UJM 2 (2) (2013)
Unnes Journal of Mathematics
http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

PELABELAN TOTAL SISI AJAIB PADA GRAF DOUBLE STAR DAN GRAF SUN

Muhammad Akbar Muttaqien , Mulyono, Amin Suyitno

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt.1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima April 2013
Disetujui Juli 2013
Dipublikasikan Nopember 2013

Keywords:
Edges Magic Total Labeling
Double Star Graph
Sun Graph

Abstrak

Pelabelan total sisi ajaib (*edges magic total labeling*) pada graf G adalah pemetaan bijektif λ dari V(G)∪E(G) pada himpunan {1,2,3,…,p+q}, dengan p=|V(G)| dan q=|E(G)| sehingga untuk sebarang sisi (xy) di G berlaku $\lambda(x)+\lambda(xy)+\lambda(y)=k$, untuk suatu konstanta *k*, dan k disebut konstanta ajaib. Tujuan dari penulisan ini yaitu untuk mengetahui pelabelan total sisi ajaib dan mencari konstanta ajaib pada graf *double star* dan graf *sun*. Metode yang digunakan dalam skripsi ini adalah dengan mengumpulkan sumber pustaka berupa buku maupun referensi lain yang selanjutnya dijadikan landasan untuk melakukan penelitian ini. Berdasarkan penelitian, disimpulkan bahwa setiap graf *double star* ($S_{n,m}$) dengan n dan m bilangan asli, dan n,m≥2 mempunyai pelabelan total sisi ajaib dengan konstanta ajaib k=3n+2m+1. Setiap graf *sun* (M_n) dengan n bilangan asli ganjil dan n≥3 mempunyai pelabelan total sisi ajaib dengan konstanta ajaib k=(9n+3)/2.

Abstract

Edges magic total labeling on graph G is a bijective map of λ from V(G) U E(G) to {1,2,3,…,p+q}, with p=|V(G)| and q=|E(G)|, therefore, for any given edges (xy) on G there applies $\lambda(x)+\lambda(xy)+\lambda(y)=k$, for a constant k, and k is called as a magic constant of G. The purpose of this paper is to understand the edges magic total labeling and find out k (magic constant) on double star graph and sun graph. The method that is used in this paper is by collecting resources such as books and other literatures which further are used as the base or background to do this research. Based on the study, it was concluded that in every double star graph ($S_{n,m}$), with n, m are positive integer and n,m≥2, have edges magic total labeling with the magic constant k=3n+2m+1. For every sun graph (M_n) with odd number n, and n≥3, has the edges magic total labeling with the magic constant k=(9n+3)/2.

Alamat korespondensi:
akbar.abienk@gmail.com

ISSN 2252-6943

Pendahuluan

Menurut Budayasa (2007,1) sebuah graf terdiri dari himpunan berhingga tak kosong V(G) yang elemen-elemennya disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) E(G) yang elemen-elemennya disebut sisi, sedemikian hingga setiap elemen *e* dalam E(G) merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di V(G). Sebuah graf G dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Pola-pola yang terbentuk didefinisikan dan dikelompokkan menjadi kelas-kelas graf. Beberapa kelas graf menurut banyaknya sisi yang insiden terhadap titik antara lain graf *reguler*, yang derajat setiap titiknya adalah sama dan graf *irreguler*, yang derajat setiap titiknya ada yang tidak sama.

Ada beberapa contoh graf yang termasuk graf khusus. Seperti graf lintasan, graf sikel, graf *star*, graf *double star*, graf *sun* dan lain lain. Menurut Jerrold dkk (1979) graf *double star* $S_{n,m}$ adalah graf yang terdiri dari dua graf *star* yaitu S_n dan S_m ($n,m \geq 2$), dimana kedua titik sentralnya saling bertetangga.

Menurut Wallis dkk (2000) graf *sun* (matahari) adalah suatu graf sikel C_n dengan diakhiri oleh sebuah sisi dan sebuah titik berderajat 1 yang melekat pada masing-masing titik C_n. Graf *sun* dinyatakan dengan M_n dengan n ($n \geq 3$) menyatakan ukuran dari graf *sun* dan mengarah pada banyaknya titik pada graf sikel yang digunakan untuk membentuk graf *sun* tersebut.

Dalam teori graf terdapat sebuah topik bahasan yaitu pelabelan. Objek kajiannya berupa graf yang direpresentasikan titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Menurut Baskoro (2007) pelabelan graf adalah suatu pemberian nilai pada titik atau sisi dari graf atau keduanya sehingga memenuhi kondisi tertentu. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Rosa pada tahun 1967. Pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama dalam sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi grafis, radar, penyimpanan data komputer, dan desain *integrated circuit* pada komponen elektronik.

Menurut Gallian (1997) pelabelan ajaib pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàck pada tahun 1963, kemudian Stewart pada pertengahan tahun 1960 yang mempelajari berbagai cara untuk melabeli sisi-sisi pada suatu graf. Menurut Baskoro (2007), Kotzig dan Rosa mendefinisikan pelabelan ajaib pada graf G sebagai pemetaan satu-satu $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3,\dots,|V(G)|+|E(G)|\}$ yang memenuhi kondisi bahwa $f(uv)+f(u)+f(v)=k$, untuk setiap sisi uv di E(G). Dalam perjalanannya untuk membedakan dengan konsep pelabelan ajaib lainnya, oleh Wallis dkk (2000) pelabelan tersebut diberi nama ulang menjadi pelabelan total sisi ajaib.

Pelabelan total sisi ajaib (*edges magic total labeling*) merupakan salah satu jenis pelabelan ajaib. Menurut Wallis dkk (2000) pelabelan total sisi ajaib pada graf G adalah pemetaan bijektif λ dari $V(G) \cup E(G)$ pada himpunan $\{1,2,3,\dots,p+q\}$, dengan $p=|V(G)|$ dan $q=|E(G)|$ sehingga untuk sebarang sisi (xy) di G berlaku $\lambda(x)+\lambda(xy)+\lambda(y)=k$, untuk suatu konstanta k, dan k disebut konstanta ajaib pada G dan G disebut graf total sisi ajaib.

Dengan demikian penulis mencoba meneliti pelabelan total sisi ajaib pada graf *double star* dan graf *sun*. Berdasarkan latar belakang maka rumusan masalah yang diangkat dalam penelitian ini adalah (1) Bagaimana hasil pelabelan total sisi ajaib pada graf *double star*? (2) Bagaimana hasil pelabelan total sisi ajaib pada graf *sun* M_n (n bilangan asli ganjil)? (3) Bagaimana hasil kosntanta ajaib pada graf *double star*? (4) Bagaimana hasil konstanta ajaib pada graf *sun* M_n (n bilangan asli ganjil)?

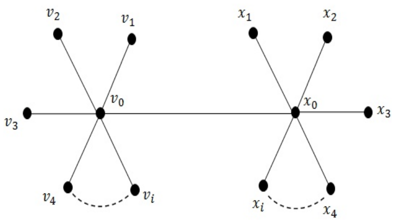
Penelitian ini bertujuan untuk (1) Memahami pelabelan total sisi ajaib pada graf *double star*. (2) Memahami pelabelan total sisi ajaib pada graf *sun* M_n (n bilangan asli ganjil). (3) Mengetahui konstanta ajaib pada graf *double star*. (4) Mengetahui konstanta ajaib pada graf *sun* M_n (n bilangan asli ganjil).

Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka. Kajian pustaka merupakan penelaah sumber pustaka relevan yang digunakan untuk mengumpulkan data maupun informasi yang diperlukan dalam penulisan ini. Kajian pustaka diawali dengan pengumpulan sumber pustaka yaitu buku referensi dan jurnal-jurnal. Definisi–definisi dan teorema–teorema dalam referensi dikaji ulang, kemudian dirumuskan dalam perumusan masalah, selanjutnya dikaji dalam pembahasan. Pada pemecahan masalah dilakukan langkah-langkah sebagai berikut. (1) Menjelaskan definisi-definisi graf double star dan graf sun yang akan dijadikan objek penelitian, (2) Menjelaskan definisi-definisi terkait pelabelan total sisi ajaib, (3) Melakukan percobaan pelabelan pada graf double star dengan aturan pelabelan total sisi ajaib sehingga diperoleh rumusan pembangun pelabelan dan konstanta ajaib-nya, (4) Melakukan pembuktian dengan teorema bahwa untuk setiap graf double star memilki pelabelan total sisi ajaib, (5) Melakukan percobaan pelabelan pada graf sun M_n (n bilangan asli ganjil) dengan aturan pelabelan total sisi ajaib sehingga diperoleh rumusan pembangun pelabelan dan konstanta ajaibnya, dan (6) Melakukan pembuktian dengan teorema bahwa untuk setiap graf sun M_n (n bilangan asli ganjil) memiliki pelabelan total sisi ajaib.

Hasil Penelitian dan Pembahasan

Pelabelan total sisi ajaib pada graf double star $S_{n.m}$



Gambar 1. Graf double star $S_{n.m}$

Dari Gambar 1 maka dapat dinotasikan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$V(S_{n,m})=\{v_0,v_1,v_2,v_3,\dots,v_{n-1},x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{m-1}\}$ dan,

$E(S_{n,m})=\{v_0x_0,v_0v_1,v_0v_2,v_0v_3,\dots,v_0v_{n-1},x_0x_1,x_0x_2,x_0x_3,\dots,x_0x_{m-1}\}$.

Berdasarkan hasil penelitian, maka diperoleh rumusan pelabelan dalam Tabel 1 sebagai berikut.

Tabel 1. Rumusan pelabelan total sisi ajaib pada graf double star

Graf / label	$S_{2,2}$	$S_{3,2}$	$S_{3,3}$	$S_{4,3}$	$S_{4,4}$
$f(v_0)$	$n+1$	$n+1$	$n+1$	$n+1$	$n+1$
$f(v_i)$	-	i	i	i	i
$f(x_0)$	n	n	n	n	n
$f(x_i)$	-	-	$n+1+i$	$n+1+i$	$n+1+i$
$f(v_0v_i)$	-	$2(n+m)-i$	$2(n+m)-i$	$2(n+m)-i$	$2(n+m)-i$
$f(x_0v_0)$	$n+2m$	$n+2m$	$n+2m$	$n+2m$	$n+2m$
$f(x_0x_i)$	-	-	$n+2m-i$	$n+2m-i$	$n+2m-i$

Pelabelan total sisi ajaib pada graf double star $S_{n,m}$ akan disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 1

Graf double star $S_{n,m}$ dengan n dan m bilangan asli mempunyai pelabelan total sisi ajaib.

Bukti:

Akan dibuktikan graf double star $S_{n,m}$ dengan n dan m bilangan asli mempunyai pelabelan total sisi ajaib. Misalkan, graf $S_{n,m}$ mempunyai $p=n+m$, dengan $q=n+m-1$. Maka $p+q=2(n+m)-1$, dengan

$V(S_{n,m})=\{v_0,v_1,v_2,v_3,\dots,v_{n-1},x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{m-1}\}$ dan,

$E(S_{n,m})=\{v_0x_0,v_0v_1,v_0v_2,v_0v_3,\dots,v_0v_{n-1},x_0x_1,x_0x_2,x_0x_3,\dots,x_0x_{m-1}\}$.

Definisikan pemetaan

$f:V(S_{n,m})\cup E(S_{n,m})\rightarrow\{1,2,3,4,5,\dots,2(n+m)-1\}$.

Akan ditunjukkan pemetaan f adalah pemetaan bijektif.

Dibuat pengaitan sebagai berikut.

$f(v_0)=n+1$;

$f(v_i)=i$, untuk $1 \le i \le n-1$;

$f(x_0)=n$;

$f(x_i)=n+1+i$, untuk $1\le i \le m-1$;

$f(v_0v_i)=2(n+m)-i$, untuk $1 \le i \le n-1$;

$f(v_0x_0)=n+2m$;

$f(x_0x_i)=n+2m-i$, untuk $1 \le i \le m-1$;

Berdasarkan pengaitan di atas, jadi f adalah pemetaan bijektif.

Akan ditunjukkan sebarang sisi (xy) di Sn,m berlaku $f(x)+f(xy)+f(y)=3n+2m+1$, $\forall x,y \in V(S_{n,m})$ dan $\forall xy \in E(S_{n,m})$.

Kasus 1

Untuk sisi (v_0v_i) di $S_{n,m}$ diperoleh

$f(v_0)+f(v_0v_i)+f(v_i) =(n+1)+(2(n+m)-i)+i$
$=3n+2m+1$.

Kasus 2

Untuk sisi (v_0x_0) di $S_{n,m}$ diperoleh

$f(v_0)+f(v_0x_0)+f(x_0) =(n+1)+(n+2m)+n$
$=3n+2m+1$.

Kasus 3

Untuk sisi (x_0x_i) di $S_{n,m}$ diperoleh

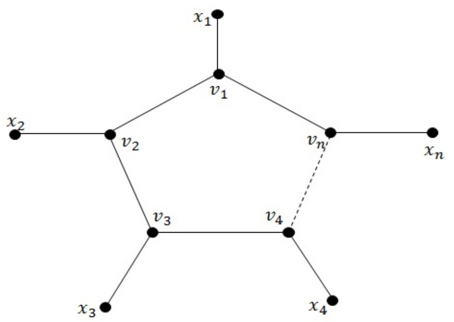
$f(x_0)+f(x_0x_i)+f(xi) =n+(n+2m-i)+(n+1+i)$
$=3n+2m+1$.

Dari kasus 1, kasus 2, kasus 3, telah ditunjukkan bahwa untuk sebarang (xy) di $S_{n,m}$ berlaku f(x)+f(xy)+f(y)=k dengan k=3n+2m+1.

Jadi terbukti bahwa setiap graf double star $S_{n,m}$ dengan n dan m bilangan asli, mempunyai pelabelan total sisi ajaib.

Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf Sun M_n

Graf sun M_n, dengan n bilangan asli ganjil. Notasi titik graf M_n disajikan pada Gambar 2 sebagai berikut.



Gambar 2. Graf sun M_n

Dari Gambar 2 maka dapat dinotasikan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$V(M_n)=\{v_1,v_2,v_3,\dots,v_n,x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\}$ dan,

$E(M_n)=\{v_1v_2,v_2v_3,\dots,v_{n-1}v_n,v_nv_1,v_1x_1,v_2x_2,v_3x_3,\dots,v_nx_n\}$.

Berdasarkan percobaan pelabelan, maka diperoleh rumusan pelabelan dalam Tabel 2 sebagai berikut.

Tabel 2. Rumusan pelabelan total sisi ajaib pada

Label \ Graf	M_3	M_5	M_7
$f(v_i)$, i ganjil	$\frac{i+1}{2}$	$\frac{i+1}{2}$	$\frac{i+1}{2}$
$f(v_i)$, i genap	-	$\frac{n+1+i}{2}$	$\frac{n+1+i}{2}$
$f(x_i)$	$2n-i+1$	$2n-i+1$	$2n-i+1$
$f(v_iv_{i+1})$	$4n-i$	$4n-i$	$4n-i$
$f(v_nv_1)$	$4n$	$4n$	$4n$
$f(v_ix_i)$, i ganjil	$\frac{5n+i}{2}$	$\frac{5n+i}{2}$	$\frac{5n+i}{2}$
$f(v_ix_i)$, i genap	-	$\frac{4n+i}{2}$	$\frac{4n+i}{2}$

Pelabelan total sisi ajaib pada graf sun M_n akan disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 2

Setiap graf sun M_n dengan n bilangan asli ganjil mempunyai pelabelan total sisi ajaib.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa graf sun M_n dengan n bilangan asli ganjil mempunyai pelabelan total sisi ajaib.

Misalkan, Graf M_n mempunyai p=2n, dan q=2n, maka p+q=4n, dengan

$V(M_n)=\{v_1,v_2,v_3,\dots,v_n,x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\}$ dan,

$E(M_n)=\{v_1v_2,v_2v_3,\dots,v_{n-1}v_n,v_nv_1,v_1x_1,v_2x_2,v_3x_3,\dots,v_nx_n\}$.

Definisikan pemetaan

$f:V(M_n)\cup E(M_n)\rightarrow\{1,2,3,4,5,6,\dots,4n\}$.

Akan ditunjukkan pemetaan f adalah pemetaan bijektif.

Dibuat pengaitan sebagai berikut:

$f(v_i)=(i+1)/2$, untuk i bilangan asli ganjil $1 \le i \le n$;

$f(v_i)=(n+1+i)/2$, untuk i bilangan asli genap $1 < i < n$;

$f(x_i)=2n-i+1$, untuk $1 \le i \le n$;

$f(v_iv_{i+1})=4n-i$, untuk $i=1,2,3,4,\dots,n-1$;

$f(v_nv_1)=4n$;

$f(v_ix_i)=(5n+i)/2$, untuk i bilangan asli ganjil $1 \le i \le n$;

$f(v_ix_i)=(4n+i)/2$, untuk i bilangan asli genap $1 < i < n$.

Berdasarkan pengaitan di atas, jadi f adalah pemetaan bijektif.

Akan ditunjukkan untuk sebarang sisi (xy) di M_n berlaku $f(x)+f(xy)+f(y)=(9n+3)/2$, $\forall x,y \in V(M_n)$ dan $\forall xy \in E(M_n)$

Kasus 1

Untuk sisi (v_iv_{i+1}) di M_n, dengan i bilangan asli ganjil diperoleh

$f(v_i)+f(v_iv_{i+1})+f(v_{i+1})=(9n+3)/2$.

Kasus 2

Untuk sisi (v_iv_{i+1}) di M_n, dengan i bilangan asli genap diperoleh

$f(v_n)+f(v_iv_{i+1})+f(v_{i+1}) =(9n+3)/2$.

Kasus 3

Untuk sisi (v_nv_1) di M_n, diperoleh

$f(v_n)+f(v_nv_1)+f(v_1) =(9n+3)/2$.

Kasus 4

Untuk sisi (v_ix_i) di M_n, dengan i bilangan asli ganjil diperoleh

$f(v_i)+f(v_ix_i)+f(x_i) =(9n+3)/2$.

Kasus 5

Untuk sisi (v_ix_i) di M_n, dengan i bilangan asli genap diperoleh

$f(v_i)+f(v_ix_i)+f(x_i) =(9n+3)/2$.

Pada kasus 1, kasus 2, kasus 3, kasus 4, dan kasus 5 telah ditunjukkan bahwa untuk sebarang sisi (xy) di M_n berlaku $f(x)+f(xy)+f(y)=k$, dengan $k=(9n+3)/2$.

Jadi terbukti bahwa setiap graf *sun* M_n dengan n bilangan asli ganjil mempunyai pelabelan total sisi ajaib.

Simpulan

Dari hasil penelitian dan pembahasan yang telah dilakukan, maka simpulan yang dapat diambil mengenai pelabelan total sisi ajaib pada graf *double star* dan graf *sun* adalah sebagai berikut.

Setiap graf *double star* $S_{n,m}$ dengan n dan m bilangan asli mempunyai pelabelan total sisi ajaib. Pelabelan dibentuk dengan pengaitan sebagai berikut.

$f(v_0)=n+1$;

$f(v_i)=i$, untuk $1 \le i \le n-1$;

$f(x_0)=n$;

$f(x_i)=n+1+i$, untuk $1 \le i \le m-1$;

$f(v_0v_i)=2(n+m)-i$, untuk $1 \le i \le n-1$;

$f(v_0x_0)=n+2m$;

$f(x_0x_i)=n+2m-i$, untuk $1 \le i \le m-1$.

Diperoleh konstanta ajaib $k=3n+2m+1$.

Setiap graf *sun* M_n dengan n bilangan asli ganjil mempunyai pelabelan total sisi ajaib. Pelabelan dibentuk dengan pengaitan sebagai berikut.

$f(v_i)=(i+1)/2$, untuk i bilangan asli ganjil $1 \le i \le n$;

$f(v_i)=(n+1+i)/2$, untuk i bilangan asli genap $1 < i < n$;

$f(x_i)=2n-i+1$, untuk $1 \le i \le n$;

$f(v_iv_{i+1})=4n-i$, untuk $i=1,2,3,4,\dots,n-1$;

$f(v_nv_1)=4n$;

$f(v_ix_i)=(5n+i)/2$, untuk i bilangan asli ganjil $1 \le i \le n$;

$f(v_ix_i)=(4n+i)/2$, untuk i bilangan asli genap $1 < i < n$.

Diperoleh konstanta ajaib $k=(9n+3)/2$.

Ucapan Terimakasih

Ucapan terima kasih disampaikan kepada semua pihak yang telah ikut membantu dalam penyelesaian artikel ini

Daftar Pustaka

Baskoro, E. T. 2007. Mengenalkan Indonesia Melalui Teori Graf. Pidato Ilmiah Guru Besar Institut Teknologi Bandung di Balai Pertemuan Ilmiah ITB. Bandung, 13 Juli.

Budayasa, I. K. 2007. Teori Graph dan Aplikasinya. Surabaya: Unesa University Press.

Gallian, J.A. 2008. "A Dynamic Survey of Graph Labeling." The Electronic Journal of Combinatorics, volume 15. Minnesota. United State Of America. Tersedia di: www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/download/DS6/pdf/ (diunduh 29 Mei 2013).

Jerrold, dkk. 1979. "Generalized Ramsey Theory for Graph, x: Double Star." Descrete Mathematics, volume 28. 247-254. Tersedia di: http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V00-45JC8K2-6T/2/58dfb68c74eb0c0516b320d269777fc6 (diunduh 30 Juni 2013).

Wallis, W. D, dkk. 2000. "Edge Magic Total Labeling." Australasian Journal of Combinatorics, volume 22. 177-190. Tersedia di: http://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/22/ocr-ajc-v22-p177.pdf/ (diunduh 5 Mei 2013).