dengan cara baru. Model yang paling sederhana adalah cakram Poincar´e, dinamai dari Henri Poincar´e meskipun pertama kali diusulkan oleh Beltrami. Definisi dari *Piringan Poincar'e* adalah sebagai berikut.

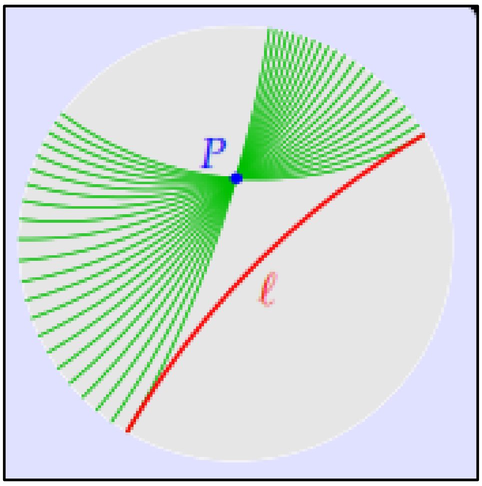
Definisi 4.1

Piringan Poincar'e adalah bagian dalam lingkaran satuan:

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

Garis hiperbolik adalah diameter atau busur lingkaran yang bertemu dengan lingkaran satuan pada sudut siku-siku.

Dalam gambar kita memiliki garis hiperbolik g dan titik P: juga ditarik beberapa garis hiperbolik sejajar dengan g melalui P. Titik-titik pada lingkaran batas disebut titik omega: ini tidak ada dalam cakram Poincar´e dan pada dasarnya adalah 'titik-titik tak terhingga'. (Lihat Gambar 4.8)



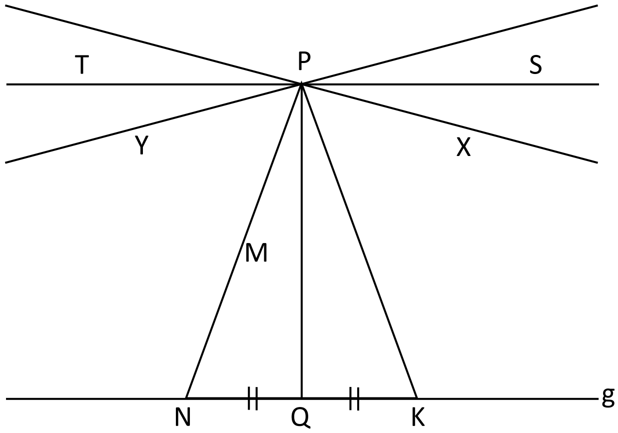
Gambar 4.8 Lingkaran Satuan (Poincare)

Corollary Kesejajaran Lobachevksy

Dari titik P di luar garis g dan tak hingga banyaknya garis yang sejajar dengan garis g.

Bukti:

Pandang illustrasi pada Gambar 4.9. Misalkan diberikan titik P dan garis g dengan P ∉ g. Perhatikan Gambar 4.9. Akan dibuktikan bahwa melalui titik P ada takhingga garis yang sejajar dengan g. Hal itu cukup dibuktikan bahwa m(∠XPQ = m(∠YPQ) dan (∠XPQ & ∠YPQ) tumpul.



Gambar 4.9 Kesejajaran Garis-garis

(1) Andaikan $m(\angle \text{YPQ}) > m(\angle \text{XPQ})$ maka ada sinar $\overrightarrow{\text{PM}}$ memotong g di N dan $\angle \text{YPQ} \simeq \angle \text{MPQ}$. Ambil titik K dengan (NQK) sedemikian $\overline{\text{NQ}} = \overline{\text{KQ}}$ maka menurut aksioma (S-Sd-S) $\triangle Q\text{NP} \simeq \triangle \text{QKP}$. Akibatnya diperoleh $m(\angle\text{MPQ}) = m(\angle\text{KPQ}) = \text{m}(\angle\text{XPQ})$, maka haruslah $\overline{\text{PX}}$ dan $\overline{\text{PK}}$ berimpit. Hal itu mustahil karena $\overline{\text{PX}}$ tidak memotong g, sehingga pengandaian $\text{m}(\angle \text{YPQ}) < \text{m}(\angle \text{XPQ})$ adalah salah. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $\text{m}(\angle \text{YPQ}) \nless \text{m}(\angle \text{XPQ})$. Jadi yang benar adalah $\angle \text{XPQ} \simeq \angle \text{YPQ}$ atau $m(\angle \text{XPQ}) = \text{m}(\angle \text{YPQ})$. ….(1)

(2) Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\angle \text{YPQ}$ dan $\angle \text{XPQ}$ sudut lancip. Andaikan $\angle \text{XPQ}$ & $\angle \text{YPQ}$ sudut siku-siku, maka harus XPY segaris, padahal XPY tidak segaris. Jadi $\angle \text{XPQ}$ & $\angle \text{YPQ}$ bukan sudut siku-siku ➔ $\angle\text{XPQ} \neq 90^{o}$ dan $\angle\text{YPQ} \neq 90^{o}$…. (2)

(3) Andaikan $\angle \text{XPQ}$ dan $\angle \text{YPQ}$ sudut tumpul atau $\angle\text{XPQ} > 90^{o}$ dan $\angle\text{YPQ} > 90^{o}$, maka berakibat bahwa garis $\overleftrightarrow{\text{TS}}$ yang tegak lurus PQ di P dan dimuat oleh d ($\angle$ XPY), hal ini bertentangan dengan $\overleftrightarrow{\text{TS}}$ sejajar g. Berarti pengadaian $\angle\text{XPQ} > 90^{o}$ dan $\angle\text{YPQ} > 90^{o}$ salah, haruslah $\angle$XPQ dan $\angle$YPQ bukan sudut tumpul. ……………… (3)

Berdasarkan (2) dan (3) disimpulkan bahwa $\angle$XPQ dan $\angle$YPQ adalah sudut lancip. …………………………… (4)

Berdasarkan (1) dan (4) maka $m(\angle XPQ) = m(\angle YPQ)$ dan kedua sudut tersebut adalah sudut lancip, akibatnya $\overleftrightarrow{TS}$ //g, $\overleftrightarrow{YP}$//g, dan $\overleftrightarrow{XP}$//g, dan masih banyak lagi garis-garis lainnya yang melalui titik P yang sejajar dengan g.

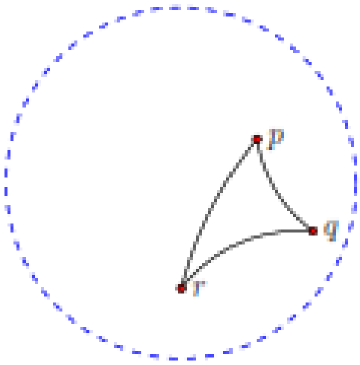
Kesimpulannya adalah ada tak hingga banyaknya garis yang melalui P yang sejajar g.■

3.3 Teorema-teorema tentang segitiga dalam Geometri Lobachevsky

Bedasarkan budaya lokal yaitu kue lupis sebagai media pembelajaran, dapat ditemukan salah satu sifat segitiga dalam Geometri Lobachevsky. Itu adalah jumlah besar sudut dalam suatu segitiga. Perhatikan representasi segitiga yang diperoleh dari keliling kue Lupis. Segitiga tersebut diberi nama untuk setiap sudutnya menjadi ΔABC. ΔABC terbentuk dari tiga ruas garis, yaitu $AB \cup BC \cup CA$. Namun setiap ruas garis merupakan ruas garis yang melengkung ke dalam (Widada, Herawaty, Hudiria, et al., 2020), lihat Gambar 4.10.

Gambar 4.10 Segitiga ABC terbentuk dari *Lupis* (Widada, Herawaty, Hudiria, et al., 2020)

Secara empirik diperoleh suatu pernyataan tentang jumlah sudut dalam segitiga secara simbolik. Pernyataan tersebut adalah bahwa $(\angle ABC) + m\ (\angle ACB) + m\ (\angle BAC) < 180^o$ (Widada et al., 2020). Itu memberikan gambaran bahwa sebuah segitiga memiliki jumlah besar sudut-sudut di dalamnya adalah kurang dari 180°. Atau dapat dinyatakan bahwa "jumlah besar sudut dalam segitiga adalah kurang dari 180°". Sedangkan secara deduktif, segitiga pada Geometri Lobachevsky adalah sebagaimana direpresentasikan pada Gambar 4.11.



Gambar 31
. Gambar Segitiga pada Geometri Hiperbolik
(Hitchman, 2018)

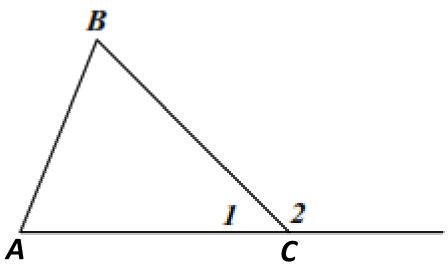
Secara deduktif, ayo kita bahas sifat-sifat segitiga dalam Geometri Lobachevsky.

Lemma 1

Jumlah dua sudut suatu segitiga kurang dari atau sama dengan besar sudut luar yang tidak bersisian dengan keduanya.

Bukti:

Pandang △ ABC.



Akan ditunjukkan bahwa $\angle A + \angle B \leq \angle C2$. ($\angle A + \angle B$ adalah jumlah dua sudut $\triangle ABC$; $\angle C2$ adalah sudut luar yang tidak bersisian dengan $\angle A$ dan $\angle B$).

Berdasarkan teorema Saccheri-Legendre (Teorema 14 Bab II Geometri Netral) diperoleh:

$$\angle A + \angle B + \angle C1 \leq 180^o \text{ .... } (1)$$

Sedangan $\angle C1$ dan $\angle C2$ saling suplemen, berdasarkan Definisi 16 (Bab II Geometri Netral), maka $\angle C1 + \angle C2 = 180^o \Rightarrow \angle C1 = 180^o - \angle C2$ …….. (2)

Berdasarkan (1) dan (2) diperoleh:

$$\angle A + \angle B + 180^o - \angle C2 \leq 180^o$$

$$\angle A + \angle B \leq \angle C2$$

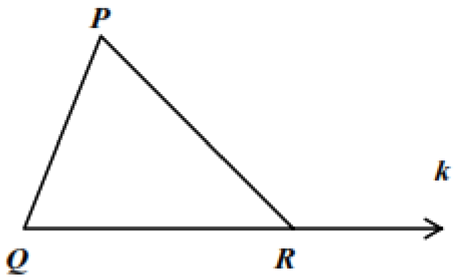
Dengan demikian terbukti bahwa jumlah dua sudut suatu segitiga kurang dari atau sama dengan besar sudut luar yang tidak bersisian dengan keduanya.■

Lemma 2

Misalkan k suatu garis, P suatu titik yang tidak terletak pada garis k, dan Q suatu titik pada k. Misalkan dibuat sisi PQ, maka terdapat sebuah titik R pada garis k di sebelah kanan sisi PQ, sedemikian hingga ∠PRQ sekecil yang diinginkan.

Bukti:

Perhatikan segitiga PQR berikut ini.



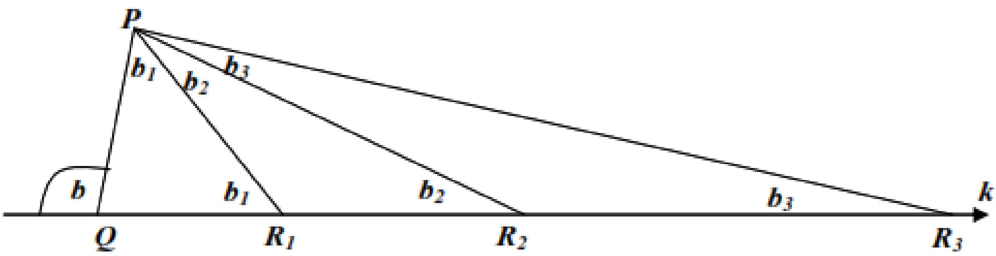
Misalkan a adalah sebarang sudut (tidak dipersoalkan bagaimana kecilnya), akan dibuktikan bahwa terdapat titik R pada garis k, di sebelah kanan sisi PQ sedemikian hingga ∠PRQ < a.

Misal dibuat barisan sudut:

∠PR1Q, ∠PR2Q, ∠PR3Q, ∠PR4Q, …

Setiap sudut tidak lebih besar dari setengah sudut yang mendahuluinya.

Perhatikan gambar berikut ini.



Misalkan R1 adalah titik pada k, di kanan sisi PQ sedemikian hingga QR1 = PQ.

Tarik garis PR1, maka △PQR sama kaki dan ∠QPR1 = ∠PR1Q = b1. Kemudian ada b2, b3 dst.

Misalkan b adalah sudut luar dari △PQR1 pada titik sudut Q, maka berdasarkan Lemma 1, diperoleh:

$$b1 + b1 = 2b1 \leq b$$

Sehingga diperoleh: $b1 \leq ½b$ …………………………………………….. (1)

Kemudian, dibuat R1R2 = PR1, maka △PR1R2 sama kaki. Hal ini beraktibat bahwa: ∠R1PR2 = ∠R1R2P = ∠PR2Q = b2

Berdasarkan Lemma 1, maka diperoleh:

$\angle R1PR2 + \angle R1R2P \leq b1$

$b2 + b2 \leq b1$

$b2 \leq ½b1$ …………………………………………………. (2)

Berdasarkan (1) dan (2) diperoleh:

$b2 \leq ½b1 \leq ½.½b = \frac{1}{2^2}b.$

Analog dari (1) dan (2) yang diulang sebanyak n kali, maka diperoleh titik Rn pada garis k di sebelah kanan sisi PQ sedemikian hingga:

$bn = \angle PRnQ \leq \frac{1}{2^n}b.$

Pilih n yang besar, maka $\frac{1}{2^n}b$ semakin kecil, sehingga $\frac{1}{2^n}b < a$ dengan a sudut kecil yang dikatahui.

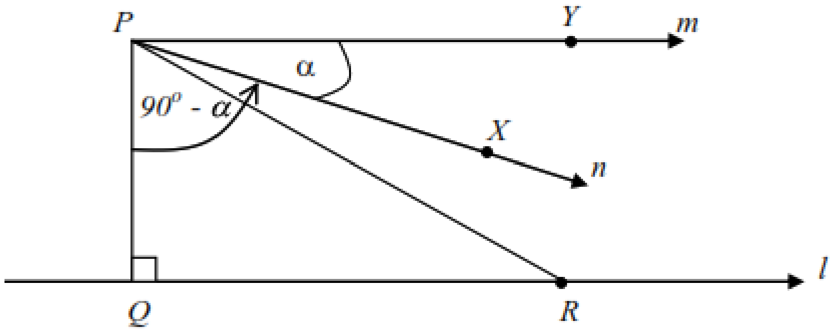
Kesimpulan bahwa dengan memiliki R = Rn, maka Lemma 2 terbukti.■

Teorema 1

Jumlah besar sudut dalam suatu segitiga kurang dari 180º.

Bukti:

Perhatikan gambar Segitiga PQR berikut ini.



Misal titik P di luar garis ℓ dan garis m yang melalui titik P dan sejajar garis ℓ. Kemudian PQ tegak lurus ℓ dan Q serta tegak luruh m di P. Berdasarkan Aksioma Kesejajaran Lobachevsky, ada garis lain yaitu n yang melalui titik P dan sejajar ℓ sehingga terdapat sudut lancip yang terbentuk antara PQ dan garis n. Pilih titik X pada garis n sehingga ∠QPX lancip. Ambil juga titik Y pada garis m sehingga ∠XPY = a maka ∠QPX = 90° – a. Berdasarkan Lemma 2, pilih titik R pada garis ℓ yang sepihak dengan X terhadap PQ sehingga ∠PRQ < a.

Perhatikan Segitiga PQR;

$$\angle PQR = 90^{o}$$

$$\angle QRP = a$$

$\angle RPQ < 90\text{-}a$, hal ini berarti bahwa:

$\angle PQR + \angle QRP + \angle RPQ < 180^{o}$. (Terbukti)■

3.4 Teorema-teorema tentang segiempat dalam Geometri Lobachevsky

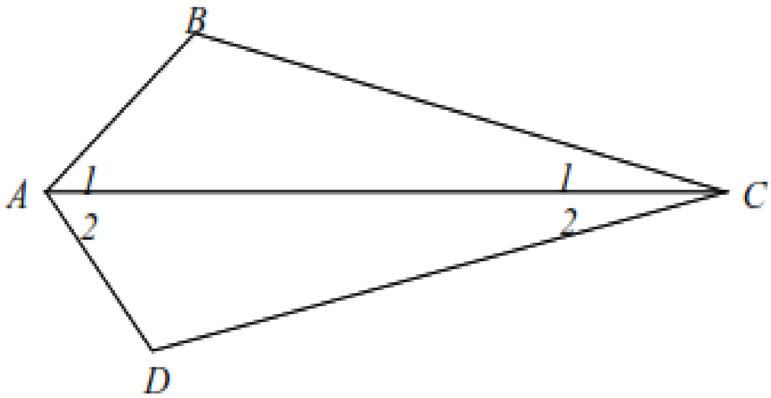
Akibat dari jumlah besar sudut dalam segitiga kurang dari 180° adalah bahwa dalam Geometri Lobachevsky jumlah besar sudut dalam segiempat kuang dari 360°, dan tidak ada persegi panjang (akan dibuktikan dalam bagian ini)(Mujiasih, 2006). Karena persegi panjang tidak ada dalam geometri hiperbolik, maka persegi juga tidak ada dalam geometri ini, karena persegi adalah kasus khusus dari persegi panjang. Dengan demikian, salah satu konstruksi dasar dalam geometri Euclidean dan salah satu langkah dasar dalam Teorema Pythagoras, konstruksi persegi, tidak dapat diimplementasikan dalam geometri hiperbolik (Lodder, 2016).

Corollary 1

Jumlah besar sudut dalam segiempat kurang dari 360^o.

Bukti:

Perhatikan gambar berikut ini.



Berdasarkan gambar tersebut, maka segiempat ABCD terbagun oleh dua segitiga ABC dan segitiga ADC.

Berdasarkan Teorema 1 bahwa jumlah besar sudut dalam segitiga kurang dari 180^o. Berarti bahwa untuk $\triangle$ ABC, maka

$$\angle A1 + \angle B + \angle C1 < 180^o.$$

Kemudian untuk $\triangle$ ADC, maka

$$\angle A2 + \angle D + \angle C2 < 180^o.$$

Sedangkan untuk segiempat ABCD maka jumlah besar sudut dalamnya adalah:

$\angle A1+A2+\angle B+\angle C1+C2+\angle D = (\angle A1+\angle B+\angle C1)+(\angle A2+\angle D+\angle C2)$

$< 180^o + 180^o = 360^o$.

Dengan demikian terbukti bahwa Jumlah besar sudut dalam segiempat kurang dari 360^o.■

Corollary 2

Tidak ada persegi panjang.

Bukti:

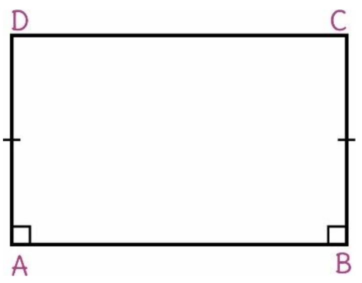
Andaikan ada persegi panjang, berarti berdasarkan Catatan 1 pada BAB II (geometri netral) bahwa persegi panjang adalah segiempat yang semua sudutnya siku-siku. Hal itu bermakna bahwa jumlah besar sudut dari persegi panjang adalah $4x90^o = 360^o$. Hal ini bertentangan dengan Corollary 1 bahwa Jumlah besar sudut dalam segiempat kurang dari 360^o. Sehingga pengandaian ada persegi panjang adalah salah. Kesimpulannya adalah tidak ada persegi panjang.■

Teorema 2

Sudut puncak segiempat Saccheri adalah sama.

Bukti:

Perhatikan segiempat Saccheri ABCD berikut ini.



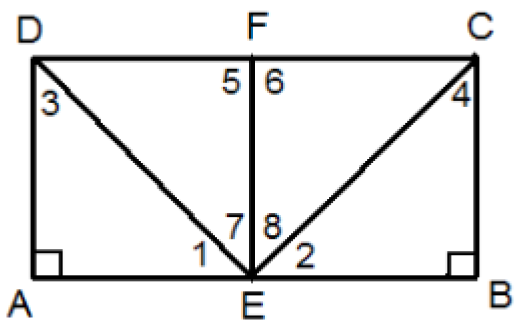
Berdasarkan segiempat ABCD, perhatikan segitiga ABC dan segitiga BAD. Dua segitiga tersebut memenuhi AD=BC, ∠ABC ≅ ∠BAD, dan AB=BA, dan berdasarkan sifat S-Sd-S, maka △ABC ≅ △BAD. Itu berarti bahwa AC = BD. Kemudian perhatikan dua segitiga ADC dan BCD, AC=BD, AD=BC, dan CD=CD, maka berdasarkan sifat S-S-S, maka △ADC ≅ △BCD. Oleh karena itu ∠ADC = ∠BCD. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa sudut puncak segiempat Saccheri adalah sama. ■

Teorema 3

Garis yang menghubungkan titik tengah alas dan puncak segiempat Saccheri masing-masing tegak lurus. Oleh karena itu, alas dan puncak terletak pada garis-garis sejajar yang memiliki garis tegak lurus yang sama.

Bukti:

Perhatikan segiempat Saccheri berikut ini.



Misalkan titik E dan F berturut-turut adalah titik tengah AB dan CD. Segitiga DEA dan CBA kongruen dengan sisi-sudut-sisi (S-Sd-S). Jadi DE = CE, $\angle 1=\angle 2$, dan $\angle 3=\angle 4$. Jadi segitiga CEF dan DEF kongruen dengan sisi-sisi-sisi (S-S-S). Oleh karena itu $\angle 5=\angle 6$, sehingga masing-masing sudut ini adalah sudut siku-siku. Juga, $\angle 7=\angle 8$, dan $\angle 1+\angle 7=\angle 2+\angle 8=90^\circ$. Jadi garis EF tegak lurus garis AB dan CD. Oleh karena itu garis AB dan CD sejajar dan EF adalah garis tegak lurus. Kesimpulannya garis yang menghubungkan titik tengah alas dan puncak segiempat Saccheri masing-masing tegak lurus. Oleh karena itu, alas dan puncak terletak pada garis-garis sejajar yang memiliki garis tegak lurus yang sama.■

Teorema 4

Sudut puncak segiempat Saccheri lancip.

Bukti:

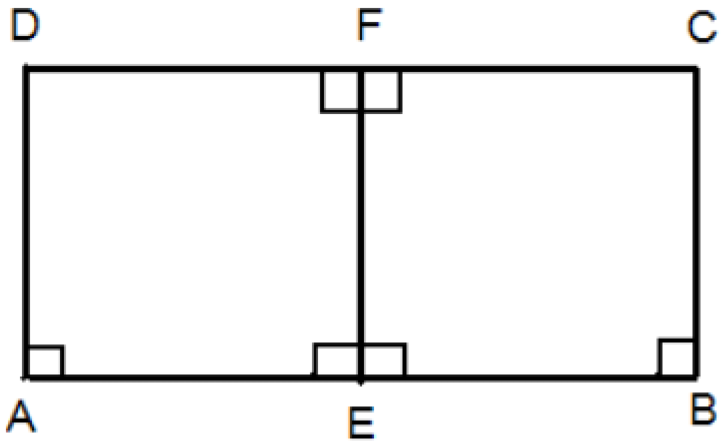
Andaikan sudut puncak segiempat Saccheri tidak lancip, ada dua kemungkinan siku-siku, dan sudut puncaknya tumpul. Misal kemungkinan pertama yang terjadi berarti bahwa jumlah besar sudut dalam segiempat adalah sama dengan 360°. Hal itu bertentangan dengan Corollary 1 bahwa jumlah besar sudut dalam segiempat kurang dari 360°. Berarti tidak mungkin sudut puncaknya siku-siku. Misal kemungkinan kedua yang terjadi yaitu sudut puncaknya tumpul, berarti bahwa jumlah besar sudut dalam segiempat lebih dari 360°, ini juga bertentangan dengan Corollary 1. Kesimpulannya sudut puncak segiempat Saccheri lancip.■

Teorema 5

Dalam segi empat Saccheri, puncaknya lebih panjang dari alasnya dan segmen yang menghubungkan titik tengahnya lebih pendek dari setiap lengan.

Bukti:

Perhatikan gambar di bawah ini.



Misalkan titik E dan F berturut-turut adalah titik tengah alas dan puncak. Maka EF tegak lurus terhadap alas dan puncak dengan Teorema H30. Karena $\angle C$ dan $\angle D$ akut, maka AD > EF pada AEFD segiempat dan BC > EF pada EBCF segiempat. Jadi segmen EF lebih pendek dari masing-masing lengan. Sekarang perhatikan AEFD segiempat yang memiliki lengan AE dan DF. Berdasarkan Teorema H33 bahwa DF > AE. Demikian pula, untuk EBCF segiempat, kita dapatkan FC > EB. Oleh karena itu, menggabungkan dua ketidaksetaraan ini, DF + FC > AE + EB atau DC > AB dan puncaknya lebih panjang dari alasnya. ■

Selanjutnya pahami teorema selanjutnya.

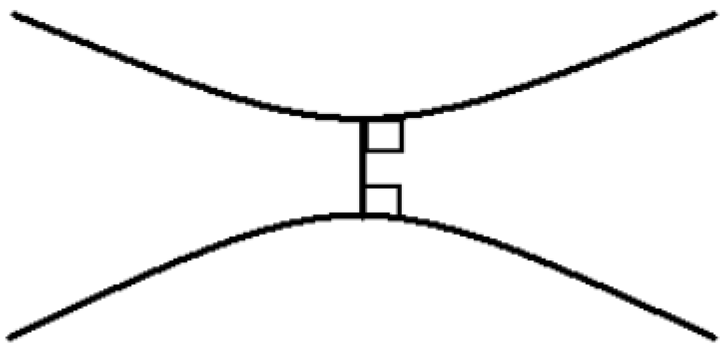
Teorema 6

Jika dua garis sejajar memiliki garis tegak lurus yang sama, maka mereka tidak dapat memiliki garis tegak lurus yang kedua.

Bukti.

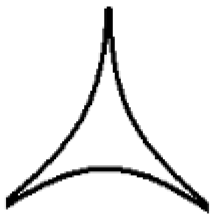
Andaikan dua garis tersebut memiliki dua garis tegak lurus yang sama, maka akan terbentuk persegi panjang. Hal ini kontradiksi dengan Corollary 2. Seharusnya jika dua garis sejajar memiliki garis tegak lurus yang sama, maka mereka tidak dapat memiliki garis tegak lurus yang kedua. ■

Catatan. ***Kita akan mulai mendapatkan beberapa wawasan tentang bagaimana memvisualisasikan garis sejajar dalam geometri hiperbolik. Kita mungkin menganggap garis sejajar dengan tegak lurus umum sebagai "membungkuk" satu sama lain:***



Sehingga segiempat Saccheri adalah seperti berikut ini:

Sehingga kita dapat visualisasikan segitiga, seperti berikut ini:

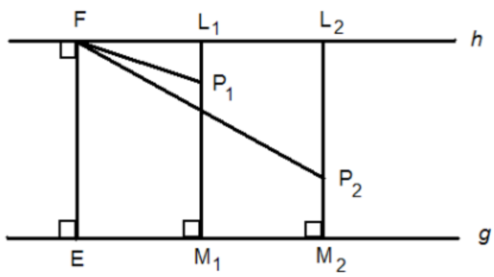


Teorema 7

Diberikan garis apa pun dan titik mana pun yang tidak ada di atasnya, ada banyak garis yang melewati titik yang sejajar dengan garis dan memiliki garis tegak lurus yang sama dengannya.

Bukti:

Perhatikan gambar berikut ini sebagai visualisasi.



Misalkan g adalah garis dan F titik tidak di atasnya. Jika E adalah proyeksi F pada g dan garis h tegak lurus garis EF di F, maka h adalah satu garis melalui F yang sejajar dengan g dan EF adalah garis tegak lurus persekutuan. Selanjutnya, ambil titik L1 di h ke kanan, katakanlah, dari F . Biarkan titik M1 menjadi proyeksi L1 ke garis g. Maka L1M1 > EF dengan Teorema H39. Biarkan P1 menjadi titik pada L1M1 sehingga M1P1 = EF. Maka EM1P1F adalah segiempat Saccheri sehingga garis FP1 dan g sejajar dan memiliki garis tegak lurus persekutuan berdasarkan Teorema H30 (garis tegak lurus persekutuan didasarkan pada titik tengah FP1 dan EM1). Demikian pula dengan mengambil L2 sebagai titik di sebelah kanan F, dan membuat garis FP2 sejajar dengan g. Sekarang garis h adalah berbeda dari baris FP1 dan FP2, garis FP1 dan FP2 berbeda. Misalkan sebaliknya garis FP1 dan FP2 adalah sama. Lalu ada tiga titik pada garis ini, F, P1, dan P2, yang masing-masing berjarak sama dari garis g, bertentangan dengan salah satu soal PR. Oleh karena itu garis-garisnya berbeda dan untuk setiap titik di h ke kanan (atau dalam hal ini, kiri) dari F, ada garis yang sejajar dengan g melalui F.■

Latihan 1

1. **Suatu geometri netral merupakan geometri Euclides atau geometri Lobachevsky, yang berarti jumlah sudut segitiganya adalah sama dengan atau kurang dari 180º. Berikan penjelasan dan pembuktiannya.**

2. **Dalam geometri netral, jika ada sebuah garis dan sebuah titik yang memenuhi sifat kesejajaran Lobachevsky maka ada segitiga yang jumlah sudutnya kurang dari 180º. Berikan penjelasan dan pembuktiannya.**

BAB V
STRUKTUR AKSIOMATIK GEOMETRI RIEMMAN
(Pendekatan Etnomatematika)

Disusun oleh
Khathibul Umam Zaid Nugroho, S.Kom., M.Pd.
Prof. Dr. YL. Sukestiyarno, M.S.
Dr. Sugiman, M.Si.
Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si.

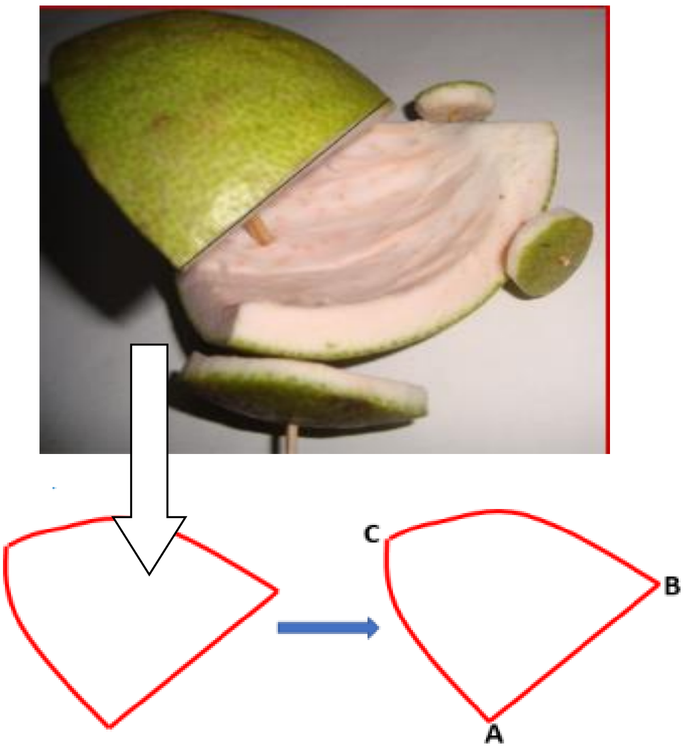
BAB V
STRUKTUR AKSIOMATIK GEOMETRI RIEMMAN

5.1 Geometri Riemman dalam Etnomatematika

Dalam kehidupan sehari-hari, Geometri Riemann memiliki impelemtasi yang sangat dekat dengan budaya masyarakat. Belum lama ini even besar Piala Dunia Qatar 2022 telah usai yang dimenangkan oleh Tim Sepabola Argentina. Pertandingan berlangsung 29 hari dengan banyak pertandingan 64 kali. Dalam setiap pertandingan yang diperebutkan oleh para pemain adalah bola. Pertandingan sepak bola menjadi budaya yang paling diminati dan terkenal di masyarakat dunia. Oleh karena itu, bola menjadi salah satu model untuk merepresentasikan Geometri Riemann (eliptik) sebagai etnomatematika. Perhatikan bola Qatar 2022 yang diperebutkan setiap pemain untuk tujuan mejalakan ke gawang lawan (Gambar 5.1).

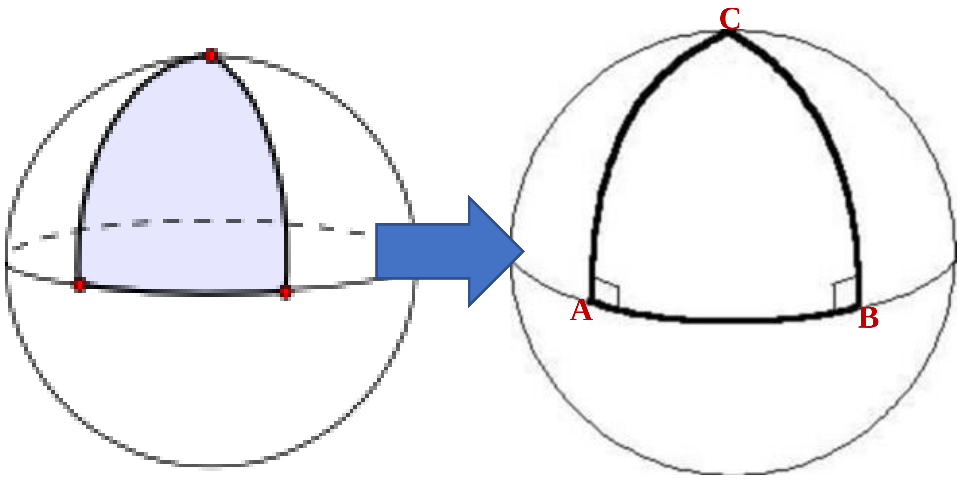
Gambar 5.1 Bola Qatar sebagai Representasi Etnomatematika Geometri Eliptik (https://www.detik.com/edu/edutainment/d-6426406/)

Visualisasi Etnomatematika dalam Geometri Riemman seperti Widada, Herawaty, Widiarti, Aisyah, & Tuzzahra (2020) menyatakan bahwa melalui budaya lokal (etnomatematika) yaitu media kulit jeruk bali dapat diketahui secara empiris sifat segitiga dengan jumlah besar sudut lebih dari 180 derajat. Dengan memanfaatkan kulit jeruk bali, anak-anak membuat mobil. Mainan mobil-mobilan dari kulit jeruk bali merupakan salah satu mainan tradisional yang dimiliki Indonesia. Ini adalah mainan yang sangat ramah lingkungan. Mainan tersebut dulunya sangat digemari oleh anak-anak Indonesia, namun hingga saat ini masih menjadi warisan bangsa sebagai kearifan lokal yang ramah lingkungan. Itu sangat dekat dengan pikiran siswa. Mobil mainan dari kulit jeruk dapat dilihat pada Gambar 5.2.



Gambar 5.2 Representasi Mainan Anak dari Kulit Jeruk (Widada, Herawaty, Widiarti, et al., 2020)

Berdasarkan Gambar 5.2 tentang representasi mainan anak dari kulit jeruk, maka penelitian Widada, Herawaty, Widiarti, et al. (2020) menemukan bahwa subjek penelitian mengukur lima segitiga ABC. Itu adalah mengukur lima buah segitiga kulit jeruk bali. Mereka melakukan kegiatan geometri yang dapat meningkatkan kemampuan spasial yaitu visualisasi mental, karena jeruk bali adalah bola dunia mini, dan mampu menggeneralisasi konsep dan prinsip yang diperoleh dari jeruk ke dalam geometri bola dunia atau lebih umum. Pada akhirnya, mahasiswa mampu menyimpulkan bahwa dalam segitiga ABC berlaku: besar sudut ABC ditambah besar sudut ACB dan ditambah besar sudat BAC adalah lebih dari seratus delapan puluh derajat (lihat Gambar 5.3).



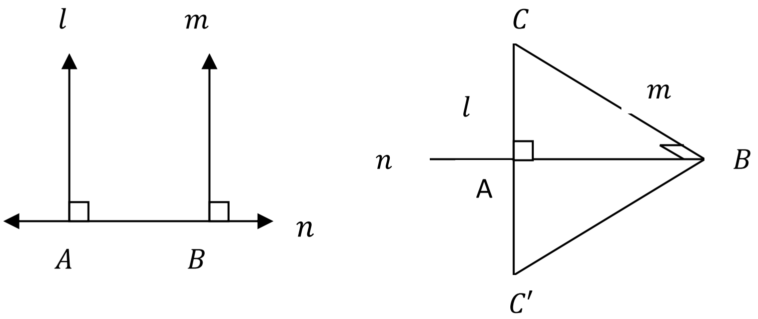
Gambar 5.3 Segitiga pada Permukaan Bola Bumi

Simpulannya bahwa dalam segitiga ABC berlaku: m (∠ABC) + m (∠ACB) + m (∠BAC) > 180^{o}, lihat Gambar 5.3 adalah segitiga pada permukaan bola bumi (double elliptic). Ini dibahas dan dibuktikan pada uraian selanjutnya.

3.2 Pengantar Geometri Riemman (Eliptik)


Riemman

Berdasarkan uraian singkat sejarah geometri eliptik di atas, munculnya geometri ini berawal dari analisis Riemann terhadap postulat kesejajaran Euclid. Penemuan ini merupakan bagian dari disertasi Riemann yang disajikan pada tahun 1854 di Jerman. Gambar 5.4 adalah visualisasi kesejajaran Euclid.

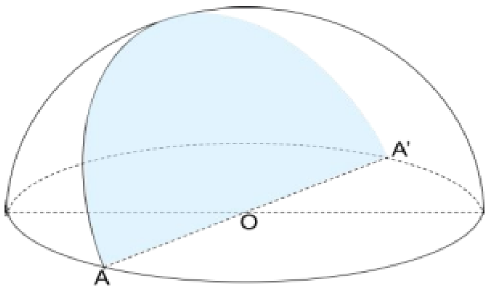


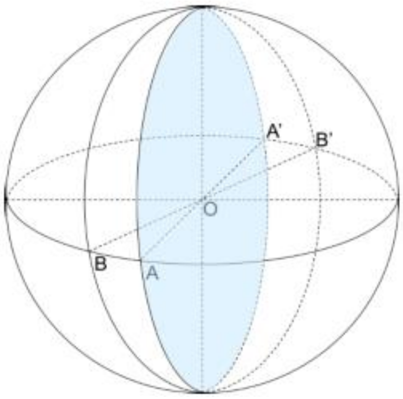
Gambar 5.4 Visualisasi Kesejajaran Euclid

Analisis Riemann terhadap pembuktian kesejajaran Euclid seperti representasi Gambar 5.1 adalah sebagai berikut (Whitehead, 2010)(Eschrig, 2011)(May, 2012)(Lovett, 2020)(Gudmundsson, 2002). Pandangan penting bahwa "l dan m kongruen" karena pada langkah sebelumnya diperoleh bahwa $\underline{BC}$ dan $\underline{BC'}$ berhimpit, dengan kata lain Cdan C' adalah titik yang sama. Langkah ini dalam pembuktian akan gagal apabila Cdan C' adalah dua titik yang berbeda. Euclid mendefinisikan suatu prinsip pemisahan (*separation principle*) yaitu setiap garis "memisahkan" bidang menjadi dua sisi yang berhadapan, yang tidak mempunyai titik persekutuan. Dalam pandangan prinsip pemisahan (memperpanjang $\underline{CA}$ sedemikian hingga diperoleh $CA = AC'$, dimana C' terletak di perpanjangan $\underline{CA}$) menjamin bahwa Cdan C' terletak pada sisi sehadap dari $n$dan merupakan dua titik yang berbeda. Tanpa memperhatikan prinsip pemisahan, maka Cdan C' dapat berhimpit dan pembuktian teorema di atas tidak dapat diterima.

Berdasarkan analisis Riemann, maka muncul dua teori baru yang berangkat dari dua kemungkinan berikut. Pertama: Jika prinsip pemisahan diterima, maka Cdan C' harus merupakan titik yang berbeda. Dengan kata lain, setiap dua garis berpotongan pada dua titik dan setiap garis memisahkan bidang. Kedua: Jika mengabaikan prinsip pemisahan, maka Cdan C' merupakan titik yang sama. Dengan kata lain, setiap dua garis berpotongan pada satu titik dan tidak ada garis yang memisahkan suatu bidang.

Kemungkinan pertama di atas yang mendasari munculnya geometri eliptik ganda (*double elliptic geometry*) dan kemungkinan kedua mendasari munculnya geometri eliptik tunggal (*single elliptic geometry*). Gambar 5.5 merupakan model dari geometri eliptik tunggal (1) dan geometri eliptik ganda (2).





(1) (2)

Gambar 5.5 model dari geometri eliptik tunggal

(1) Geometri eliptik tunggal, Gambar 5.5 (1) (*single elliptic geometry*)

Dua garis berpotongan dalam tepat satu titik, dan setiap garis tidak memisahkan bidang; 2 titik yang berlawanan terhadap diameternya dianggap sebagai satu titik.

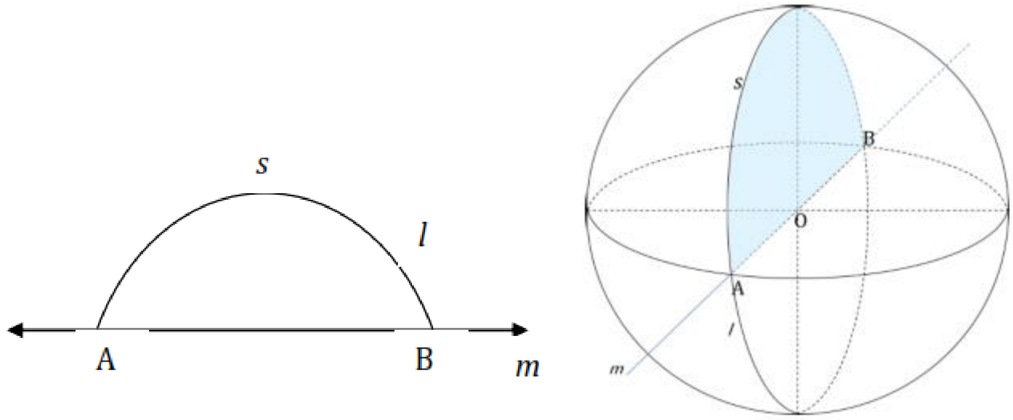
(2) Geometri eliptik ganda, Gambar 5.5 (2) (*double elliptic geometry*)

Dua garis berpotongan pada dua titik, dan setiap garis memisahkan bidang

Untuk semesta pembicaraan geometri eliptik, maka diperlukan sebuah model untuk merepresentasikan bidang tersebut. Representasi dibuat dengan tujuan agar dalam membuktikan aspek di bidang geometri eliptik tidak terjadi kontaminasi dengan bidang Euclid dan hiperbolik yang diterapkan sebelumnya. Representasi ini dikembangkan oleh Klein dengan ide dasar dari bola dunia yang dikembangkan oleh Riemann.

Sebelum kita mempelajari teorema-teorema geometri eliptik, ada baiknya kita memahami deskripsi singkat berikut terlebih dahulu untuk mengenal beberapa representasi aspek dalam bidang geometri eliptik .

Untuk geometri eliptik ganda, menggunakan konsep di atas sebagai apersepsi awal Gambar 5.5 (2).



Gambar 5.6 Konsep Geometri eliptik ganda

Dalam geometri eliptik ganda, suatu garis juga merupakan suatu bangun tertutup. Diberikan sebuah garis l dan titik A pada garis tersebut.

$m$tegak lurus l di A dan bertemu di B. Maka, A dan B seharusnya adalah titik akhir dari suatu ruas garis yang dimuat oleh l, misal ruas garis s. Karena m membagi bidang dan memotong l di dua titik, maka s terletak pada salah satu sisi m. Sehingga setiap titik di l, yang terletak pada sisi m yang diberikan, terletak pada ruas garis s, dan setiap titik di l yang tidak terletak di s, seharusnya terletak pada perpanjangan s melalui A atau B. Tapi jika s diperpanjang melewati A atau B, maka s akan memotong m dan memasuki sisi m yang berseberangan dengan s. Dengan demikian, sebarang titik di l pada sisi m yang sama dengan s, pasti terletak di s.

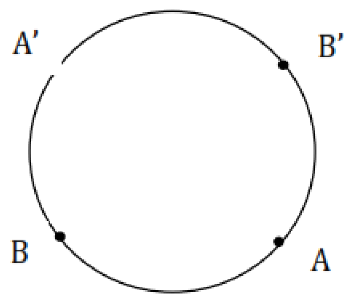
Selain itu, teori kesimetrisan dalam geometri eliptik ganda tetap dipertahankan. Sehingga akan ada ruas garis s' yang simetri dengan ruas garis s, yang menghubungkan Adan B pada sisi m yang berseberangan dengan s. Jika s tegak lurus m maka s' juga tegak lurus m. Jika s dan s' ruas garis yang tegak lurus terhadap garis yang sama pada titik yang sama, maka kedua ruas garis tersebut terletak pada satu garis. Dengan kata lain, s dan s' termuat di l. Jadi $l$dibentuk oleh ruas garis s dan s'. Dengan demikian, dapat diterima bahwa garis dalam geometri eliptik ganda merupakan bangun yang tertutup.

(a) Representasi Geometri Eliptik pada Bola Euclid

Postulat kesejajaran Riemann akan terpenuhi dalam representasi bahwa setiap duagaris (lingkaran besar) bertemu tepat pada dua titik. Selanjutnya, postulat pemisahan terpenuhi, karena setiap lingkaran besar akan memisahkan bola pejal tersebut menjadi dua belahan bola (*hemispheres*). Sebagai contoh, equator membagi sebuah globe (model bumi) menjadi dua belahan, yaitu, belahan utara dan selatan, sedemikian hingga sebarang busur dari lingkaran besar menghubungkan sebuah titik pada salah satu belahan dengan sebuah titik pada belahan yang lain dimana busur tersebut berpotongan dengan equator. Jadi, setiap garis tampak sebagai bangun yang tertutup.

Representasi geometri eliptik tunggal diturunkan dari geometri eliptik ganda. Sebuah lingkaran besar pada bola tidak merepresentasikan secara tepat sebuah garis pada geometri eliptik tunggal. Hal ini disebabkan dua lingkaran besar selalu berpotongan pada dua titik yang berlawanan terhadap diameternya.

Selanjutnya, kita dapat merepresentasikan geometri eliptik tunggal seperti layaknya geometri eliptik ganda. Dengan demikian, sebuah garis pada geometri eliptik tunggal direpresentasikan sebagai sebuah lingkaran besar (dengan kesepakatan bahwa titik-titik yang berlawanan diidentifikasi). Lihat Gambar 5.7, sebuah ruas garis direpresentasikan sebagai busur kecil dari sebuah lingkaran besar, karena busur besar atau setengah lingkaran direpresentasikan sebagai sebuah garis utuh. Untuk menentukan jarak antara dua titik, A dan B, ingat bahwa A dan lawannya, A′, dipandang sebagai titik yang sama. Hal ini juga berlaku pada B. Dengan demikian, jarak merupakan lintasan terpendek dari busur minor $\widehat{AB}$, $\widehat{AB}$'. Sudut dan besarnya pada geometri eliptik tunggal direpresentasikan sama seperti pada geometri eliptik ganda.



Gambar 5.7 Representasi Eliptik Ganda

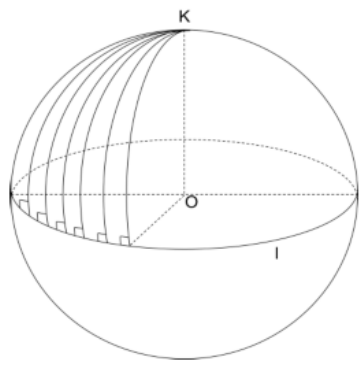
Berikut ini merupakan representasi konsep dasar geometri eliptik ganda pada bola Euclide, adalah Titik = Titik pada bola; Garis = Lingkaran besar bola; Bidang = Bola; Ruas garis = Busur dari suatu lingkaran besar; Jarak antara dua titik = Panjang busur terpendek dari lingkaran besar yang melalui kedua titik itu; Sudut antara dua garis = Sudut pada bola yang dibentuk oleh dua lingkaran besar; dan Ukuran sudut = Ukuran sudut

(b) Sifat Kutub pada Bidang Geometri Eliptik

Seperti halnya dalam geometri Euclid dan Lobachevski, geometri eliptik memenuhi beberapa hal berikut.

a. Hanya ada satu garis yang tegak lurus terhadap garis yang melalui sebuahtitik yang diberikan, jika titik tersebut terletak pada garis yang diberikan.
b. Tetapi sifat di atas tidak terpenuhi, jika titik tersebut tidak berada pada garis yang diketahui, karena sebarang dua garis yang tegak lurus dengan garis yang sama akanberpotongan.
c. Untuk setiap garis *l* pada bidang geometri eliptik, ada titik polar K sedemikian sehingga semua garis yang melalui K akan tegak lurus dengan *l*.

Jadi, semua lingkaran besar pada bola dunia melalui kutub utara yang tegak lurus dengan ekuatornya (lihat Gambar 5.8).



Gambar 5.8 Lingkaran besar tegak lurus ekuator

(c) Sifat Kutub

Misalkan *l* adalah suatu garis, maka ada suatu titik *K* yang disebut kutub dari *l* sedemikian hingga:

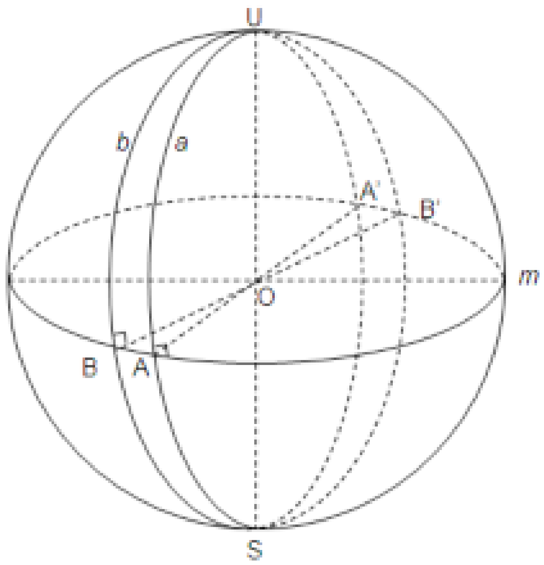
a. setiap segmen yang menghubungkan K dengan suatu titik pada l tegak lurus pada l,

b. K berjarak sama dari setiap titik pada l.

Jarak K sampai sebarang titik pada l disebut "jarak polar". Jarak polar suatu kutub sampai garisnya adalah konstan

3.3Teorema-Teorema dalam Geometri Riemman

Selanjutnya disajikan secara singkat beberapa teorema dalam geometri Riemman (elliptik) (Eves, 1972). Pandang model Geometri Riemman (lihat Gambar 5.9).



Gambar 5.9 Model Geometri Riemman

Teorema 1

"Dua garis yang tegaklurus pada suatu garis berpotongan pada suatu titik"

Diketahui:1. a dan b adalah dua garis yang tegak lurus pada suatu garis m.

2. U dan S merupakan kutub dari ekuator m.

Akan dibuktikan: dua garis itu berpotongan pada suatu titik.

Pembuktian:

Berdasarkan sifat dari eliptik ganda yaitu setiap 2 garis berpotongan pada 2 titik, maka:

a berpotongan dengan*m* di dua titik yaitu A dan A′

b berpotongan dengan *m* di dua titik yaitu B dan B′

A, A′, B′ dan B merupakan titik-titik yang terletak pada *m* dan garis *a* serta *b* tegak lurus *m* maka berdasarkan sifat kutub, ruas garis yang melalui titik A, A′, B, dan B′ terhubung dengan titik U dan S.

Jadi garis *a* dan *b* berpotongan pada titik yang sama yaitu U dan S.

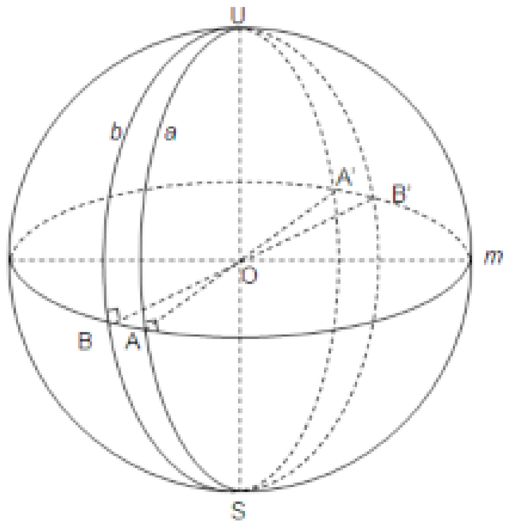
(**terbukti)**

Teorema 2

Semua garis yang tegaklurus pada suatu garis, berpotongan pada titik yang disebut kutub dari garis itu dan sebaliknya setiap garis melalui kutub suatu garis tegaklurus pada garis itu.

Diketahui:1. *a* dan *b* adalah dua garis yang tegak lurus pada suatu garis *m*.

2. *U* dan *S* merupakan kutub dari ekuator *m*. Lihat Gambar 5.10.



Gambar 5.10 Bola Bumi sebagai Visualisasi

Akan dibuktikan:

1. Semua garis tegak lurus pada suatu garis, berpotongan pada titik yang disebut kutub dari garis itu.
2. Setiap garis melalui kutub suatu garis tegak lurus pada garis itu.

Pembuktian 1

Berdasarkan teorema 1, maka dapat disimpulkan bahwa tiap diambil 2 titik pada *m*dapat dibuat 2 garis yang tegak lurus *m*& bertemu di titik yang disebut kutub dari garis *m.*

Karena ada banyak titik di *m*maka pada setiap titik tersebut dapat dibuat garis yang tegak lurus terhadap *m*dan bertemu di kutub ekuator *m.*

Jadi setiap garis yang tegak lurus pada suatu garis, berpotongan pada titik yang disebut kutub dari garis itu.

Pembuktian 2

U dan S kutub dari ekuator *m*, berdasarkan sifat kutub, maka setiap ruas garis yang menghubungkan U dengan titik pada *m*& setiap ruas garis yang menghubungkan S dengan titik pada *m*, akan selalu tegaklurus *m.*

Ambil sebarang titikdi *m,* misal A, A′, B & B′ maka:

BU tegaklurus*m*,	B′U tegaklurus*m*,
BS tegaklurus*m*,	B′S tegaklurus*m*,
A′U tegaklurus*m*,	AU tegaklurus*m*,
AS tegaklurus*m*,	A′S tegaklurus*m*.

BU, B′U, BS, B′S adalah ruas garis-ruas garis yang termuat pada garis *b*, dan A′U, AU, AS, A′S adalah ruas garis-ruas garis yang termuat pada garis *a*. Maka garis-garis tersebut (*a*&*b*) melalui kutub garis *m* yaitu U dan S, tegaklurus pada garis *m*.

Kesimpulan: Karena pembuktian 1 dan 2 telah terbukti maka Teorema 2 terbukti. (**terbukti**)■

Teorema 3

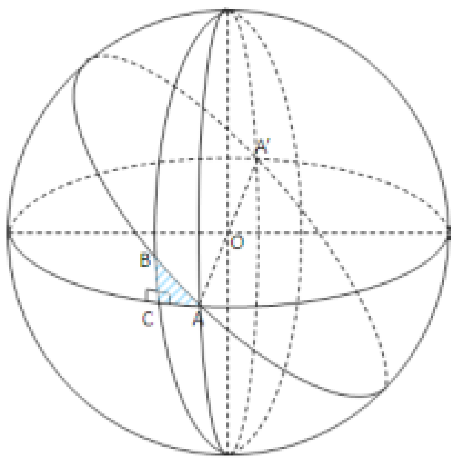
Dalam sebarang segitiga ABC dengan ∠C = 90°, sudut A kurang dari, sama dengan, atau lebih dari 90°, tergantung dari ruas garis BC kurang dari, sama dengan, atau lebih dari jarak polar q."

Diketahui:Segitiga ABC dengan ∠*C* = *90°*.

Akan dibuktikan:

1) ∠C < 90°, jika segmen BC < jarak polar q.
2) ∠C = 90°, jika segmen BC = jarak polar q.
3) ∠C > 90°, jika segmen BC > jarak polar q.

Perhatikan Gambar 5.11 berikut ini.



Gambar 5.11 △ABC pada Bumi

Pembuktian 1

K adalah kutub dari garis *m*, sehingga ∠KAC = 90° dan ∠KCA = 90°

Ruas garis BC < jarak polar ∠KAC > ∠BAC (keseluruhan lebih besar dari sebagian).

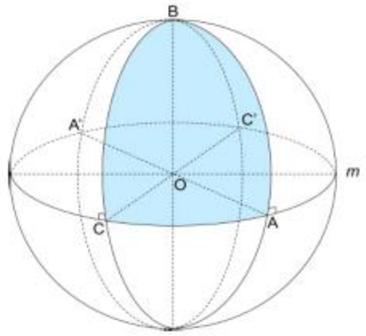
Karena ∠KAC = 90^o maka ∠BAC < 90^o.

Jadi ∠A < 90^o.

Selanjutnya Pembuktian 2 berikut ini.

Pembuktian 2

Ruas garis BC = jarak polar, B adalah titik kutub dari garis *m*, sehingga ∠BCA = 90^o dan ∠BAC = 90^o, yang berartu bahwa ∠A = 90^o.

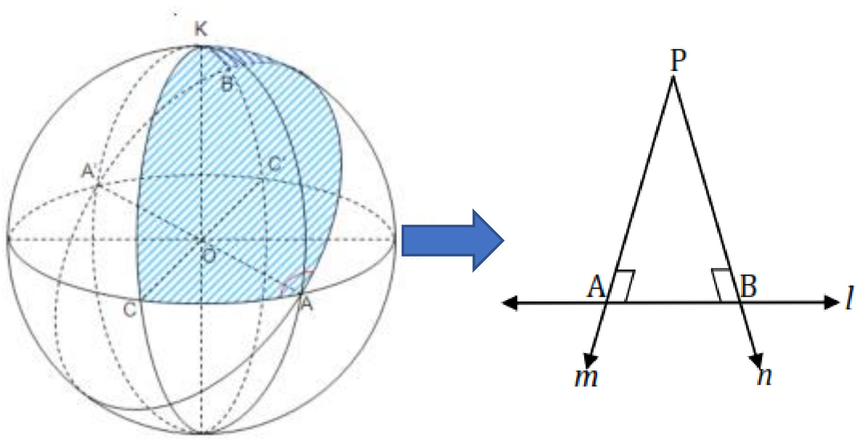


Gambar 5.12 △ABC dan garis m pada Bumi

Pembuktian 3

Perhatikan Gambar 5.12. *K* adalah kutub dari garis *m*, sehingga ∠KCA = 90^o dan ∠KAC = 90^o. Ruas garis BC > jarak polar, berarti ∠BAC > ∠KAC (keseluruhan lebih besar dari sebagian). Karena ∠KAC = 90^o maka ∠BCA > 90^o.

Jadi ∠A = 90^o. (**terbukti**) ■



Gambar 5.13 Segitiga ABP pada Bumi

Teorema 4

Jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga lebih besar 180^0.

Diketahui:

Garis *l, m* dan *n* dimana garis *m* dan *n* tegak lurus *l* di titik A dan B.

Akan Dibuktikan: $\angle A + \angle B + \angle P = 180^o$.

Pembuktian:

Perhatikan Gambr 5.15.

Berdasarkan postulat kesejajaran eliptik, garis *m* dan *n* akan berpotongan di *P* yang merupakan kutub dari *l*. Berdasarkan sifat kutub, setiap diberikan sebuah garis maka dapat ditentukan kutub dari garis tersebut. Dengan demikian, jika ditentukan sebuah titik pada garis yang diberikan, maka ada garis yang melalui kutub dan titik tersebut yang tegak lurus terhadap garis yang diberikan. Sedangkan segitiga pada geometri eliptik dibentuk oleh tiga garis (lingkaran besar) yang saling berpotongan. Perhatikan bahwa *PAB* adalah segitiga sama kaki. Maka diperoleh ($\angle A = \angle B = 90^o$), sehingga PA = PB dan $\angle P$ positif. Sehingga jumlah sudut segitiga PAB adalah

$$\angle A + \angle B + \angle P = 90^0 + 90° + \angle P = 180^0 + \angle P > 180^0 \quad \textbf{(terbukti)}$$

Sedangkan untuk segitiga pada **Gambar 5.13** adalah sebagai berikut.

$\measuredangle A = 90^\circ$ dan $\measuredangle B > 90^\circ$ dan $\measuredangle C$ positif, maka:

$$\measuredangle A + \measuredangle B > 90 + 90 = 180$$

Sehingga $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C$ juga akan lebih dari 180°. **(Terbukti)**■

Teorema 5

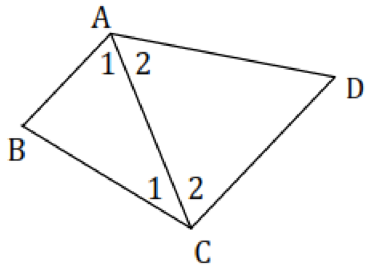
Jumlah besar sudut-sudut suatu segiempat lebih besar dari 360⁰.

Diketahui:Segiempat ABCD.

Akan dibuktikan: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^o$.

Pembuktian:

Diberikan segiempat ABCD.



Gambar 5.14 Segiempat ABCD

Lihat segiempat ABCD, terdapat Δ ABC dan Δ ACD. Berdasarkan Teorema 4, maka

$$\angle A_1 + \angle B + \angle C_1 > 180^0$$

$$\angle A_2 + \angle D + \angle C_2 > 180^0 \quad +$$

$$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle B + \angle C_1 + \angle C_2 + \angle D > 180^\circ + 180^\circ$$

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D > 360^\circ$ (Terbukti). ■

Teorema 6

Sudut-sudut puncak dari segiempat Saccheri sama dan tumpul.

Bukti:

Konstruksi garis $p \perp m$ dan $q \perp m$, sedemikian hingga K_1 dan K_2 merupakan kutub dari q dan P_1 dan P_2 merupakan kutub dari m. Misal, $p \perp m$ di E serta $q \perp m$ di F.

Selanjutnya, konstruksi k dan l sedemikian hingga m merupakan sumbu simetri k dan l.

Misal, k dan l berpotongan dengan q berturut-turut di A dan B, dan berpotongan dengan p berturut-turut di D dan C.

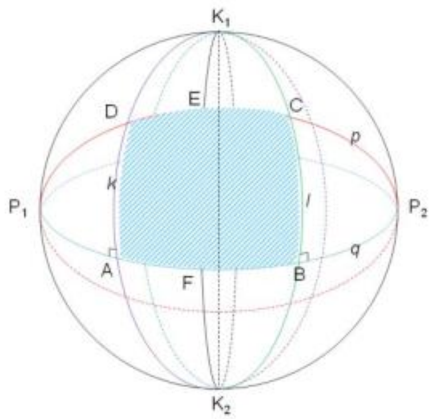
<u>Akan dibuktikan</u>: $\measuredangle C = \measuredangle D > 90^{\circ}$

Akan dibuktikan bahwa *segiempat saccheri* $ABCD$, $\measuredangle C = \measuredangle D > 90^{\circ}$.

PerhatikankembaliΔK_1CD pada gambar di atas.

Karena$K_1D < K_1A$, maka berdasarkan **Teorema 3** diperoleh bahwa$\measuredangle K_1DC < 90^{\circ}$. Dengan kata lain, $\measuredangle ADC > 90^{\circ}$. Berdasarkan **Proposisi 5**maka$\measuredangle ADC = \measuredangle ACD > 90^{\circ}$.

Jadi, **<u>terbukti</u>** bahwa sudut-sudut puncak pada segitiga adalah tumpul.



Gambar 5.15 Segiempat Saccheri pada Bumi

Teorema 7

"Dalam segiempat Lambert ABCD dengan $\angle A = \angle B = \angle C = 90^{0}$*, maka sudut keempat D tumpul"*

Bukti:

Perhatikan Gambar 5.15. Konstruksi garis $p \perp m$ dan $q \perp m$, sedemikian hingga K_1 dan K_2 merupakan kutub dari q dan P_1 dan P_2 merupakan kutub dari m. Misal, $p \perp m$ di C serta $q \perp m$ di B.

Selanjutnya, konstruksi k.

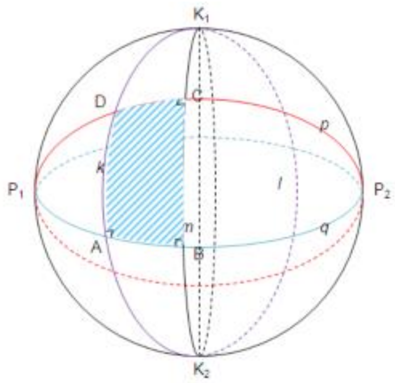
Misal, k berpotongan dengan q dan p berturut-turut di A dan D.

Akan dibuktikan: $\measuredangle D > 90^{\circ}$

Perhatikan Gambar 5.15 di atas.

Karena$K_1D < K_1A$, maka berdasarkan **Teorema 3** diperoleh bahwa $\measuredangle K_1DC < 90^{\circ}$. Dengan demikian $\measuredangle ADC > 90^{\circ}$.

Jadi, **terbukti** $\measuredangle D > 90^{\circ}$.■



Gambar 5.16 Segiempat ABCD pada Bola

Teorema 8

Tidak ada persegi dalam geometri Riemman.

Bukti**:**

Andaikan ada persegi dalam geometri eliptik (Riemman).

Berarti ada segiempat ABCD dengan semua sisinya sama panjang dan semua sudutnya siku-siku.

Sehingga jumlah besar sudut segiempat ABCD = $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D$

$= 90° + 90° + 90° + 90°$

$= 360^{o}$

Hal ini bertentangan dengan **Teorema 5** yaitu jumlah besar sudut-sudut suatu segiempat lebih besar dari 360^{o}.Jadi pengandaian salah. Seharusnya tidak ada persegi dalam geometri Eliptik. (**terbukti**)■

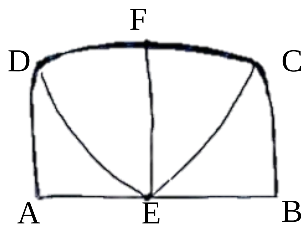
5.4 Rangkuman

Corollary dari Aksioma Kesejajaran Euclid

Pada segiempat ABCD dengan $\angle DAB = \angle CBA = 90^o$ dan $AD = BC$, maka $\angle BCD = \angle CBA > 90^o$.

Bukti:

Perhatikan visualisasi segiempat yang memenuhi syarat tersebut.



Misalkan titik E adalah titik tengah AB.

Titik F adalah titik tengah CD.

Berarti AE = EB dan DF = FC.

Tarik garis EF yang melalui kutub U dan S.

Tarik garis DE dan CE.

(i) Lihat $\triangle BCE$ dan $\triangle ADE$. Karena $AD = BC$; $\angle DAE = \angle CBE$ dan $AE = EB$, dengan aksioma S-Sd-S, maka $\triangle BCE \cong \triangle ADE$.

(ii) Perhatikan $\triangle CEF$ dan $\triangle DEF$. Karena $\triangle BCE \cong \triangle ADE$, maka $DE = CE$; $EF = EF$ dan $DF = FC$, dengan aksioma S-S-S, maka $\triangle CEF \cong \triangle DEF$.

Berdasarkan (i) dan (ii) dan ∠ADE + ∠EDF = ∠ADC, ∠BCE + ∠ECF = ∠BCD, maka ∠ADC = ∠BCD. …. (*)

Kemudian dapat ditunjukkan bahwa ∠ADC = 90^o dan ∠BCD = 90^o. Karena ∠ADC = ∠BCD, cukup ditunjukkan salah satu ∠ADC = 90^o atau ∠BCD = 90^o. Untuk membuktikannya digunak dua pernyataan sebagai Klaim 1 dan Klaim 2 berikut ini.

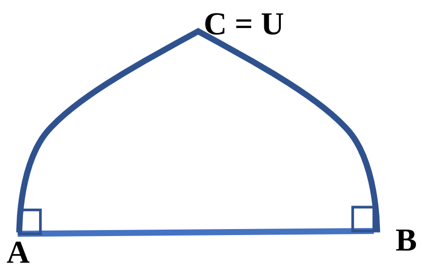
Klaim 1:

Jumlah besar sudut dalam segitiga lebih dari 180^o.

Bukti Klaim 1.

Perhatikan bola bumi (*double elliptic*), untuk membuktikan Klaim 1, ada dua kasus dalam pembuktian ini.

Pertama, mahasiswa membuktikan bahwa pada ellipsoid (bola bumi), segitiga ABC dengan titik A dan titik B pada garis lintang dan dan titik C pada kutub U (utara). Perhatikan gambar segitiga di atas permukaan bola bumi, sehingga diperoleh Gambar 5.17. Berdasarkan gambar segitiga tersebut, dapat direpresentasikan sebagai berikut.

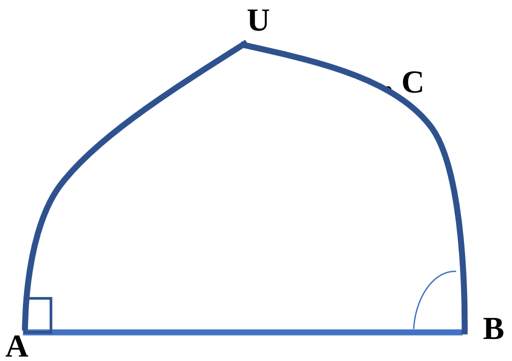


Gambar 5.17 Segitiga pada Permukaan Bola Bumi C di Kutub Utara

Berdasarkan Gambar 1 berarti bahwa AB = jarak polar, m(∠A) = 90^o, dan m(∠B) = 90^o dengan m(∠C) > 0^o. Hal ini berarti bahwa m(∠A) + m(∠B)

+ m(∠C) > 180°. Dengan demikian jumlah besar sudut dalam segitiga lebih dari serratus delapan puluh derajat.

Kasus kedua, mahasiswa membuat segitiga ABC dengan titik A dan titik B pada garis lintang dan dan titik C tidak terletak pada kutub U (utara). Perhatikan Gambar 5.18.



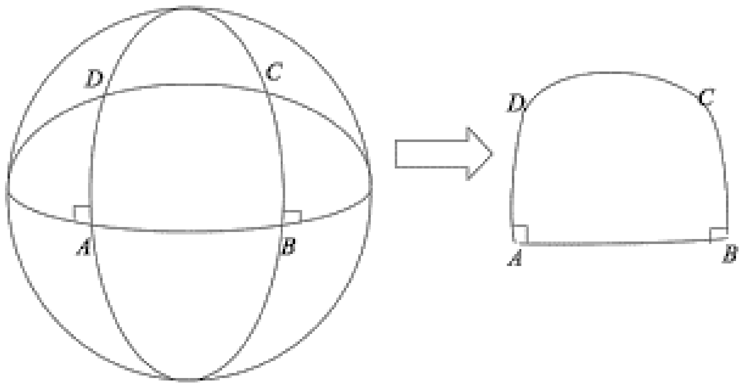
Gambar 5.18 Segitiga pada Permukaan Bola Bumi C Tidak di Kutub Utara

Berdasarkan Gambar 5.18. BC > jarak polar, m(∠B) > 90°, dan m(∠A) = 90°. Hal ini berarti bahwa m(∠A) + m(∠B) + m(∠C) > 180°. Dengan demikian jumlah besar sudut dalam segitiga lebih dari serratus delapan puluh derajat. Karena yang mungkin hanya 2 kasus tersebut, maka pada segitiga ABC berlaku bahwa m(∠A) + m(∠B) + m(∠C) > 180°. (Klaim 1 terbukti).

Klaim 2: Dalam Geometri Riemman, misalkan ABCD suatu segiempat dengan m(∠DAB) = m(∠CBA) = 90°, dan AD = BC.

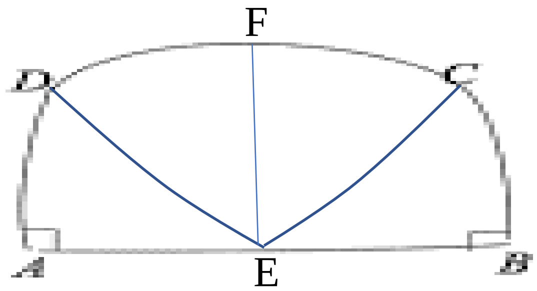
Bukti Klaim 2: Dapat dibuktikan bahwa m(∠ADC) = m(∠BCD) > 90°. Buktinya adalah sebagai berikut: Berdasarkan yang diketahui bahwa diberikan segiempat ABCD dengan m(∠DAB) = m(∠CBA) = 90°, dan AD =

BC, mahasiswa membuat representasi gambar segiempat tersebut pada permukaan bola bumi (double elliptics) lihat Gambar 5.19.



Gambar 5.19 Segiempat ABCD, ∠DAB= ∠CBA= 90o, AD = BC

Selanjutnya misalkan, titik E adalah titik tengah ruas AB, titik F adalah adalah titik tengah ruas CD. Berarti bahwa AE=EB dan DF = FC. Tari garis EF yang melalui kutub U dan kutub S, kemudian Tarik garis DE dan CE, sehingga dapat direpresentasikan pada Gambar 5.20.



Gambar 5.20 Segiempat Sacherri dengan E dan F Titik tengah AB dan CD

Berdasarkan Gambar 4., maka dapat ditujnjukkan sebagai berikut:

(1) Perhatikan $\triangle BCE$ dan $\triangle ADE$. Karena $AD=BC$, $\angle DAE = \angle CBE$ dan $AE = EB$, dengan aksioma sisi, sudut, sisi maka $\triangle BCE \cong \triangle ADE$. Karena itu, maka $\angle ADE = \angle BCE$…. (*).

(2) Perhatikan $\triangle CEF$ dan $\triangle DEF$. Karena $\triangle BCE \cong \triangle ADE$ maka $DE=CE$; dan $EF=EF$, $CF = DF$. Sehingga melalui Aksioma sisi, sisi, sisi maka $\triangle CEF \cong \triangle DEF$; akibatnya $\angle ECF = \angle EDF$….(**). Dari (*) dan (**); dan $m(\angle ADE) + m(\angle EDF) = m(\angle ADC)$ dan $m(\angle BCE) + m(\angle ECF) = m(\angle BCD)$, yang berarti bahwa $\angle ADC = \angle BCD$ ….. (a).

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\angle ADC > 90^o$. Klaim: Jumlah besar sudut dalam segiempat ABCD adalah lebih dari 360^o. Bukti dari Klaim ini adalah perhatikan kembali segiempat ABCD sesuai dengan persyaratan yang diberikan, yaitu $m(\angle DAB) = m(\angle CBA) = 90^o$, dan $AD = BC$. Berdasarkan pernyataan yang telah dibuktikan sebelumnya bahwa jumlah besar sudut dalam suatu segitiga adalah lebih dari 180^o. Perhatikan lagi bahwa segiempat ABCD terbentuk dari dua segitiga ABC dan ABD. Akibatnya $m(\angle DAB) + m(\angle ABC) + m(\angle BCD) + m(\angle CDA) > 360^o$, dan Klaim terbukti. … (b).

Berdasarkan (b), $m(\angle DAB) + m(\angle ABC) + m(\angle BCD) + m(\angle CDA) > 360^o$, sedangkan $m(\angle DAB) = m(\angle CBA) = 90^o$, berarti bahwa $m(\angle BCD) + m(\angle CDA) > 180^o$. Berdasarkan (1) $\angle ADC = \angle BCD$ berarti $2.m(\angle ADC) > 180^o$; jadi $m(\angle ADC) > 90^o$. Dengan demikian terbukti bahwa $m(\angle ADC) = m(\angle BCD) > 90^o$.

Latihan 1

1. Buktikan bahwa dua segitiga yang sebangun adalah kongruen.
2. Buktikan bahwa luas suatu segitiga adalah kelipatan konstan dari aksesnya yaitu $\triangle = \mu(A + B + C - \pi)$.

Daftar Pustaka

Anonimous. (1986). Foundations of Elliptic Geometry.

Anonimous. (2010). Non-Euclidean Geometry : a mathematical revolution during the long 19 th century.

Anonimous. (2013). Neutral Geometry.

Baah-Duodu Samuel. (2012). *Overview on R. Gagne's theory for teaching mathematics*. Winneba: School of Grauate Studies, University of Education.

Bosnyak, A., & Kondor, R. N. (2008). The spatial ability and spatial geometrical knowledge of university students majored in mathematics. *Acta Didactica Universitatis Comenianae. Mathematics*, (8), 1–25.

Braver, S. (2007). *Lobachevski Illuminated: Content, Methods, and Context of the Theory of Parallels*. University of Montana.

Brijlall, D., & Bansilal, S. (2011). Student Teachers ' Engagement With Re-Contextualized Materials : A Case of Numerical Approximation. *US-China Education Review*, *5*(June), 691–702.

Clayton, L. K. (2010). Non-Euclidean Geometry. In *Geometry: Seeing, Doing, Understanding* (3rd ed.). New York: W.H. Freeman and Company.

Cooley, L., Trigueros, M., & Baker, B. (2007). Schema Thematization: A Framework and an Example. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(4), 370–392. https://doi.org/10.2307/30034879

Coolidge, J. L. (2008). *The Elements of non-Euclidean Geometry*. OXFORD: AT THE CLARENDON PRESS.

Dillon, M. I. (2018). Neutral Geometry. *Geometry Through History*, *2*, 51–76. https://doi.org/10.1007/978-3-319-74135-2_2

Dodgson, C. L. (1990). Neutral geometry.

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2000). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research.

Eschrig, H. (2011). Riemannian geometry. *Lecture Notes in Physics*, *822*(May), 299–346. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14700-5_9

Eskisehir, O., & Ozlem, K. (2015). Investigation of the relationship between the spatial visualization success and visual/spatial intelligence capabilities of Sixth Grade students. *International Journal of Instruction*, *8*(1), 189–204.

Eves, H. (1972). A Survey of Geometry. Boston: Allyn & Bacon, Inc.

Fauzan, A., Slettenhaar, D., & Plomp, T. (2002). Traditional Mathematics Education vs . Realistic Mathematics Education : Hoping for Changes. *Proceedings of the 3rd*

International Mathematics Education and Society Conference. Copenhagen: Centre for Research in Learning Mathematics, 1–4.

Frassia, M. G., & Serpe, A. (2017). Learning Geometry Through Mathematical Modelling: An Example With Geogebra. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, (Special Issue for INTE 2017).

Gravemeijer, K. (2008). RME Theory and Mathematics. *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*, 283–302.

Gudmundsson, S. (2002). An Introduction to Riemannian Geometry. *Notes*, (September), 1–15.

GÜRBÜZ, R., ERDEM, E., & GÜLBURNU, M. (2018). The Relationship Between Mathematical Reasoning and Spatial Ability of Eighth Grade Students. *Mathematics*, 2018.

Herawaty, D., Khrisnawati, D., Widada, W., & Mundana, P. (2020). The cognitive process of students in understanding the parallels axiom through ethnomathematics learning. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1470 (2020) 012077 Doi:10.1088/1742-6596/1470/1/012077*, *1470*, 1–8. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1470/1/012077

Hitchman, M. P. (2018). *Geiometry with an introduction to Cosmic Topology*. McMinnville.

Lodder, J. (2016). The Failure of the Euclidean Parallel Postulate and Distance in Hyperbolic Geometry. *Https://Digitalcommons.Ursinus.Edu/Triumphs_geometry Part*.

Lovett, S. (2020). *Introduction to Riemannian Geometry*. *Differential Geometry of Manifolds*. https://doi.org/10.1201/b11847-10

Maier, P. H. (1998). Spatial Geometry and Spatial Ability - Hoe to Make Solid Geometry Solid? *Selected Papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics 1996. Elmar Cohors-Fresenborg et All (Ed).. Osnabrueck, 1998*, 69–81.

Márquez Díaz, J. E. (2018). Fifth postulate of Euclid and the non-Euclidean geometries. Implications with the spacetime. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, *9*(3), 530–542. https://doi.org/10.14299/ijser.2018.03.02

Marshall, D., & Scott, P. (2010). A brief history of A Brief History. *Popular Science*.

May, J. (2012). *A Brief Survey of Elliptic Geometry*. The University of West Florida.

Mujiasih. (2006). Sebuah kajian dari Geometri Non Euclid.

Nugroho, K. U. Z., Widada, W., & Herawaty, D. (2019). The Ability To Solve Mathematical Problems Through Youtube Based Ethnomathematics Learning. *International Journal of Scientific & Technology Research*, *8*(10), 1232–1237.

Plomp, T., & Nieveen, N. (2013). Educational Design Research. *Educational Design Research*, (July), 1–206. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3185-5_11

Qu, E. (2022). Hyperbolic Machine Learning.

Ross, S. W. (2010). *Non-Euclidean Geometry*. University of Maine.

Slavin, R. E. (2006). *Educational Psychology Theory into Practices. Boston : Allyn and Bacon.* Boston: Allyn and Bacon.

Soedjadi. (1993). *Simplify Some Concept In Mathematics For School Mathematics And Its Impact*. *Research Report*. Surabaya: IKIP Surabaya.

Sunardi, H. (2006). *Pengembangan Taksonomi SOLO menjadi Taksonomi Solo Plus*. DisrtasI: Universitas Negeri Surabaya.

Whitehead, A. N. (2010). Elliptic Geometry. *A Treatise on Universal Algebra*, 371–398. https://doi.org/10.1017/cbo9780511693175.025

Widada, W, Agustina, A., Serlis, S., Dinata, B. M., & Hasari, S. T. (2019). The abstraction ability of students in understanding the concept of geometry. *Journal of Physics: Conference Series*, *1318*(012082), 1–7. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1318/1/012082

Widada, W, Herawaty, D., Hudiria, I., Prakoso, Y. A., Anggraeni, Y. R., & Zaid, K. U. (2020). The understanding of the triangle in Lobachevsky Geometry through local culture. *International Seminar on Applied Mathematics and Mathematics Education 2020 (2nd ISAMME 2020). Journal of Physics: Conference Series*, *1657*(012038), 1–7. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1657/1/012038

Widada, W, Herawaty, D., Widiarti, Y., Aisyah, S., & Tuzzahra, R. (2020). The cognitive process of students in understanding the triangles in Geometry of Riemann through local content. *International Seminar on Applied Mathematics and Mathematics Education 2020 (2nd ISAMME 2020). Journal of Physics: Conference Series*, *1657*(012033), 1–8. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1657/1/012033

Widada, W., Herawaty, D., Hudiria, I., Prakoso, Y. A., Anggraeni, Y. R., & Zaid, K. U. (2020). The understanding of the triangle in Lobachevsky Geometry through local culture. *International Seminar on Applied Mathematics and Mathematics Education 2020 (2nd ISAMME 2020). Journal of Physics: Conference Series*, *1657*(012038), 1–7. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1657/1/012038

Widada, W., Herawaty, D., Nugroho, K. U. Z., & Anggoro, A. F. D. (2019). The ability to Understanding of the Concept of Derivative Functions for Inter-Level Students During Ethnomathematics Learning. *Journal of Physics: Conference Series*, *1179*(012056), 1–6. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1179/1/012056

Widada, W., Herawaty, D., Widiarti, Y., Aisyah, S., & Tuzzahra, R. (2020). The cognitive process of students in understanding the triangles in Geometry of Riemann through local content. *International Seminar on Applied Mathematics and Mathematics Education 2020 (2nd ISAMME 2020). Journal of Physics: Conference Series*, *1657*(012033), 1–8. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1657/1/012033

Widada, Wahyu, & Herawaty, D. (2022a). *Penelitian Pembelajaran Matematika dan Pengembangannya*. Klaten: CV. Sarnu Untung.

Widada, Wahyu, & Herawaty, D. (2022b). Thinking Extended Trans Level Based on Local Culture to Achieve Super-Smart People. In N. Rezaei (Ed.), *Integrated Education and Learning* (Vol. 13). Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-031-1596

Widada, Wahyu, Herawaty, D., Jumri, R., & Wulandari, H. (2020). Students of the extended abstract in proving Lobachevsky's parallel lines theorem. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1470 (2020) 012098 Doi:10.1088/1742-6596/1470/1/012098*, *1470*, 1–10. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1470/1/012098

Widada, Wahyu, Herawaty, D., Ma'rifah, N., & Yunita, D. (2019). Characteristics of Students Thinking in Understanding Geometry in Learning Ethnomathematics. *International Journal of Scientific & Technology Research*, *8*(11), 3496–3503.

Widada, Wahyu, Sunardi, H., Herawaty, D., Pd, B. E., & Syefriani, D. (2018). Abstract Level Characteristics in SOLO Taxonomy during Ethnomathematics Learning. *International Journal of Science and Research (IJSR)*, *7*(8), 352–355. https://doi.org/10.21275/ART2019438

Widada, Wahyu. (2002). Teori APOS sebagai suatu alat analisis dekomposisi genetik terhadap perkembangan konsep matematika seseorang. *Journal of Indonesian Mathematicel Society (MIHMI)*, *8*.

Widada, Wahyu. (2017). Beberapa Dekomposisi Genetik Siswa dalam Memahami Matematika. *Jurnal Pendidikan Matematika Raflesia*, *1*(1), 44–54.

Wu, D., & Ma, H. (2006). The Distributions Of Van Hiele Levels Of Geometric Thinking Among 1st Through 6th Graders. *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *5*, 409–416.

Yurt, E., & Tünkler, V. (2016). A study on the spatial abilities of prospective social studies teachers: A mixed method research. *Kuram ve Uygulamada Egitim Bilimleri*, *16*(3), 965–986. https://doi.org/10.12738/estp.2016.3.0324

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS) & SILABUS

(1) GEOMETRI LOBACHEVSKY
(2) GEOMETRI RIEMMAN

Disusun oleh
Khathibul Umam Zaid Nugroho
Prof. Dr. YL. Sukestiyarno, M.S.
Dr. Sugiman, M.Si.
Prof. Dr. St. Budi Waluta, M.Si.

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS) & SILABUS

(1) GEOMETRI LOBACHEVSKY

Disusun oleh
Khathibul Umam Zaid Nugroho
Prof. Dr. YL. Sukestiyarno, M.S.
Dr. Sugiman, M.Si.
Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si.

<table>
<tr><td rowspan="2" colspan="2"></td><td colspan="6">UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
SEKOLAH PASCASARJANA
S-3 PENDIDIKAN MATEMATIKA</td><td>Kode Dokumen</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td colspan="9">RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER</td></tr>
<tr><td colspan="2">MATA KULIAH (MK)</td><td>KODE</td><td colspan="2">Rumpun MK</td><td colspan="2">BOBOT (sks)</td><td>SEMESTER</td><td>Tgl Penyusunan</td></tr>
<tr><td colspan="2">Geometri Lobachevsky</td><td>MPM – xxx</td><td colspan="2">Matematika</td><td>T=2</td><td>P=0</td><td>Pilihan</td><td>1 Januari 2022</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">OTORISASI/PENGESAHAN</td><td colspan="2">Pengembang RPS</td><td colspan="3">Koordinator RMK</td><td colspan="2">Ketua PRODI</td></tr>
<tr><td colspan="2">Khathibul Umam Zaid Nugroho</td><td colspan="3"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="7">Capaian Pembelajaran (CP)</td><td colspan="8">CPL-PRODI yang dibebankan pada MK</td></tr>
<tr><td>CPL-1
CPL-2
CPL-3</td><td colspan="7">SIKAP
S2. Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
S8. Meninternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.
S9. Menunjukkan sikap bertanggung jawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri.</td></tr>
<tr><td>CPL-4</td><td colspan="7">PENGETAHUAN
KP2. Menguasai konsep teoretis (deduktif-aksiomatik) matematika terutama system geometri mendukung pembelajaran matematika di pendidikan dasar dan menengah serta untuk studi lanjut.</td></tr>
<tr><td>CPL-5
CPL-6</td><td colspan="7">KETERAMPILAN UMUM
KU3. Mampu menyusun ide, hasil pemikiran, dan argumen saintifik secara bertanggung jawab dan berdasarkan etika akademik, serta mengkomunikasikannya melalui media kepada masyarakat akademik dan masyarakat luas;
KU4. Mampu mengidentifikasi bidang keilmuan yang menjadi obyek penelitiannya dan memosisikan ke dalam suatu skema penyelesaian masalah yang lebih menyeluruh dan bersifat interdisiplin atau multi disiplin;</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="7">KETERAMPILAN KHUSUS
-</td></tr>
<tr><td colspan="8">Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK)</td></tr>
<tr><td>CPMK</td><td colspan="7">Memahami dan menguasai konsep dan prinsip Geometri Lobachevsky (hiperbolik) (konsep pangkal (unsur primitif), pernyataan pangkal (aksioma), konsep yang didefinsikan (definisi), dan pernyataan-pernyataan yang harus dibuktikan (teorema, lemma, corollary)); aksioma kesejajaran Euclid melalui pendekatan etnomatematika (budaya lokal). Mahasiswa belajar memahami pentingnya belajar Geometri Non-</td></tr>
</table>

		Euclid melalui Geometri Netral. Mahasiswa belajar tentang struktur aksiomatik geometri netral: Aksioma Archimedes, konsep segiempat Saccheri dan teorema-teoremanya. Memahami aksioma kesejajaran Lobachevsky, dan beberapa konsekuensi logisnya. Mahasiswa juga dapat mengembangkan konsep tersebut lebih lanjut.
	CPL ⇒ Sub-CPMK	
	CPL-1, CPL-2, CPL-3, CPL-4, CPL-5, dan CPL-6	Sub-CPMK1 Memahami dan menerapkan struktur deduktif aksiomatik dalam sistem geometri.. Sub-CPMK2 Memahami kelemahan aksioma kesejajaran Euclid dan upaya memperbaikinya. Sub-CPMK3 Memahami dan menerapkan struktur aksiomatik geometri netral. Sub-CPMK4 Memahami dan menerapkan Aksioma kesejajaran Lobachevsky. Sub-CPMK5 Memahami teorema-teorema kesejajaran dalam Geometri Lobachevsky dan pembuktiannya. Sub-CPMK6 Memahami dan menerapkan Teorema-teorema tentang segitiga dalam Geometri Lobachevsky. Sub-CPMK7 Memahami dan menerapkan Teorema-teorema tentang segiempat dalam Geometri Lobachevsky.
Deskripsi Singkat MK	Mata kuliah ini membahas tentang Geometri dipandang sebagai suatu sistem deduktif, yang terdiri dari Geometri Netral, Geometri Lobachevsky (Hiperbolik), Geometri Riemman (Elliptik), yang dibandingkan dengan Geometri Euclid.	
Bahan Kajian / Materi Pembelajaran	1. Struktur deduktif aksiomatik dalam sistem geometri 2. Kelemahan aksioma kesejajaran Euclid dan upaya memperbaikinya. 3. Struktur aksiomatik geometri netral. 4. Aksioma kesejajaran Lobachevsky. 5. Teorema-teorema kesejajaran dalam Geometri Lobachevsky dan pembuktiannya. 6. Teorema-teorema tentang segitiga dalam Geometri Lobachevsky. 7. Teorema-teorema tentang segiempat dalam Geometri Lobachevsky.	
Pustaka	**Utama :**	
	[1] Handout Mata Kuliah Geometri Lobachevsky melalui Pendekatan Etnomatematika dan Teori APOS [2] Handout Mata Kuliah Geometri Lobachevsky melalui Pendekatan Konvensional.	
	Pendukung :	
	[3] Dodgson, c. L. (1990). Neutral geometry. [4] Eves, H. (1972). A Survey of Geometry. Boston: Allyn & Bacon, Inc.	
Dosen Pengampu	Khathibul Umam Zaid Nugroho, M.Pd.	
Matakuliah syarat		

Mg Ke-	Sub-CPMK (Kemampuan akhir tiap tahapan belajar)	Penilaian		Bentuk Pembelajaran, Metode Pembelajaran, Penugasan Mahasiswa, [Estimasi Waktu]		Materi Pembelajaran [Pustaka]	Bobot Penilaian (%)
		Indikator	Kriteria & Bentuk	Luring (*offline*)	Daring (*online*)		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	Memahami kemampuan awal mahasiswa tentang geometri Euclid dan kemampuan awal Geometri Lobachevsky.	**(1) Tes Kemampuan Spasial Geometri Euclid (60')** (2) **Tes Awal Kemampuan Spasial Geometri Lobachevsky (60')**					5
2	Memahami dan menerapkan Struktur deduktif aksiomatik dalam sistem geometri.	Dapat menerapkan Struktur deduktif aksiomatik dalam sistem geometri.	Kriteria: Ketepatan dan penugasan Bentuk tes: Tugas mandiri Bentuk non tes: pesentasi	- Kuliah dan diskusi - [TM: 1x (2x50')] - Tugas 2: membuat ringkasan tentang operasi-operasi pada himpunan fuzzy. - [PT + BM: (1+1) x (2 x 50')]	*Zoom Meeting*	Struktur deduktif aksiomatik dalam sistem geometri. [1],[2],[4]	15
	Memahami kelemahan aksioma kesejajaran Euclid dan upaya memperbaikinya	Dapat mengerti kelemahan aksioma kesejajaran Euclid dan upaya memperbaikinya				Kelemahan aksioma kesejajaran Euclid dan upaya memperbaikinya. [1],[2],[4]	
3	Memahami dan menerapkan Struktur aksiomatik geometri netral.	Ketepatan menerapkan Struktur aksiomatik geometri netral.	Kriteria: Ketepatan dan penugasan Bentuk tes: Tugas mandiri	- Kuliah dan diskusi - [TM: 1x (2x50')] - Tugas 3: menjawab soal-soal tentang ukuran fuzzy - [PT + BM: (1+1) x (2 x 50')]	*Zoom Meeting*	Struktur aksiomatik geometri netral. [3]	15
4	Memahami dan menerapkan Aksioma kesejajaran Lobachevsky	Ketepatan menerapkan Aksioma kesejajaran Lobachevsky	Kriteria: Ketepatan dan penugasan Bentuk non tes: Presentasi	- Kuliah dan diskusi - [TM: 1x (2x50')] - Tugas 4: membuat ringkasan tentang prinsip perluasan dan bilangan fuzzy	*Zoom Meeting*	Aksioma kesejajaran Lobachevsky. [1],[2],[4]	15

				- [PT + BM: (1+1) x (2 x 50')]			
5	Memahami dan menerapkan Teorema-teorema kesejajaran dalam Geometri Lobachevsky dan pembuktiannya	Ketepatan menerapkan Teorema-teorema kesejajaran dalam Geometri Lobachevsky dan pembuktiannya	Kriteria: Ketepatan dan penugasan Bentuk non tes: Presentasi	- Kuliah dan diskusi - [TM: 1x (2x50')] - Tugas 4: membuat ringkasan tentang prinsip perluasan dan bilangan fuzzy - [PT + BM: (1+1) x (2 x 50')]	*Zoom Meeting*	Teorema-teorema kesejajaran dalam Geometri Lobachevsky dan pembuktiannya. [1],[2],[4]	15
6	Memahami dan menerapkan Teorema-teorema tentang segitiga dalam Geometri Lobachevsky	Ketepatan menerapkan Teorema-teorema tentang segitiga dalam Geometri Lobachevsky	Kriteria: Ketepatan dan penugasan Bentuk non tes: Presentasi	- Kuliah dan diskusi - [TM: 1x (2x50')] - Tugas 4: membuat ringkasan tentang prinsip perluasan dan bilangan fuzzy - [PT + BM: (1+1) x (2 x 50')]	*Zoom Meeting*	Teorema-teorema tentang segitiga dalam Geometri Lobachevsky. [1],[2],[4]	15
7	Memahami dan menerapkan Teorema-teorema tentang segiempat dalam Geometri Lobachevsky	Ketepatan menerapkan Teorema-teorema tentang segiemoat dalam Geometri Lobachevsky	Kriteria: Ketepatan dan penugasan Bentuk non tes: Presentasi	- Kuliah dan diskusi - [TM: 1x (2x50')] - Tugas 4: membuat ringkasan tentang prinsip perluasan dan bilangan fuzzy - [PT + BM: (1+1) x (2 x 50')]	*Zoom Meeting*	Teorema-teorema tentang segiempat dalam Geometri Lobachevsky. [1],[2],[4]	15
8	Tes Akhir Kemampuan spasial Geometri Lobachevsky						

UNNES	**UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG** **SEKOLAH PASCASARJANA** **S-3 PENDIDIKAN MATEMATIKA**

SILABUS SINGKAT

MATA KULIAH	Nama	Geometri Lobachevsky
	Kode	MPM – xxx
	Kredit	2 SKS
	Semester	Pilihan

DESKRIPSI MATA KULIAH

Mata kuliah ini membahas tentang Geometri dipandang sebagai suatu sistem deduktif, yang terdiri dari Geometri Netral, Geometri Lobachevsky (Hiperbolik), Geometri Riemman (Elliptik), yang dibandingkan dengan Geometri Euclid. Tujuannya: mahasiswa Program Studi Tadris Matematika memiliki landasan yang kuat untuk pengembangan keilmuan bidang Geometri Lobachevsky (hiperbolik) maupun matematika lanjut untuk mengaplikasikan wawasan keilmuannya.

CAPAIAN PEMBELAJARAN MATA KULIAH (CPMK)

1	Memahami dan menguasai konsep dan prinsip Geometri Lobachevsky (hiperbolik) (konsep pangkal (unsur primitif), pernyataan pangkal (aksioma), konsep yang didefinsikan (definisi), dan pernyataan-pernyataan yang harus dibuktikan (teorema, lemma, corollary)); aksioma kesejajaran Euclid melalui pendekatan etnomatematika (budaya lokal). Mahasiswa belajar memahami pentingnya belajar Geometri Non-Euclid melalui Geometri Netral. Mahasiswa belajar tentang struktur aksiomatik geometri netral: Aksioma Archimedes, konsep segiempat Saccheri dan teorema-teoremanya. Memahami aksioma kesejajaran Lobachevsky, dan beberapa konsekuensi logisnya. Mahasiswa juga dapat mengembangkan konsep tersebut lebih lanjut.

SUB CAPAIAN PEMBELAJARAN MATA KULIAH (Sub-CPMK)

1	Memahami dan menerapkan struktur deduktif aksiomatik dalam sistem geometri..
2	Memahami kelemahan aksioma kesejajaran Euclid dan upaya memperbaikinya.
3	Memahami dan menerapkan struktur aksiomatik geometri netral.
4	Memahami dan menerapkan Aksioma kesejajaran Lobachevsky.
5	Memahami teorema-teorema kesejajaran dalam Geometri Lobachevsky dan pembuktiannya.
6	Memahami dan menerapkan Teorema-teorema tentang segitiga dalam Geometri Lobachevsky.
7	Memahami dan menerapkan Teorema-teorema tentang segiempat dalam Geometri Lobachevsky.

MATERI PEMBELAJARAN

1	Struktur deduktif aksiomatik dalam sistem geometri
2	Kelemahan aksioma kesejajaran Euclid dan upaya memperbaikinya.
3	Struktur aksiomatik geometri netral.
4	Aksioma kesejajaran Lobachevsky.
5	Teorema-teorema kesejajaran dalam Geometri Lobachevsky dan pembuktiannya.
6	Teorema-teorema tentang segitiga dalam Geometri Lobachevsky.
7	Teorema-teorema tentang segiempat dalam Geometri Lobachevsky

PUSTAKA

PUSTAKA UTAMA

[1] Handout Mata Kuliah Geometri Lobachevsky melalui Pendekatan Etnomatematika dan Teori APOS
[2] Handout Mata Kuliah Geometri Lobachevsky melalui Pendekatan Konvensional.

PUSTAKA PENDUKUNG

[3] Dodgson, c. L. (1990). Neutral geometry.
[4] Eves, H. (1972). A Survey of Geometry. Boston: Allyn & Bacon, Inc.

PRASYARAT (Jika ada)

Pengantar Dasar Matematika

RUBRIK PENILAIAN

A. NILAI SIKAP DAN AKTIVITAS

Nilai sikap dan nilai aktivitas adalah kumpulan penilaian dosen terhadap masing-masing mahasiswa pada setiap pertemuan berkaitan dengan sikap dan aktivitas keseharian mahasiswa

Tabel. Rubrik Penilaian Aspek Sikap, Aktivitas dan Bobot Ide/Gagasan

No.	Aspek Penilaian	Indikator Penilaian	Skala Penilaian Skor 0 – 100
1.	Sikap	a. Persentase kehadiran kuliah	
		b. Ketepatan waktu kehadiran	
		c. Ketepatan waktu pengumpulan tugas)	
		d. Etika/sopan santun mengikuti kuliah	
		e. Kejujuran/originalitas laporan tugas	
		f. Kedewasaan berdiskusi	
		g. Kepemimpinan	
		h. Kerja sama	
2.	Aktivitas	a. Keaktipan mengajukan pertanyaan	
		b. Keaktipan memberi jawaban lisan/tulisan	
		c. Keaktipan mengajukan ide/gagasan	
		d. Keaktipan memimpin diskusi	

B. NILAI TUGAS

Nilai Tugas adalah kumpulan penilaian dosen terhadap laporan tugas rutin dan tugas khusus dari masing-masing mahasiswa. Bobot minimum nilai tugas adalah 0 dan maksimum adalah 100.

C. MINI RESEARCH (Pilihan)

Definisi : Dalam konteks ini, mini research didefenisikan sebagai salah satu bentuk tugas dalam perkuliahan yang berbentuk penulisan makalah ilmiah/artikel.

Aspek : Aspek- aspek yang akan dievaluasi meliputi: Naskah telah ditulis dengan tepat; Rasionalitas yang diuraikan pada pendahuluan dengan baik; Metode penelitian baik, jelas dan rasional; Teks dapat diterima secara ilmiah dan empiris; Hasil penelitian memiliki novelty yang baik dan state of the art; Gambar/tabel/skema sudah sesuai, dan dibuat berdasarkan data yang akurat; Penulis menyajikan data yang valid dan dapat dipercaya; Teks mudah untuk ditafsirkan dan dipahami; Data telah diinterpretasikan dengan baik; Kesimpulan telah disajikan dengan cara yang konsisten dengan bukti dan argumen yang disajikan; Kajian telah ditulis secara jelas, komprehensif, dan relevan dengan bidangnya..

Tujuan Tugas : Melatih keterampilan mahasiswa dalam melakukan riset sederhana yang dimulai dengan penulisan proposal, pelaksanaan riset dan pelaporan hasil.

Sifat Tugas : Kelompok yang terdiri atas 3 – 4 orang mahasiswa.

Batasan Tugas : Mini research dibatasi dalam penentuan 1 (satu) parameter dalam topik tertentu dalam suatu matakuliah

Waktu : 1 minggu

Rubrik Penilaian

No.	Rubrik	Bobot (B)	Skor (S)	Nilai (B x S)
1.	Naskah telah ditulis dengan baik.	9		
2.	Rasionalitas yang diuraikan pada pendahuluan cukup baik.	9		
3.	Metode penelitian baik, jelas dan rasional.	9		
4.	Teks dapat diterima secara ilmiah dan empiris.	9		
5.	Hasil penelitian memiliki *novelty* yang baik dan/atau *state of the art*.	10		
6.	Gambar/tabel/skema sudah sesuai, dan dibuat berdasarkan data yang akurat.	9		
7.	Penulis menyajikan data yang valid dan dapat dipercaya.	9		
8.	Teks mudah untuk ditafsirkan dan dipahami.	9		
9.	Data telah diinterpretasikan dengan baik	9		
10.	Kesimpulan telah disajikan dengan cara yang konsisten dengan bukti dan argumen yang disajikan.	9		
11.	Kajian telah ditulis secara jelas, komprehensif, dan relevan dengan bidangnya	9		
	Total Nilai	100		

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS) & SILABUS

(2) GEOMETRI RIEMMAN

Disusun oleh
Khathibul Umam Zaid Nugroho
Prof. Dr. YL. Sukestiyarno, M.S.
Dr. Sugiman, M.Si.
Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si.

UNNES	**UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG** **SEKOLAH PASCASARJANA** **S-3 PENDIDIKAN MATEMATIKA**	**Kode Dokumen**

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER

MATA KULIAH (MK)	**KODE**	**Rumpun MK**	**BOBOT (sks)**		**SEMESTER**	**Tgl Penyusunan**
Geometri Riemman	MPM – xxx	Matematika	**T=2**	**P=0**	Pilihan	1 Januari 2022

OTORISASI/PENGESAHAN	**Pengembang RPS**	**Koordinator RMK**	**Ketua PRODI**
	Khathibul Umam Zaid Nugroho		

Capaian Pembelajaran (CP)	**CPL-PRODI yang dibebankan pada MK**	
		SIKAP
	CPL-1	S2. Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
	CPL-2	S8. Meninternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.
	CPL-3	S9. Menunjukkan sikap bertanggung jawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri.
		PENGETAHUAN
	CPL-4	KP2. Menguasai konsep teoretis (deduktif-aksiomatik) matematika terutama system geometri mendukung pembelajaran matematika di pendidikan dasar dan menengah serta untuk studi lanjut.
		KETERAMPILAN UMUM
	CPL-5	KU3. Mampu menyusun ide, hasil pemikiran, dan argumen saintifik secara bertanggung jawab dan berdasarkan etika akademik, serta mengkomunikasikannya melalui media kepada masyarakat akademik dan masyarakat luas;
	CPL-6	KU4. Mampu mengidentifikasi bidang keilmuan yang menjadi obyek penelitiannya dan memosisikan ke dalam suatu skema penyelesaian masalah yang lebih menyeluruh dan bersifat interdisiplin atau multi disiplin;
		KETERAMPILAN KHUSUS
		-
	Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK)	
	CPMK	Memahami dan menguasai konsep dan prinsip Geometri Riemman (hiperbolik) (konsep pangkal (unsur primitif), pernyataan pangkal (aksioma), konsep yang didefinsikan (definisi), dan pernyataan-pernyataan yang harus dibuktikan (teorema, lemma, corollary)); aksioma kesejajaran Euclid melalui pendekatan etnomatematika (budaya lokal). Mahasiswa belajar memahami pentingnya belajar Geometri Non-

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Euclid melalui Geometri Netral. Mahasiswa belajar tentang struktur aksiomatik geometri netral: Aksioma Archimedes, konsep segiempat Saccheri dan teorema-teoremanya. Memahami aksioma kesejajaran Riemman, dan beberapa konsekuensi logisnya. Mahasiswa juga dapat mengembangkan konsep tersebut lebih lanjut.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">CPL $\Rightarrow$ Sub-CPMK</td></tr>
<tr><td></td><td>CPL-1,
CPL-2,
CPL-3,
CPL-4,
CPL-5,
dan
CPL-6</td><td>Sub-CPMK1 Memahami dan menerapkan struktur deduktif aksiomatik dalam sistem geometri..
Sub-CPMK2 Memahami kelemahan aksioma kesejajaran Euclid dan upaya memperbaikinya.
Sub-CPMK3 Memahami dan menerapkan struktur aksiomatik geometri netral.
Sub-CPMK4 Memahami dan menerapkan Aksioma kesejajaran Riemman.
Sub-CPMK5 Memahami teorema-teorema kesejajaran dalam Geometri Riemman dan pembuktiannya.
Sub-CPMK6 Memahami dan menerapkan Teorema-teorema tentang segitiga dalam Geometri Riemman.
Sub-CPMK7 Memahami dan menerapkan Teorema-teorema tentang segiempat dalam Geometri Riemman.</td></tr>
<tr><td>Deskripsi Singkat MK</td><td colspan="2">Mata kuliah ini membahas tentang Geometri dipandang sebagai suatu sistem deduktif, yang terdiri dari Geometri Netral, Geometri Riemman (Hiperbolik), Geometri Riemman (Elliptik), yang dibandingkan dengan Geometri Euclid.</td></tr>
<tr><td>Bahan Kajian / Materi Pembelajaran</td><td colspan="2">1. Struktur deduktif aksiomatik dalam sistem geometri
2. Kelemahan aksioma kesejajaran Euclid dan upaya memperbaikinya.
3. Struktur aksiomatik geometri netral.
4. Aksioma kesejajaran Riemman.
5. Teorema-teorema kesejajaran dalam Geometri Riemman dan pembuktiannya.
6. Teorema-teorema tentang segitiga dalam Geometri Riemman.
7. Teorema-teorema tentang segiempat dalam Geometri Riemman.</td></tr>
<tr><td>Pustaka</td><td colspan="2">Utama :</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">[1] Handout Mata Kuliah Geometri Riemman melalui Pendekatan Etnomatematika dan Teori APOS
[2] Handout Mata Kuliah Geometri Riemman melalui Pendekatan Konvensional.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Pendukung :</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">[3] Dodgson, c. L. (1990). Neutral geometry.
[4] Eves, H. (1972). A Survey of Geometry. Boston: Allyn & Bacon, Inc.</td></tr>
<tr><td>Dosen Pengampu</td><td colspan="2">Khathibul Umam Zaid Nugroho, M.Pd.</td></tr>
<tr><td>Matakuliah syarat</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Mg Ke-	Sub-CPMK (Kemampuan akhir tiap tahapan belajar)	Penilaian		Bentuk Pembelajaran, Metode Pembelajaran, Penugasan Mahasiswa, [Estimasi Waktu]		Materi Pembelajaran [Pustaka]	Bobot Penilaian (%)
		Indikator	Kriteria & Bentuk	Luring (*offline*)	Daring (*online*)		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	Memahami kemampuan awal mahasiswa tentang geometri Euclid dan kemampuan awal Geometri Riemman.	**(1) Tes Kemampuan Spasial Geometri Euclid (60')** (2) **Tes Awal Kemampuan Spasial Geometri Riemman (60')**					5
2	Memahami dan menerapkan Struktur deduktif aksiomatik dalam sistem geometri.	Dapat menerapkan Struktur deduktif aksiomatik dalam sistem geometri.	Kriteria: Ketepatan dan pengugasan Bentuk tes: Tugas mandiri Bentuk non tes: pesentasi	- Kuliah dan diskusi - [TM: 1x (2x50')] - Tugas 2: membuat ringkasan tentang operasi-operasi pada himpunan fuzzy. - [PT + BM: (1+1) x (2 x 50')]	*Zoom Meeting*	Struktur deduktif aksiomatik dalam sistem geometri. [1],[2],[4]	15
	Memahami kelemahan aksioma kesejajaran Euclid dan upaya memperbaikinya	Dapat mengerti kelemahan aksioma kesejajaran Euclid dan upaya memperbaikinya				Kelemahan aksioma kesejajaran Euclid dan upaya memperbaikinya. [1],[2],[4]	
3	Memahami dan menerapkan Struktur aksiomatik geometri netral.	Ketepatan menerapkan Struktur aksiomatik geometri netral.	Kriteria: Ketepatan dan pengugasan Bentuk tes: Tugas mandiri	- Kuliah dan diskusi - [TM: 1x (2x50')] - Tugas 3: menjawab soal-soal tentang ukuran fuzzy - [PT + BM: (1+1) x (2 x 50')]	*Zoom Meeting*	Struktur aksiomatik geometri netral. [3]	15
4	Memahami dan menerapkan Aksioma kesejajaran Riemman	Ketepatan menerapkan Aksioma kesejajaran Riemman	Kriteria: Ketepatan dan pengugasan Bentuk non tes: Presentasi	- Kuliah dan diskusi - [TM: 1x (2x50')] - Tugas 4: membuat ringkasan tentang prinsip perluasan dan bilangan fuzzy	*Zoom Meeting*	Aksioma kesejajaran Riemman. [1],[2],[4]	15

				- [PT + BM: (1+1) x (2 x 50')]			
5	Memahami dan menerapkan Teorema-teorema kesejajaran dalam Geometri Riemman dan pembuktiannya	Ketepatan menerapkan Teorema-teorema kesejajaran dalam Geometri Riemman dan pembuktiannya	Kriteria: Ketepatan dan penugasan Bentuk non tes: Presentasi	- Kuliah dan diskusi - [TM: 1x (2x50')] - Tugas 4: membuat ringkasan tentang prinsip perluasan dan bilangan fuzzy - [PT + BM: (1+1) x (2 x 50')]	*Zoom Meeting*	Teorema-teorema kesejajaran dalam Geometri Riemman dan pembuktiannya. [1],[2],[4]	15
6	Memahami dan menerapkan Teorema-teorema tentang segitiga dalam Geometri Riemman	Ketepatan menerapkan Teorema-teorema tentang segitiga dalam Geometri Riemman	Kriteria: Ketepatan dan penugasan Bentuk non tes: Presentasi	- Kuliah dan diskusi - [TM: 1x (2x50')] - Tugas 4: membuat ringkasan tentang prinsip perluasan dan bilangan fuzzy - [PT + BM: (1+1) x (2 x 50')]	*Zoom Meeting*	Teorema-teorema tentang segitiga dalam Geometri Riemman. [1],[2],[4]	15
7	Memahami dan menerapkan Teorema-teorema tentang segiempat dalam Geometri Riemman	Ketepatan menerapkan Teorema-teorema tentang segiemoat dalam Geometri Riemman	Kriteria: Ketepatan dan penugasan Bentuk non tes: Presentasi	- Kuliah dan diskusi - [TM: 1x (2x50')] - Tugas 4: membuat ringkasan tentang prinsip perluasan dan bilangan fuzzy - [PT + BM: (1+1) x (2 x 50')]	*Zoom Meeting*	Teorema-teorema tentang segiempat dalam Geometri Riemman. [1],[2],[4]	15
8	Tes Akhir Kemampuan spasial Geometri Riemman						

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
SEKOLAH PASCASARJANA
S-3 PENDIDIKAN MATEMATIKA

SILABUS SINGKAT

MATA KULIAH	Nama	Geometri Riemman
	Kode	MPM – xxx
	Kredit	2 SKS
	Semester	Pilihan

DESKRIPSI MATA KULIAH

Mata kuliah ini membahas tentang Geometri dipandang sebagai suatu sistem deduktif, yang terdiri dari Geometri Netral, Geometri Riemman (Hiperbolik), Geometri Riemman (Elliptik), yang dibandingkan dengan Geometri Euclid. Tujuannya: mahasiswa Program Studi Tadris Matematika memiliki landasan yang kuat untuk pengembangan keilmuan bidang Geometri Riemman (hiperbolik) maupun matematika lanjut untuk mengaplikasikan wawasan keilmuannya.

CAPAIAN PEMBELAJARAN MATA KULIAH (CPMK)

1	Memahami dan menguasai konsep dan prinsip Geometri Riemman (hiperbolik) (konsep pangkal (unsur primitif), pernyataan pangkal (aksioma), konsep yang didefinsikan (definisi), dan pernyataan-pernyataan yang harus dibuktikan (teorema, lemma, corollary)); aksioma kesejajaran Euclid melalui pendekatan etnomatematika (budaya lokal). Mahasiswa belajar memahami pentingnya belajar Geometri Non-Euclid melalui Geometri Netral. Mahasiswa belajar tentang struktur aksiomatik geometri netral: Aksioma Archimedes, konsep segiempat Saccheri dan teorema-teoremanya. Memahami aksioma kesejajaran Riemman, dan beberapa konsekuensi logisnya. Mahasiswa juga dapat mengembangkan konsep tersebut lebih lanjut.

SUB CAPAIAN PEMBELAJARAN MATA KULIAH (Sub-CPMK)

1	Memahami dan menerapkan struktur deduktif aksiomatik dalam sistem geometri..
2	Memahami kelemahan aksioma kesejajaran Euclid dan upaya memperbaikinya.
3	Memahami dan menerapkan struktur aksiomatik geometri netral.
4	Memahami dan menerapkan Aksioma kesejajaran Riemman.
5	Memahami teorema-teorema kesejajaran dalam Geometri Riemman dan pembuktiannya.
6	Memahami dan menerapkan Teorema-teorema tentang segitiga dalam Geometri Riemman.
7	Memahami dan menerapkan Teorema-teorema tentang segiempat dalam Geometri Riemman.

MATERI PEMBELAJARAN

1	Struktur deduktif aksiomatik dalam sistem geometri
2	Kelemahan aksioma kesejajaran Euclid dan upaya memperbaikinya.
3	Struktur aksiomatik geometri netral.
4	Aksioma kesejajaran Riemman.
5	Teorema-teorema kesejajaran dalam Geometri Riemman dan pembuktiannya.
6	Teorema-teorema tentang segitiga dalam Geometri Riemman.
7	Teorema-teorema tentang segiempat dalam Geometri Riemman

PUSTAKA

PUSTAKA UTAMA

[1] Handout Mata Kuliah Geometri Riemman melalui Pendekatan Etnomatematika dan Teori APOS
[2] Handout Mata Kuliah Geometri Riemman melalui Pendekatan Konvensional.

PUSTAKA PENDUKUNG

[3] Dodgson, c. L. (1990). Neutral geometry.
[4] Eves, H. (1972). A Survey of Geometry. Boston: Allyn & Bacon, Inc.

PRASYARAT (Jika ada)

Pengantar Dasar Matematika

RUBRIK PENILAIAN

A. NILAI SIKAP DAN AKTIVITAS

Nilai sikap dan nilai aktivitas adalah kumpulan penilaian dosen terhadap masing-masing mahasiswa pada setiap pertemuan berkaitan dengan sikap dan aktivitas keseharian mahasiswa

Tabel. Rubrik Penilaian Aspek Sikap, Aktivitas dan Bobot Ide/Gagasan

No.	Aspek Penilaian	Indikator Penilaian	Skala Penilaian Skor 0 – 100
1.	Sikap	a. Persentase kehadiran kuliah	
		b. Ketepatan waktu kehadiran	
		c. Ketepatan waktu pengumpulan tugas)	
		d. Etika/sopan santun mengikuti kuliah	
		e. Kejujuran/originalitas laporan tugas	
		f. Kedewasaan berdiskusi	
		g. Kepemimpinan	
		h. Kerja sama	
2.	Aktivitas	a. Keaktipan mengajukan pertanyaan	
		b. Keaktipan memberi jawaban lisan/tulisan	
		c. Keaktipan mengajukan ide/gagasan	
		d. Keaktipan memimpin diskusi	

B. NILAI TUGAS

Nilai Tugas adalah kumpulan penilaian dosen terhadap laporan tugas rutin dan tugas khusus dari masing-masing mahasiswa. Bobot minimum nilai tugas adalah 0 dan maksimum adalah 100.

C. MINI RESEARCH (Pilihan)

Definisi : Dalam konteks ini, mini research didefenisikan sebagai salah satu bentuk tugas dalam perkuliahan yang berbentuk penulisan makalah ilmiah/artikel.

Aspek : Aspek- aspek yang akan dievaluasi meliputi: Naskah telah ditulis dengan tepat; Rasionalitas yang diuraikan pada pendahuluan dengan baik; Metode penelitian baik, jelas dan rasional; Teks dapat diterima secara ilmiah dan empiris; Hasil penelitian memiliki novelty yang baik dan state of the art;

		Gambar/tabel/skema sudah sesuai, dan dibuat berdasarkan data yang akurat; Penulis menyajikan data yang valid dan dapat dipercaya; Teks mudah untuk ditafsirkan dan dipahami; Data telah diinterpretasikan dengan baik; Kesimpulan telah disajikan dengan cara yang konsisten dengan bukti dan argumen yang disajikan; Kajian telah ditulis secara jelas, komprehensif, dan relevan dengan bidangnya..
Tujuan Tugas	:	Melatih keterampilan mahasiswa dalam melakukan riset sederhana yang dimulai dengan penulisan proposal, pelaksanaan riset dan pelaporan hasil.
Sifat Tugas	:	Kelompok yang terdiri atas 3 – 4 orang mahasiswa.
Batasan Tugas	:	Mini research dibatasi dalam penentuan 1 (satu) parameter dalam topik tertentu dalam suatu matakuliah
Waktu	:	1 minggu

Rubrik Penilaian

No.	Rubrik	Bobot (B)	Skor (S)	Nilai (B x S)
1.	Naskah telah ditulis dengan baik.	9		
2.	Rasionalitas yang diuraikan pada pendahuluan cukup baik.	9		
3.	Metode penelitian baik, jelas dan rasional.	9		
4.	Teks dapat diterima secara ilmiah dan empiris.	9		
5.	Hasil penelitian memiliki *novelty* yang baik dan/atau *state of the art*.	10		
6.	Gambar/tabel/skema sudah sesuai, dan dibuat berdasarkan data yang akurat.	9		
7.	Penulis menyajikan data yang valid dan dapat dipercaya.	9		
8.	Teks mudah untuk ditafsirkan dan dipahami.	9		
9.	Data telah diinterpretasikan dengan baik	9		
10.	Kesimpulan telah disajikan dengan cara yang konsisten dengan bukti dan argumen yang disajikan.	9		
11.	Kajian telah ditulis secara jelas, komprehensif, dan relevan dengan bidangnya	9		
	Total Nilai	100		

BIODATA PENULIS

Khathibul Umam Zaid Nugroho adalah putra sulung dari pasangan Prof. Dr. H. Wahyu Widada dan Assoc. Prof. Dr. Hj. Dewi Herawaty, M.Pd. Dia lahir di Bengkulu Selatan pada 04 November 1994. Pendidikan formal diawali dengan SD Muhammadiyah Ketintang Surabaya (Kelas 1-4) dan Kelas 5-6 diselesaikan di SD N 51 Kota Bengkulu, kemudian lulus di SMP N 3 Kota Bengkulu, SMA N 2 Kota Bengkulu. Dia menyelesaikan sarjananya di Universitas Muhammadiyah Bengkulu, kemudian studi lanjut dan lulus dengan predikat pujian (*cumlaude*) pada Megister Pendidikan Matematika, Universitas Bengkulu. Selanjutnya aktif sebagai mahasiswa Program Doktor Pendidikan Matematika mulai Semester Genap 2020 di Program S-3 Pendidikan Matematika Universitas Negeri Semarang dengan NIM: 0401620028. Dia bersama tim juga aktif meneliti, dan publikasi karya ilmiah baik nasional maupun internasional. Hal itu dapat dilihat di dunia maya melalui link sebagai berikut:

(1) Google Scholar ID: https://scholar.google.co.id/citations?user=-JMdhbgAAAAJ&hl=id;
(2) Scopus ID:
(3) https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57211573834;
(4) Orcid ID: https://orcid.org/0000-0002-0672-4953;
(5) Researcher ID: https://publons.com/wos-op/researcher/GRF-3007-2022;
(6) LoopFrontiers ID: https://loop.frontiersin.org/people/2064818/overview;
(7) Researchid: https://researchid.co/rid29749;
(8) Ada beberapa alamat surat elektronik di antaranya: khathibulumamzaidnugroho@gmail.com; khathibulumamzaidnugroho@students.unnes.ac.id.

Saat ini dia tercatat memiliki **H-Indeks Scopus 4 dengan 41 sitasi**, **H-Indeks Google Scholar sebesar 12 dengan 356 kutipan**. Dia juga diundang untuk menjadi reviewer di beberapa jurnal internasional terindeks scopus maupun jurnal-jurnal nasional. Di antara jurnal internasional tersebut adalah *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, dan *International Journal of Evaluation and Research in Education*.

.