ISBN : 978-602-1034-06-4

http://matematika.unnes.ac.id/Prosiding/2014

PROSIDING SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA VIII

SEMARANG, 8 NOVEMBER 2014

"Peran Serta Cendekia Matematika dan Pendidikan Matematika dalam Akselerasi Perubahan Karakter Bangsa"

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Semarang

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA VIII

"Peran serta Cendekia Matematika dan Pendidikan Matematika dalam Akselerasi Perubahan Karakter Bangsa"

ISBN 978-602-1034-06-4

EDITORIAL

Penanggungjawab
Prof. Dr. Wiyanto, M.Si.

Tim Review
Prof. Dr. Zaenuri Mastur, S.E. M. Si.,Akt.
Dr. Masrukan, M.Si
Dr. Wardono, M. Si
Dr. Iwan Junaedi, S.Si., M.Pd

Tim Editor
Ary Woro Kurniasih, S.Pd., M.Pd
Riza Arifudin, S.Pd., M.CS
Bambang Eko Susilo, S.Pd., M.Pd
Muhammad Kharis, S.Si., M.Sc
Nuriana R. D. N., S.Pd., M.Pd
Amidi, S.Si., M.Pd

Layout
Zaidin Asyabah
Tiara Budi Utami

Cover Layouter
Luky Triohandoko

Penerbit:

Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Semarang

PRAKATA

Seminar Nasional Matematika VIII Jurusan Matematika FMIPA Unnes bertema,"Peran serta Cendekia Matematika dan Pendidikan Matematika dalam Akselerasi Perubahan Karakter Bangsa**"**. Seminar berlangsung pada hari Sabtu, tanggal 8 November 2014 di kampus Universitas Negeri Semarang.

Tujuan seminar adalah tukar menukar hasil penelitian maupun gagasan konseptual dalam bidang Pendidikan Matematika dan Matematika, serta mencari alternatif solusi setiap permasalahan sebagai upaya akselerasi perubahan karakter bangsa.

Pemakalah yang hadir berasal dari berbagai kalangan, baik dosen, peneliti (praktisi), maupun guru yang tersebar di seluruh Indonesia, seperti Unsyah (NAD), Surya Research and Education Center Tangerang, Lembaga Penerbangan Antariksa Nasional, UPI Bandung, Unswagati (Cirebon), Unnes Semarang, IKIP Veteran Semarang, UKSW Salatiga, ITS Surabaya, Unesa Surabaya, dan Universitas Muhammadiyah Ponorogo. Setiap makalah ditelaah oleh tim *review*, terkait substansi dan tata tulis, sebelum diterbitkan.

Semoga penerbitan prosiding ini memberikan sumbangan bagi kemajuan ilmu pengetahuan, khususnya Pendidikan Matematika dan Matematika.

Tim Editor

DAFTAR ISI

MASALAH PENUGASAN OPTIMAL DENGAN ALGORITMA KUHN-MUNKRES

Mulyono
Jurusan Matematika FMIPA Unnes
Kampus Sekaran Gedung D7 Lantai 1, Semarang
Surel:mulyono_unnes@yahoo.com

Abstrak

Masalah penugasan optimal (*optimal assignment problem*) adalah suatu masalah mengenai pengaturan pada individu (objek) untuk melaksanakan tugas (kegiatan), dengan demikian *profit* yang diperoleh untuk pelaksanaan penugasan tersebut dapat dimaksimalkan. Salah satu metode yang digunakan dalam menyelesaikan persoalan ini adalah dengan menggunakan algoritma Kuhn-Munkres. Algoritma Kuhn-Munkres adalah salah satu algoritma yang digunakan untuk menyelesaikan persoalan masalah penugasan. Dengan menggunakan algoritma ini, solusi optimal yang terbaik akan ditemukan. Permasalahan penugasan yang ada direpresentasikan dengan graf bipartit lengkap dengan banyaknya anggota pada masing-masing partisinya sama.

Kata Kunci: Masalah Penugasan Optimal; Algoritma Kuhn-Munkres; Graf Bipartit Lengkap

A. Pendahuluan

Berbagai metode digunakan demi meningkatkan produktivitas perusahaan yang pada akhirnya akan mendongkrak *profit* (keuntungan). Salah satu hal yang mempengaruhi perkembangan suatu perusahaan adalah kualitas kinerja karyawannya. Ketersediaan tenaga ahli (karyawan) saja tidaklah cukup, namun yang harus lebih diperhatikan adalah bagaimana mengelola tenaga ahli (karyawan) yang ada agar kinerjanya lebih optimal. Salah satunya dengan menempatkan karyawan pada pekerjaan dimana penempatan tersebut merupakan penempatan yang optimal.

Penempatan sejumlah X karyawan pada Y pekerjaan, jika banyaknya karyawan dimisalkan sama dengan banyaknya pekerjaan dengan mempertimbangkan aspek tertetu seperti pengoptimalan *profit* yang didapat dari penempatan X karyawan terhadap Y buah pekerjaan dikenal dengan masalah penugasan optimal (*optimal assigment problem*). Penerapan graf pada masalah penugasan optimal ini dapat dinyatakan sebagai graf bipartit (Clark& Holton, 1991.Dalam Siang(2004) graf bipartit didefinisikan sebagai suatu graf sederhana G yang himpunan titik V-nya dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 yang tak beririsan sedemikian hingga setiap sisi dalam graf menghubungkan suatu titik di V_1 dengan titik di V_2 (sedemikian hingga tak ada sisi di dalam G menghubungkan dua titik di V_1 maupun di V_2). Karyawan dianggap sebagai V_1 dan pekerjaan sebagai V_2. Karena aspek yang dioptimalkan dalam masalah penugasan optimal dianggap sebagai bobot dan peluang penempatan tiap X karyawan pada Y buah pekerjaan dianggap sama, maka untuk mencari solusinya graf bipartit yang digunakan adalah graf bipartit lengkap berbobot.

Untuk mencari solusi dari masalah penugasan optimal yang dinyatakan sebagai graf bipartit lengkap berbobot adalah dengan menerapkan konsep penjodohan (*matching*), khususnya penjodohan sempurna pada graf bipartit lengkap berbobot. Penjodohan sempurna dengan bobot paling maksimal adalah solusinya.

Pada dasarnya pencarian penjodohan sempurna dengan bobot maksimal dapat dilakukan dengan mendaftar semua penjodohan sempurna yang berbeda, dan

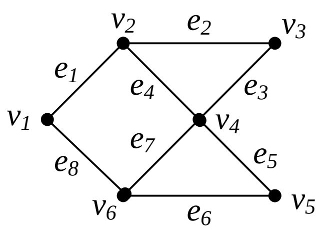
ISBN 978-602-1034-06-4

menghitung jumlah bobot dari tiap penjodohan sempurna yang diperoleh. Banyaknya penjodohan sempurna yang berbeda pada suatu graf bipartit lengkap dengan *n* titik pada masing-masing partisinya adalah *n*!. Sangat tidak efisien jika cara ini digunakan, karena semakin banyak jumlah titik maka semakin banyak pula penjodohan sempurna yang berbeda. Oleh karena itu, untuk memudahkan pencarian solusi masalah penugasan optimal, dapat digunakan sebuah algoritma optimasi yaitu algoritma Kuhn-Munkres.Algoritma Kuhn-Munkres adalah algoritma yang dapat digunakan untuk menyelesaikanmasalah penugasan optimal. Pada tahun 1955, Harold Kuhn (seorang matematikawan asal Amerika) mempublikasikan sebuah metode yang diberi nama metode *Hungarian*,yaitu sebuah algoritma kombinatorik untuk optimasi yang dapat digunakan untuk menemukan solusi optimal darimasalah penugasan. Pada tahun 1957, James Raymond Munkres memperbaiki algoritma Kuhn. Oleh karena itu, algoritma ini sering disebut algoritma Kuhn-Munkres. Untuk mencari solusi dari masalah penugasan optimal dengan menggunakan algoritma Kuhn-Munkres salah satunya dapat dilakukan dengan merepresentasikan algoritma ini pada graf bipartit.

B. Pembahasan

a. Penjodohan

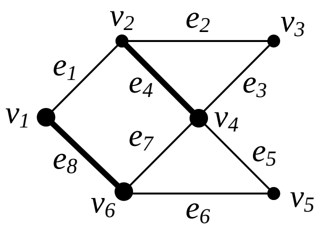
Penjodohan (*matching*)*M* didefinisikan sebagai sebuah himpunan sisi-sisi pada graf G yang saling lepas. Dua sisi dikatakan saling lepas jika kedua sisi tersebut tidak mempunyai titik ujung persekutuan (Budayasa, 2007).



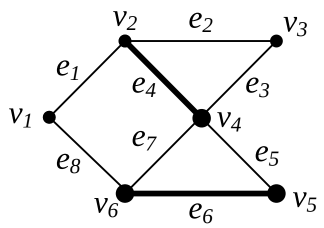
Gambar 1. Graf G

Himpunan $M_1 = \{e_1, e_3, e_6\}$ adalah sebuah penjodohan berukuran 3 pada G, begitu juga himpunan $M_2 = \{e_2, e_5, e_8\}$ adalah sebuah penjodohan berukuran 3. Sedangkan himpunan $M_3 = \{e_4, e_8\}$ dan himpunan $M_4 = \{e_4, e_6\}$, masing-masing adalah sebuah penjodohan berukuran 2 pada graf G. tetapi himpunan $E = \{e_1, e_2, e_5\}$ bukan penjodohan pada G karena sisi e_1 dan e_2 terkait ke titik yang sama yaitu di titik v_2

Sebuah titik di G dikatakan tertutup oleh penjodohan M jika titik *v* merupakan titik akhir (ujung) dari salah satu sisi di M. Titik *v* dikatakan *M-saturated* jika titik *v* tertutup oleh penjodohan M. Sebaliknya jika titik *v* di graf G tidak tertutup oleh penjodohan M disebut *M-unsaturated*. Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2, penjodohan $M_3 = \{e_4, e_8\}$ menutup titik v_1, v_2, v_4, v_6; tetapi M_3 tidak menutup titik v_3 dan v_5. Dengan kata lain, titik v_1, v_2, v_3, v_6 adalah M_3*-saturated* tetapi titik-titik v_3 dan v_5 adalah M_3*-unsaturated.*



Gambar 2. M_3-*saturated* dan M_3-*unsaturated*

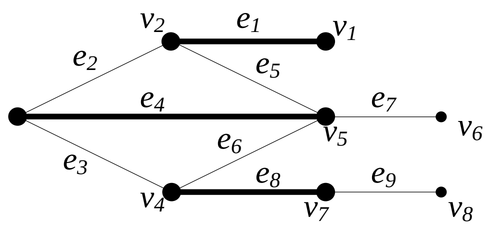


Gambar 3. M_4-*saturated* dan M_4-*unsaturated*

Pada Gambar 3, *penjodohan* $M_4 = \{e_4, e_6\}$ menutup titik v_2, v_4, v_5, v_6; tetapi M_4 tidak menutup v_1 dan v_3. Titik-titik v_2, v_4, v_5, v_6 adalah M_4-*saturated* tetapi titik-titik v_1 dan v_3 adalah M_4-*unsaturated*.

Sebuah penjodohan M digraf G di graf G dinamakan penjodohan maksimum jika G tidak mempunyai penjodohan lain dengan ukuran yang lebih besar dari penjodohan M. Dengan kata lain, jika M' penjodohan pada G maka $|M| \geq |M'|$. Misalnya pada Gambar 1, graf G tidak ada penjodohan berukuran 4, maka M_1 dan M_2 penjodohan maksimum pada G. Sebuah penjodohan M di graf G dikatakan penjodohan sempurna jika M memuat semua titik di G. Dengan kata lain, jika M penjodohan sempurna pada graf G maka setiap titik di G M-*saturated*. Sebagai contoh $M_1 = \{e_1, e_3, e_6\}$ adalah penjodohan sempurna pada graf G, begitu juga $M_2 = \{e_2, e_5, e_8\}$ merupakan penjodohan sempurna pada graf G. Setiap penjodohan sempurna adalah penjodohan maksimum, tetapi tidak berlaku sebaliknya. M adalah penjodohan maksimum, maka belum tentu M penjodohan sempurna.

Misalkan M adalah penjodohan dan P lintasan pada graf G, lintasan P disebut lintasan alternatif-M(*M-alternating path*) jika sisi-sisi pada lintasan P itu bergantian di M dan di E(G)\M. Selanjutnya lintasan P disebut lintasan augmentasi-M (*M-augmenting path*) jika P adalah lintasan alternatif-M (*M-alternating path*) dan titik awal serta titik akhir dari lintasan P tersebut merupakan M-*unsaturated.*



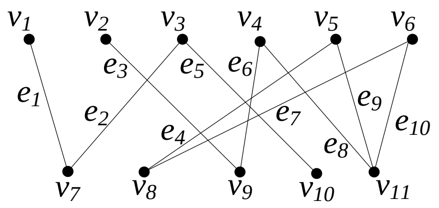
Gambar 4. Lintasan alternatif-M dan lintasan augmentasi-M

Pada Gambar 4 yang merupakan contoh lintasan alternatif–M (*M-alternating path*) yaitu: $v_1e_1v_2e_2v_3e_4v_5e_6v_4\,e_8v_7$. Sedangkan $v_6e_7v_5e_4v_3e_3v_4e_8v_7e_9v_8$ merupakan contoh lintasan augmentasi-M (M-*augmenting path*) karena titik awalnya yaitu v_6 dan titik akhirnya v_8 merupakan titik yang berada pada E(G) dan M-*unsaturated.*

Misalkan M adalah penjodohan pada graf G, dan terdapat penjodohan lain, sebut saja M' dengan $M\Delta M'$ menunjukkan selisih simetris M dan M'. Selisih simetris M dan M' dapat dinotasikan $M\Delta M' = (M\backslash M') \cup (M'\backslash M)$, maka suatu graf $H = G(M\Delta M')$

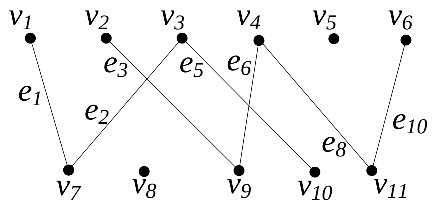
merupakan graf yang direntang oleh sisi M∆M’ dengan menghapus semua sisi M∩M’ dan sisi (G\M) ∩ (G\M’).
Contoh.

Diberikan graf G yang memuat penjodohan M dan penjodohan M’ seperti pada Gambar 5. Akan dicari H = G(M∆M’) .



Gambar 5. Penjodohan M dan Penjodohan M’

Dari Gambar 5 diperoleh penjodohan M = {e_2,e_3, e_4, e_8} dan penjodohan M’={e_1, e_4, e_5, e_6, e_{10}}. Sisi e_4 yang menghubungkan titik v_5 dan titik v_8 merupakan anggota penjodohan M sekaligus anggota penjodohan M’, yaitu $e_4 \in (M \cap M')$. Maka sisi tersebut dihapus. Sisi e_9 yang menghubungkan titik v_5 dan titik v_{11} serta sisi e_7 yang menghubungkan titik v_6 dan titik v_8 bukan anggota penjodohan M sekaligus bukan anggota penjodohan M, yaitu: $e_7, e_9 \in ((G\backslash M) \cap (G\backslash M'))$, oleh karena itu dihapus. Selanjutnya diperoleh H = G(M∆M’) seperti Gambar 6.



Gambar 6. Graf H = G(M∆M’)

b. Penjodohan dan Penutup pada Graf Bipartit

Dalam aplikasi ini untuk menemukan sebuah penjodohan pada graf bipartit yang menutup semua titik pada salah satu partisi. Syarat perlu dan cukup sebuah graf bipartit memiliki penjodohan yang demikian, diberikan oleh Hall (1935). Jika G sebuah graf dan S⊆V(G), maka himunan semua titik G yang bertetangga dengan titik-titik di S, dilambangkan dengan N_G(S) atau N(S).

Teorema1 (Teorema Hall)
Misalkan G adalah graf bipartit dengan partisi (X,Y). Graph G memuat sebuah penjodohan yang menutup semua titik X jika dan hanya jika |N(S)|≥|S|, untuk setiap S⊆ X.

Bukti:

Misalkan graf bipartit G dengan partisi (X,Y) memuat penjodohan M yang menutup semua titik X dan misalkan S⊆X. Karena titik-titikdi S dipasangkan oleh M ke titik yang berbeda di N(S) ⊆ Y maka|N(S)|≥|S|.

Misalkan G adalah graf bipartit dengan partisi (X,Y) yang memenuhi N(S)|≥|S|, $\forall S \subseteq X$. Andaikan G tidak memuat penjodohan yang menutup semua titik X. Misal M*

ISBN 978-602-1034-06-4

adalah penjodohan maksimum di G, karena pengandaian, M* tidak menutup semua titik X, berarti ada titik di X yang tidak ditutupi oleh M*, misalkan titik u. Misalkan Z menyatakan himpunan semua titik yang terhubung ke u oleh lintasan-lintasan" alternatif-M*. Karena M* penjodohan maksimum maka hanya titik u yang tidak tertutup oleh M* di Z. Namakan himpunan S = Z ∩ X dan T = Z ∩ Y. Jelas titik-titik di S\{u} dipasangkan oleh M* dengan titik di T. Oleh karena itu N(S) ⊇ T dan

$$|T| = |S| - 1 \quad \text{……………………(1)}$$

Karena setiap titik di N(S) terhubung ke u oleh lintasan alternatif-M*, diperoleh

$$N(S) = T \text{………..………………(2)}$$

Dan (1) dan (2) didapat

$$|N(S)| = |S| - 1 < |S|,$$

suatu kontradiksi. Dengan demikian teorema terbukti.

c. Algoritma Kuhn-Munkres

Algoritma Kuhn-Munkres adalah algoritma yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah penugasan optimal. Pada tahun 1955, Harold Khun (seorang matematikawan asal Amerika) mempublikasikan sebuah metode yang diberi nama metode *Hungarian* (untuk menghormati dua orang matematikawan asal Hungaria, yaitu D. Kőnig and E. Egerváry), yaitu sebuah algoritma kombinatorik untuk optimasi yang dapat digunakan untuk menemukan solusi optimal dari masalah penugasan. Pada tahun 1957, James Raymond Munkres seorang Professor Emeritus matematika dari MIT memperbaiki algoritma Kuhn. Oleh karena itu, algoritma ini sering disebut algoritma Kuhn-Munkres.

Secara sistematis algoritma tersebut dapat ditulis ke dalam bentuk langkah-langkah sebagai berikut.

Input : Graf bipartit komplit berbobot G dengan partisi (X,Y).

Step 1 : Dimulai dengan sebuah pelabelan titik G, namakan pelabelan λ. tentukan graf G_λ dan pilih penjodohan M sembarang pada G_λ.

Step 2:Jika X tertutup oleh M, maka M adalah penjodohan sempurna karena ($|x| = |y|$), penjodohan M optimal pada G, dan berhenti (STOP). Jika tidak, misal u adalah titik yang tidak tertutup oleh M. Tulis S = $\{u\}$ dan T = $\emptyset$.

Step 3 : Jika $N_{G_\lambda}(S) \supset T$, pergi ke step 4. Jika tidak, $N_{G_\lambda}(S) = T$, hitung $\alpha_\lambda = \min\{\lambda(x) + \lambda(y) - w(xy)\}$, $x \in S$ dan $y \notin T$.

Buatlah pelabelan titik baru, namakan λ*'* dengan

$$\lambda'(v) = \begin{cases} \lambda(v) - \alpha_\lambda \text{jika } v \in S \\ \lambda(v) + \alpha_\lambda \text{jika } v \in T \\ \lambda(v) \text{lainnya} \end{cases}$$

Step 4:Pilih titik *y* di $N_{G_\lambda}(S) \setminus T$. Apakah tertutup oleh M atau tidak. Jika *y* tertutup oleh M dan *yz* ϵ M, maka ganti S dengan $S \cup \{z\}$ dan T dengan T $\cup \{y\}$ dan pergi ke step 3. Jika tidak, misalkan P adalah lintasan-(u,y) augmentasi M di G, ganti M dengan M’= M Δ E(P) dan pergi ke step 2.

(Clark & Holton (1991) dan Budayasa(2007))

d. Aplikasi Algoritma Kuhn-Munkres dalam Penempatan Karyawan

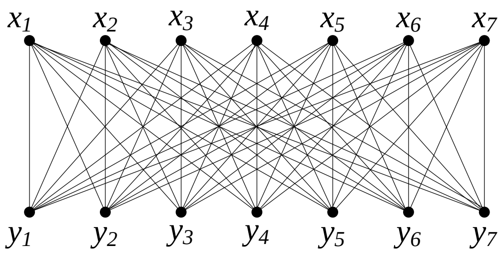
Penerapan Algoritma Kuhn-Munkres pada graf bipartit komplit berbobot G dinyatakan dengan matrix W = $[w_{ij}]$denganw$_{ij}$ adalah bobot dari sisi u$_i$v$_j$ pada graf G.

Contoh:

Misalkan seorang manager sebuah perusahaan menempatkan 7 karyawan X = $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$ untuk 7 penempatan bagian produksiY = $(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7)$. Pemilihan dilakukan untuk mendapatkan keuntungan diukur dari kemampuan setiap karyawan untuk mendapatkan keuntungan setiap posisinya yang dioptimalkan. Kemampuan pelamar kerja merupakan bobot sisi yang menghubungkan karyawan dengan pekerjaan. Bagaimana cara penempatan karyawan yang optimal? (Contoh ini diadaptasi dari Clark & Holton (1991))

Penyelesaian:

Permasalahan ini dapat dimodelkan dalam graf bobot bipartit lengkap $K_{7,7}$ pada Gambar 7 berikut.



Gambar 7. Graf bobot bipartit lengkap $K_{7,7}$

Graf G dapat dipresentasikan dalam bentuk matriks. Label baris-i dengan x_i dan label kolom-j dengan y_i, $1 \leq i, j \leq 7$. Entri matriks baris-i dan kolom-j menyatakan bobot sisi x_iy_j.

$$M = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 7 & 6 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 8 & 5 & 8 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

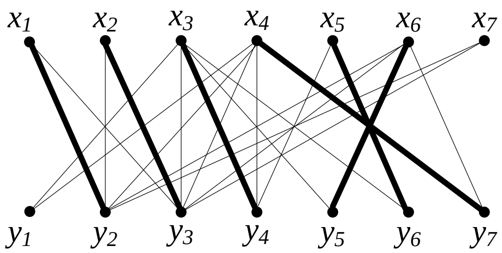
Jika label titik x_i diletakkan sebelah kanan baris-i dan label titik y_i diletakkan di bawah kolom-j, sebuah pelabelan titik G yang layak, namakan λ, adalah sebagai berikut.

ISBN 978-602-1034-06-4

Step 1:Sebuah pelabelan titik G

$$M = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ \lambda(y_i) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 7 & 6 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 8 & 5 & 8 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \lambda(x_i) \\ 5 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 8 \\ 4 \\ \\ \end{array}$$

Graf bagian rentang G_λ yang dibangun oleh sisi-sisi G yang bobotnya sama dengan jumlah label titik-titik ujungnya adalah seperti terlihat pada Gambar 8 berikut.



Gambar 8. Graf rentang G_λ

Pilih penjodohan $M = \{x_1y_2,\ x_2y_3, x_3y_4,\ x_4y_7, x_5y_6,\ x_6y_5\}$pada graf G_λ.

Step 2: $\exists$ titik $\{x_7\}$ yang tidak tertutup oleh M. Tulis S = $\{x_7\}$ dan T = $\emptyset$.

Step 3: N_{G_λ} (S) = $\{y_2, y_3\}$. Karena N_{G_λ} (S) $\supset$ T, pergi ke step 4.

Step 4: $N_{G_\lambda}(S) \setminus T$ = $\{y_2, y_3\}$. Pilih y_3.Titik y_3 tertutup oleh M dengan x_2y_3 $\in$M, maka ganti S dengan S $\cup$ $\{x_3\}$ = $\{x_2, x_7\}$ dan T dengan T $\cup\{y_3\}=\{y_3\}$, pergi ke step 3.

Step 3: N_{G_λ} (S) $=\{y_2, y_3\}$. Karena N_{G_λ} (S) $\supset$ T, pergi ke step 4.

Step 4: $N_{G_\lambda}(S) \setminus T$ = $\{y_2\}$. Pilih y_2.Titik y_2 tertutup oleh M dengan x_1y_2 $\in$M, maka ganti S dengan S $\cup$ $\{x_1\}$ = $\{x_1, x_2, x_7\}$ dan T dengan T $\cup\{y_2\}$= $\{y_2, y_3\}$, pergi ke step 3.

Step 3: N_{G_λ} (S) = $\{y_2, y_3\}$. Karena N_{G_λ} (S) = T, maka hitung

$\propto_\lambda$ = min $\{\lambda(x_1)+\lambda(y_1)-w(x_1y_1),\ \lambda(x_1)+\lambda(y_4)-w(x_1y_4),\ \lambda(x_1)+\lambda(y_5)-w(x_1y_5),\ \lambda(x_1)+\lambda(y_6)-w(x_1y_6),\ \lambda(x_1)+\lambda(y_7)-w(x_1y_7),\ \lambda(x_2)+\lambda(y_1)-w(x_2y_1),\ \lambda(x_2)+\lambda(y_4)-w(x_2y_4),\ \lambda(x_2)+\lambda(y_5)-w(x_2y_5),\ \lambda(x_2)+\lambda(y_6)-w(x_2y_6),\ \lambda(x_2)+\lambda(y_7)-w(x_2y_7),\ \lambda(x_7)+\lambda(y_1)-w(x_7y_1),\ \lambda(x_7)+\lambda(y_4)-w(x_7y_4),\ \lambda(x_7)+\lambda(y_5)-w(x_7y_5),\ \lambda(x_7)+\lambda(y_6)-w(x_7y_6),\ \lambda(x_7)+\lambda(y_7)-w(x_7y_7)\}$

=min{5+0-3, 5+0-4, 5+0-1, 5+0-1, 5+0-1, 7+0-5, 7+0-6, 7+0-5, 7+0-4, 7+0-6, 4+0-2, 4+0-1, 4+0-0, 4+0-3, 4+0-3}
= min{2, 1, 4, 4, 4, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 1} = 1

ISBN 978-602-1034-06-4

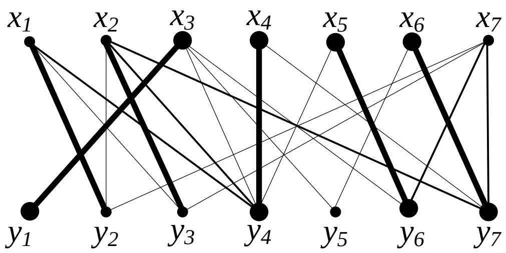
Buat pelabelan titik yang baru pada graf G_λ namakan λ' dengan aturan berikut.

$$\lambda'(x) = \begin{cases} \lambda'(x_1) = 5 - 1 = 4 \\ \lambda'(x_2) = 7 - 1 = 6 \\ \lambda'(x_3) \qquad\quad = 2 \\ \lambda'(x_4) \qquad\quad = 4 \\ \lambda'(x_5) \qquad\quad = 3 \\ \lambda'(x_6) \qquad\quad = 8 \\ \lambda'(x_7) = 4 - 1 = 3 \end{cases} \qquad \lambda'(y) = \begin{cases} \lambda'(y_1) \qquad\quad = 0 \\ \lambda'(y_2) = 0 + 1 = 1 \\ \lambda'(y_3) = 0 + 1 = 1 \\ \lambda'(y_4) \qquad\quad = 0 \\ \lambda'(y_5) \qquad\quad = 0 \\ \lambda'(y_6) \qquad\quad = 0 \\ \lambda'(y_7) \qquad\quad = 0 \end{cases}$$

Step 1: Setelah mengganti λ dengan λ', maka diperoleh pelabelan λ yang baru pada graf G dalam bentuk matriks berikut ini.

$$M = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ \lambda(y_i) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 7 & 6 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 8 & 5 & 8 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \lambda(x_i) \\ 4 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 8 \\ 3 \\ \\ \end{array}$$

Graf bagian rentang G_λ yang baru pada G tampak pada Gambar 9 berikut.



Gambar 9. Graf rentang G_λ baru

Step1: Pilih M = $\{x_1y_2, x_2y_3, x_3y_1, x_4y_4, x_5y_6, x_6y_7\}$ penjodohan baru pada graf G_λ.

Step 2: $\exists$ titik $\{x_7\}$ yang tidak tertutup oleh M. Tulis S = $\{x_7\}$ dan T = $\emptyset$.

Step 3: N_{G_λ} (S) = $\{y_2,y_3,y_6,y_7\}$. Karena N_{G_λ} (S) $\supset$ T, pergi ke step 4.

Step 4: $N_{G_\lambda}(S) \setminus T$ = $\{y_2,y_3,y_6,y_7\}$. Pilih y_2. Titik y_2 tertutup oleh M dengan $x_1y_2 \in$M, maka ganti S dengan S $\cup$ $\{x_1\}$ = $\{x_1, x_7\}$ dan T dengan T $\cup\{y_2\}=\{y_2\}$, pergi ke step 3.

Step 3: N_{G_λ} (S) =$\{y_2,y_3,y_4,y_6,y_7\}$. Karena N_{G_λ} (S) $\supset$ T, pergi ke step 4.

Step 4: $N_{G_\lambda}(S) \setminus T$ = $\{y_3,y_4,y_6,y_7\}$. Pilih y_3. Titik y_3 tertutup oleh M dengan $x_2y_3\in$M, maka ganti S dengan S $\cup$ $\{x_2\}$ = $\{x_1, x_2, x_7\}$ dan T dengan T $\cup\{y_3\}$= $\{y_2,y_3\}$, pergi ke step 3.

Step 3: N_{G_λ} (S) = $\{y_2,y_3,y_4,y_7\}$. Karena N_{G_λ} (S) $\supset$ T, pergi ke step 4.

ISBN 978-602-1034-06-4

Step 4: $N_{G_\lambda}(S) \setminus T =$ $\{y_4, y_7\}$. Pilih y_4. Titik y_4 tertutup oleh M dengan $x_4y_4 \in M$, maka ganti S dengan S $\cup$ $\{x_4\}$ = $\{x_1, x_2, x_4, x_7\}$ dan T dengan T $\cup \{y_4\} = \{y_2, y_3, y_4\}$, pergi ke step 3.

Step 3: N_{G_λ} (S) $= \{y_2, y_3, y_4, y_7\}$. Karena N_{G_λ} (S) $\supset$ T, pergi ke step 4.

Step 4: $N_{G_\lambda}(S) \setminus T =$ $\{y_7\}$. Pilih y_7. Titik y_7 tertutupoleh M dengan $x_6y_7 \in M$, maka ganti S dengan S $\cup$ $\{x_6\}$ = $\{x_1, x_2, x_4, x_6, x_7\}$ dan T dengan T $\cup \{y_7\} = \{y_2, y_3, y_4, y_7\}$, pergi ke step 3.

Step 3: N_{G_λ} (S) $= \{y_2, y_3, y_4, y_5, y_7\}$. Karena N_{G_λ} (S) $\supset$ T, pergi ke step 4.

Step 4: $N_{G_\lambda}(S) \setminus T =$ $\{y_5\}$. Pilih y_5.Titik y_5 tidak tertutup oleh M, maka lintasan P=$\{x_7, x_7y_7, y_7, y_7x_6, x_6, x_6y_5, y_5\}$ lintasan augmented-M. Ganti M dengan $M' = M \Delta E(P) = \{x_1y_2, x_2y_3, x_3y_1, x_4y_4, x_5y_6, x_6y_5, x_7y_7\}$, pergi ke step 2.

Step 2: X tertutup oleh penjodohan M' di atas. Jadi M' adalah penjodohan sempurna pada graf G_λ dan M' adalah penjodohan optimal pada graf G dengan bobot sebagai berikut.
w(M') = w(x_1y_2) + w(x_2y_3) + w(x_3y_1) + w(x_4y_4) + w(x_5y_6) + w(x_6y_5) + w(x_7y_7) = 5 + 7+ 2+4+3+8+3 = 32.

Jadi keuntungan maksimum diperoleh dengan memasangkan karyawan dengan pekerjaan seperti dalam tabel di bawah ini.

Karyawan	Pekerjaan	*Profit*
x_1	y_2	5
x_2	y_3	7
x_3	y_1	2
x_4	y_4	4
x_5	y_6	3
x_6	y_5	8
x_7	y_7	3
	Total *profit*	32

Perhatikan bahwa dari pelabelan titik G yang terakhir diperoleh:

$$\sum_{v\in V} \lambda(v) = \sum \lambda(x) + \sum \lambda(y)$$
$$= \lambda(x_1) + \lambda(x_2) + \lambda(x_3) + \lambda(x_4) + \lambda(x_5) + \lambda(x_6) + \lambda(x_7) + \lambda(y_1)$$
$$+\lambda(y_2) + \lambda(y_3) + \lambda(y_4) + \lambda(y_5) + \lambda(y_6) + \lambda(y_7)$$
$$= 4 + 6 + 2 + 4 + 3 + 8 + 3 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0$$
$$= 32$$
$$= w(M').$$

C. Simpulan dan Saran

Masalah penugasan optimal merupakan masalah penempatan untuk memperoleh solusi yang optimal. Masalah penugasan optimal dapat diselesaikan dengan menerapkan konsep graf, yaitu dengan mencari penjodohan sempurna dengan bobot maksimum pada suatu graf bipartit khususnya graf bipartit lengkap berbobot. Salah satu cara untuk menemukan penjodohan sempurna pada graf bipartit lengkap berbobot dengan bobot maksimum adalah dengan algoritma Kuhn-Munkres. Algoritma Kuhn-Munkres ini sebaiknya dibuat program komputernya sehingga untuk permasalahan yang melibatkan karyawan dan jenis pekerjaan yang lebih banyak dapat diselesaikan dengan cepat.

D. Daftar Pustaka

Budayasa, I.K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Clark, J. & Holton, D. A. 1991. *A First Look at Graph Theory*. Singapore: World Scientific.

Siang, J.J. 2004. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: CV. Andi Offset.

ISBN 978-602-1034-06-4

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

Gedung D7 Kampus Sekaran Gunungpati Semarang 50229
Telp. (024) 8508032, Fax. (024) 8508032
Website: http://matematika.unnes.ac.id
Email: matematika@unnes.ac.id

ISBN 978-602-10-3406-4