

ISBN : 978-602-1034-06-4

<http://matematika.unnes.ac.id/Prosiding/2014>



# PROSIDING SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA VIII

SEMARANG, 8 NOVEMBER 2014

*"Peran Serta Cendekia Matematika dan Pendidikan Matematika  
dalam Akselerasi Perubahan Karakter Bangsa"*

---

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Semarang

PROSIDING  
**SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA VIII**

“Peran serta Cendekia Matematika dan Pendidikan Matematika dalam Akselerasi  
Perubahan Karakter Bangsa”  
ISBN 978-602-1034-06-4

---

**EDITORIAL**

**Penanggungjawab**

Prof. Dr. Wiyanto, M.Si.

**Tim Review**

Prof. Dr. Zaenuri Mastur, S.E. M. Si.,Akt.

Dr. Masrukan, M.Si

Dr. Wardono, M. Si

Dr. Iwan Junaedi, S.Si., M.Pd

**Tim Editor**

Ary Woro Kurniasih, S.Pd., M.Pd

Riza Arifudin, S.Pd., M.CS

Bambang Eko Susilo, S.Pd., M.Pd

Muhammad Kharis, S.Si., M.Sc

Nuriana R. D. N., S.Pd., M.Pd

Amidi, S.Si., M.Pd

**Layout**

Zaidin Asyabah

Tiara Budi Utami

**Cover Layouter**

Luky Triohandoko

**Penerbit:**



Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Semarang

# PRAKATA

---

Seminar Nasional Matematika VIII Jurusan Matematika FMIPA Unnes bertema, "Peran serta Cendekia Matematika dan Pendidikan Matematika dalam Akselerasi Perubahan Karakter Bangsa". Seminar berlangsung pada hari Sabtu, tanggal 8 November 2014 di kampus Universitas Negeri Semarang.

Tujuan seminar adalah tukar menukar hasil penelitian maupun gagasan konseptual dalam bidang Pendidikan Matematika dan Matematika, serta mencari alternatif solusi setiap permasalahan sebagai upaya akselerasi perubahan karakter bangsa.

Pemakalah yang hadir berasal dari berbagai kalangan, baik dosen, peneliti (praktisi), maupun guru yang tersebar di seluruh Indonesia, seperti Unsyah (NAD), Surya Research and Education Center Tangerang, Lembaga Penerbangan Antariksa Nasional, UPI Bandung, Unswagati (Cirebon), Unnes Semarang, IKIP Veteran Semarang, UKSW Salatiga, ITS Surabaya, Unesa Surabaya, dan Universitas Muhammadiyah Ponorogo. Setiap makalah ditelaah oleh tim *review*, terkait substansi dan tata tulis, sebelum diterbitkan.

Semoga penerbitan prosiding ini memberikan sumbangan bagi kemajuan ilmu pengetahuan, khususnya Pendidikan Matematika dan Matematika.

Tim Editor

## DAFTAR ISI

		Halaman
<b>Editorial</b>		i
<b>Prakata</b>		ii
<b>Daftar Isi</b>		Iii
<b>Bidang Kajian: Pendidikan Matematika</b>		
1.	Pendidikan Karakter Terintegrasi dan Berkelanjutan di Tingkat Sekolah hingga Perguruan Tinggi dengan Sistem Spiral guna Militansi Bangsa ( <i>Sukestiyarno., D.A.S.Q. Rizki, Universitas Negeri Semarang, Jawa Tengah</i> )	1
2.	Pembelajaran Materi Segi Empat dengan Pendekatan <i>Contextual Teaching and Learning</i> (CTL) untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Siswa di SMP Negeri 1 Banda Aceh Tahun Ajaran 2011/2012 ( <i>Ari Hestaliana. R, Universitas Syah Kuala, NAD</i> )	7
3.	Keefektifan <i>Resource Based Learning</i> dengan Jurnal Reflektif terhadap Kemampuan Pemecahan Mahasiswa Matematika ( <i>Arief Agoestanto, Universitas Negeri Semarang, Jawa Tengah</i> )	15
4.	Implementasi <i>Group Investigation</i> untuk Meningkatkan Pemahaman Mahasiswa tentang Pendekatan Ilmiah Melalui Telaah Kurikulum Matematika 1 ( <i>Ary Woro Kurniasih, Univeritas Negeri Semarang, Jawa Tengah</i> )	21
5.	Tinjauan Peran Teknologi dalam Pengajaran Geometri ( <i>Hery Sutarto, Universitas Negeri Semarang, Jawa Tengah</i> )	30
6.	Faktor-faktor yang mempengaruhi Mahasiswa Memilih Program Studi di Jurusan Matematika MIPA UNESA dengan menggunakan Analisa Diskriminan ( <i>Hery Tri Sutanto, Universitas Negeri Surabaya, Jawa Timur</i> )	36
7.	Pengembangan Model <i>Assessment for Learning</i> (AfL) melalui <i>Self Assessment</i> pada Pembelajaran Matematika di SMP Terpadu Ponorogo ( <i>Intan Sari Rufiana, Universitas Muhammadiyah Ponorogo, Jawa Timur</i> )	49
8.	Penerapan Model Pembelajaran <i>Learning Cycle 7E</i> dalam Kemampuan Representasi Matematis Mahasiswa ( <i>Laelasari, Unswagati, Jawa Barat</i> )	64
9.	Pembelajaran Matematika dengan Permainan Tangram untuk Meningkatkan Keahlian Berpikir Geometri ( <i>Geometric Thinking Skills</i> ) Siswa Sekolah Dasar ( <i>Olanda Dwi Sumintra, Ayu Erawati,, dan Sulistiawati, Sekolah Tinggi Keguruan dan Ilmu Pendidikan (STKIP) Surya, Banten</i> )	73
10.	Analisis Kemampuan Guru PAUD dan Identifikasi Instrumen Polytomous dengan Program Parscale di Kota Semarang ( <i>Risky Setiawan, IKIP Veteran Semarang, Jawa Tengah</i> )	80
11.	Berpikir Kreatif Matematika pada Pembelajaran Sinektik (Studi	90

	Kasus di SMPN 2 Jatibarang Brebes) ( <i>Rochmad dan Laeli Rahmawati, Universitas Negeri Semarang, Jawa Tengah</i> )	
12.	Pembelajaran Perkalian Bilangan 1–10 dengan Matematika GASING untuk Meningkatkan Hasil Belajar pada Siswa Sekolah Dasar ( <i>Sulistiawati, Sekolah Tinggi Keguruan dan Ilmu Pendidikan (STKIP) Surya, Banten</i> )	99
13.	Pembelajaran ARIAS dengan Asesmen Kinerja untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah ( <i>Wardono dan Suryati, Universitas Negeri Semarang, Jawa Tengah</i> )	113
14.	Eksplorasi Bentuk-Bentuk Etnomatematika dan Relasinya dengan Konsep-Konsep Matematika ( <i>Zaenuri Mastur, Fathur Rokhman, dan SB Waluya, Universitas Negeri Semarang, Jawa Tengah</i> )	121
15.	<i>Discovery-Learning</i> dengan Asesmen Kinerja untuk Meningkatkan Penalaran Matematis ( <i>Masrukan, Universitas Negeri Semarang, Jawa Tengah</i> )	132
16.	Implementasi <i>Brain-based learning</i> berbantuan Web terhadap Peningkatan <i>Self Efficacy</i> Mahasiswa ( <i>Nuriana Rachmani Dewi (Nino Adhi), Universitas Negeri Semarang, Jawa Tengah</i> )	139
17.	Peran Menalar dalam Pembelajaran Matematika untuk Menanamkan Nilai Karakter Religius ( <i>Bambang Eko Susilo, Universitas Negeri Semarang, Jawa Tengah</i> )	147
18.	Menumbuhkan Kreativitas melalui Pendekatan Saintifik sebagai Upaya Penerapan Kurikulum 2013 ( <i>Jayanti Putri Purwaningrum, Universitas Pendidikan Indonesia, Jawa Barat</i> )	157
19.	Konsep Pembelajaran <i>Science Technology Engineering Mathematics</i> (STEM) dengan Matematika sebagai Alat atau Bahasa Komunikasi dalam Kurikulum 2013 ( <i>Suhud Wahyudi, Surya Rosa Putra, Darmaji, Soleha, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Jawa Timur</i> )	166
20.	Mengklasifikasi Kesalahan Siswa dalam Mengerjakan Soal Uraian Matematika Berdasarkan Prosedur Newman ( <i>Amin Suyitno, Universitas Negeri Semarang, Jawa Tengah</i> )	176
21.	Membangun Karakter Melalui Matematika dan Pembelajarannya ( <i>Iwan Junaedi, Universitas Negeri Semarang, Jawa Tengah</i> )	184
22.	Pengembangan Perangkat Pembelajaran Matematika Konstruktivis berbasis Humanistik berbantuan <i>E-Learning</i> ( <i>Amidi, Universitas Negeri Semarang, Jawa Tengah</i> )	190
<b>Bidang Kajian: Matematika dan Komputasi</b>		
<b>No</b>	<b>Judul</b>	<b>Hal</b>
23	Perbandingan Metode Arima Box – Jenkins dengan Metode Double Exponential Smoothing dari Brown Dalam Memprediksi Jumlah Pengunjung Perpustakaan Daerah Provinsi Jawa Tengah ( <i>Izza Hasanul Muna dan Riza Arifudin, Universitas Negeri Semarang, Jawa Tengah</i> )	201
24	Penerapan Jaringan Kohonen Self Organizing Maps Untuk Clustering Kualitas Air Kali Surabaya ( <i>Sri Rahmawati F., M. Isa Irawan, Nieke Karnaningroem, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Jawa Timur</i> )	215

25	Resampling untuk Memperbesar Koefisien Determinasi dalam Model Regresi Linear ( <i>Adi Setiawan, Universitas Kristen Satya Wacana, Jawa Tengah</i> )	224
26	Penerapan Estimator Robust RMCD pada Grafik Pengendali $T^2$ Hotelling untuk Pengamatan Individual Bivariat dan Trivariat ( <i>Angelita Titis Pertiwi, Adi Setiawan, Bambang Susanto, Universitas Kristen Satya Wacana, Jawa Tengah</i> )	233
27	Pemodelan Jaringan Syaraf Tiruan Backpropagation untuk Simulasi Kualitas Air dan Daya Tampung Lingkungan di Kali Surabaya ( <i>Bima Prihasto, M. Isa Irawa', Ali Masduqi, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Jawa Timur</i> )	247
28	Penerapan Regresi Multivariate dalam Penentuan Terjadinya Anomali Curah Hujan Ekstrim di P. Jawa ( <i>Eddy Hermawan, Lembaga Penerbangan dan Antariksa Nasional, Jawa Barat</i> )	261
29	Penerapan Metode Eliminasi Gauss-Jordan dalam Memecahkan Masalah Kemacetan Lalu Lintas ( <i>Eliza Verdianingsih, Universitas Pendidikan Indonesia, Jawa Barat</i> )	267
30	Dimensi Partisi Graf Garis dari Graf Kincir $K_{1+m}K_n$ dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ yang Diperumum ( <i>F. Kurnia Nirmala Sari dan Darmaji, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Jawa Timur</i> )	276
31	Penggunaan Aljabar Max Plus dan Petri Net untuk Perancangan Penjadwalan Sistem Pelayanan Pasang Instalasi Baru di PDAM ( <i>Margaretha Dwi Cahyani dan Subiono, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Jawa Timur</i> )	285
32	Pemodelan Matematika untuk Epidemik Chikungunya pada Populasi Manusia dengan Non Specific Treatment ( <i>Muhammad Kharis, Universitas Negeri Semarang Jawa Tengah</i> )	298
33	Model GSTAR Termodifikasi untuk Produktivitas Jagung di Boyolali ( <i>Priska Dwi Apriyanti, Hanna Arini Parhusip, dan Lilik Linawati, Universitas Kristen Satya Wacana, Jawa Tengah</i> )	314
34	Perluasan Kurva Parametrik Hypocycloid 2 Dimensi menjadi 3 Dimensi dengan Sistem Koordinat Bola ( <i>Purwoto, Hanna Arini Parhusip, dan Tundjung Mahatma, Universitas Kristen Satya Wacana, Jawa Tengah</i> )	326
35	Estimasi Kurva Regresi Semiparametrik dengan Komponen Parametrik Berpola Polinomial ( <i>Lilis Anisah, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya Jawa Timur</i> )	337
36	Model Jaringan Syaraf Fuzzy Radial Basis Function untuk Peramalan Nilai BOD pada Kali Surabaya ( <i>Nisa Ayunda, Mohammad Isa Irawan, Nieke Karnaningroem, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya Jawa Timur</i> )	342
37	Masalah Penugasan Optimal dengan Algoritma Kuhn-Munkres ( <i>Mulyono, Universitas Negeri Semarang, Jawa Tengah</i> )	351

## MASALAH PENUGASAN OPTIMAL DENGAN ALGORITMA KUHN-MUNKRES

Mulyono

Jurusan Matematika FMIPA Unnes  
Kampus Sekaran Gedung D7 Lantai 1, Semarang  
Surel:mulyono\_unnes@yahoo.com

### Abstrak

Masalah penugasan optimal (*optimal assignment problem*) adalah suatu masalah mengenai pengaturan pada individu (objek) untuk melaksanakan tugas (kegiatan), dengan demikian *profit* yang diperoleh untuk pelaksanaan penugasan tersebut dapat dimaksimalkan. Salah satu metode yang digunakan dalam menyelesaikan persoalan ini adalah dengan menggunakan algoritma Kuhn-Munkres. Algoritma Kuhn-Munkres adalah salah satu algoritma yang digunakan untuk menyelesaikan persoalan masalah penugasan. Dengan menggunakan algoritma ini, solusi optimal yang terbaik akan ditemukan. Permasalahan penugasan yang ada direpresentasikan dengan graf bipartit lengkap dengan banyaknya anggota pada masing-masing partisinya sama.

**Kata Kunci:** Masalah Penugasan Optimal; Algoritma Kuhn-Munkres; Graf Bipartit Lengkap

### A. Pendahuluan

Berbagai metode digunakan demi meningkatkan produktivitas perusahaan yang pada akhirnya akan mendongkrak *profit* (keuntungan). Salah satu hal yang mempengaruhi perkembangan suatu perusahaan adalah kualitas kinerja karyawannya. Ketersediaan tenaga ahli (karyawan) saja tidaklah cukup, namun yang harus lebih diperhatikan adalah bagaimana mengelola tenaga ahli (karyawan) yang ada agar kinerjanya lebih optimal. Salah satunya dengan menempatkan karyawan pada pekerjaan dimana penempatan tersebut merupakan penempatan yang optimal.

Penempatan sejumlah  $X$  karyawan pada  $Y$  pekerjaan, jika banyaknya karyawan dimisalkan sama dengan banyaknya pekerjaan dengan mempertimbangkan aspek tertentu seperti pengoptimalan *profit* yang didapat dari penempatan  $X$  karyawan terhadap  $Y$  buah pekerjaan dikenal dengan masalah penugasan optimal (*optimal assignment problem*). Penerapan graf pada masalah penugasan optimal ini dapat dinyatakan sebagai graf bipartit (Clark & Holton, 1991. Dalam Siang (2004) graf bipartit didefinisikan sebagai suatu graf sederhana  $G$  yang himpunan titik  $V$ -nya dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong  $V_1$  dan  $V_2$  yang tak beririsan sedemikian hingga setiap sisi dalam graf menghubungkan suatu titik di  $V_1$  dengan titik di  $V_2$  (sedemikian hingga tak ada sisi di dalam  $G$  menghubungkan dua titik di  $V_1$  maupun di  $V_2$ ). Karyawan dianggap sebagai  $V_1$  dan pekerjaan sebagai  $V_2$ . Karena aspek yang dioptimalkan dalam masalah penugasan optimal dianggap sebagai bobot dan peluang penempatan tiap  $X$  karyawan pada  $Y$  buah pekerjaan dianggap sama, maka untuk mencari solusinya graf bipartit yang digunakan adalah graf bipartit lengkap berbobot.

Untuk mencari solusi dari masalah penugasan optimal yang dinyatakan sebagai graf bipartit lengkap berbobot adalah dengan menerapkan konsep penjadohan (*matching*), khususnya penjadohan sempurna pada graf bipartit lengkap berbobot. Penjadohan sempurna dengan bobot paling maksimal adalah solusinya.

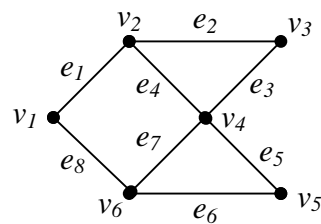
Pada dasarnya pencarian penjadohan sempurna dengan bobot maksimal dapat dilakukan dengan mendaftar semua penjadohan sempurna yang berbeda, dan

menghitung jumlah bobot dari tiap penjadohan sempurna yang diperoleh. Banyaknya penjadohan sempurna yang berbeda pada suatu graf bipartit lengkap dengan  $n$  titik pada masing-masing partisinya adalah  $n!$ . Sangat tidak efisien jika cara ini digunakan, karena semakin banyak jumlah titik maka semakin banyak pula penjadohan sempurna yang berbeda. Oleh karena itu, untuk memudahkan pencarian solusi masalah penugasan optimal, dapat digunakan sebuah algoritma optimasi yaitu algoritma Kuhn-Munkres. Algoritma Kuhn-Munkres adalah algoritma yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah penugasan optimal. Pada tahun 1955, Harold Kuhn (seorang matematikawan asal Amerika) mempublikasikan sebuah metode yang diberi nama metode *Hungarian*, yaitu sebuah algoritma kombinatorik untuk optimasi yang dapat digunakan untuk menemukan solusi optimal dari masalah penugasan. Pada tahun 1957, James Raymond Munkres memperbaiki algoritma Kuhn. Oleh karena itu, algoritma ini sering disebut algoritma Kuhn-Munkres. Untuk mencari solusi dari masalah penugasan optimal dengan menggunakan algoritma Kuhn-Munkres salah satunya dapat dilakukan dengan merepresentasikan algoritma ini pada graf bipartit.

## B. Pembahasan

### a. Penjadohan

Penjadohan (*matching*)  $M$  didefinisikan sebagai sebuah himpunan sisi-sisi pada graf  $G$  yang saling lepas. Dua sisi dikatakan saling lepas jika kedua sisi tersebut tidak mempunyai titik ujung persekutuan (Budayasa, 2007).

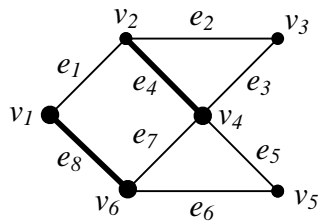


Gambar 1. Graf  $G$

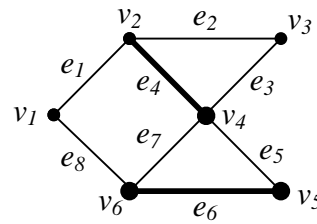
Himpunan  $M_1 = \{e_1, e_3, e_6\}$  adalah sebuah penjadohan berukuran 3 pada  $G$ , begitu juga himpunan  $M_2 = \{e_2, e_5, e_8\}$  adalah sebuah penjadohan berukuran 3. Sedangkan himpunan  $M_3 = \{e_4, e_8\}$  dan himpunan  $M_4 = \{e_4, e_6\}$ , masing-masing adalah sebuah penjadohan berukuran 2 pada graf  $G$ . tetapi himpunan  $E = \{e_1, e_2, e_5\}$  bukan penjadohan pada  $G$  karena sisi  $e_1$  dan  $e_2$  terkait ke titik yang sama yaitu di titik  $v_2$

Sebuah titik di  $G$  dikatakan tertutup oleh penjadohan  $M$  jika titik  $v$  merupakan titik akhir (ujung) dari salah satu sisi di  $M$ . Titik  $v$  dikatakan *M-saturated* jika titik  $v$  tertutup oleh penjadohan  $M$ . Sebaliknya jika titik  $v$  di graf  $G$  tidak tertutup oleh penjadohan  $M$  disebut *M-unsaturated*. Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2, penjadohan  $M_3 = \{e_4, e_8\}$  menutup titik  $v_1, v_2, v_4, v_6$ ; tetapi  $M_3$  tidak menutup titik  $v_3$  dan  $v_5$ . Dengan kata lain, titik  $v_1, v_2, v_3, v_6$  adalah *M<sub>3</sub>-saturated* tetapi titik-titik  $v_3$  dan  $v_5$  adalah *M<sub>3</sub>-unsaturated*.





Gambar 2.  $M_3$ -saturated dan  $M_3$ -unsaturated

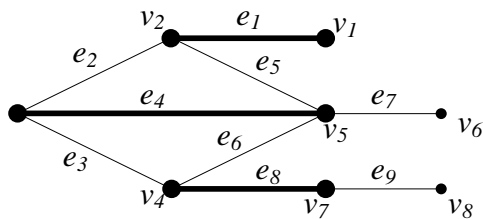


Gambar 3.  $M_4$ -saturated dan  $M_4$ -unsaturated

Pada Gambar 3, penjadohan  $M_4 = \{e_4, e_6\}$  menutup titik  $v_2, v_4, v_5, v_6$ ; tetapi  $M_4$  tidak menutup  $v_1$  dan  $v_3$ . Titik-titik  $v_2, v_4, v_5, v_6$  adalah  $M_4$ -saturated tetapi titik-titik  $v_1$  dan  $v_3$  adalah  $M_4$ -unsaturated.

Sebuah penjadohan  $M$  digraf  $G$  di graf  $G$  dinamakan penjadohan maksimum jika  $G$  tidak mempunyai penjadohan lain dengan ukuran yang lebih besar dari penjadohan  $M$ . Dengan kata lain, jika  $M'$  penjadohan pada  $G$  maka  $|M| \geq |M'|$ . Misalnya pada Gambar 1, graf  $G$  tidak ada penjadohan berukuran 4, maka  $M_1$  dan  $M_2$  penjadohan maksimum pada  $G$ . Sebuah penjadohan  $M$  di graf  $G$  dikatakan penjadohan sempurna jika  $M$  memuat semua titik di  $G$ . Dengan kata lain, jika  $M$  penjadohan sempurna pada graf  $G$  maka setiap titik di  $G$   $M$ -saturated. Sebagai contoh  $M_1 = \{e_1, e_3, e_6\}$  adalah penjadohan sempurna pada graf  $G$ , begitu juga  $M_2 = \{e_2, e_5, e_8\}$  merupakan penjadohan sempurna pada graf  $G$ . Setiap penjadohan sempurna adalah penjadohan maksimum, tetapi tidak berlaku sebaliknya.  $M$  adalah penjadohan maksimum, maka belum tentu  $M$  penjadohan sempurna.

Misalkan  $M$  adalah penjadohan dan  $P$  lintasan pada graf  $G$ , lintasan  $P$  disebut lintasan alternatif- $M$  ( $M$ -alternating path) jika sisi-sisi pada lintasan  $P$  itu bergantian di  $M$  dan di  $E(G) \setminus M$ . Selanjutnya lintasan  $P$  disebut lintasan augmentasi- $M$  ( $M$ -augmenting path) jika  $P$  adalah lintasan alternatif- $M$  ( $M$ -alternating path) dan titik awal serta titik akhir dari lintasan  $P$  tersebut merupakan  $M$ -unsaturated.



Gambar 4. Lintasan alternatif- $M$  dan lintasan augmentasi- $M$

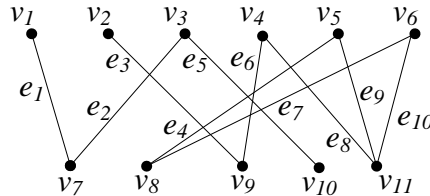
Pada Gambar 4 yang merupakan contoh lintasan alternatif- $M$  ( $M$ -alternating path) yaitu:  $v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_4 v_5 e_6 v_4 e_8 v_7$ . Sedangkan  $v_6 e_7 v_5 e_4 v_3 e_3 v_4 e_8 v_7 e_9 v_8$  merupakan contoh lintasan augmentasi- $M$  ( $M$ -augmenting path) karena titik awalnya yaitu  $v_6$  dan titik akhirnya  $v_8$  merupakan titik yang berada pada  $E(G)$  dan  $M$ -unsaturated.

Misalkan  $M$  adalah penjadohan pada graf  $G$ , dan terdapat penjadohan lain, sebut saja  $M'$  dengan  $M \Delta M'$  menunjukkan selisih simetris  $M$  dan  $M'$ . Selisih simetris  $M$  dan  $M'$  dapat dinotasikan  $M \Delta M' = (M \setminus M') \cup (M' \setminus M)$ , maka suatu graf  $H = G(M \Delta M')$

merupakan graf yang direntang oleh sisi  $M \Delta M'$  dengan menghapus semua sisi  $M \cap M'$  dan sisi  $(G \setminus M) \cap (G \setminus M')$ .

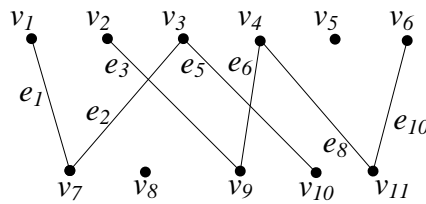
Contoh.

Diberikan graf  $G$  yang memuat penjadohan  $M$  dan penjadohan  $M'$  seperti pada Gambar 5. Akan dicari  $H = G(M \Delta M')$ .



Gambar 5. Penjadohan  $M$  dan Penjadohan  $M'$

Dari Gambar 5 diperoleh penjadohan  $M = \{e_2, e_3, e_4, e_8\}$  dan penjadohan  $M' = \{e_1, e_4, e_5, e_6, e_{10}\}$ . Sisi  $e_4$  yang menghubungkan titik  $v_3$  dan titik  $v_8$  merupakan anggota penjadohan  $M$  sekaligus anggota penjadohan  $M'$ , yaitu  $e_4 \in (M \cap M')$ . Maka sisi tersebut dihapus. Sisi  $e_9$  yang menghubungkan titik  $v_5$  dan titik  $v_{11}$  serta sisi  $e_7$  yang menghubungkan titik  $v_6$  dan titik  $v_8$  bukan anggota penjadohan  $M$  sekaligus bukan anggota penjadohan  $M'$ , yaitu:  $e_7, e_9 \in ((G \setminus M) \cap (G \setminus M'))$ , oleh karena itu dihapus. Selanjutnya diperoleh  $H = G(M \Delta M')$  seperti Gambar 6.



Gambar 6. Graf  $H = G(M \Delta M')$

### b. Penjadohan dan Penutup pada Graf Bipartit

Dalam aplikasi ini untuk menemukan sebuah penjadohan pada graf bipartit yang menutup semua titik pada salah satu partisi. Syarat perlu dan cukup sebuah graf bipartit memiliki penjadohan yang demikian, diberikan oleh Hall (1935). Jika  $G$  sebuah graf dan  $S \subseteq V(G)$ , maka himunan semua titik  $G$  yang bertetangga dengan titik-titik di  $S$ , dilambangkan dengan  $N_G(S)$  atau  $N(S)$ .

Teorema 1 (Teorema Hall)

Misalkan  $G$  adalah graf bipartit dengan partisi  $(X, Y)$ . Graph  $G$  memuat sebuah penjadohan yang menutup semua titik  $X$  jika dan hanya jika  $|N(S)| \geq |S|$ , untuk setiap  $S \subseteq X$ .

Bukti:

Misalkan graf bipartit  $G$  dengan partisi  $(X, Y)$  memuat penjadohan  $M$  yang menutup semua titik  $X$  dan misalkan  $S \subseteq X$ . Karena titik-titik di  $S$  dipasangkan oleh  $M$  ke titik yang berbeda di  $N(S) \subseteq Y$  maka  $|N(S)| \geq |S|$ .

Misalkan  $G$  adalah graf bipartit dengan partisi  $(X, Y)$  yang memenuhi  $|N(S)| \geq |S|$ ,  $\forall S \subseteq X$ . Andaikan  $G$  tidak memuat penjadohan yang menutup semua titik  $X$ . Misal  $M^*$

adalah penjadohan maksimum di  $G$ , karena pengandaian,  $M^*$  tidak menutup semua titik  $X$ , berarti ada titik di  $X$  yang tidak ditutupi oleh  $M^*$ , misalkan titik  $u$ . Misalkan  $Z$  menyatakan himpunan semua titik yang terhubung ke  $u$  oleh lintasan-lintasan" alternatif- $M^*$ . Karena  $M^*$  penjadohan maksimum maka hanya titik  $u$  yang tidak tertutup oleh  $M^*$  di  $Z$ . Namakan himpunan  $S = Z \cap X$  dan  $T = Z \cap Y$ . Jelas titik-titik di  $S \setminus \{u\}$  dipasangkan oleh  $M^*$  dengan titik di  $T$ . Oleh karena itu  $N(S) \supseteq T$  dan

$$|T| = |S| - 1 \dots\dots\dots(1)$$

Karena setiap titik di  $N(S)$  terhubung ke  $u$  oleh lintasan alternatif- $M^*$ , diperoleh

$$N(S) = T \dots\dots\dots(2)$$

Dan (1) dan (2) didapat

$$|N(S)| = |S| - 1 < |S|,$$

suatu kontradiksi. Dengan demikian teorema terbukti.

**c. Algoritma Kuhn-Munkres**

Algoritma Kuhn-Munkres adalah algoritma yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah penugasan optimal. Pada tahun 1955, Harold Khun (seorang matematikawan asal Amerika) mempublikasikan sebuah metode yang diberi nama metode *Hungarian* (untuk menghormati dua orang matematikawan asal Hungaria, yaitu D. König and E. Egerváry), yaitu sebuah algoritma kombinatorik untuk optimasi yang dapat digunakan untuk menemukan solusi optimal dari masalah penugasan. Pada tahun 1957, James Raymond Munkres seorang Professor Emeritus matematika dari MIT memperbaiki algoritma Kuhn. Oleh karena itu, algoritma ini sering disebut algoritma Kuhn-Munkres.

Secara sistematis algoritma tersebut dapat ditulis ke dalam bentuk langkah-langkah sebagai berikut.

Input : Graf bipartit komplit berbobot  $G$  dengan partisi  $(X, Y)$ .

Step 1 : Dimulai dengan sebuah pelabelan titik  $G$ , namakan pelabelan  $\lambda$ . tentukan graf  $G_\lambda$  dan pilih penjadohan  $M$  sembarang pada  $G_\lambda$ .

Step 2: Jika  $X$  tertutup oleh  $M$ , maka  $M$  adalah penjadohan sempurna karena ( $|x| = |y|$ ), penjadohan  $M$  optimal pada  $G$ , dan berhenti (STOP). Jika tidak, misal  $u$  adalah titik yang tidak tertutup oleh  $M$ . Tulis  $S = \{u\}$  dan  $T = \emptyset$ .

Step 3 : Jika  $N_{G_\lambda}(S) \supset T$ , pergi ke step 4. Jika tidak,  $N_{G_\lambda}(S) = T$ , hitung

$$\alpha_x = \min\{\lambda(x) + \lambda(y) - w(xy)\}, x \in S \text{ dan } y \in T.$$

Buatlah pelabelan titik baru, namakan  $\lambda'$  dengan

$$\lambda'(v) = \begin{cases} \lambda(v) - \alpha_x & \text{jika } v \in S \\ \lambda(v) + \alpha_x & \text{jika } v \in T \\ \lambda(v) & \text{lainnya} \end{cases}$$

Step 4: Pilih titik  $y$  di  $N_{G_\lambda}(S) \setminus T$ . Apakah tertutup oleh  $M$  atau tidak. Jika  $y$  tertutup oleh  $M$  dan  $yz \in M$ , maka ganti  $S$  dengan  $S \cup \{z\}$  dan  $T$  dengan  $T \cup \{y\}$  dan pergi ke step 3. Jika tidak, misalkan  $P$  adalah lintasan- $(u, y)$  augmentasi  $M$  di  $G$ , ganti  $M$  dengan  $M' = M \Delta E(P)$  dan pergi ke step 2.

(Clark & Holton (1991) dan Budayasa(2007))

**d. Aplikasi Algoritma Kuhn-Munkres dalam Penempatan Karyawan**

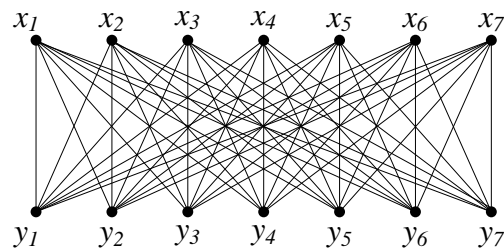
Penerapan Algoritma Kuhn-Munkres pada graf bipartit komplit berbobot  $G$  dinyatakan dengan matrix  $W = [w_{ij}]$  dengan  $w_{ij}$  adalah bobot dari sisi  $u_i v_j$  pada graf  $G$ .

Contoh:

Misalkan seorang manager sebuah perusahaan menempatkan 7 karyawan  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$  untuk 7 penempatan bagian produksi  $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)$ . Pemilihan dilakukan untuk mendapatkan keuntungan diukur dari kemampuan setiap karyawan untuk mendapatkan keuntungan setiap posisinya yang dioptimalkan. Kemampuan pelamar kerja merupakan bobot sisi yang menghubungkan karyawan dengan pekerjaan. Bagaimana cara penempatan karyawan yang optimal? (Contoh ini diadaptasi dari Clark & Holton (1991))

Penyelesaian:

Permasalahan ini dapat dimodelkan dalam graf bobot bipartit lengkap  $K_{7,7}$  pada Gambar 7 berikut.



Gambar 7. Graf bobot bipartit lengkap  $K_{7,7}$

Graf  $G$  dapat dipresentasikan dalam bentuk matriks. Label baris- $i$  dengan  $x_i$  dan label kolom- $j$  dengan  $y_j, 1 \leq i, j \leq 7$ . Entri matriks baris- $i$  dan kolom- $j$  menyatakan bobot sisi  $x_i y_j$ .

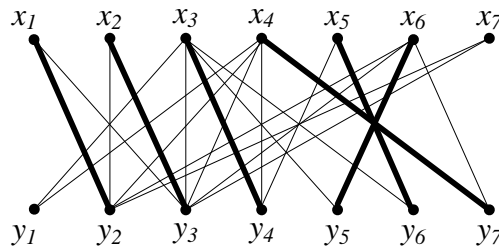
$$M = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 7 & 6 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 8 & 5 & 8 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Jika label titik  $x_i$  diletakkan sebelah kanan baris- $i$  dan label titik  $y_j$  diletakkan di bawah kolom- $j$ , sebuah pelabelan titik  $G$  yang layak, namakan  $\lambda$ , adalah sebagai berikut.

Step 1: Sebuah pelabelan titik G

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$\lambda(x_i)$
$x_1$	3	5	5	4	1	1	1	5
$x_2$	5	7	7	6	5	4	6	
$x_3$	2	0	2	2	2	2	1	
$x_4$	2	4	4	4	3	2	4	
$x_5$	1	2	1	3	1	3	1	
$x_6$	6	8	8	5	8	7	8	
$x_7$	2	4	4	1	0	3	3	
$\lambda(y_i)$	0	0	0	0	0	0	0	

Graf bagian rentang  $G_\lambda$  yang dibangun oleh sisi-sisi G yang bobotnya sama dengan jumlah label titik-titik ujungnya adalah seperti terlihat pada Gambar 8 berikut.



Gambar 8. Graf rentang  $G_\lambda$

Pilih penjadohan  $M = \{x_1y_2, x_2y_3, x_3y_4, x_4y_7, x_5y_6, x_6y_5\}$  pada graf  $G_\lambda$ .

Step 2:  $\exists$  titik  $\{x_7\}$  yang tidak tertutup oleh M. Tulis  $S = \{x_7\}$  dan  $T = \emptyset$ .

Step 3:  $N_{G_\lambda}(S) = \{y_2, y_3\}$ . Karena  $N_{G_\lambda}(S) \supset T$ , pergi ke step 4.

Step 4:  $N_{G_\lambda}(S) \setminus T = \{y_2, y_3\}$ . Pilih  $y_3$ . Titik  $y_3$  tertutup oleh M dengan  $x_2y_3 \in M$ , maka ganti S dengan  $S \cup \{x_3\} = \{x_2, x_7\}$  dan T dengan  $T \cup \{y_3\} = \{y_3\}$ , pergi ke step 3.

Step 3:  $N_{G_\lambda}(S) = \{y_2, y_3\}$ . Karena  $N_{G_\lambda}(S) \supset T$ , pergi ke step 4.

Step 4:  $N_{G_\lambda}(S) \setminus T = \{y_2\}$ . Pilih  $y_2$ . Titik  $y_2$  tertutup oleh M dengan  $x_1y_2 \in M$ , maka ganti S dengan  $S \cup \{x_1\} = \{x_1, x_2, x_7\}$  dan T dengan  $T \cup \{y_2\} = \{y_2, y_3\}$ , pergi ke step 3.

Step 3:  $N_{G_\lambda}(S) = \{y_2, y_3\}$ . Karena  $N_{G_\lambda}(S) = T$ , maka hitung

$$\alpha_\lambda = \min \{ \lambda(x_1)+\lambda(y_1)-w(x_1y_1), \lambda(x_1)+\lambda(y_4)-w(x_1y_4), \lambda(x_1)+\lambda(y_5)-w(x_1y_5), \lambda(x_1)+\lambda(y_6)-w(x_1y_6), \lambda(x_1)+\lambda(y_7)-w(x_1y_7), \lambda(x_2)+\lambda(y_1)-w(x_2y_1), \lambda(x_2)+\lambda(y_4)-w(x_2y_4), \lambda(x_2)+\lambda(y_5)-w(x_2y_5), \lambda(x_2)+\lambda(y_6)-w(x_2y_6), \lambda(x_2)+\lambda(y_7)-w(x_2y_7), \lambda(x_3)+\lambda(y_1)-w(x_3y_1), \lambda(x_3)+\lambda(y_4)-w(x_3y_4), \lambda(x_3)+\lambda(y_5)-w(x_3y_5), \lambda(x_3)+\lambda(y_6)-w(x_3y_6), \lambda(x_3)+\lambda(y_7)-w(x_3y_7) \}$$

$$= \min \{ 5+0-3, 5+0-4, 5+0-1, 5+0-1, 5+0-1, 7+0-5, 7+0-6, 7+0-5, 7+0-4, 7+0-6, 4+0-2, 4+0-1, 4+0-0, 4+0-3, 4+0-3 \}$$

$$= \min \{ 2, 1, 4, 4, 4, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 1 \} = 1$$

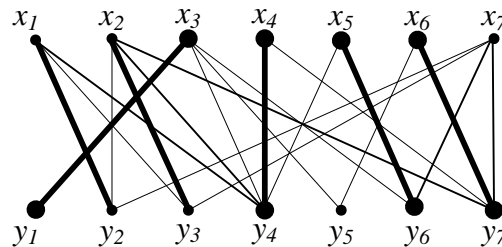
Buat pelabelan titik yang baru pada graf  $G_\lambda$  namakan  $\lambda'$  dengan aturan berikut.

$$\lambda'(x) = \begin{cases} \lambda'(x_1) = 5 - 1 = 4 \\ \lambda'(x_2) = 7 - 1 = 6 \\ \lambda'(x_3) = 2 \\ \lambda'(x_4) = 4 \\ \lambda'(x_5) = 3 \\ \lambda'(x_6) = 8 \\ \lambda'(x_7) = 4 - 1 = 3 \end{cases} \quad \lambda'(y) = \begin{cases} \lambda'(y_1) = 0 \\ \lambda'(y_2) = 0 + 1 = 1 \\ \lambda'(y_3) = 0 + 1 = 1 \\ \lambda'(y_4) = 0 \\ \lambda'(y_5) = 0 \\ \lambda'(y_6) = 0 \\ \lambda'(y_7) = 0 \end{cases}$$

Step 1: Setelah mengganti  $\lambda$  dengan  $\lambda'$ , maka diperoleh pelabelan  $\lambda$  yang baru pada graf  $G$  dalam bentuk matriks berikut ini.

		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$\lambda(x_i)$	
	$x_1$	]	3	5	5	4	1	1	1	4
	$x_2$		5	7	7	6	5	4	6	6
	$x_3$		2	0	2	2	2	2	1	2
$M =$	$x_4$		2	4	4	4	3	2	4	4
	$x_5$		1	2	1	3	1	3	1	3
	$x_6$		6	8	8	5	8	7	8	8
	$x_7$		2	4	4	1	0	3	3	3
	$\lambda(y_i)$	0	1	1	0	0	0	0		

Graf bagian rentang  $G_\lambda$  yang baru pada  $G$  tampak pada Gambar 9 berikut.



Gambar 9. Graf rentang  $G_\lambda$  baru

Step1: Pilih  $M = \{x_1y_2, x_2y_3, x_3y_1, x_4y_4, x_5y_6, x_6y_7\}$  penjodohan baru pada graf  $G_\lambda$ .

Step 2:  $\exists$  titik  $\{x_7\}$  yang tidak tertutup oleh  $M$ . Tulis  $S = \{x_7\}$  dan  $T = \emptyset$ .

Step 3:  $N_{G_\lambda}(S) = \{y_2, y_3, y_6, y_7\}$ . Karena  $N_{G_\lambda}(S) \supset T$ , pergi ke step 4.

Step 4:  $N_{G_\lambda}(S) \setminus T = \{y_2, y_3, y_6, y_7\}$ . Pilih  $y_2$ . Titik  $y_2$  tertutup oleh  $M$  dengan  $x_1y_2 \in M$ , maka ganti  $S$  dengan  $S \cup \{x_1\} = \{x_1, x_7\}$  dan  $T$  dengan  $T \cup \{y_2\} = \{y_2\}$ , pergi ke step 3.

Step 3:  $N_{G_\lambda}(S) = \{y_2, y_3, y_4, y_6, y_7\}$ . Karena  $N_{G_\lambda}(S) \supset T$ , pergi ke step 4.

Step 4:  $N_{G_\lambda}(S) \setminus T = \{y_3, y_4, y_6, y_7\}$ . Pilih  $y_3$ . Titik  $y_3$  tertutup oleh  $M$  dengan  $x_2y_3 \in M$ , maka ganti  $S$  dengan  $S \cup \{x_2\} = \{x_1, x_2, x_7\}$  dan  $T$  dengan  $T \cup \{y_3\} = \{y_2, y_3\}$ , pergi ke step 3.

Step 3:  $N_{G_\lambda}(S) = \{y_2, y_3, y_4, y_7\}$ . Karena  $N_{G_\lambda}(S) \supset T$ , pergi ke step 4.

Step 4:  $N_{G_\lambda}(S) \setminus T = \{y_4, y_7\}$ . Pilih  $y_4$ . Titik  $y_4$  tertutup oleh M dengan  $x_4y_4 \in M$ , maka ganti S dengan  $S \cup \{x_4\} = \{x_1, x_2, x_4, x_7\}$  dan T dengan  $T \cup \{y_4\} = \{y_2, y_3, y_4\}$ , pergi ke step 3.

Step 3:  $N_{G_\lambda}(S) = \{y_2, y_3, y_4, y_7\}$ . Karena  $N_{G_\lambda}(S) \supset T$ , pergi ke step 4.

Step 4:  $N_{G_\lambda}(S) \setminus T = \{y_7\}$ . Pilih  $y_7$ . Titik  $y_7$  tertutup oleh M dengan  $x_6y_7 \in M$ , maka ganti S dengan  $S \cup \{x_6\} = \{x_1, x_2, x_4, x_6, x_7\}$  dan T dengan  $T \cup \{y_7\} = \{y_2, y_3, y_4, y_7\}$ , pergi ke step 3.

Step 3:  $N_{G_\lambda}(S) = \{y_2, y_3, y_4, y_5, y_7\}$ . Karena  $N_{G_\lambda}(S) \supset T$ , pergi ke step 4.

Step 4:  $N_{G_\lambda}(S) \setminus T = \{y_5\}$ . Pilih  $y_5$ . Titik  $y_5$  tidak tertutup oleh M, maka lintasan  $P = \{x_7, x_7y_7, y_7, y_7x_6, x_6, x_6y_5, y_5\}$  lintasan augmented-M. Ganti M dengan  $M' = M \Delta E(P) = \{x_1y_2, x_2y_3, x_3y_1, x_4y_4, x_5y_6, x_6y_5, x_7y_7\}$ , pergi ke step 2.

Step 2: X tertutup oleh penjodohan M' di atas. Jadi M' adalah penjodohan sempurna pada graf  $G_\lambda$  dan M' adalah penjodohan optimal pada graf G dengan bobot sebagai berikut.

$$w(M') = w(x_1y_2) + w(x_2y_3) + w(x_3y_1) + w(x_4y_4) + w(x_5y_6) + w(x_6y_5) + w(x_7y_7) = 5 + 7 + 2 + 4 + 3 + 8 + 3 = 32.$$

Jadi keuntungan maksimum diperoleh dengan memasang karyawan dengan pekerjaan seperti dalam tabel di bawah ini.

Karyawan	Pekerjaan	Profit
$x_1$	$y_2$	5
$x_2$	$y_3$	7
$x_3$	$y_1$	2
$x_4$	$y_4$	4
$x_5$	$y_6$	3
$x_6$	$y_5$	8
$x_7$	$y_7$	3
Total profit		32

Perhatikan bahwa dari pelabelan titik G yang terakhir diperoleh:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} \lambda(v) &= \sum \lambda(x) + \sum \lambda(y) \\ &= \lambda(x_1) + \lambda(x_2) + \lambda(x_3) + \lambda(x_4) + \lambda(x_5) + \lambda(x_6) + \lambda(x_7) + \lambda(y_1) \\ &\quad + \lambda(y_2) + \lambda(y_3) + \lambda(y_4) + \lambda(y_5) + \lambda(y_6) + \lambda(y_7) \\ &= 4 + 6 + 2 + 4 + 3 + 8 + 3 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ &= 32 \\ &= w(M'). \end{aligned}$$

### **C. Simpulan dan Saran**

Masalah penugasan optimal merupakan masalah penempatan untuk memperoleh solusi yang optimal. Masalah penugasan optimal dapat diselesaikan dengan menerapkan konsep graf, yaitu dengan mencari penjadohan sempurna dengan bobot maksimum pada suatu graf bipartit khususnya graf bipartit lengkap berbobot. Salah satu cara untuk menemukan penjadohan sempurna pada graf bipartit lengkap berbobot dengan bobot maksimum adalah dengan algoritma Kuhn-Munkres. Algoritma Kuhn-Munkres ini sebaiknya dibuat program komputernya sehingga untuk permasalahan yang melibatkan karyawan dan jenis pekerjaan yang lebih banyak dapat diselesaikan dengan cepat.

### **D. Daftar Pustaka**

- Budayasa, I.K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.
- Clark, J. & Holton, D. A. 1991. *A First Look at Graph Theory*. Singapore: World Scientific.
- Siang, J.J. 2004. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: CV. Andi Offset.





FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

Gedung D7 Kampus Sekaran Gunungpati Semarang 50229  
Telp. (024) 8508032, Fax. (024) 8508032  
Website: <http://matematika.unnes.ac.id>  
Email: [matematika@unnes.ac.id](mailto:matematika@unnes.ac.id)

ISBN 978-602-10-3406-4



9 786021 034064