UJM 4 (1) (2015)
UNNES Journal of Mathematics
http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

PELABELAN *L*(3,2,1) DAN PEMBENTUKAN GRAF MIDDLE PADA BEBERAPA GRAF KHUSUS

Meliana Deta Anggraeni✉, Mulyono, Amin Suyitno

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 lantai 1 Kampus Sekaran, Gunungpati, Semarang, 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Agustus 2013
Disetujui September 2013
Dipublikasikan Mei 2015

Keywords :
Graf khusus;
graf middle;
pelabelan L(3,2,1).

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui (1) pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n, (2) mengetahui cara menentukan graf *middle* dari graf path P_n, graf sikel C_n, graf bintang S_n, dan pelabelan $L(3,2,1)$nya. Metode penelitian yang digunakan adalah studi pustaka. Untuk menentukan hasil pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n, terlebih dahulu membuktikan teorema-teorema yang ada. Setelah teorema terbukti, gambar dan beri label pada titik graf tersebut dengan ketentuan jika terdapat dua titik dengan jarak satu maka harus memiliki label dengan selisih minimal 3, jika terdapat dua titik dengan jarak dua maka harus memiliki label dengan selisih minimal 2, dan jika terdapat dua titik dengan jarak tiga maka harus memiliki label dengan selisih minimal 1. Setelah semua titik diberikan label akan diperoleh label tertinggi dari suatu titik pada graf tersebut, disimbolkan $k(G)$.

Abstract

This research purposed to find out (1) labeling $L(3,2,1)$ in a graphs paths P_n, graphs cycles C_n, and graphs stars S_n, (2) know how to determine the middle graphs of a graphs paths P_n, graphs cycles C_n, graphs stars S_n, and its labeling $L(3,2,1)$. Observational method that is utilized is studi's method library. To determine the labeling $L(3,2,1)$ results in a graphs paths P_n, graphs cycles C_n, and graphs stars S_n, firstly prove theorems that . After the theorem proved, image and label on the graph point with the provision that if there are two points with a distance it must have a label with a difference of at least 3, if there are two points with a distance of two then it must have a label with a difference of at least 2, and if there are two with a three-point distance it must have a label with a difference of at least 1. After all the point will give the label obtained the highest label of a point on the graph, denoted $k(G)$.

✉ Alamat korespondensi:
E-mail: meelymeelo@yahoo.com

ISSN 2252-6943

Pendahuluan

Pelabelan dari suatu graf adalah suatu pemetaan yang membawa setiap elemen graf yaitu himpunan sisi (*edge*) atau himpunan titik (*vertex*) ke bilangan-bilangan bulat positif, yang disebut label (Budiasti, 2010; Huda, 2012). Pelabelan L(3,2,1) adalah pelabelan di mana dalam suatu graf jika terdapat dua titik dengan jarak satu maka harus memiliki label dengan selisih minimal 3, jika terdapat dua titik dengan jarak dua maka harus memiliki label dengan selisih minimal 2, dan jika terdapat dua titik dengan jarak tiga maka harus memiliki label dengan selisih minimal 1 (Chia, 2011; Griggs, 1992).

Permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n, bagaimana cara menentukan graf *middle* dari graf path P_n, graf sikel C_n, graf bintang S_n, dan pelabelan $L(3,2,1)$nya. Tujuan dalam penelitian ini adalah mengetahui pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf path P_n, graf sikel C_n, graf bintang S_n, mengetahui cara menentukan graf *middle* dari graf path P_n, graf sikel C_n, graf bintang S_n, dan pelabelan $L(3,2,1)$nya.

Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka di mana peneliti mempelajari teori-teori yang berhubungan dengan pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf path P_n, graf sikel C_n, graf bintang S_n, dan graf *middle*. Subyek penelitian adalah pelabelan $L(3,2,1)$ dan graf *middle*. Dalam hal ini difokuskan pada pelabelan $L(3,2,1)$ untuk graf path P_n, graf sikel C_n, graf bintang S_n, dan graf *middle*. Sumber penelitian ada dua yaitu sumber primer dan sumber sekunder. Sumber data primer adalah buku dan literatur yang berkaitan dengan pelabelan $L(3,2,1)$ dan graf *middle* sedangkan sumber data sekunder adalah beberapa buku, skripsi, dan literatur ilmiah yang mendukung dan berhubungan dengan penelitian ini. Metode yang digunakan adalah metode analisis deskriptif yaitu mendeskripsikan pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf path P_n, graf sikel C_n, graf bintang S_n, dan graf *middle*.

Hasil dan Pembahasan

Definisi 1. Berdasarkan hasil penelitian (Clipperton dkk, 2005; Lingsheit, 2009) jika diketahui graf $G = (V(G), E(G))$. Maka pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf G adalah fungsi $f: V(G) \rightarrow N$, dengan $\{x,y\} \in V(G)$ berlaku

$$|f(x) - f(y)| \geq \begin{cases} 3, & \text{jika } d(x,y) = 1 \\ 2, & \text{jika } d(x,y) = 2 \\ 1, & \text{jika } d(x,y) = 3 \end{cases}$$

Definisi. Jika terdapat titik v_i dan v_j di dalam graf G, maka jarak antara titik v_i dan v_j adalah banyaknya sisi yang dilewati dari titik v_i menuju titik v_i dan v_j. Bilangan pelabelan $L(3,2,1)$, disimbolkan $k(G)$, dari graf G adalah bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga G memiliki pelabelan $L(3,2,1)$ dengan k sebagai label maksimum. Sebuah pelabelan $L(3,2,1)$ dari graf G disebut pelabelan L(3,2,1) minimal dari G jika label tertinggi dari sembarang titik dalam pelabelan itu adalah $k(G)$ (Yeh, 2006; Lingscheit, 2009)

Catatan. Jika 1 tidak digunakan sebagai label titik dalam suatu pelabelan $L(3,2,1)$ dari sebuah graf, maka setiap label titik dapat diturunkan 1 untuk memperoleh pelabelan $L(3,2,1)$ dari sebuah graf. Jadi dalam pelabelan $L(3,2,1)$ minimal, 1 harus digunakan sebagai label titik (Chang, 2000; Clipperton, 2008).

1. Pelabelan L(3,2,1) pada Graf Path Pn

Lemma 1. Untuk setiap graf path pada n titik yang dinotasikan dengan P_n, dengan $n \geq 8$, maka $k(P_n) \geq 8$.

Teorema 1. Untuk setiap graf path, yang dinotasikan dengan P_n, maka

$$k(P_n) = \begin{cases} 1, \text{jika } n = 1; \\ 4, \text{jika } n = 2; \\ 6, \text{jika } n = 3, 4; \\ 7, \text{jika } n = 5, 6, 7; \\ 8, \text{jika } n \geq 8. \end{cases}$$

Bukti :

Misalkan $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ merupakan himpunan dari titik pada P_n sedemikian sehingga v_i berdekatan dengan $v_{(i+1)}$ untuk $1 \leq i < n$. Didefinisikan f sedemikian sehingga $f(\{v_1, v_2, \ldots, v8\}) = \{1,4,7,2,5,8,3,6\}$ dan $f(v_i) = f(v_j)$ jika $i \equiv j \pmod 8$. Menurut definisi dari f dan berdasarkan Lemma 1 maka $k(P_n) = 8$ untuk $n \geq 8$.

Kasus I : $n = 1$.

Ini adalah kasus trivial.

Kasus II : $n = 2$.

Pola pelabelan $\{1,4\}$ menunjukkan bahwa $k(P_2) = 4$, karena tidak ada penyelesaian yang lebih baik dari pada itu.

Kasus III : $n = 3,4$.

Akan ditunjukan bahwa pola pelabelan

dari $k(P_n) \leq 6$ untuk $n = 3{,}4$ adalah {3,6,1,4}. Andaikan $k(P_n) < 6$. Terdapat titik $v_i \in V$ sedemikian sehingga $f(v_1) = 1$. Jika vi memiliki derajat 2, maka titik $v_{(i-1)}$ dan $v_{(i+1)}$ ada sedemikian sehingga $f(v_{(i-1)}) \geq 4$ dan $f(v_{(i+1)}) \geq 6$, sehingga kontradiksi. Jika v_i memiliki derajat 1, misalkan $vi = v_1$, maka kemungkinan untuk $f(v2)$ adalah 4 dan 5. Dalam salah satu kasus, diketahui $f(v3) > 6$, maka kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $k(P_n) < 6$.

Kasus IV : $n = 5{,}6{,}7$.

Akan ditunjukkan bahwa pola pelabelan dari $k(P_n) \leq 7$ untuk $n = 5{,}6{,}7$ adalah {3,6,1,4,7,2,5}. Andakain $k(P_n) < 7$. Terdapat titik $v_i \in V$ sedemikian sehingga $f(v_i) = 1$ dan titik $v_{(i+1)}$ dan $v_{(i+2)}$ ada atau $v_{(i-1)}$ dan $v_{(i-2)}$ ada. Tanpa menghilangkan sifat umum, andaikan $v_{(i+1)}$ dan $v_{(i+2)}$ ada. Kemungkinan untuk $f(v_{(i+1)})$ adalah 4,5, dan 6. Jika $f(v_{(i+1)})$=4,5, maka $f(v_{(i+2)}) \geq 7$, sehingga kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $k(P_n) < 7$. Jika $f(v_{(i+1)}) = 6$ maka $f(v_{(i+2)}) = 3$. Selanjutnya, jika $v_{(i+2)}$ memiliki derajat 2, maka $v_{(i+3)}$ ada dan $f(v_{(i+2)}) > 7$. Jika $v_{(i+2)}$ memiliki derajat 1 maka titik $v_{(i-1)}$ dan $v_{(i-2)}$ ada. Satu-satunya kemungkinan untuk $f(v_{(i-1)})$ adalah 4. Tetapi dengan memasukkan $f(v_{(i-1)}) \geq 7$, maka kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $k(P_n) < 7$.

2. Pelabelan L(3,2,1) pada Graf Sikel C_n

Lemma 2. Misalkan n adalah bilangan bulat ganjil, jika $n > 3$ maka $k(C_n) \neq 8$.

Lemma 3. Untuk setiap graf sikel dengan $n = 4$ maka $k(C_4) = 8$.

Lemma 4. Untuk setiap graf sikel dengan $n = 5$ maka $k(C_5) = 9$.

Lemma 5. Untuk graf sikel dengan $n = 6$ maka $k(C_6) = 8$.

Lemma 6. Untuk graf sikel dengan $n = 7$ maka $k(C_7) = 10$.

Lemma 7. Misalkan n adalah bilangan bulat genap. Jika $n \geq 4$, maka terdapat bilangan bulat non negatif a dan d sedemikian sehingga $n = 4a+6d$.

Lemma 8. Misalkan n adalah bilangan bulat ganjil. Jika $n \geq 9$ dan $n \neq 11$, maka terdapat bilangan bulat non negatif a dan d sedemikian sehingga $n = 4a + 5d$.

Teorema 2. Untuk setiap graf lengkap pada n titik, maka $k(K_n) = 3n - 2$.

Bukti :

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf lengkap dengan $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan f adalah pelabelan $L(3,2,1)$ minimal dari G dengan $f(v_i) < f(v_j)$ untuk semua $i < j$. Kemudian, untuk setiap v_i, $v_j \in V(G)$ dan $i \neq j$, $(v_i, v_j) \in E(G)$, sedemikian sehingga $d(v_i, v_j) = 1$. Dengan demikian, $|f(v_i) - f(v_j)| \geq 3$ untuk setiap v_i, $v_j \in V(G)$ dan $i \neq j$. Karena terdapat v_i di dalam V sedemikian sehingga $f(v_i) = 1$, maka $f(v_1) = 1$. Begitu juga, karena f adalah pelabelan $L(3,2,1)$ minimal dari G, sedemikian sehingga untuk setiap v_i dengan $1 < i \leq n \geq f(v_{(i-1)}) + 3$. Secara rekursif, maka akan diperoleh :

$$
\begin{aligned}
f(v_n) &\geq f(v_{n-1}) + 3 \\
&\geq f(v_{n-2}) + 3(2) \\
&\geq f(v_{n-3}) + 3(3) \\
&\ \ \vdots \\
&\geq f(v_{n-i}) + 3(n-i) \\
&\ \ \vdots \\
&\geq f(v_1) + 3(n-1) = 1 + 3(n-1) = 3n - 2.
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu, $k(K_n) = 3n - 2$.

Teorema 3. Untuk setiap graf sikel, C_n dengan $n \geq 3$, maka

$$
k(C_n) = \begin{cases} 7, \text{jika } n = 3; \\ 8, \text{jika } n \text{ genap}; \\ 9, \text{jika } n \text{ ganjil dan } n \neq 3,7; \\ 10, \text{jika } n = 7 \end{cases}
$$

Bukti :

Misalkan $n \geq 3$ dan $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah titik dari C_n sedemikian sehingga untuk $1 \leq i < n$, $(v_i, v_{(i+1)})$ dan (v_1, v_n) adalah sisi dalam C_n. Kasus berikut ini menggambarkan semua kemungkinan pada $k(C_n)$.

Kasus I : $n = 3$:

Dapat dilihat bahwa C_3 adalah graf lengkap. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 2 untuk graf lengkap, maka $k(C_3) = 7$.

Kasus II : n genap :

Diketahui $k(C_4) = 8$ menurut Lemma 3 dan $k(C_6) = 8$ menurut Lemma 5. Berdasarkan Teorema 1 pada graf path menunjukkan bahwa $k(P_n) \geq 8$ untuk $n \geq 8$. Maka untuk setiap graf sikel yang genap, $k(C_n) \geq 8$. Mengingat pelabelan yang digunakan untuk C_4 dan C_6 pada Lemma 3 dan Lemma 5, secara berturut-turut yaitu: untuk C_4 digunakan $f(V)$ ={1,6,3,8} dan untuk C_6 digunakan $f(V)$ ={1,4,7,2,5,8}. Dapat dilihat bahwa pelabelan yang digunakan untuk C_4 dapat diulang secara tak terbatas untuk setiap C_n dengan n perkalian dari 4. Demikian juga, pelabelan yang digunakan untuk C_6 dapat diulang secara tak terbatas untuk setiap C_n dengan n perkalian dari 6. Selain itu, pelabelan dari C_4 dan C_6 dapat digabung bersama menjadi label C_{10} seperti berikut : $f(V) = \{1,6,3,8,1,4,7,2,5,8\}$. Berdasarkan Lemma 7, dapat diketahui bahwa setiap bilangan bulat genap yang lebih besar dari atau sama dengan 4 dapat dinyatakan sebagai kombinasi dari perkalian non negatif dari 4 dan 6. Dari hal ini, jelas bahwa pelabelan dari setiap C_n yang genap tersusun dari kombinasi yang berasal dari perkalian non negatif pada pola pelabelan C_4 dan C_6. Oleh karena itu, $k(C_n) = 8$ untuk setiap n genap.

Kasus III : ganjil dan $n \neq 3$ atau 7 :

Berdasarkan Lemma 4 diketahui bahwa $k(C_5) = 9$, kemudian bardasarkan Teorema 1 untuk graf path diketahui bahwa $k(C_n) \geq 8$ untuk $n \geq 8$ karena $k(P_n) = 8$, dan bardasarkan Lemma 2 diketahui bahwa $k(C_n) \neq 8$ untuk graf sikel ganjil. Ini mengimplikasikan bahwa untuk setiap graf sikel ganji $k(C_n) \geq 9$. Dalam Lemma 4, C_5 dilabeli dengan $\{5,1,7,3,9\}$. Dapat dilihat bahwa pelabelan dari C_5 dapat diulang secara tak terbatas untuk setiap C_n dengan n perkalian dari 5. Serta dapat dikombinasikan pelabelan untuk C_5 dengan pelabelan untuk C_4 yang digunakan dalam Lemma 3 menjadi label C_9 seperti berikut : $\{5,1,7,3,9,1,6,3,8\}$. Berdasarkan Lemma 8 dapat diketahui bahwa setiap bilangan bulat ganjil yang lebih besar dari atau sama dengan 9, dengan pengecualian 11, dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi dari perkalian non negatif dari 4 dan 5. Ini mengimplikasikan bahwa setiap C_n, dengan $n \geq 9$ dan $n \neq 11$, terdiri dari kombinasi yang berasal dari perkalian non negatif pada C_4 dan C_5. Oleh sebab itu, karena $k(C_5) = 9$, diperoleh $k(C_n) = 9$ untuk setiap C_n, dimana $n \geq 9$ dan $n \neq 11$. Untuk C_{11} dapat diketahui bahwa $k(C_{11}) \geq 9$ (berasal dari Lemma 3 dan Lemma 6). Didefinisikan f untuk C_{11} sedemikian sehingga $f(V) = \{1,6,3,8,5,1,9,6,2,8,\}$. Karena max $(f(V)) = 9$, $k(C_{11}) = 9$.

Kasus IV : n=7 :

Berdasarkan Lemma 6, maka diperoleh $k(C_7) = 10$.

3. Pelabelan L(3,2,1) pada Graf Bintang S_n

Teorema 4. Untuk setiap graf bipartit lengkap $K_{(m,n)}$, maka $k(K_{(m,n)}) = 2(m+n)$.

Bukti :

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf bipartit lengkap, yang dinotasikan dengan $K_{(m,n)}$. Graf ini memiliki $m+n$ titik dan $m.n$ sisi. Misalkan $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ dan $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$.

Akan dibuktikan bahwa titik label pada himpunan A dan B memenuhi Teorema 4. Misalkan f adalah pelabelan $L(3,2,1)$ minimal dari G dengan $f(a_1) \leq f(a_2) \leq \ldots \leq f(a_m)$ dan $f(b_1) \leq f(b_2) \leq \ldots \leq f(b_n)$. Jika $d(a_i,a_j) = 2$ untuk setiap $a_i, a_j \in A$ dengan $i \neq j$, maka sama halnya untuk pasangan dari titik di dalam B yaitu $d(b_i,b_j) = 2$ untuk setiap $b_i, b_j \in B$ dengan $i \neq j$. Misalkan $f(a_1) = 1$, maka tiap $f(a_i)$ dengan $i \neq 1$ menjadi ganjil karena f adalah minimal. Dengan demikian, $f(A)=\{1,3,5,\ldots,1 + 2(m-1)\}$.

Karena setiap $a_i \in A$ berdekatan dengan setiap $b_i \in B$, maka $|f(a_i) - f(b_i)| \geq 3$. Sehingga diperlukan $f(b_i) \geq f(a_m) + 3$. Kemudian, karena $f(a_m) = 2m - 1$, maka $f(b_1) \geq 3 + (2m - 1)$. Oleh karena itu, f adalah minimal sehingga diperoleh $f(b_1) = 3 + (2m - 1) = 2m + 1$. Pelabelan pada titik B berikut sama dengan pelabelan pada titik A yaitu : karena $f(b_1) = 2m + 1$ maka diperlukan $f(b_i)$ untuk menjadi genap. Dengan demikian, $f(B) = \{ 2m+2 , 2m+4 , \ldots , 2m+2+2(n-1) \}$. Sehingga diperoleh $f(b_n) = 2m+2+2(n-1) = 2(m+n)$. Oleh karena itu $k(K_{(m,n)}) = 2(m+n)$.

Akibat Teorema 4. Untuk graf bintang atau S_n, maka $k(S_n) = 2n+2$.

Bukti :

Menurut definisi, graf bintang atau S_n adalah graf bipartit lengkap yang berbentuk $K_{(1,n)}$. Oleh karena itu, $k(S_n) = 2n+2$.

Definisi 2. Graf *middle* pada graf G yang dinotasikan $M(G)$ adalah graf yang himpunan titiknya adalah $V(M(G)) = V(G) \cup E(G) = \{v_1,\ldots,v_n,e_1,\ldots,e_n\}$. Dua titik adjacent jika dan hanya jika:

(i) $e_a \in V(M(G))$ *adjacent* dengan $e_b \in V(M(G))$ karena sisi $e_a = v_iv_j \in E(G)$ dan sisi $e_b = v_jv_1 \in E(G)$ *incident* pada titik yang sama di graf G.

(ii) $v_i \in V(M(G))$ *adjacent* dengan $e_a \in V(M(G))$ karena sisi $e_a = v_iv_j \in E(G)$ *incident* dengan titik $v_i \in E(G)$ (Vaidya & Bantva, 2010).

4. Graf *Middle* dari Graf Path P_n

Pada Gambar 1 terdapat Graf P_6 dan Graf $M(P_6)$. Graf path P_6 mempunyai himpunan titik $P_6 = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ dan himpunan sisi $E(P_6)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$. Graf *middle* dari graf P_6 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(P_6) \cup E(P_6)$, jadi himpunan titik $M(P_6)$ adalah $V(M(P_6)) = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$. Dua titik adalah *adjacent* di $M(P_6)$ jika:

(i) $e_1 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_2 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(P_6)$ dan sisi $e_2 = v_2v_3 \in E(P_6)$ *incident* di titik $v_2 \in V(P_6)$.

$e_2 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_3 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_2 = v_2v_3 \in E(P_6)$ dan sisi $e_3 = v_3v_4 \in E(P_6)$ *incident* di titik $v_3 \in V(P_6)$.

$v_3 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_4 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_3 = v_3v_4 \in E(P_6)$ dan sisi $e_4 = v_4v_5 \in E(P_6)$ *incident* di titik $v_4 \in V(P_6)$.

$e_4 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_5 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_4 = v_4v_5 \in E(P_6)$ dan sisi $e_5 = \in v_5v_6\ E(P_6)$ *incident* di titik $v_5 \in V(P_6)$.

(ii) $v_1 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_1 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_1 \in V(P_6)$.

$v_2 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_1 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_2 \in V(P_6)$.

$v_2 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_2 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_2 = v_2v_3 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_2 \in V(P_6)$.

$v_3 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_2 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_2 = v_2v_3 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_3 \in V(P_6)$.

$v_3 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_3 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_3 = v_3v_4 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_3 \in V(P_6)$.

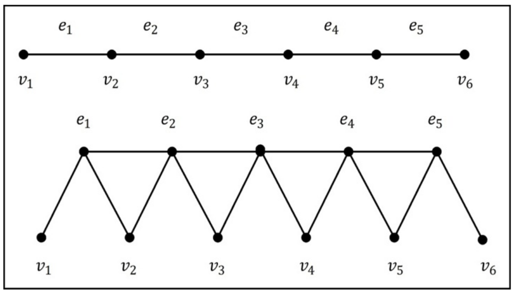
$v_4 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_3 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_3 = v_3v_4 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_4 \in V(P_6)$.

$v_4 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_4 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_4 = v_4v_5 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_4 \in V(P_6)$.

$v_5 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_4 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_4 = v_4v_5 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_5 \in V(P_6)$.

$v_5 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_5 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_5 = v_5v_6 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_5 \in V(P_6)$.

$v_6 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_5 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_5 = v_5v_6 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_6 \in V(P_6)$.



Gambar 1 Graf P_6 dan Graf $M(P_6)$

5. Graf *Middle* dari Graf Sikel C_n

Pada Gambar 2 terdapat Graf C_3 dan Graf $M(C_3)$. Graf sikel C_3 mempunyai himpunan titik $V(C_3)=\{v_1,v_2,v_3\}$ dan himpunan sisi $E(C_3)=\{e_1,e_2,e_3\}$. Graf *middle* dari graf C_3 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(C_3) \cup E(C_3)$, jadi himpunan titik $M(C_3)$ adalah $V(M(C_3))=\{v_1,v_2,v_3,e_1,e_2,e_3\}$. Dua titik adalah *adjacent* di $M(C_3)$ jika:

(i) $e_1 \in V(M(C_3))$ *adjacent* dengan $e_2 \in V(M(C_3))$ karena sisi $e_1 = v_1v_2 \in V(C_3)$) dan sisi $e_2 = v_2v_3 \in E(C_3)$ *incident* di titik $v_2 \in V(C_3)$.

$e_2 \in V(M(C_3))$ *adjacent* dengan $e_3 \in V(M(C_3))$ karena sisi $e_2 = v_2v_3 \in E(C_3)$ dan sisi $e_3 = v_3v_1 \in E(C_3)$ *incident* di titik $v_3 \in V(C_3)$.

$e_3 \in V(M(C_3))$ *adjacent* dengan $e_1 \in V(M(C_3))$ karena sisi $e_3 = v_3v_1 \in E(C_3)$ dan sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(C_3)$ *incident* di titik $v_1 \in V(C_3)$.

(ii) $v_1 \in V(M(C_3))$ *adjacent* dengan $e_1 \in V(M(C_3))$ karena sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(C_3)$ *incident* dengan titik $v_1 \in V(C_3)$.

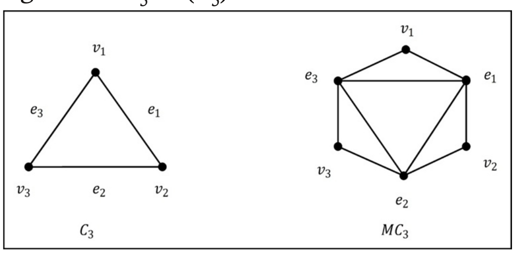
$v_1 \in V(M(C_3))$ *adjacent* dengan $e_3 \in V(M(C_3))$ karena sisi $e_3 = v_1v_3 \in E(C_3)$ *incident* dengan titik $v_1 \in V(C_3)$.

$v_2 \in V(M(C_3))$ *adjacent* dengan $e_1 \in V(M(C_3))$ karena sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(C_3)$ *incident* dengan titik $v_2 \in V(C_3)$.

$v_2 \in V(M(C_3))$ *adjacent* dengan $e_2 \in V(M(C_3))$ karena sisi $e_2 = v_2v_3 \in E(C_3)$ *incident* dengan titik $v_2 \in V(C_3)$.

$v_3 \in V(M(C_3))$ *adjacent* dengan $e_2 \in V(M(C_3))$ karena sisi $e_2 = v_2v_3 \in E(C_3)$ *incident* dengan titik $v_3 \in V(C_3)$.

$v_3 \in V(M(C_3))$ *adjacent* dengan $e_3 \in V(M(C_3))$ karena sisi $e_3 = v_1v_3 \in E(C_3)$ *incident* dengan titik $v_3 \in V(C_3)$.



Gambar 2 Graf C_3 dan Graf $M(C_3)$

6. Graf *Middle* dari Graf Bintang S_n

Pada Gambar 3 terdapat Graf $K_{1,3}$ dan Graf $M(K_{1,3})$. Graf bintang $K_{1,3}$ mempunyai himpunan titik $V(K_{1,3})=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ dan himpunan sisi $E(K_{1,3})=\{e_1,e_2,e_3\}$. Graf *middle* dari graf $K_{1,3}$ adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(K_{1,3}) \cup E(K_{1,3})$, jadi himpunan titik $M(K_{1,3})$ adalah $V(M(K_{1,3})) = \{v_1,v_2,v_3,v_4,e_1,e_2,e_3\}$. Dua titik adalah *adjacent* di $M(K_{1,3})$ jika:

(i) $e_1 \in V(M(K_{1,3}))$ *adjacent* dengan $e_2 \in V(M(K_{1,3}))$ karena sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(K_{1,3})$ dan sisi $e_2 = v_1v_3 \in E(K_{1,3})$ *incident* di titik $v_1 \in V(K_{1,3})$.

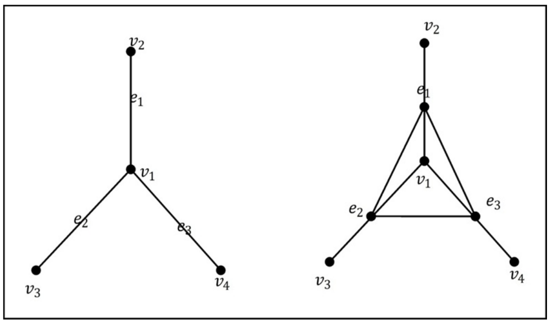
$e_2 \in V(M(K_{1,3}))$ *adjacent* dengan $e_3 \in V(M(K_{1,3}))$ karena sisi $e_2 = v_1v_3 \in E(K_{1,3})$ dan sisi $e_3 = v_1v_4 \in E(K_{1,3})$ *incident* di titik $v_1 \in V(K_{1,3})$.

$e_3 \in V(M(K_{1,3}))$ *adjacent* dengan $e_1 \in V(M(K_{1,3}))$ karena sisi $e_3 = v_1v_4 \in E(K_{1,3})$ dan sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(K_{1,3})$ *incident* di titik $v_1 \in V(K_{1,3})$.

(ii) $v_1 \in V(M(K_{1,3}))$ *adjacent* dengan $e_1 \in V(M(K_{1,3}))$ karena sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(K_{1,3})$ *incident* dengan titik $v_1 \in V(K_{1,3})$.

$v_1 \in V(M(K_{1,3}))$ *adjacent* dengan $e_2 \in V(M(K_{1,3}))$ karena sisi $e_2 = v_1v_3 \in E(K_{1,3})$ *incident* dengan titik $v_1 \in V(K_{1,3})$.

$v_1 \in V(M(K_{1,3}))$ *adjacent* dengan $e_3 \in V(M(K_{1,3}))$ karena sisi $e_3 = v_1v_4 \in E(K_{1,3})$ *incident* dengan titik $v_1 \in V(K_{1,3})$.



Gambar 3 Graf S_3 dan Graf $M(S_3)$

Simpulan

Berdasarkan pembahasan diperoleh simpulan, Pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf path P_n untuk $n = 2$ mempunyai $k(P_2) = 4$, $n = 3$ mempunyai $k(P_3) = 6$, $n = 4$ mempunyai $k(P_4) = 6$, $n = 5$ mempunyai $k(P_5) = 7$, $n = 6$ mempunyai $k(P_6) = 7$, $n = 7$ mempunyai $k(P_7) = 7$ dan $n \geq 8$ mempunyai $k(P_n) = 8$. Pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf sikel C_n untuk n=3 mempunyai $k(C_3) = 7$, $n = 4$ mempunyai $k(C_4) = 8$, $n = 5$ mempunyai $k(C_n) = 9$, $n = 6$ mempunyai $k(C_6) = 8$, $n = 7$ mempunyai $k(C_7) = 10$, $n = 9$ mempunyai $k(C_9) = 9$. Pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf bintang S_n untuk $n = 5$ mempunyai $k(S_5) = 12$. Pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf *middle* dari graf path P_n untuk $n = 2$ mempunyai $k(M(P_2)) = 6$, $n = 3$ mempunyai $k(M(P_3)) = 10$, $n = 4$ mempunyai $k(M(P_4)) = 12$, $n = 5$ mempunyai $k(M(P_5)) = 13$ dan n=6 mempunyai $k(M(P_6)) = 13$. Pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf *middle* dari graf sikel C_n untuk $n = 3$ mempunyai $k(M(C_3)) = 16$, $n = 4$ mempunyai $k(M(C_4)) = 14$ dan $n = 5$ mempunyai $k(M(C_5)) = 15$. Pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf *middle* dari graf bintang S_n untuk $n = 3$ mempunyai $k(M(S_3)) = 13$.

Daftar Pustaka

Budiasti, H. 2010. *Pelabelan Total Titik Tak Beraturan pada Graf Bipartisi Lengkap. Skripsi*. Semarang: FMIPA Universitas Negeri Semarang.

Chang, G. J. dkk. 2000. On L(d,1)-labelings of graphs. *Discrete Mathematics*, 220: 57–66.

Chia, Ma-Lia. 2011. L(3,2,1)-Labeling of Graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 15(6): 2439-2457.

Clipperton, J. dkk. 2005. L(3,2,1) Labeling of Simpel Graphs. *REU Paper, Valparais Universit*. Tersedia di http://www.valpo.edu/mcs/pdf/zslabeling.pdf [diakses 12-01-2012].

Clipperton, J. 2008. L(d,2,1) Labeling of Simple Graphs. *Rose-Hulman Institute of Tecnology Undergraduate Math Journal, volume 9*. Tersedia di http://www.rose-hulman.edu/mathjournal//archives/2008/vol9-n2/paper2/v9n2-2pd.pdf [diakses 12-01-2012].

Griggs, J. R. & R. K. Yeh. 1992. Labeling Graphs with a Condition at Distance 2. *SIAM J. DISC. MATH*, 5(4): 586-595.

Huda, N & Amri, Z. 2012. Pelabelan Graceful, Skolem Graceful dan Pelabelan pada Graf H-Bintang dan A-Bintang. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, 6(1): 30-37.

Lingscheit, M., K. Ruff & Ward, J. 2009. L(d,j,s) Minimal and Surjective Graf Labeling. *Rose-Hulman Mathjournal, volume 10*. Tersedia di https://www.rose-hulman.edu/mathjournal/archives/2009/vol10-n1/paper12/v10n1-12pd.pdf. [diakses 12-01-2012].

Vaidya, S.K. & D. D. Bantva, D.D. 2010. The L(2,1)-Labeling of Some Middle Graphs. *Journal of Applied Computer Science & Mathematics*, 9(4): 104-107.

Yeh, R. K., 2006. A survey on labeling graphs with a condition at distance two. *Discrete Mathematics*, 306: 1217-1231.