REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN
CIPTAAN

Dalam rangka pelindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan	:	EC00201974226, 4 Oktober 2019
Pencipta		
Nama	:	**Dr. Ing. Dhidik Prastiyanto, S.T., M.T**
Alamat	:	Jl. Lempongsari Raya No. 56, RT 009 RW 027 Sariharjo Ngaglik Sleman, Yogyakarta, Di Yogyakarta, 55581
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Pemegang Hak Cipta		
Nama	:	**Dr. Ing. Dhidik Prastiyanto, S.T., M.T**
Alamat	:	Jl. Lempongsari Raya No. 56, RT. 009 RW. 027 SAriharjo Ngaglik Sleman, Yogyakarta, Di Yogyakarta, 55581
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Jenis Ciptaan	:	**Buku**
Judul Ciptaan	:	**SINYAL DAN SISTEM**
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia	:	12 Desember 2018, di Semarang
Jangka waktu pelindungan	:	Berlaku selama hidup Pencipta dan terus berlangsung selama 70 (tujuh puluh) tahun setelah Pencipta meninggal dunia, terhitung mulai tanggal 1 Januari tahun berikutnya.
Nomor pencatatan	:	000157249

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.
Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL

Dr. Freddy Harris, S.H., LL.M., ACCS.
NIP. 196611181994031001

Penulis

Dr. Ing. Dhidik Prastiyanto, M.T

Sinyal dan Sistem

Buku ini berisi tentang teori sinyal dan sistem dimulai dari konsep pengenalan sinyal kontinyu dan diskrit disertai dengan operasi yang dilakukan pada sinyal. Penjelasan tentang sistem linier tak ubah waktu disertai dengan analisis sistem. Konvolusi kontinyu dan diskrit dibahas dengan penyajian contoh-contoh yang memudahkan pembaca untuk memahami proses ysang terjadi di sistem. Buku ini juga membahas penerapan Laplace Transform dalam pemodelan sistem. Contoh pemodelan disajikan dengan lengkap untuk membantu pembaca memahami konsep pemodelan sistem yang sangat berguna pada perancangan berbagai aplikasi dalam bidang keteknikan. Persamaan ruang keadaan juga disajikan untuk menganalisis sistem.

Penerbit-Percetakan-Perdagangan
SUKARNO PRESSINDO
Phone: 081228494410 / 08976759734
08883948662
Website: www.sukarnopressindo.com

ISBN 978-602-5880-33-9

Dr. Ing. Dhidik Prastiyanto, S.T., M.T

SINYAL DAN SISTEM

SINYAL DAN SISTEM

Dr. ing. Dhidik Prastiyanto, S.T., M.T

Sinyal dan Sistem

Disusun oleh:
Dr. Ing. Dhidik Prastiyanto, ST MT

Penerbit Sukarno Pressindo

2018

Sinyal dan Sistem

Penulis: Dr. Ing. Dhidik Prastiyanto, ST MT

ISBN: 978-602-5880-33-9

Setting and Layout : **Anis**

Cover Design: **Sukarno**

Editor**: Fitratun Annisya, SE. dan Sukarno, S.IP., SS**

Penerbit: PENERBIT SUKARNO PRESSINDO

Karanggawang Barat RT 05 RW 14 Kel. Tandang,

Kec. Tembalang Kota Semarang 50274

No HP. 081228494410; 08976759734; 08883948662

Email: sukarnopressindo@gmail.com; sukarnopress@gmail.com

Website: www.karnopress.com & www.sukarnopressindo.com

KATA PENGANTAR

Bismillaahirrahmaanirrahiim.
Alhamdulillah penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan buku Sinyal dan Sistem. Buku ini diharapkan dapat dipergunakan oleh mahasiswa program sarjana untuk lebih mengenal dan memahami konsep Sinyal dan Sistem.
Buku ini dapat diselesaikan atas bantuan banyak pihak, untuk itu penulis mengucapkan banyak terimakasih.
Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam buku ini untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran untuk penyempurnaan buku ini. Akhirnya semoga buku ini bermanfaat
Semarang, Desember 2018

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR

Bismillaahirrahmaanirrahiim.

Alhamdulillah penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan buku Sinyal dan Sistem. Buku ini diharapkan dapat dipergunakan oleh mahasiswa program sarjana untuk lebih mengenal dan memahami konsep Sinyal dan Sistem. Buku ini dapat diselesaikan atas bantuan banyak pihak, untuk itu penulis mengucapkan banyak terimakasih.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam buku ini untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran untuk penyempurnaan buku ini. Akhirnya semoga buku ini bermanfaat

Semarang, Desember 2018

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENGANTAR SINYAL DAN SISTEM

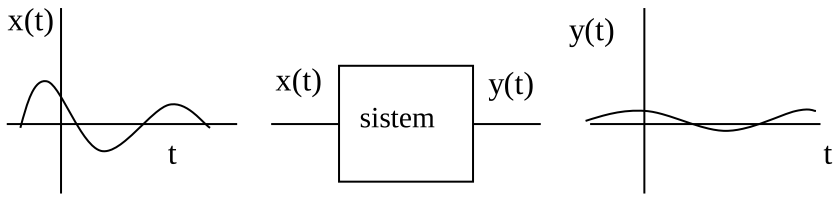
I.1 Pendahuluan

Sistem mempunyai pengertian sebagai pengolah masukan menjadi keluaran. Secara luas konsep sinyal dan sistem dapat ditemukan dan diterapkan dalam berbagai kehidupan sehari-hari. Secara alami, tubuh kita terdiri dari berbagai sistem, misalkan sistem pencernaan. Masukan dari sistem tersebut adalah makanan dan minuman yang diolah oleh sistem menghasilkan energi yang dibutuhkan oleh tubuh. Sistem penglihatan pada manusia menangkap cahaya yang dipancarkan oleh obyek dan diolah menjadi informasi oleh otak yang digunakan untuk melakukan suatu tindakan atau sekedar menangkap persepsi dari obyek tersebut. Pertumbuhan ekonomi suatu negara juga dapat dipandang sebagai sebuah sistem dengan berbagai masukan seperti produksi barang maupun jasa dengan keluaran tingkat pertumbuhan. Hal ini adalah ilustrasi sederhana, sedangkan sebenarnya sistem-sistem tersebut adalah sistem yang sangat kompleks dan terdiri dari berbagai subsistem penyusunan.

Selain sistem alami, sistem buatan dikembangkan diberbagai bidang antara lain: energi, transportasi, komunikasi, dan bidang lainnya. Pada buku ini akan dibahas lebih banyak sistem elektronik dalam berbagai pemanfaatanya. Pemahaman terhadap konsep sinyal dan sistem akan mempermudah mahasiswa untuk mengidentifikasi masukan, bagian-bagian dari sistem serta keluaran yang diinginkan. Pemahaman yang mendalam mengenai sinyal dan sistem sangat diperlukan untuk kemajuan penerapan konsep sinyal dan sistem.

1.2 Sinyal diskrit dan kontinyu

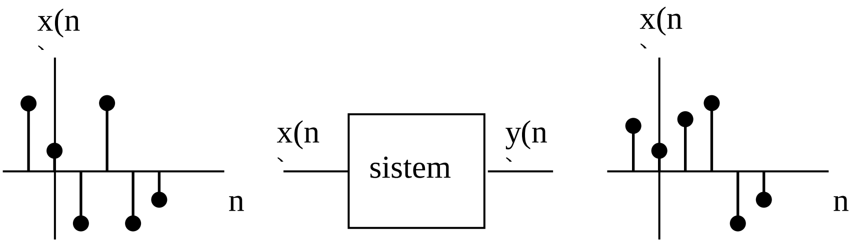
Sinyal kontinyu adalah sinyal yang mempunyai nilai tak terputus dalam kawasan waktu. x(t) disebut sinyal kontinyu jika mempunyai nilai tak terrputus



Gambar 1.1. Sistem kontinyu

Gambar diatas menunjukan sistem kontinyu dengan masukan x(t) setelah melalui proses dalam sistem maka keluaran sistem adalah y(t). Karakteristik y(t) dalam penerapanya adalah sesuai dengan karakteristik keluaran yang diinginkan perancang sistem. x(t) dan y(t) mempunyai nilai yang kontinyu sepanjang waktu (t).

Untuk sinyal diskret, nilai dari sinyal ada pada satuan waktu diskret n yang merupakan bilangan bulat, - ∞ < n < ∞.



Gambar 1.2. Sistem Diskrit

Gambar diatas menunjukan sistem diskrit dengan masukan x(n) setelah melalui proses dalam sistem maka keluaran sistem adalah y(n). Seperti halnya pada karakteristik keluaran sistem kontinyu maka keluaran sistem diskrit y(n) dalam penerapanya adalah sesuai dengan karakteristik keluaran yang diinginkan perancang sistem.

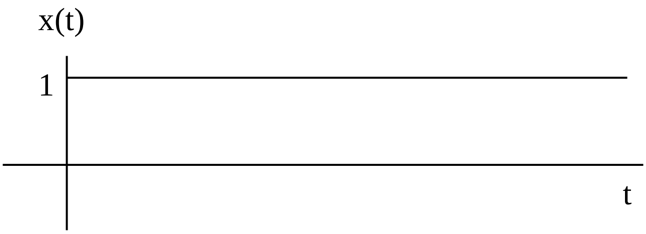
Berikut dijelaskan beberapa sinyal yang sering digunakan dalam analisa sinyal dan sistem.

- Sinyal undak satuan u(t)

Suatu sinyal x(t) didefinisikan sebagai u(t) jika

x(t) = 1, t>0

= 0, t<0



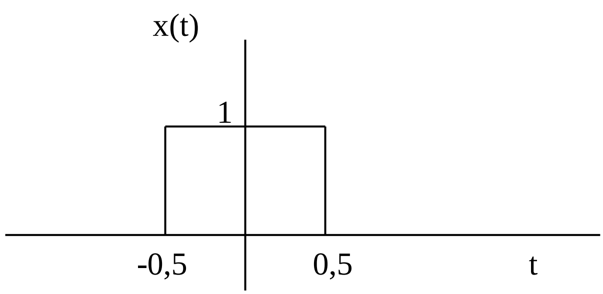
Gambar 1.3 Sinyal x(t) = u(t)

Sinyal ini dapat dipakai untuk merepresentasikan permulaan dan akhir suatu sinyal yang lebih kompleks

- Sinyal kotak Π(t)

Sinyal x(t) dikatakan sebagai Π(t) jika

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -0{,}5<t<0{,}5 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$



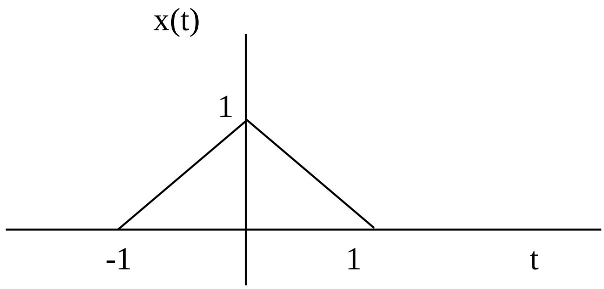
Gambar 1.4 Sinyal x(t) = Π(t)

- Sinyal segitiga Λ(t)

Sinyal x(t) disebut sebagai Λ(t) jika

$x(t) = 1 - |t|, \quad -1<t<1$

$\quad = 0, \quad$ t lainnya



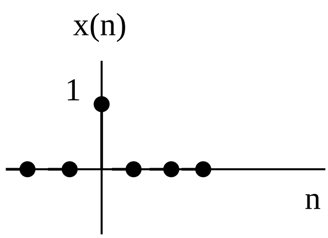
Gambar 1.5 Sinyal x(t) = Λ(t)

- Sinyal pulsa satuan δ(n)

Sinyal x(n) disebut sebagai δ(n) jika

$x(n) = 1, \quad n=0$

$\quad = 0, \quad$ n lainnya



Gambar 1.6 Sinyal x(n) = δ(n)

Sinyal δ(n) biasa digunakan untuk mencari tanggapan cuplik satuan suatu sistem diskrit. Sinyal ini juga dipergunakan untuk menyatakan suatu fungsi lain:

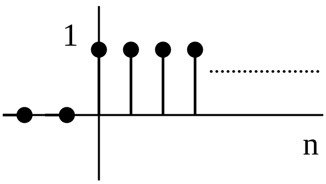
$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(n-k) \qquad (1.1)$$

- Sinyal undak satuan diskrit u(n)

Sinyal x(n) disebut sebagai u(n) jika

x(n) = 1, n ≥ 0

= 0, n lainnya



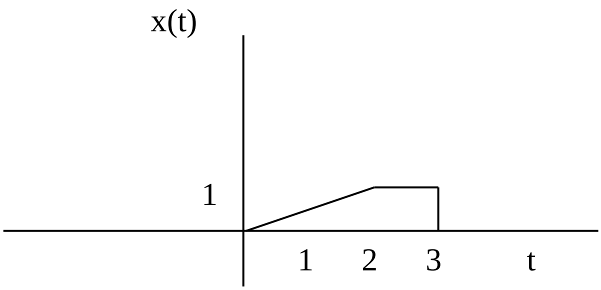
Gambar 1.7 Sinyal x(n) = u(n)

1.3 Representasi Sinyal

Sinyal dapat direpresentasikan dalam berbagai cara. Representasi sinyal kontinyu dapat dijelaskan dengan lebih mudah dengan contoh berikut:

Contoh 1.1

Suatu sinyal kontinyu seperti gambar berikut representasikan dalam suatu persamaan isyarat:



Gambar 1.8 Sinyal x(t)

Penyelesaian:

Sinyal x(t) diatas mempunyai tiga kondisi yaitu: pada saat $0<t<2$, pada saat $2<t<3$ dan saat t yang lain. Dengan demikian dapat dirumuskan suatu fungsi sebagai berikut:

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & 0<t<2 \\ x_2(t), & 2<t<3 \\ x_3(t), & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Dari grafik x(t) dapat dilihat bahwa kondisi selain $0<t<2$ dan $2<t<3$ tidak ada sinyal x(t) atau dapat dituliskan $x_3(t) = 0$. Sedangkan pada saat $2<t<3$ terlihat bahwa sinyal x(t) bernilai 1 sehingga dapat dituliskan $x_2(t) = 1$.

Untuk mencari nilai $x_1(t)$ dipergunakan rumusan persamaan garis antara dua titik. Isyarat $x_1(t)$ melalu titik (0,0) yang selanjutnya disebut titik 1 dan titik (2,1) yang selanjutnya disebut titik 2. Dengan dasar tersebut maka isyarat x1(t) dapat dicari sebagai berikut:

$$\frac{x_1(t) - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \qquad (1.2)$$

dengan memasukan nilai-nilai titik 1 dan titik 2 didapatkan:

$$\frac{x_1(t) - 0}{1 - 0} = \frac{t - 0}{2 - 0}$$

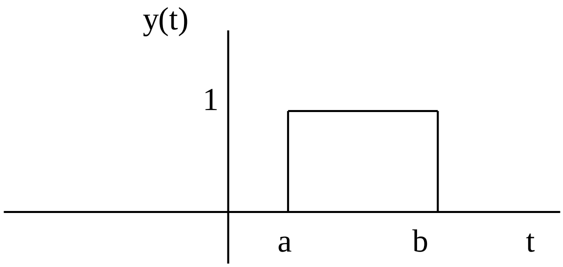
maka:

$$x_1(t) = \frac{t}{2}$$

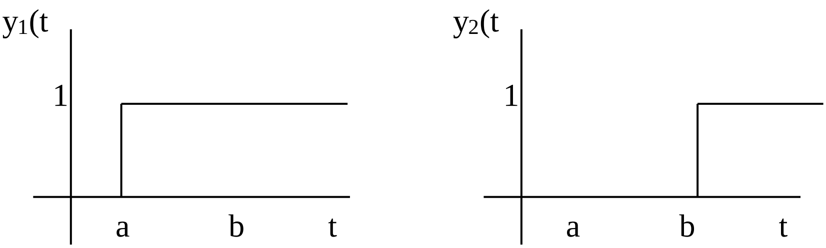
Jadi x(t) dapat ditulis menjadi persamaan berikut

$$x(t) = \begin{cases} 05t, & 0<t<2 \\ 1, & 2<t<3 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Untuk menuliskan persamaan x(t) dalam satu persamaan dapat digunakan u(t-a) dan u(-b) sebagai awal dan akhir dari sinyal tersebut. Hal tersebut dapat dipahami dengan ilustrasi berikut:



(a)



(c)

Gambar 1.9 (a) Sinyal y(t). (b) sinyal y_1= u(t-a). (c) sinyal y_2=u(t-b)

Pada gambar 1.9 (a) adalah sinyal yang bernilai 1 yang dimulai pada t = a dan diakhiri pada t = b. Sinyal tersebut dari gambar dapat dilihat merupakan hasil pengurangan sinyal $y_1(t)$ = u(t-a) (sinyal undak satuan yang tergeser ke kanan sejauh a) dengan sinyal $y_2(t)$ = u(t-b) (sinyal undak satuan yang tergeser ke kanan sejauh a).

$y(t) = y_1(t) - y_2(t)$

$= u(t-a) - u(t-b)$

Untuk menyatakan suatu sinyal $x(t) = e^{-t}$ yang hanya mempunyai nilai pada saat t=1 sampai t = 5 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$x(t) = e^{-t}\{u(t-1) - u(t-5)\}$

Contoh 1.2

Representasikan sinyal pada contoh 1.1 dalam satu persamaan

$$x(t) = \begin{cases} 0{,}5t, & 0<t<2 \\ 1, & 2<t<3 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Penyelesaian:

Sinyal tersebut terdiri dari dua isyarat yaitu isyarat bernilai 0,5t yang dimulai dari t=0 sampai t=2 dan isyarat yang bernilai 1 yang mulai saat t=2 dan berakhir pada t=3, maka dapat dinyatakan sebagai beikut:

$x(t) = 0{,}5t\{u(t-0)-u(t-2)\} + \{u(t-2)-u(t-3)\}$

$= 0{,}5t\ \{u(t)-u(t-2)\} + u(t)-u(t-3)$

1.4 Operasi Sinyal

Dalam suatu sistem terjadi berbagai macam tindakan terhadap isyarat yang diterimanya. Tindakan atau operasi operasi isyarat dilakukan dalm upaya mendapatkan isyarat yang sesuai dengan karakteristik yang diinginkan. Berikut akan dibahas tiga operasi dasar terhadap sinyal. Operasi pergeseran adalah opersai mengeser sinyal ke kanan atau ke kiri pada sumbu waktu. Dalam aplikasi pengolahan sinyal, hal ini dilakukan dengan tunda waktu. Operasi pemantulan dilakukan dengan mencerminkan isyarat terhadap sumbu vertikalnya. Penskalaan waktu adalah upaya menyempit dan melebarkan isyarat pada sumbu waktu. Operasi-operasi tersebut akan mudah dipahami dengan contoh berikut:

Contoh 1.3

Lakukan operasi-operasi berikut terhadap isyarat x(t) pada contoh 1.1

a. Penskalaan waktu x(2t) dan x(0.5t)
b. Operasi pergeseran x(t-1) dan x(t+2)
c. Operasi pencerminan x(-t) dan x(-0,5t)

Penyelesaian:

a. x(2t) dapat dicari dengan memasukan 2t untuk menggantikan t pada fungsi x(t)

$$x(t) = \begin{cases} 0{,}5t, & 0<t<2 \\ 1, & 2<t<3 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Nilai t digantidengan 2t maka didapatkan:

$$x(2t) = \begin{cases} 0{,}5.2t, & 0<2t<2 \\ 1, & 2<2t<3 \\ 0, & 2t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Dengan menyederhanakan 2t maka didapat:

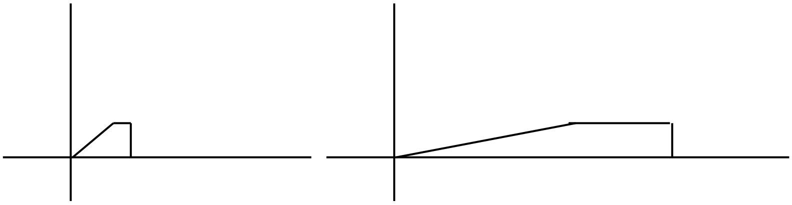
$$x(2t) = \begin{cases} t, & 0<t<1 \\ 1, & 1<t<1{,}5 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Sedangkan untuk x(0.5t) dapat dicari sebagai berikut:

$$x(0{,}5t) = \begin{cases} 0{,}5(0{,}5t), & 0<0{,}5t<2 \\ 1, & 2<0{,}5t<3 \\ 0, & 0{,}5t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Dengan penyederhanaan didapat:

$$x(0{,}5t) = \begin{cases} 0{,}25t\ , & 0<t<4 \\ 1, & 4<t<6 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$



Gambar 1.10 (a) Sinyal x(2t). (b) Sinyal x(0,5t).

Pada gambar 1.10 kalau dibandingkan dengan gambar sinyal x(t) terlihat jelas operasi penskalaan waktu. Sinyal x(2t) merupakan operasi penyempitan skala waktu setengah kali dari skala waktu asli. Sinyal x(0,5t) merupakan operasi pelebaran skala waktu dua kali dari waktu aslinya..

b. x(t-1) dapat dicari sebagai berikut

$$x(t-1) = \begin{cases} 0{,}5(t-1), & 0<t-1<2 \\ 1, & 2<t-1<3 \\ 0, & t-1 \text{ lainnya} \end{cases}$$

dengan penyederhanaan:

$$x(t-1) = \begin{cases} 0{,}5t-0{,}5, & 1<t<3 \\ 1, & 3<t<4 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

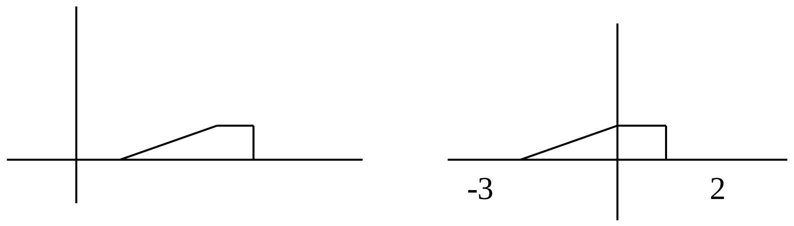
Sedangkan x(t+2) dapat dicari sebagai berikut:

$$x(t+2) = \begin{cases} 0{,}5(t+2), & 0<t+2<2 \\ 1, & 2<t+2<3 \\ 0, & t+2 \text{ lainnya} \end{cases}$$

x(t+2) dapat disederhanakan:

$$x(t+2) = \begin{cases} 0{,}5t+1, & -2<t<0 \\ 1, & 0<t<1 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Sinyal x(t-1) dan x(t+2) dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 1.11 (a) Sinyal x(t-1). (b) Sinyal x(t+2).

Pada gambar 1.11 terlihat operasi pergeseran sinyal. Sinyal x(t-1) adalah sinyal x(t) yang tergeser 1 ke kanan. Sunyal x(t+2) adalah sinyal x(t) yang tergeser ke kiri sejauh 2. Jadi pada isyarat dengan t mempunyai tanda positif maka akan tergeser ke kanan sebesar suatu bilangan kalau di kurangi suatu bilangan tersebut. Untuk pergesaran kekiri (ditambah suatu bilangan) juga demikian.

c. Operasi pencerminan x(-t) dan x(-0,5t)

Nilai x(-t) dapat dicari sebagai berikut:

$$x(-t) = \begin{cases} -0{,}5t, & 0<-t<2 \\ 1, & 2<-t<3 \\ 0, & -t \text{ lainnya} \end{cases}$$

dengan penyederhanaan didaptkan

$$x(-t) = \begin{cases} -0{,}5t, & -2<t<0 \\ 1, & -3<t<-2 \\ & \end{cases}$$

0, t lainnya

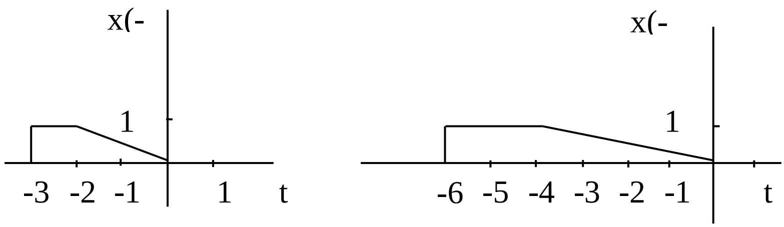
Sedangkan sinyal x(-0,5t) adalah sebagai berikut

$$x(-0{,}5t) = \begin{cases} 0{,}5(-0{,}5)t, & 0<-0{,}5t<2 \\ 1, & 2<-0{,}5t<3 \\ 0, & -0{,}5t \text{ lainnya} \end{cases}$$

dengan penyederhanaan didapatkan

$$x(-0{,}5t) = \begin{cases} -0{,}25t, & -4<t<0 \\ 1, & -6<t<-4 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Sinyal x(-t) dan x(-0,5t) dapat digambarkan sebagai berikut:



(a (b

Gambar 1.12 (a) Sinyal x(-t). (b) Sinyal x(-0,5t).

Pada gambar 1.12 dapat dilihat bahwa sinyal x(-t) adalah hasil pencerminan sinyal x(t). Sinyal x(-0,5t) adalah hasil pencerminan dan penskalaan waktu sinyal aslinya.

Soal-soal latihan

1. Gambarkan isyarat berikut:
    a. $u(n) + u(-n+1)$
    b. $u(n) + (-n – 2)$
    c. $(-1)^n\, u(n)$
    d. $2^{-n}(-n-2) +n(n-2)u(n)$
    e. $e^{2t}u(-t) + e^{-2t}u(t)$
    f. $(t-1)[u(t-2)-u(t-4)] + 2[u(t-4)-u(t-5\}$
2. Isyarat x(t) mempunyai persamaan sebagai berikut:

$$x(-t) = \begin{cases} e^t, & t<0 \\ t, & 2<-t<3 \\ 0, & -t \text{ lainnya} \end{cases}$$

   Tentukan dan gambarkan:
    a. $x(t-1)$
    b. $x(2-t)$
    c. $x(3t+1)$
3. Diketahui $f(t)= t[u(t)-u(t-2)]$

   Tentukan nilai t yang membuat kondisi:
    a. $h(p)=f(p)g(t-p)=0$
    b. $k(p)=f(p)g(p-t)=0$
4. Isyarat diskrit $f(n)=n[u(n) – u(n-4)$
    a. Tentukan f(n-k) untuk k=-3,1 dan 2
    b. Tentukan f(k-n) untuk k=-3,1 dan 2
    c. Karakteristik apa yang ditemukan pada soal a dan b

BAB II

Sistem Linier Tidak Berubah Waktu

II.1 Pendahuluan

Sistem dapat dapat diartikan sebagai hubungan antara input dan output. Pada umumnya input adalah sebab dan output adalah akibat. Beberapa contoh sistem yang umum kita kenal adalah:

1. Sebuah rangkaian listrik dengan input tegangan dan / atau arus sumber sedangkan outputnya yaitu tegangan dan / atau arus yang mengalir pada beberapa titik pada rangkaian tersebut.
2. Sebuah sistem kanal komunikasi dengan input sebanding dengan sinyal yang ditransmisi pada kanal tersebut sedangkan outputnya adalah sinyal yang sampai pada ujung kanal.
3. Sebuah sistem biologi seperti mata manusia dengan input sinyal gambar yang masuk ke retina mata dan outputnya adalah rangsangan syaraf yang selanjutnya diolah di otak untuk pengambilan keputusan informasi apa yang masuk.
4. Sebuah manipulator robot dengan input n torsi yang diaplikasikan ke robot tersebut dan output posisi akhir salah satu lengannya.
5. Proses manufaktur, dengan input bahan mentah yang dimasukkan dan outputnya berupa jumlah barang yang diproduksinya.

Lebih spesifik lagi dalam bidang engineering sistem sering diartikan sebagai model matematik yang mengubungkan antara masukan atau gaya luar dengan keluaran atau tanggapan sistem. Sistem dapat diklasifikasikan dalam berbagai kategori

- Sistem kausal dan non kausal
    - Sistem kausal: $y(t) = x(t) + 2x(t-1)$
    - Sistem non kausal: $y(t) = x(t+1) – x(t) + 3x(t-2)$

  Sistem kausal memberikan nilai keluaran terhadap masukan yang telah masuk pada sistem. Semua sistem fisika yang nyata termasuk dalam sistem kausal. Sistem non kausal adalah sistem antisipatif yaitu sistem mampu memberi respon terhadap masukan yang akan datang. Sistem non kausal sering ditemui dalam aplikasi elektrik modern seperti pada sistem kendali adaptif.
- Sistem bermemori dan tanpa memori

  Sistem bermemori adalah sistem yang keluarannya merupakan fungsi dari masukan sekarang dan masukan sebelumnya.
    - Sistem bermemori: $y(t) = -4x(t-1) + 2x(t)$
    - Sistem tanpa memori: $y(t) = 2x(t)$

Bab II diktat ini akan membahas tentang sistem linier tak ubah waktu kausal. Pembahasan ini dilakukan dengn mempertimbangkan banyaknya model linier yang digunakan dalam hampir semua bidang kerekayasaan. Sistem linier mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

- Sifat kehomogenan

  Jika input u memberikan keluaran y maka input au akan menghasilkan keluaran ay

- Sifat superposisi

  Jika input u1 and u2 menghasilkan output y1 and y2, dan untukl input (u1+u2) menhasilkan output (y1+y2).

II.2. Persamaan Deferensial Sistem

Penggambaran sistem waktu kontinyu, selalu berkaitan dengan bentuk representasi matematik yang mengambarkan sistem tersebut dalam keseluruhan waktu. Dapat pula secara sederhana dikatakan, bahwa suatu sistem disebut sebagai sistem waktu kontinyu jika input dan output berupa sinyal waktu kontinyu. Sistem kontinyu dapat dinyatakan dalam persamaan diferensial sistem. Dengan masukan adalah x(t) dan ouput y(t) maka sistem linier tak ubah waktu dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + \ldots + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + a_n x^n(t) \quad (2.1)$$

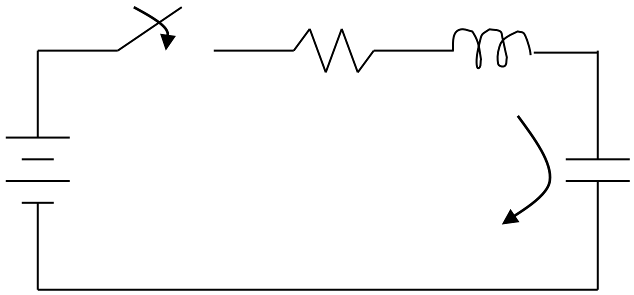
Suku kanan persamaan tersebut sering digabungkan menjadi:

$$f(t) = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + \ldots + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + a_n x^n(t)$$

dengan f(t) disebut fungsi pemaksa. Berikut disajikan contoh persamaan deferensial sistem:

Contoh 2.1

Modelkan sistem berikut dalam persamaan deferensial



Gambar 2.1. Rangkaian RLC untuk contoh 2.1

Penyelesaian:

Dengan hukum Kirchoff tegangan didapatkan

$$e(t) = Ri(t) + L\, di/dt + 1/C\int_0^t i(t)\,dt,\; t > 0$$

dengan mendeferensial kedua suku didapat:

$$\frac{de(t)}{dt} = R\frac{di(t)}{dt} + L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i(t)$$

keadaan awal untuk memecahkan persamaan ini adalah

$$\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0^=} = 2 \qquad i(0^+)=0$$

Untuk memecahkan persamaan deferensial disajikan teorema sebagai berikut:

Persamaan deferensial sistem: $a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t)$ mempunyai keadaan awal: $y(0)$, $y'(0), \ldots, y^{n-1}$ maka tanggapan lengkap sistem:

$y(t) = y_{ho}(t) + y_{f0}(t)$

dengan

$y_{ho}(t)$ = tanggapan homogen, alami, bebas, dan transient

$y_{f0}(t)$ = tanggapan paksa, akhir, steady state

Tanggapan homogen didapatkan dengan menyelesaikan persamaan sistem pada saat masukan sama dengan nol $f(t)=0$. Tanggapan ini disebut tanggapan alami sistem merupakan tanggapan sistem sebelum ada masukan. Tanggapan paksa didapatkan dengan menerapkan masukan $f(t)$ pada sistem. Untuk lebih jelas, disajikan contoh berikut.

Contoh 2.2

Selesaikan persamaan deferensial berikut jika diberikan kondisi awal $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 2$

$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{2t}$

Penyelesaian:

- Langkah 1. Mencari $y_{ho}(t)$

  Persamaan homogen sistem adalah sebgai berikut:

$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$

Dengan permisalan bahwa $y_{ho}(t) = Ae^{mt}$ maka didapatkan

$d''(Ae^{mt})/dt^2 + 3d'(Ae^{mt})/dt + 2(Ae^{mt}) = 0$

$Ae^{mt}(m^2 + 3m + 2) = 0$

Dari persamaan tersebut terlihat bahwa tidak ada nilai A (selain nol) dan nilai e^{mt} (kecuali m = - ∞) yamg membuuat nilai suku kiri nol. Nilai A= 0 dan m = - ∞ tidak diinginkan untuk menyelesaikan persamaan maka nilai m yang memenuhi persamaan di atas adalah:

$(m^2 + 3m + 2) = 0$

sehingga m = -1 dan m =-2.

Dengan demikian solusi untuk $y_{ho}(t)$ adalah:

$y_{ho}(t) = A_1e^{-t} + A_2e^{-2t}$

- Langkah 2. Mencari $y_{fo}(t)$

Menyelesaikan persamaan:

$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{2t}$

Berdasarkan perkiraan keluaraan terhadap masukan yang ada dilakukan permisalan sebagai berikut:

$y_{fo}(t) = Ae^{2t}$

Subsitusi ke dalam persamaan sistem menghasilkan

$(4A+6A+2A)e^{2t} = e^{2t}$

dari persamaaan tersebut didapatkan :

$(4A+6A+2A) = 1$

A = 0,083

Dengan demikian

$y_{fo}(t) = 0,083e^{2t}$

- Langkah 3.

Dengan menggabungkan langkah 1 dan langkah 2 maka didapatkan tanggapan lengkap sistem:

$y(t) = A_1e^{-t} + A_2e^{-2t} + 0{,}083e^{2t}$

- Langkah 4. menerapkan keadaan awal y(0) = 1 dan y'(0) = 2 pada tanggapan lengkap sistem.

Dengan menerapkan y(0)=1 didapatkan:

$y(0) = A_1e^{-1*0} + A_2e^{-2*0} + 0{,}083e^{2*0}$

$1 = A_1 + A_2 + 0{,}083$

$A_1 + A_2 = 0{,}917$

Dengan menerapkan y'(0) = 2 didapatkan:

$d(y_{ho}(t))/dt = d(A_1e^{-t})/dt + d(A_2e^{-2t})/dt + d(0{,}083e^{2t})/dt$

dengan memasukann nilai keadaan awal

$2 = - A_1 - 2A_2 + 0{,}083$

$A_1 + 2A_2 = -1{,}917$

Dengan eliminasi persamaan yang didapkan dari keadaan 1 dan 2 didapatkan

$A_2 = -2{,}834$ dan $A_1 = 3{,}751$

Dengan demikian tanggapan lengkap sistem adalah:

$y(t) = 3{,}751e^{-t} – 2{,}834e^{-2t} + 0{,}083e^{2t}$

II.3. Persamaan Beda Sistem

Persamaan beda sistem adalah persamaan hubungan masukan dan keluaran pada sistem diskrit. Dengan keluaran adalah y(n) sedangkan masukan adalah x(n) persamaaan beda sistem dapat ditulis sebagai berikut:

$a_n y(n) + a_{n-1} y(n-1) + \ldots\ldots + a_p y(n-p) = b_n x(n) + b_{n-1} x(n-1) + \ldots\ldots + a_{n-m} x(n-m)$ (2.2)

Suku kanan persamaan tersebut sering digabungkan menjadi:

$f(n) = b_n x(n) + b_{n-1} x(n-1) + \ldots\ldots + a_{n-m} x(n-m)$

dengan f(n) disebut fungsi pemaksa.

Persamaan beda sistem orde p dengan kondisi awal y(-1), y(-2), y(-3),….y(-p) mempunyai tanggapan lengkap:

$y(n) = y_{ho}(n) + y_{f0}(n)$

dengan

$y_{ho}(n)$ = tanggapan homogen, alami, bebas, dan transient

$y_{f0}(n)$ = tanggapan paksa, akhir, steady state

Tanggapan homogen didapatkan dengan menyelesaikan persamaan sistem pada saat masukan sama dengan nol f(n)=0. Tanggapan paksa didapatkan dengan menerapkan masukan f(n) pada sistem.

Contoh 2.3

Selesaikan persamaan beda sistem berikut jika diberikan kondisi awal y(-1) = 2

$y(n) + 0{,}2y(n-1) = 6$

Penyelesaian:

- Langkah 1. Mencari $y_{ho}(n)$

  Persamaan homogen sistem adalah sebagai berikut:

$y(n) + 0{,}2y(n-1) = 0$

Dengan permisalan $y_{ho}(n) = C(\alpha)^n$ maka:

$y(n-1) = C(\alpha)^{n-1} = k\alpha^n$

dengan $k= C\alpha^{-1}$

Subsitusi kepersamaan homogen sistem menghasilkan :

$C(\alpha)^n + 0{,}2\ C(\alpha)^{n-1} =0$

$C(\alpha)^{n-1}(\alpha + 0{,}2) =0$

Hanya nilai C=0 dan $(\alpha)^{n-1} = 0$ yamg membuuat nilai suku kiri nol dari komponen $C(\alpha)^n$. Nilai-nilai ini tidak diinginkan untuk menyelesaikan persamaan maka nilai α yang memenuhi persamaan di atas adalah:

$\alpha + 0{,}2 =0$

$\alpha = - 0{,}2$

Dengan demikian solusi untuk $y_{ho}(n)$ adalah:

$y_{ho}(n) = C(-0{,}2)^n$

- Langkah 2. Mencari $y_{fo}(n)$

Tanggapan paksa sistem didapatkan dengan menyelesaikan persamaan:

$y(n) + 0{,}2y(n-1) =6$

Berdasarkan perkiraan keluaraan terhadap masukan yang ada dilakukan permisalan sebagai berikut:

$y_{fo}(n) = A$

Subsitusi ke dalam persamaan sistem menghasilkan

$y_{fo}(n) + 0{,}2\ y_{fo}(n-1) =6$

A + 0,2A =6

A=5

Dengan demikian

$y_{fo}(n) = 5$

- Langkah 3.

Dengan menggabungkan langkah 1 dan langkah 2 maka didapatkan tanggapan lengkap sistem:

$y(n) = 5 + C(-0,2)^n$

- Langkah 4. menerapkan keadaan awal y(0) = 1 dan y'(0) = 2 pada tanggapan lengkap sistem.

Dengan menerapkan y(-1) = 2 didapatkan:

$y(-1) = 5 + C(-0,2)^{-1}$

5C = 5 – 2

C=0,6

Dengan demikian tanggapan lengkap sistem adalah:

$y(n) = 5 + 0,6(-0,2)^n$

II.4. Tanggapan Impuls

Tanggapan impuls h(t)n adalah tanggapan sistem jika mendapat masukan berupa sinyal impuls. Suatu sistem linier tak ubah waktu:

$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + \ldots + b_m x^m(t)$

mempunyai tanggapan impuls h(t) dengan rumusan berikut:

$x(t) = \delta(t)$ dan $y(t)=0, \qquad -\infty<t<0$

$h(t) = y(t)|_{x(t)=\delta(t)}$

(2.3)

Contoh 2.4

Tentukan tanggapan impuls sistem $2y'(t) + 3y(t) = 4\, x(t)$

Penyelesaian :

Untuk mencari tanggapan implus maka masukan $x(t) = \delta(t)$

$2y'(t) + 3y(t) = 4\, \delta(t)$

Dengan $h(t) = y(t)|_{x(t)=\delta(t)}$ maka persamaan diatas dapat dituliskan sebagai :

$2h'(t) + 3h(t) = 4\, \delta(t) \qquad (1)$

Dari penyelesaian persamaan deferensial yang telah dipelajari sebelumnya kita dapat mengasumsikan penyelesaian untuk h(t) :

$h(t) = Ae^{-1,5t}u(t) + 0\delta(t)$

diasumsikan $0\delta(t)$ karena pada sistem orde satu ini masukan tidak mempunyai $\delta'(t)$ sehingga untuk $t>0$ $\delta(t)=0$.

Dengan subsitusi asumsi ke persamaan (1) dihasilkan :

$2d/dt[Ae^{-1,5t}u(t)] + 3A\, e^{-1,5t}u(t) = 4\delta(t)$

Dengan mempertimbangkan waktu t=0 didapatkan:

$2Ae^{-1,5t}|_{t=0}\delta(t) = 4\delta(t)$

$2A\delta(t) = 4\delta(t)$

$A=2$

Dengan demikian:

$h(t) = 2\ e^{-1,5t}u(t)$

Contoh 2.5

Tentukan tanggapan impuls sistem $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 3x(t) + 2\ x'(t)$

Penyelesaian :

Untuk mencari tanggapan implus maka masukan $x(t) = \delta(t)$

$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 3\delta(t) + 2\delta'(t)$

dengan persamaan karakteristik

$m^2 + 3m + 2 = 0$

dan $y(t)$ tidak mengandung komponen $\delta(t)$ (tidak terdapat $\delta''(t)$ diruas kanan) maka dapat diasumsikan :

$y(t)= A_1e^{-t}\ u(t)+ A_2e^{-2t}\ u(t)+0\delta(t)$

atau :

$y'(t)= -A_1e^{-t}\ u(t) -2A_2e^{-2t}\ u(t)+(A_1+A_2)\delta(t)$

maka dengan mengevaluasi komponen $\delta'(t)$ didapatkan

$(A_1+A_2)\delta(t) = 2\delta(t)$

$A_1+A_2 = 2$

(1)

Dengan mengevaluasi koefisien $\delta(t)$ didapatkan

$3(A_1+A_2)\delta(t)\ \ -A_1e^{-t}|_{t=0}\delta(t) -2A_2e^{-2t}|_{t=0}\delta(t) = 3\delta(t)$

$3(A_1+A_2) - A_1 - 2A_2 = 3$

$2A_1+A_2 = 3$

Dengan menyelesaikan persamaan (1) dan (2) didapat A_1=1 dan A_2 = 1

Dengan demikian tanggapan impuls sistem:

h(t) = e^{-t} u(t) + e^{-2t} u(t)

II.5. Konvolusi Kontinyu

Keluaran sistem dengan tanggapan impuls h(t) dan masukan x(t) dapat direpresentasikan sebagai:

$$y(t) = \sum_{all\tau} \varepsilon x(\tau\varepsilon)\delta(t - \tau\varepsilon)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(p)h(t - p)dp$$

(2.4)

atau dapat juga dinyatakan

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(p)x(t - p)dp$$

Kedua rumusan diatas dikenal sebagai integral konvolusi. Untuk dua fungsi sembarang x(t) daaan h(t) maka integral konvolusi r(t) dapat dinyatakan sebagai:

r(t) = x(t) * h(t)

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(p)h(t - p)dp$$

Konvolusi kontinyu mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

- Komutatif

$x(t)*y(t) = y(t)*x(t)$

$r_{xy}(t) = r_{yx}(t)$

- Distributif

$x(t)*[y(t) \pm z(t)] = [x(t)*y(t)] \pm [x(t)*z(t)]$

$r_{xy}(t) = r_{yx}(t) \pm r_{xz}(t)$

- Asosiatif

$x(t)*[y(t)*z(t)] = \{x(t)*y(t)]*z(t)$

Untuk memperjelas penggunaan integral konvolusi disajuikan contoh berikut.

Contoh 2.5

Dua buah isyarat mempunyai rumusan sebagai berikut:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0<t<1 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

dan

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 1<t<2 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Carilah sinyal r(t) yang merupakan hasil konvolusi dua isyarat tersebut :

Penyelesaian:

Untuk mencari nilai konvolusi kedua isyarat kontinyu digunakan:

$r(t) = x(t) * h(t)$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(p)h(t-p)dp$$

Pada rumus diatas dapat dilihat bahwa untuk mencari nilai r(t) diperlukan sinyal x(p) dan sinyal h(t-p).

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0<t<1 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

maka

$$x(p) = \begin{cases} 1 & 0<p<1 \\ 0, & p \text{ lainnya} \end{cases}$$

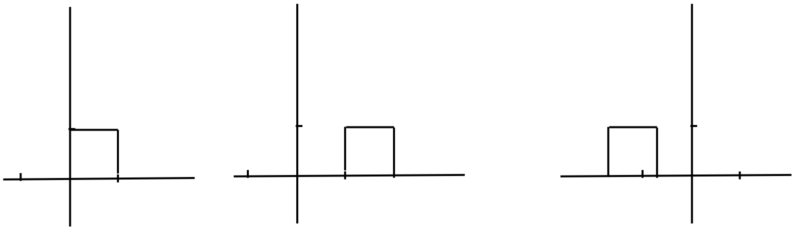
sedangkan h(t-p) dapat dicari sebagai berikut:

$$h(t-p) = \begin{cases} 1 & 1<t-p<2 \\ 0, & t-p \text{ lainnya} \end{cases}$$

yang dibutuhkan adalah fungsi h dalam p maka :

$$h(t-p) = \begin{cases} 1 & -2+t<p<-1+t \\ 0, & p \text{ lainnya} \end{cases}$$

Untuk mempermudah diilustrasikan sebagai berikut :

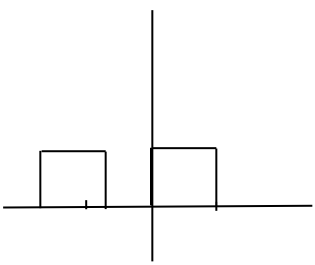


Gambar 2.2 Sinyal x(p), h(p) dan h(t-p).

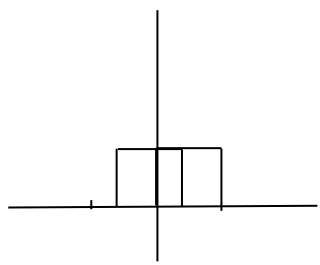
Pada gambar diatas sinyal h(t-p) adalah sinyal h(-p) yang tergeser sejauh t. Dari rumusan integral konvolusi dapat dilihat bahwa sinyal h(-p) dijalankan dari -∞ sampai +∞. Nilai integral konvolusi dapat dibagi menjadi beberapa kasus penggal waktu t yaitu:

- Pada saat t<1
- Pada saat 1<t<2
- Pada saat 2<t<3
- Pada saat t>3

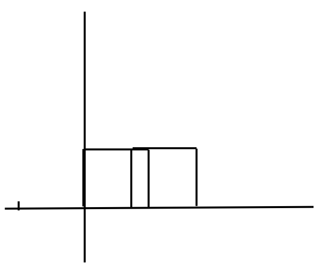
Untuk memperjelas keempat kasus ini x(p) dan h(t-p) digambarkan dalam satu sumbu y(p).



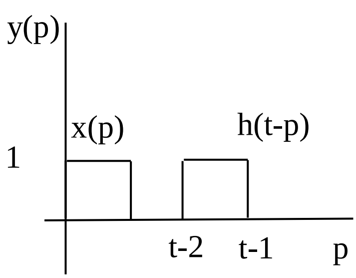
(a)



(b)



(c)



(d)

Gambar 2.3 (a) Sinyal x(p) dan h(t-p) pada saat t<1

(b) Sinyal x(p) dan h(t-p) pada saat 1<t<2

(c) Sinyal x(p) dan h(t-p) pada saat 2<t<3

(d) Sinyal x(p) dan h(t-p) pada saat t>3

Hasil konvolusi r(t) pada tiap penggal waktu tersebut adalah sebagai berikut

- Pada saat t<1

Pada periode ini sinyal h(t-p) belum sampai ke titik awal x(p) maka:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(p)h(t-p)dp$$

r(t) = 0

- Pada saat 1<t<2 batasan bawah integral konvolusi berdasar gambar 2.2 (b) adalah 0 dengan batas atas t-1

$$r(t) = \int_{0}^{t-1} x(p)h(t-p)dp$$

$$r(t) = \int_{0}^{t-1} (1)(1)dp$$

r(t) = t-1

- Pada saat 2<t<3 batasan bawah integral konvolusi berdasar gambar 2.2 (c) adalah t-2 dengan batas atas 1

$$r(t) = \int_{t-2}^{1} x(p)h(t-p)dp$$

$$r(t) = \int_{t-2}^{1} (1)(1)dp$$

$$r(t) = 1-(t-2)$$

$$= 3-t$$

- Pada saat t>3

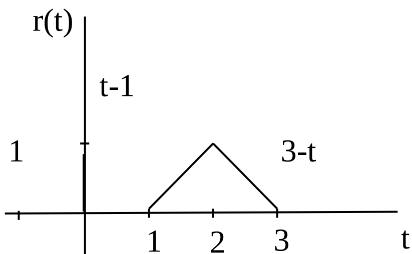
Pada waktu ini h(t-p) sudah meninggalkan batas akhir x(p) sehingga:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(p)h(t-p)dp$$

$$r(t) = 0$$

Dengan demikian hasil konvolusi secara keseluruhan adalah sebagai berikut:

$$r(t) = \begin{cases} t-1 & 1<t<2 \\ 3-t & 2<t<3 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$



Gambar 2.4 Sinyal r(t) hasil konvolusi x(t) dan h(t)

II.6. Konvolusi Diskrit

Konvolusi diskrit antara dua sinyal x(n) dan h(n) dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$r(n) = x(n) * h(n) = \sum_{\text{all } k} x(k)h(n - k) \qquad (2.5)$$

Komputasi tersebut diselesaikan dengan merubah indeks waktu diskrit *n* menjadi *k* dalam sinyal *x[n]* dan *h[n]*. Sinyal yang dihasilkan *x[k]* dan *h[k]* selanjutnya menjadi sebuah fungsi waktu diskrit k. Langkah berikutnya adalah menentukan h*[n-k]* dengan *h[k]* merupakan pencerminan dari h*[k]* yang diorientasikan pada sumbu vertical dan h*[n-k]* merupakan *h[ki]* yang digeser ke kanan dengan sejauh *n*. Saat pertama kali hasil perkalian *x[k]k[n-k]* terbentuk, nilai pada konvolusi *x[n]*v[n]* pada titik *n* dihitung dengan menjumlahkan nilai *x[k]h[n-k]* sesuai rentang *k* pada sederetan nilai integer tertentu. Untuk lebih jelasnya diperlihatkan dalam contoh berikut.

Contoh 2.6

Dua buah isyarat diskrit x(n) dan y(n) mempunyai representasi sebagai berikut:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n = -1,0,1 \\ 0, & n \text{ lainnya} \end{cases}$$

sedangkan

$$y(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 2, & n=2 \end{cases}$$

0, n lainnya

carilah r(n) = x(n)*y(n)

Penyelesaian :

Untuk mencari nilai r(n) adalah sebagai berikut:

$$r(n) = x(n) * y(n) = \sum_{\text{all } k} x(k)y(n-k)$$

dari rumusan tersebut dibutuhkan x(k) dan y(n-k). Nilai x(k) didapat dengan mengganti indeks n menjadi k

$$x(k) = \begin{cases} 1 & k = -1,0,1 \\ 0, & k \text{ lainnya} \end{cases}$$

Sedangkan y(n-k) adalah sebagai berikut :

$$y(n-k) = \begin{cases} 1 & k=n-1 \\ 2, & k=n-2 \\ 0, & n \text{ lainnya} \end{cases}$$

Nilai r(n) dievaluasi untuk setiap n.

- Untuk n= -1

$x(k) = \delta(k+1) + \delta(k) + \delta(k-1)$

$y(-1-k) = 2\delta(k+3) + \delta(k+2)$

$$r(n) = x(n) * y(n) = \sum_{\text{all } k} x(k)y(n-k)$$

$$r(-1) = \sum_{\text{all } k} x(k)y(-1-k)$$

$r(-1) = ... + x(-3)y(-3) + x(-2)y(-2)+x(-1)y(-1)+x(0)y(0)+....$

$= 0$

- Untuk n= 0

$x(k) = \delta(k+1) + \delta(k) + \delta(k-1)$

$y(-1-k) = 2\delta(k+2) + \delta(k+1)$

$$r(n) = x(n) * y(n) = \sum_{\text{all } k} x(k)y(n-k)$$

$$r(0) = \sum_{\text{all } k} x(k)y(-1-k)$$

$r(0) = ... + x(-2)y(-2)+x(-1)y(-1)+x(0)y(0)+x(1)y(1)....$

$= ...+(0)(2) +(1)(1) +(1)(0)+(1)(0)+....$

$r(0) = 1$

- Untuk n=1

$x(k) = \delta(k+1) + \delta(k) + \delta(k-1)$

$y(-1-k) = 2\delta(k+1) +\delta(k)$

$r(1) = ... + x(-2)y(-2)+x(-1)y(-1)+x(0)y(0)+x(1)y(1)+x(2)y(2)+....$

$r(1) = ...+(0)(0)+(1)(2)+(1)(1)+(1)(0)+(0)(0)+....$

$r(1) = 3$

- Untuk n=2

$x(k) = \delta(k+1) + \delta(k) + \delta(k-1)$

$y(-1-k) = 2\delta(k) +\delta(k-1)$

$r(1) = ... + x(-2)y(-2)+x(-1)y(-1)+x(0)y(0)+x(1)y(1)+x(2)y(2)+....$

$r(1) = ...+(0)(0)+(1)(0)+(1)(2)+(1)(1)+(0)(0)+....$

$r(1) = 3$

- Untuk n=3

$x(k) = \delta(k+1) + \delta(k) + \delta(k-1)$

$y(-1-k) = 2\delta(k-1) +\delta(k-2)$

r(1) = ... x(-2)y(-2)+x(-1)y(-1)+x(0)y(0)+x(1)y(1)+x(2)y(2)+ + x(3)y(3)+....

r(1) = ...+(0)(0)+(1)(0)+(1)(0)+(1)(2)+(0)(1)+(0)(0)....

r(1) = 2

- Untuk n=4

x(k) = δ(k+1) + δ(k) + δ(k-1)

y(-1-k) = 2δ(k-2) +δ(k-3)

r(1) = ... x(-2)y(-2)+x(-1)y(-1)+x(0)y(0)+x(1)y(1)+x(2)y(2)+ + x(3)y(3)+....

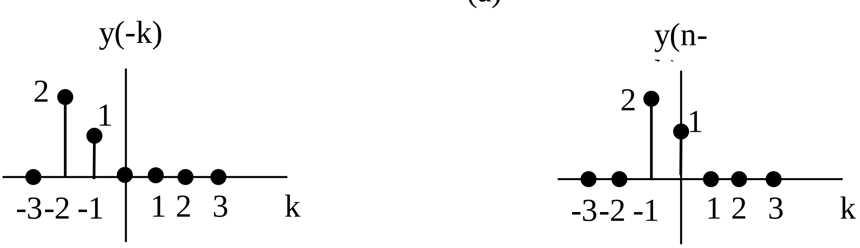
r(1) = ...+(0)(0)+(1)(0)+(1)(0)+(1)(0)+(0)(2)+(0)(1)....

r(1) = 0

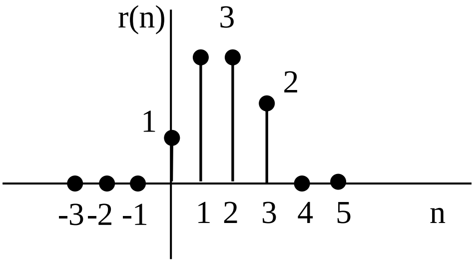
Jadi secara keseluruhan hasil konvolusi antara x(n) dan h(n) adalah

r(n)= δ(n)+3δ(n-1)+ 3δ(n-2)+2δ(n-3)

(a)



(b)



(c)

Gambar 2.5 (a) Sinyal x(k) dan y(k)

(b) Sinyal y(-k) dan y(n-k) pada saat n=1

(c) Sinyal hasil konvolusi r(n)

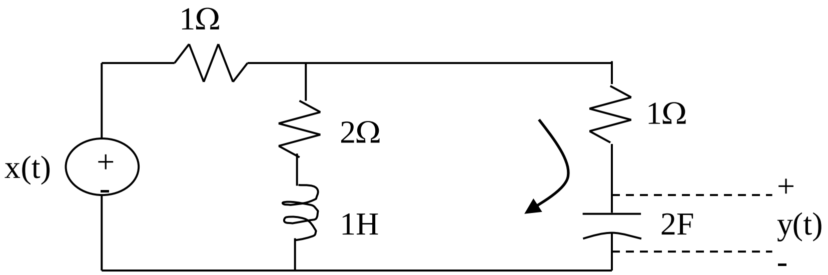
Soal-soal latihan

5. Selesaikan persamaan deferensial berikut
   a. $y''(t) + 11y'(t) + 28 = 2tu(t)$ dengan $y(0)=1$, $y'(0)=2$
   b. $y''(t) + 3y'(t) + 2 = 2^{e-4t}$ dengan $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$
6. Tentukan persamaan deferensial jika diketahui

   $y(t) = 4^{e-2t} + 2^{e-3t} + 3t$

   $y_{ho}(t) = 4^{e-2t} + 2^{e-3t}$ dan $y_{fo}(t) = 3t$
7. Tentukan tanggapan impuls sistem berikut :
   a. $2y'(t) + 4y(t) = 5x(t)$
   b. $2y'(t) + 4y(t) = 5x(t) + 3x'(t)$
   c. $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 2x(t) + 3x'(t)$

8. Tentukan persamaan deferensial sistem berikut :



Gambar 2.6 Rangakian RLC soal 4

9. Tentukan hasil konvolusi sinyal kontinyu berikut
   a. x(t)=u(t)-u(t-2) dan h(t)=u(t-3)-u(t-4)
   b. x(t)=u(t-1)-u(t-2) dan h(t)=t[u(t)-)u(t-1)]+(2-t)[u(t-1)-u(t-2)]
10. Tentukan hasil konvolusi sinyal diskrit berikut
    a. x(t)=u(n)-u(n-4) dan h(t)=2[u(n-2)-u(t-4)]
    b. x(t)=δ(n)+3δ(n-1)- δ(n-2) dan h(t)= δ(n-2)-2δ(n-3)

BAB III

Transformasi Laplace

III.1 Pengertian Lapace Transform

Transformasi laplace sering dipergunakan untuk menganalisa sinyal dan sistem linier tak ubah waktu. Transformasi laplace mempunyai banyak karakteristik yang memepermudah analisa tersebut. Transformasi laplace juga sering digunakan untuk menyelesaiakan persamaan deferensial sistem. Dalam desain sistem transformasi laplace digunakan untuk menyakan fungsi alih sistem. Berikut dibahas mengenai transformasi laplace dimulai dari rumusan transformasi laplace.

$$\ell\left(F\left(t\right)\right)=F\left(s\right)=\int_{0}^{\infty} f\left(t\right)e^{-st} \tag{3.1}$$

dengan s adalah bilangan kompleks yaitu s=σ+jω. Penggunaan laplace transform akan lebih jelas dengan contoh berikut.

Contoh 3.1

Diketahui suatu fungsi f(t) sebagai berikut:

$$f\left(t\right)=\begin{cases}0 & ; t<0 \\ A & ; t>0\end{cases}$$

Carilah tranformasi laplace F(s) dari fungsi tersebut!

Penyelesaian:

Dari rumusan transformasi laplace, nilai F(s) dapat dicari sebagai berikut:

$$\ell\left(F(t)\right)=\int_0^{\infty} Ae^{-st}\,dt$$

$$=\frac{A}{-s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}$$

$$=\frac{A}{-s}e^{-\infty}-\frac{A}{-s}e^{-0}$$

$$=\frac{A}{s}$$

Dari penyelesain tersebut dapat dilihat bahwa untukuntuk A =1 berarti f (t) = u (t) maka F (s) = $\frac{1}{s}$. Jadi unruk fugsi undak dapat diperlihatkan bahwa hasil transformasi laplace adalah nilai dari fungsi tersebut dibagi dengan s. Untuk lebih memantapkan penggunaan rumusan ttransformasi laplace disajikan contoh transformasi laplace dari fungsi lereng.

Contoh 3.2

Diketahui suatu fungsi sebagai berikut:

$$f(t)=\begin{cases} 0 & ;\ t<0 \\ At & ;\ t\geq 0 \end{cases}$$

Carilah F(s)

Penyelesaian:

$$\ell\left(f\left(t\right)\right)=\int_{0}^{\infty} A\,t\,e^{-st}\,dt$$

$$=At\,\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_{0}^{\infty}-\int_{0}^{\infty}\frac{Ae^{-st}}{-s}\,dt$$

$$=\frac{A}{s}\int_{0}^{\infty} e^{-st}\,dt$$

$$=\frac{A}{s^{2}}$$

dari penyelesaian tersebut dapat dilihat bahwa hasil transformasi laplace untuk fungsi lereng adalah gradient fungsi lereng dibagi dengan s. Dengan beberapa contoh tersebut dapat dilihat bahwa transformasi laplace mengubah fungsi-fungsi umum dalam t seperti fungsi undak, fungsi lereng, fungsi sinus dan fungsi-fungsi lain menjadi fungsi-fungsi aljabar variiabel kompleks s

Penggunaan integral untuk mencari transformasi laplace dai suatu fungsi sering menjadi pekerjaan yang kurang menyenangkan. Untuk lebih mempermudah proses transformasi berikut disajikan tabel transformasi laplace.

Tabel 2.1 Tabel Transformasi Laplace

No	*F(t)*	F(s)
1	$\delta(t)$	1
2	1	$\frac{1}{s}$

3	T	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)}$	$\frac{1}{s^n}$
5	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
8	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
9	Sin wt	$\frac{w}{s^2+w^2}$
10	Cos wt	$\frac{s}{s^2+w^2}$
11	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
12	$e^{-at} \sin wt$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$
13	$e^{-at} \cos wt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$
14	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s(s+a)}$

III.2 Karakteristik Transformasi Laplace

Transformasi Laplace mempunyai beberapa sifat penting yang berguna untuk analisa sinyal dan sistem linier tak ubah waktu. Sifat-sifat Transformasi Laplace antara lain adalah sebagai berikut:

1. $£\ [A f(t)] = AF(s)$
2. $£\ \lfloor f_1(t) \pm f_2(t) \rfloor = F_1(s) + F_2(s)$
3. $£_{\pm}\left[\dfrac{d}{dt} f(t)\right] = s F(s) - f(0\pm)$
4. $£_{\pm}\left[\dfrac{d^2}{dt^2} f(t)\right] = s^2 F(s) - sf(0\pm) - \overset{1}{f}(0\pm)$
5. $£_{\pm}\left[\dfrac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{k-1}^{n} s^{n-k} \overset{(k-1)}{f}(0\pm)$
6. $£_{\pm}\left[\int f(t)dt\right] = \dfrac{F(s)}{s} + \dfrac{\left\lfloor \int f(t)dt \right\rfloor_{t=0\pm}}{s}$
7. $£_{\pm}\left[\int \cdots \int f(t)dt^n\right] = \dfrac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{s^{n-k+1}} \left[\int \cdots \int f(t)(dt)^k\right]_{t=0\pm}$
8. $£\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \dfrac{F(s)}{s}$
9. $\int_0^\infty f(t)dt = \lim_{s\to 0} F(s)\ jika \int_0^\infty f(t)d(t)ada$
10. $£\left[e^{-at} f(t)\right] = F(s+a)$
11. $£\left[f(t-\alpha)u(t-\alpha)\right] = e^{-\alpha s}F(s)\ \ \alpha \geq 0$

12. $£\left[t^2 f(t)\right] = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$

13. $£\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$

14. $£\left[t\, f(t)\right] = -\frac{d}{ds} F(s)$

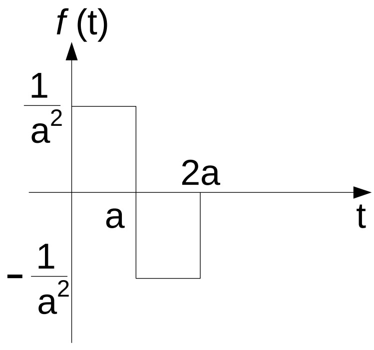
15. $£\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \int_0^\infty F(s) d(s)$

16. $£\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = a F(as)$

Penggunaan sifat-sifat tersebut dalam membantu transformasi sinyal atau sistem diasikan dalam contoh berikut:

Contoh 3.3

Carilah transformasi Laplace dari gambar sinyal berikut :



Penyelesaian:

Persamaan dari sinyal diatas adalah:

$$f(t)=\frac{1}{a^2}\left(u(t)-u(t-a)\right)-\frac{1}{a^2}\left(u(t-a)-u(t-2a)\right)$$

$$=\frac{1}{a^2}u(t)-\frac{2}{a^2}u(t-a)+\frac{1}{a^2}u(t-2a)$$

F (s) = £ f (t)

$$=\frac{1}{a^2}\ell\left[u(t)\right]-\frac{2}{a^2}\ell\left[u(t-a)\right]+\frac{1}{a^2}\ell\left[u(t-2a)\right]$$

$$=\frac{1}{a^2}\frac{1}{s}-\frac{2}{a^2}\frac{1}{s}e^{-as}+\frac{1}{a^2}\frac{1}{s}e^{-2as}$$

$$=\frac{1}{a^2 s}\left(1-2e^{-as}+e^{-2as}\right)$$

Penyelesaian tersebut didapat dengan mengingat karakteristik:

£ [u(t)] = $\frac{1}{s}$

$$£\left[f(t-\alpha)u(t-\alpha)\right]=e^{-\alpha s}F(s) \quad ,\alpha \geq 0$$

III.3 Transformasi Laplace balik

Transformasi balik dipergunakan untuk mendapatkan fungsi atau sinyal dalam bentuk t dari suatu fungsi laplace s.

$$\ell^{-1}\left[F(s)\right]=f(t)$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}\,ds\ (t>0)$$

(3.2)

c = dipilih > dari semua bagian real titik singular

Cara ini sangat sulit untuk dikerjakan untuk itu pakai table Transformasi Laplace yaitu dengan cara mengubah fungsi kedalam bentuk yang ada dalam tabel

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}\qquad (m<n)$$

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{a_1}{s+p_1}+\frac{a_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{a_n}{s+p_n}$$

dengan a_k (k = 1, 2, …..n), a_k dihitung sebagai berikut

$$\left[(s+p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k}=\left[\frac{a_1}{s+p_1}(s+p_k)+\frac{a_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{a_k}{s+p_k}(s+p_k)+\cdots+\frac{a_n}{s+p_n}(s+p_k)\right]_{s=-p_k}$$

$$=a_k$$

jadi

$$a_k=\left[(s+p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k}$$

$$\ell^{-1}\left[\frac{a_k}{s+p_k}\right]=a_k\,e^{-p_k t}$$

$$f(t)=\ell^{-1}[F(s)]=a_1e^{p_1 t}+a_2\,e^{-p_2 t}+\cdots+a_ne^{-p_n t}\qquad (t\geq 0)$$

Berikut contoh penggunaan tabel tranformasi laplace unntuk mendapatkan kembali f(t) dari F(s) dengan orde penyebut lebih tinggi.

contoh 3.4

Diketahui F(s) sebagai berikut:

$$F(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)}$$

carilah *f (t)* = ……

Penyelesaian:

$$F(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}$$

dengan rumusan a_k didapat

$$a_1 = \left[(s+1)\frac{s+4}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-1} = \left[\frac{s+4}{s+2} \right]_{s=-1} = 3$$

$$a_2 = \left[(s+2)\frac{s+4}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-2} = \left[\frac{s+4}{s+1} \right]_{s=-2} = -2$$

jadi

$$\begin{aligned} f(t) &= \ell^{-1}[F(s)] \\ &= \ell^{-1}\left[\frac{3}{s+1} \right] + \ell^{-1}\left[\frac{-2}{s+2} \right] \\ &= 3e^{-t} - 2e^{-2t} \qquad (t \geq 0) \\ &= \left(3e^{-t} - 2e^{-2t}\right)u(t) \end{aligned}$$

Berikut contoh penggunaan tabel tranformasi laplace unntuk mendapatkan kembali f(t) dari F(s) dengan orde pembilang lebih tinggi.

contoh 3.5

$$G(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 8}{(s+1)(s+2)}$$

carilah *g (t)*

Penyelesaian:

Pembagian pembilang dengan penyebut menghasilkan:

$$G(s) = s + 2 + \frac{s+4}{(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{d}{dt}\delta(t) + 2\delta(t) + 3e^{-t} - 2e^{-2t} \qquad ; t \geq 0$$

Untuk fungsi dalam yang melibaatkan banyak kutub maka Transformasi Laplace baliknya dikerjakan dengan ekspansi parsial sebagai berikut

Contoh 3.6

Tinjau $F(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$

Penyelesaian:

Ekspansi pecahan parsial menghasilkan

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_3}{(s+1)^3}+\frac{b_2}{(s+1)^2}+\frac{b_1}{(s+1)}$$

$$(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)}=b_3+b_2(s+1)+b_1(s+1)^2$$

(1)

saat s = -1 maka :

$$\left[(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1}=b_3$$

b_2 didapatkan dengan deferensiasi persamaan (1)

$$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)}\right]=b_2+2b_1(s+1)$$

dengan s = -1

$$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1}=b_2$$

b_1 didapatkan dengan deferensial kuadrat persamaan (1)

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1}=2b_1$$

Secara umum penyelesaian Laplace balik balik n kutub dapat diringkas sebagai berikut:

$$b_k=\frac{1}{(n-k)!}\frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}}\left[(s+a)^n\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-a}$$

dengan n = derajat polynomial banyak kutub

k = n, n-1, n-2, …….1

dengan demikian didapatkan b_1, b_2, b_3 sebagai berikut

$$b_3 = \left[(s+1)^3 \frac{(s^2+2s+3)}{(s+1)^3} \right]_{s=-1}$$

$$= \left[s^2 + 2s + 3 \right]_{s=-1}$$

$$= 2$$

$$b_2 = \frac{d}{ds} \left[(s+1)^3 \frac{(s^2+2s+3)}{(s+1)^3} \right]_{s=-1}$$

$$= \left[\frac{d}{ds} (s^2 + 2s + 3) \right]_{s=-1}$$

$$= \left[2s + 2 \right]_{s=-1}$$

$$= 0$$

$$b_1 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[(s+1)^3 \frac{(s^2+2s+3)}{(s+1)^3} \right]_{s=-1}$$

$$= \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{ds^2} (s^2 + 2s + 3) \right]_{s=-1}$$

$$= \frac{1}{2} . 2$$

$$= 1$$

jadi untuk contoh 3.6

$$f(t) = \ell^{-1}[F(s)]$$
$$= \ell^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^3} + \frac{0}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1}\right]$$
$$= t^2 e^{-t} + e^{-t}$$
$$= (t^2+1)e^{-t} \qquad (t \geq 0)$$
$$= (t^2+1)e^{-t} \qquad u(t)$$

III.4 Transformasi Laplace untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial

Penyelesaian persamaan deferensial dengan mencari tanggapan homogen dan tanggapan paksa telah dibahas dalam bab II. Penyelesaian dengan cara tersebut memerlukan permisalan tanggapan yang tepat. Cara yang lebih mudah untuk menyelesaikan persamaan deferensial tanpa harus menggunakan permisalan tanggapan adalah dengan transformasi Laplace.

Untuk mendapatkan solusi persamaan deferensial yang pertama dilakukan adalah pengubahan persamaan ke bentuk s. Untuk lebih jelasnya disajikan contoh berikut.

Contoh 3.7

Carilah penyelesaian untuk persamaan deferensial berikut:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0, \qquad x(0) = a, \dot{x}(0) = b$$

Penyelesaian:

$$\ell\left(\ddot{x}\right) = s^2 x(s) - s\,x(o) - \dot{x}(0)$$

$$\ell\left(\dot{x}\right) = s\,x(s) - s\,x(o)$$

$$\ell\left[\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x\right] = s^2\,x(s) - s\,x(0) - \dot{x}(0) + \left[s\,x(s) - x(0)\right] + 2\,x(s)$$

$$= \left(s^2 + 3s + 2\right)x(s) - as - 3a - b$$

maka

$$(s^2 + 3s + 2)\,x(s) = as + b + 3a$$

$$X(s) = \frac{as + b + 3a}{s^2 + 3s + 2}$$

$$= \frac{as + b + 3a}{(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{2a + b}{s+1} - \frac{a+b}{s+2}$$

Laplace balik dari X (s) menghasilkan

$$X(t) = \ell^{-1}\left[X(s)\right]$$

$$= \ell^{-1}\left[\frac{2a+b}{s+1}\right] - \ell^{-1}\left[\frac{a+b}{s+2}\right]$$

$$= (2a+b)e^{-t} - (a+b)e^{-2t} \qquad (t \geq 0)$$

Soal-soal latihan

11. Tentukan X(s) jika diketahui x(t) sebagai berikut

a. x(t)=u(t-3)-u(t-4)

b. x(t)=t[u(t)-)u(t-1)]+(2-t)[u(t-1)-u(t-3)]

$$\begin{cases} t-1 & 1<t<2 \\ & \end{cases}$$

c. r(t) = 3-t 2<t<3

0, t lainnya

12. Selesaikan persamaan deferensial berikut

a. y''(t) +8y'(t) +15 = 2tu(t) dengan y(0)=1, y'(0)=2

b. y''(t) +10y'(t) +21 = 2^{e-4t} dengan y(0) =2, y'(0) = 1

13. Tentukan f(t) jika diketahui F(s) sebagai berikut:

a. $F(s) = \frac{s^2 + 6s + 5}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$

b. $F(s) = \frac{s^2 + 6s + 9}{s^2 + 5s + 6}$

IV Topologi Sistem

1V.1 Fungsi Alih

Sistem dapat direpresentasikan dalam berbagai representasi: Representasi Sistem kontinyu adalah sebagai berikut:

- Persamaan deferensial

  $a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + \ldots + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + a_n x^n(t)$

- Tanggapan impuls h(t)

  $h(t) = y(t)|_{x(t)=\delta(t)}$

- Fungsi alih sistem H(s)
- Persamaan keadaan

Untuk sistem diskrit:

- Persamaan beda

  $a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + \ldots + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + a_n x^n(t)$

- Tanggapan cuplik satuan h(n)

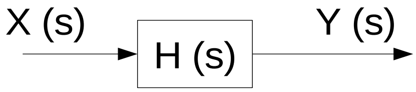
  $h(n) = y(n)|_{x(n)=\delta(n)}$

- Fungsi alih sistem H(z)
- Persamaan keadaan

Fungsi alih menghubungkan antara masukan dan keluaran sistem. Fungsi alih untuk fungsi kontinyu biasa dinyatakan dalam s(transformasi laplace) sedangkan untuk fungsi didkrit dalam z (transformasi z)

$$\text{Fungsi alih sistem} = \frac{\text{Keluaran Sistem}}{\text{Masukan sistem}}$$

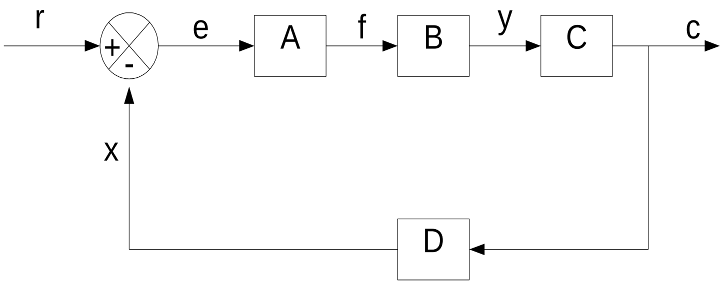
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$



Gambar 4.1 Fungsi alih sistem

IV.2. Aljabar Diagram Blok

Representasi dalam fungsi alih sistem dapat diuraikan lagi menjadi hubungan antara elemen-elemen dasar penyusunan. Hubungan tersebut disebut diagram blok. Pada bagian ini akan dijelaskan konsep-konsep aljabar diagram blok yang berlaku dalam s maupun z.



Gambar 4.2 Fungsi alih sistem dengan masukan r keluaran c

e = r –x

f = A.e = A (r-x)

y = B.f = A.B (r-x)

c = C.y = A.B.C (r-x)

dengan x = D.c maka

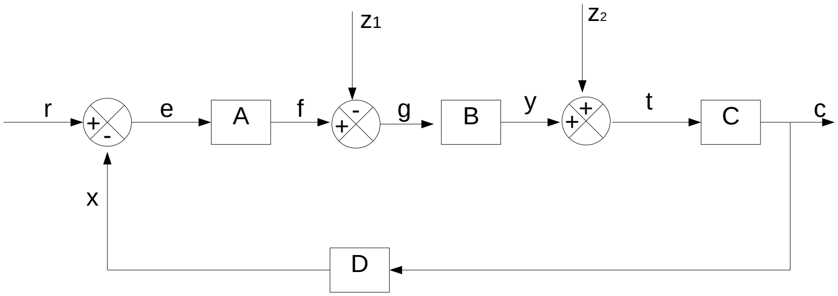
c = A.B.C. (r-D.c)

= A.B.C.r – A.B.C.D.c

(1+ABCD)c = ABCr

jadi : $\frac{c}{r} = \frac{ABC}{1 + ABCD}$

Untuk sistem dengan beberapa masukan (masukan dan 2 gangguan) fungsi alihnya dapat dicari sebagai berikut:



Gambar 4.3 Fungsi alih sistem dengan masukan dan gangguan

Dari gambar didapatkan

$e = r - x$

$f = Ae = A(r\text{-}x)$

$g = f + z_1 = A(r\text{-}x) + z_1$

$y = Bg = AB(r - x) + Bz_1$

$t = y + z_2 = AB(r\text{-}x) + Bz_1 + z_2$

$c = Ct = ABC(r\text{-}x) + BCz_1 + Cz_2$

dengan $x = Dc$ maka

$c = ABC(r\text{-}Dc) + BCz_1$

$\quad = ABCr - ABCDc + BCz_1 + Cz_2$

$(1 + ABCD)\,c = ABCr + BCz_1 + Cz_2$

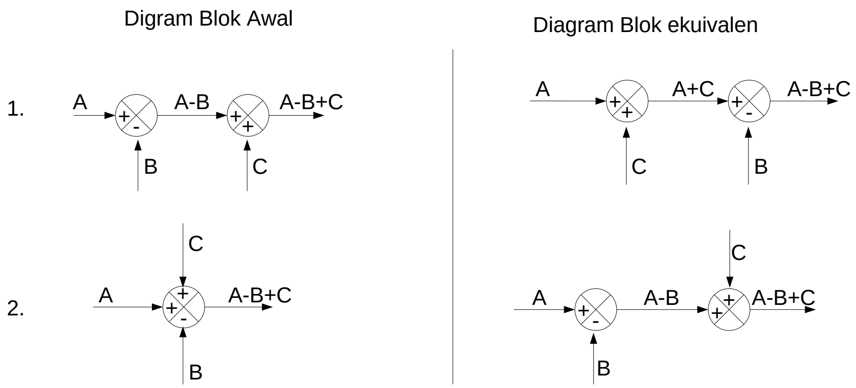
jadi

$$\Rightarrow \frac{c}{r} \quad (z_1 = 0, z_2 = 0) \qquad\qquad \frac{c}{r} = \frac{ABC}{1 + ABCD}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{z_1} \ (r = 0,\ z_2 = 0) \qquad \frac{c}{z_1} = \frac{BC}{1 + ABCD}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{z_2} \ (r = 0,\ z_1 = 0) \qquad \frac{c}{z_2} = \frac{C}{1 + ABCD}$$

Untuk mempermudah modifiikasi diagram blok sistem yang berguna untuk mencari konfigurasi yang lebih baik disajikan aturan aljabar diagram blok sebgai berikut:



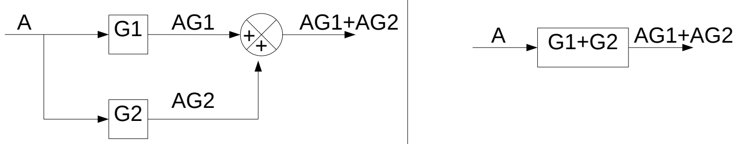
3.


A
G1
AG1
G2
AG1G2
A
G2
AG2
G1
AG1G2

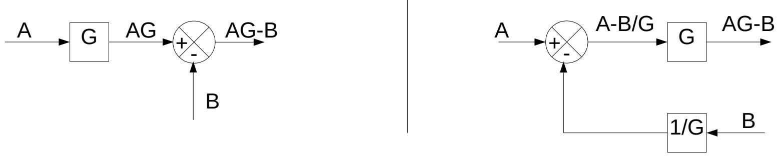
4.


A
G1
AG1
G2
AG1G2
A
G1G2
AG1G2

5.


A
G1
AG1
+
+
AG1+AG2
G2
AG2
A
G1+G2
AG1+AG2

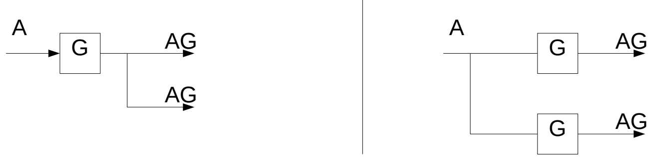
6.


A
G
AG
+
-
AG-B
B
A
+
-
A-B/G
G
AG-B
1/G
B

7.

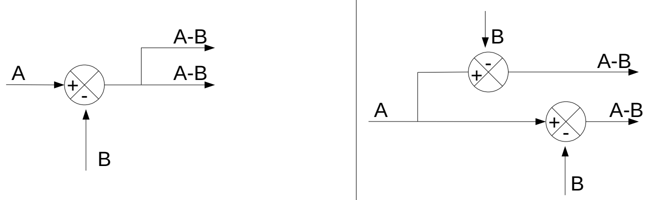

A
+
-
A-B
G
AG-BG
B
A
G
AG
+
-
AG-BG
B
G
BG

8.

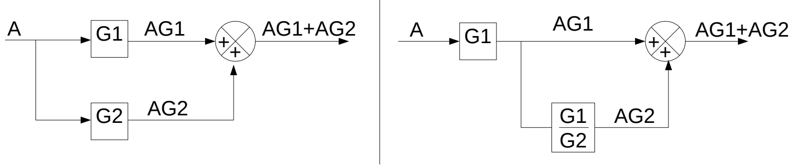

A
G
AG
AG
A
G
AG
G
AG

9.

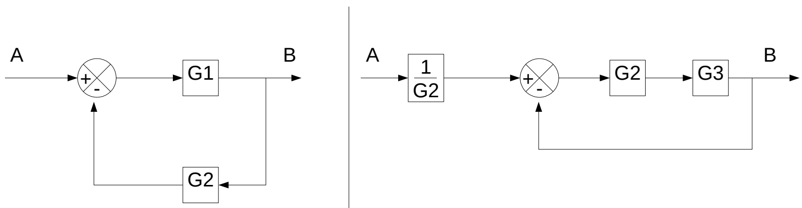
10.



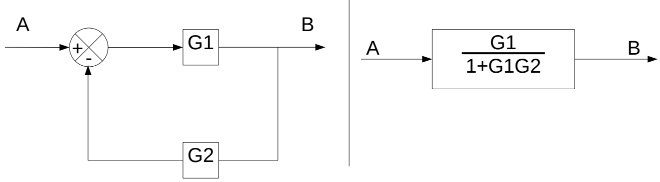
11.



12.



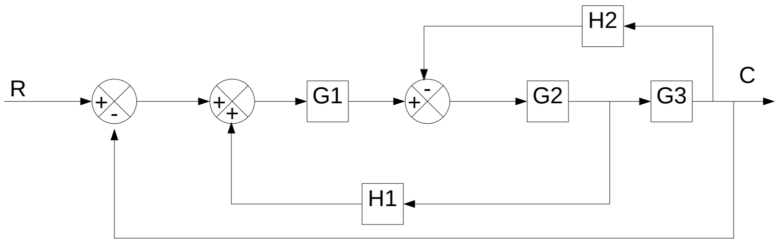
13.



Contoh 4.1

Sederhanakan diagram blok berikut:

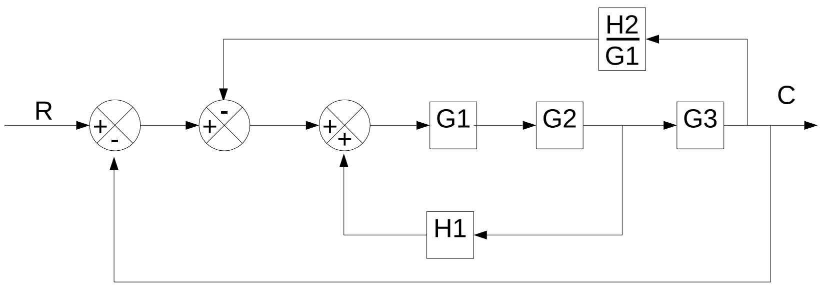
1.



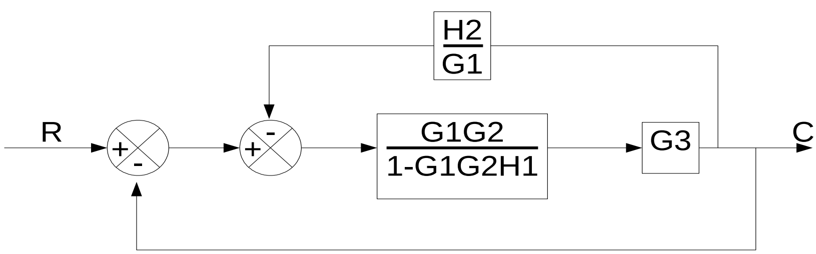
Penyelesaian:

Digram blok 1 tersebut dengan menggeses titik umpaaan balik bagian atas ke depan maka didapatkan diagram blok 2 berikut:

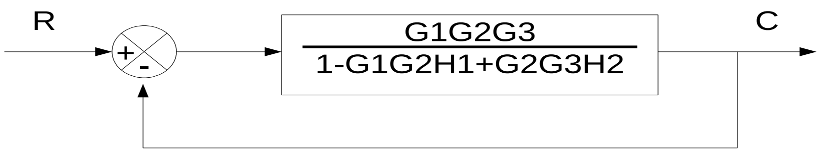
2.



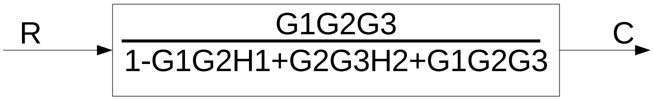
4.



5.

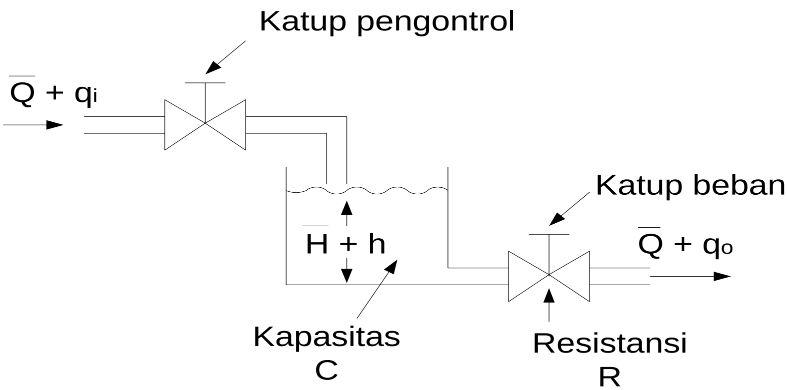


6.



IV.3 Penerapan Aljabar Diagram dalam Pemodelan Sistem

Daaaalam aplikasi sering suatu sistem fisis dimodelkan dalam bentuk matematis untuk dapat dianalisa dan dirancang dengan lebih mudah. Beirikut akan dibahas sistem permukaan zat cair



$\overline{Q}$ = laju aliran zat cair $m^3/\sec$

q_i = penyimpangan kecil laju aliran masuk $m^3/\sec$

q_0 = penyimpangan kecil laju aliran keluar $m^3/\sec$

$\bar{H}$ = Tinggi permukaan zat cair m

h = perubahan permukaan zat cair m

- Resistansi

$$R = \frac{\text{Perubahan Perbedaan Permukaan} \quad (m)}{\text{Perubahan laju Aliran} \quad m^3/\sec}$$

- Kapasitansi

$$C = \frac{\text{Perubahan Cairan Yang Disimpan} \quad m^3}{\text{Perubahan Potensial} \quad m}$$

Untuk aliran Laminar

Q = K H

Dengan K = koefisien , $m^3/\sec$

Resistansi untuk aliran Laminar

$$R = \frac{dh}{dq} = \frac{H}{Q}$$

Untuk aliran Turbulens

Q = K $\sqrt{H}$

Resistansi :

$$Rt = \frac{dH}{dQ}$$

$$dQ = \frac{K}{2\sqrt{H}}\, dH$$

$$\frac{dH}{dQ} = \frac{2\sqrt{H}}{K}$$

$$= \frac{2\sqrt{H}\,\sqrt{H}}{Q}$$

$$= \frac{2H}{Q}$$

jadi

$$Rt = \frac{2H}{Q}$$

Mencari Fungsi alih Sistem

$$C\, \frac{dh}{dt} = q_i - q_o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Dan

$$q_o = \frac{h}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

substitusi pers (2) ke (1)

$$RC\ \frac{dh}{dt} + h = Rq_i$$

Dengan laplace transform dihasilkan

$$CR\ (s + 1)\ H(s) = R\ Q_i\ (s)$$

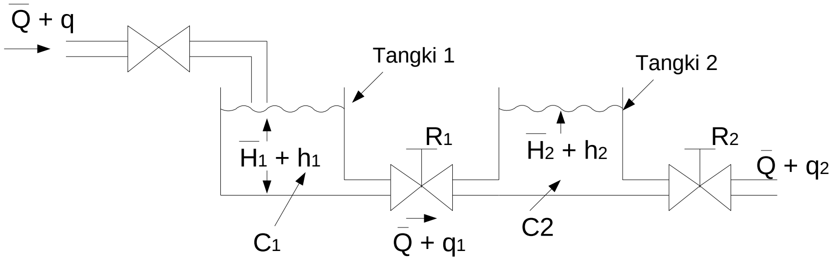
Jika q_i dianggap sebagai masukan dan h sebagai keluaran maka :

$$\frac{N(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

apabila q_o adalah keluaran dan q_i adalah masukan :

$$\frac{Q_0(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

Untuk memahami pentingnya pemahaman tentang diagram blok sistem disajiakn contoh mendapat model sistem permukaan cairan dengan interaksi:



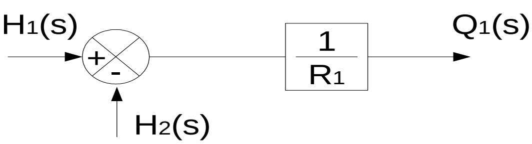
dari gambar di atas di dapatkan

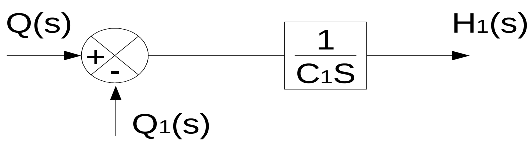
$$\frac{h_1 - h_2}{Rs} = q_1 \overset{\ell}{\Rightarrow} \frac{H_1 - H_2}{R_1} = Q_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

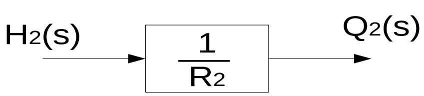
$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = q - q_1 \overset{\ell}{\Rightarrow} sC_1 H_1(s) = Q(s) - Q_1(s) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

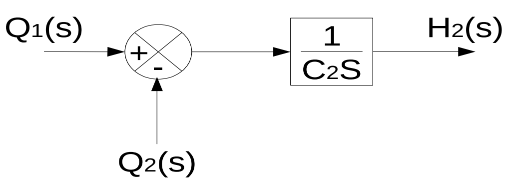
$$\frac{h_2}{R_2} = q_2 \overset{\ell}{\Rightarrow} \frac{H_2(s)}{R_2} = Q_2(s) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$C_2 \frac{d\,h_2}{dt} = q_1 - q_2 \overset{\ell}{\Rightarrow} s\,C_2\,H_2(s) = Q_1(s) - Q_2(s) \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

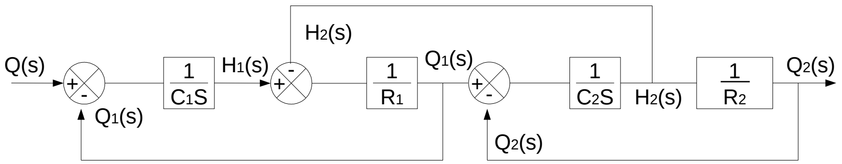




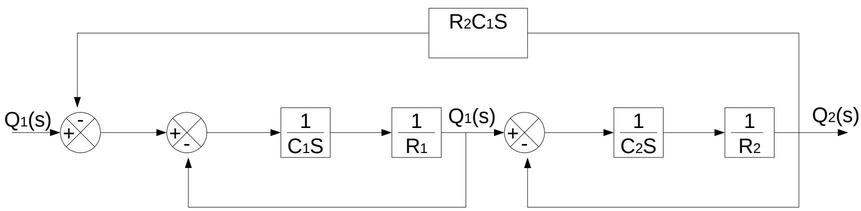


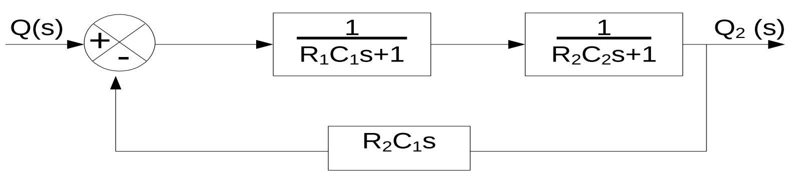


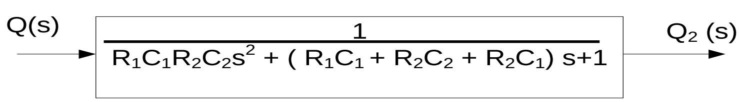
jika q adalah masukan dan q_2 adalah keluaran maka kita dapatkan bagan sebagai berikut:



dengan penyederhanaan





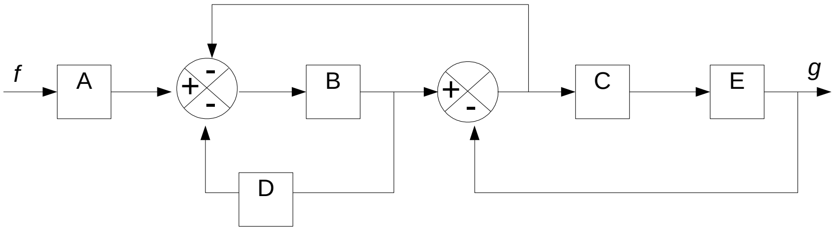


jadi :

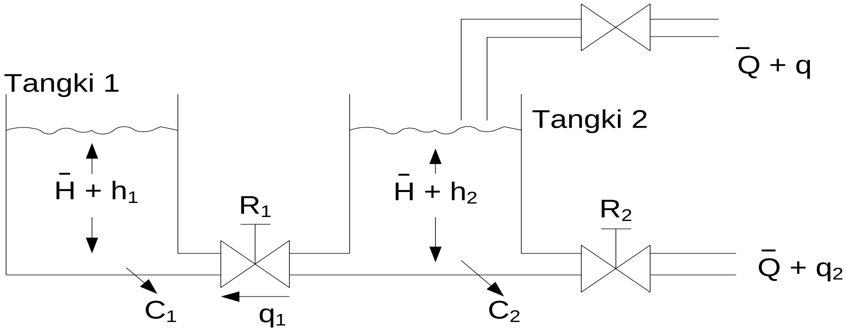
$$\frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)s + 1}$$

Soal-Soal Latihan

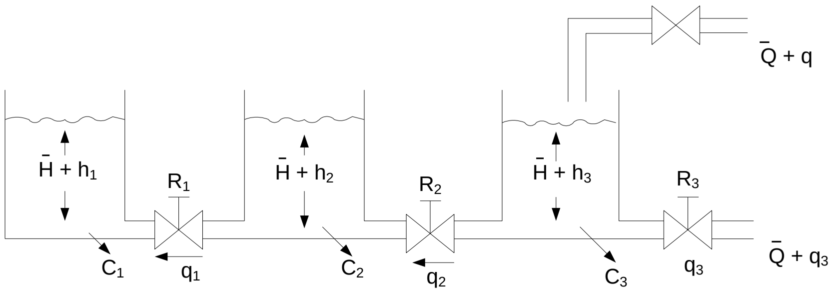
1. sederhanakan diagram blok berimut



2. Carilah fungsi alih sistem berikut dengan masukan adalah q sedangkan keluaran adalah q2. $\dfrac{Q_2(s)}{Q(s)} = ...$



3. carilah fungsi alih $\dfrac{Q_3(s)}{Q(s)}$ dari sistem berikut :

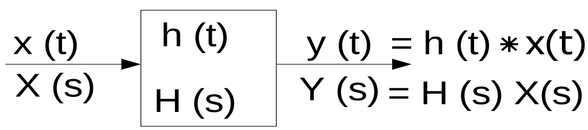


BAB V

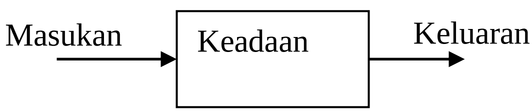
Pendekatan Ruang Keadaan

V.1 Konsep dasar

Pendekatan ruang keadaan banyak dipergunakan dalam berbagai pemodelan sistem seperti pada pemodelan converter tegangan, tracking meter dan efesiensi energi pada bangunan serta berbagai bidang lainnya. Suatu sistem dapat diungkap berdasar hubungan Masukan – Keluaran saja (fungsi Alih) atau termasuk keadaan (dalam) sistem juga



dengan persamaan keadaan (state equation)

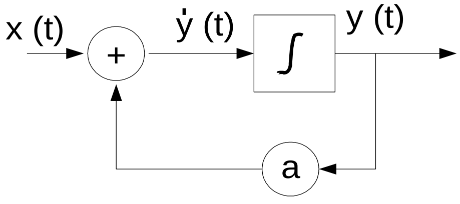


Gambar 5.1 Hubungan masukan dan keluaran dengan keadaan sistem

Pada gambar 5.1terlihat ada dua hubungan yang saling terkait :

- Masukan dengan keadaan sistem
- Keluaran dengan keadaan sistem

Pada representasi dengan pendekatan ruang keadan maka keadaan sistem termasuk kondisi awal akan terpantau yang dijelaskan beikut.



Gambar 5.2 Sistem sederhana dengan masukan x(t) keluaran y(t)

Dari gambar 5.2 dapat dituliskan:

$\dot{y}(t)$= x (t) + a y (t)

atau

$\dot{y}(t)$ - ay (t) = x (t)

tanpa masukan awal x (t) = 0 maka

$\dot{y}(t)$ = a y(t)

dy (t) = a y(t) dt

y (t) = a ∫ y(t) dt

bila operasi di mulai pada saat t = 0 maka

$$y(t) = a\int_0^t y(t)\,d(t)$$
$$= a\,\eta(t)\Big|_0^t$$
$$= a\left[\eta(t) - \eta(0)\right] \rightarrow kondisi\ awal$$

Pada hasil y(t) terlihat kondisi awal sistem. Pembuktian juga dilakukan dengan transformasi laplace sebagai berikut :

s Y(s) – y(0) = a Y(s)

(s-a) Y(s) = y(0)

$$Y(s) = \frac{y(0)}{s-a}$$

$y(t) = y(0)\, e^{at}$

dari hasil tersebut dapat dilihat bahwa walaupun masukan X (t) = 0, sistem akan tetap mempunyai keluaran kalau nilai awal tidak nol (y (0) ≠ 0)

V.2 Representasi sistem dalam persamaan ruang keadaan (State Space Equation).

Representasi ini memungkinkan untuk sistem dengan banyak masukan dan banyak keluaran. Sistem dapat dinyatakan sebagai berikut :

$\dot{X}_1(t) = f_1(X_1, X_2, \ldots\ldots., X_n;\ U_1, U_2, \ldots\ldots.., U_r;\ t)$

$\dot{X}\ 2(t) = f2(X_1, X_2, \ldots\ldots., X_n;\ U_1, U_2, \ldots\ldots.., U_r;\ t)$

•

•

•

$\dot{X}_n(t) = f_n(X_1, X_2, \ldots, X_n ;\quad U_1, U_2, \ldots, U_r ; t)$

dengan keluaran

$y_1(t) = g_1(X_1, X_2, \ldots, X_n ;\quad U_1, U_2, \ldots, U_r ; t)$

$y_2(t) = g_2(X_1, X_2, \ldots, X_n ;\quad U_1, U_2, \ldots, U_r ; t)$

•

•

•

$y_m(t) = g_m(X_1, X_2, \ldots, X_n ;\quad U_1, U_2, \ldots, U_r ; t)$

penulisan secara sederhana :

$\dot{X}(t) = f(x, u, t)$

$y(t) = g(x, u, t)$

dengan

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

untuk fungsi f dan g eksplisit terhadap waktu t maka

$\dot{X}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)$

$y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)$

untuk sistem linier tak ubah waktu

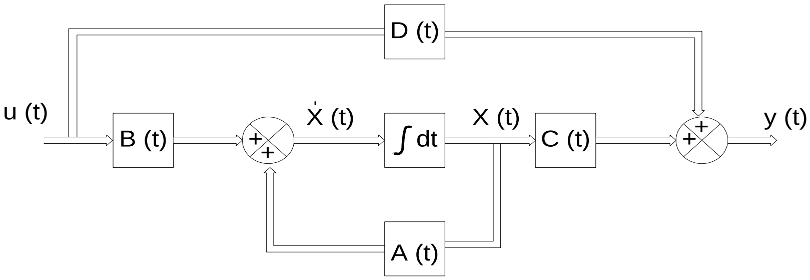
$\dot{X}(t) = Ax(t) + Bu(t) \rightarrow$ Persamaan keadaan y (t) = Cx(t) + Du (t) $\rightarrow$ Persamaan keluaran

A : matriks keadaan

B : matriks masukan

C : matriks keluaran

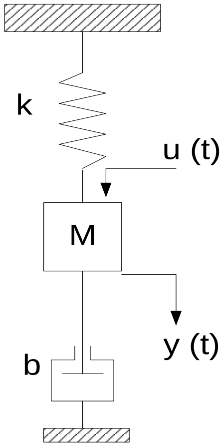
D : matriks transmisi langsung



Gambar 5.3 Realisasi umum persamaan keadaan

Contoh 5.1

Representasikan sistem berikut dalam persamaan ruang keadaan



Gambar 5.4 Sistem massa pegas sederhana

Penyelesaian:

Fungsi alih sistem

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

persamaan deferensial sistem

$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$

Dengan menentukan :

$x_1(t) = y(t)$

$x_2(t) = \dot{y}(t)$

maka diperoleh

$$\dot{X}_1 = x_2$$

$$\dot{X}_2 = \frac{1}{m}\left(-ky - k\dot{y}\right) + \frac{1}{m}u$$

Dengan demikian di dapatkan persamaan keadaan :

$$\dot{X}_1 = x_2$$

$$\dot{X}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

dan persamaan keluaran :

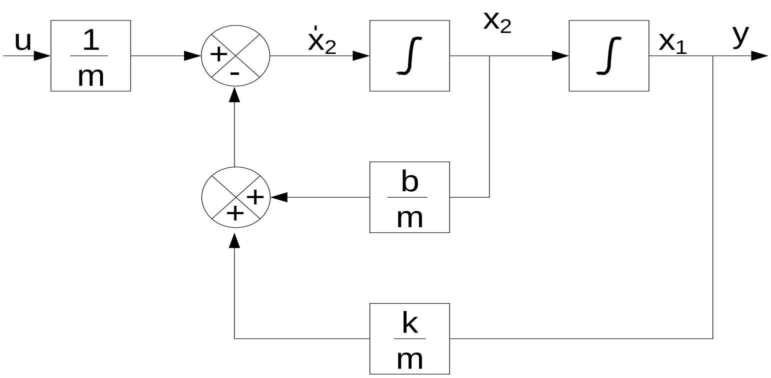
$$y = x_1$$

dalam bentuk matriks dapat di tulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -k/m & -b/m\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ -1/m\end{bmatrix}}_{B}u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

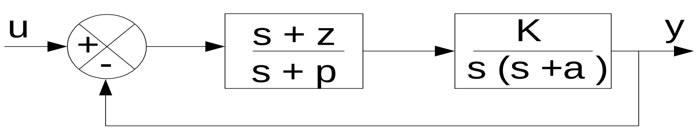
Realisasi persamaan keadaan tersebut adalah sebagai berikut:



Gambar 5.5 Realisasi persamaan keadaan sistem massa pegas

Contoh 5.2

Dapatkan persamaan ruang keadaan dari gambar berikut :



Gambar 5.5 Sistem sederhana dengan masukan U(s) keluaran Y(s)

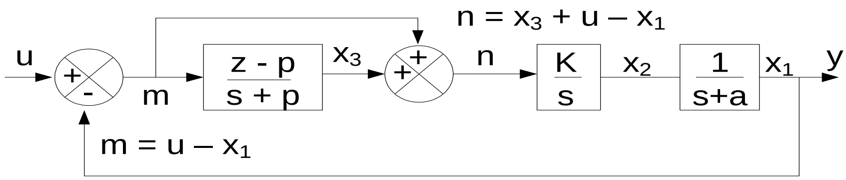
Penyelesaian

Dilakukan ekspansi parsial terhadap $\frac{s+z}{s+p}$ maka :

$$\frac{s+z}{s+p} = 1 + \frac{z-p}{s+p}$$

sedangkan $\frac{K}{s(s+a)} = \frac{K}{s} \bullet \frac{1}{s+a}$

jadi kalau di gambarkan lagi akan menjadi sebagai berikut :



Gambar 5.6 Penjabaran sistem pada contoh 5.2

dari gambar di dapatkan

$\dot{X}_1 = -ax1 + x_2$

$\dot{X}_2 = -Kx_1 + kx_3 + Ku$

$\dot{X}_3 = -(z-p)x_1 - px_3 + (z-p)u$

$y = x_1$

dalam bentuk matriks dapat di tulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ -K & 0 & K \\ -(z-p) & 0 & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ z-p \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

V.3 Persamaan ruang keadaan dari fungsi alih

Untuk Mencari persamaan keadaan dari fungsi alih persamaan ruang keadaan sistem orde-n dari persamaan diferensial dengan masukan tanpa turunannya.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} a_n y = u$$

ditentukan variabel keadaan sebagai berikut :

$x_1 = y$

$x_2 = \dot{y}$

•

•

•

$x_n = y^{(n-1)}$

maka turunan variabel keadaan dapat di tulis sebagai berikut :

$\dot{X}_1 = x_2$

$\dot{X}_2 = x_3$

•

•

•

$\dot{X}_{n-1} = x_n$

$\dot{X}_n = - a_n x_1 - a_{n-1} x_2 \ldots\ldots\ldots - a_1 x_n + u$ dan $y = x_1$

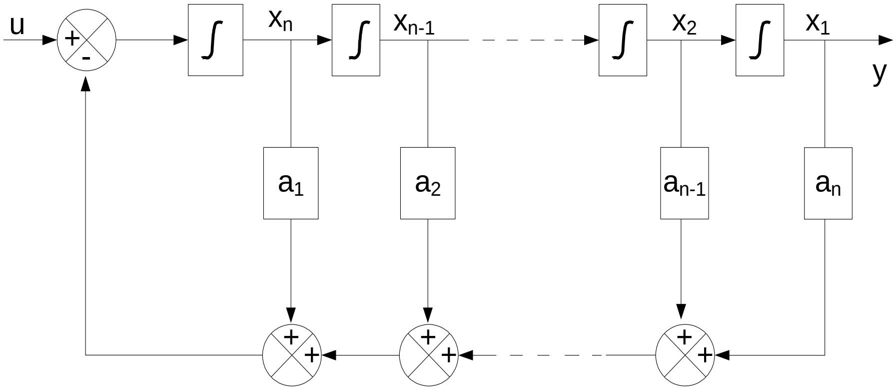
dalam bentuk matriks dapat di tulis :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

dan persamaan keluarannya

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

realisasi dari persamaan ruang keadaan di atas adalah sebagai berikut :



Gambar 5.7 Realisasi umum persamaan ruang keadaan dari fungsi alih dengan masukan tidak mengandung turunan

Persamaan ruang keadaan dari fungsi alih dengan masukan mengandung turunan:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} + a_n}$$

persamaan diferensial dari fungsi diatas adalah :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} \cdots + b_n u$$

ditentukan variabel keadaan sebagai berikut :

$x_1 = y - \beta_0 u$

$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u$

$x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u$

•

•

$x_n = y^{(n-1)} - \beta 0 u^{(n-1)} - \beta 1 u^{(n-2)} \ldots\ldots\ldots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1}u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1}u$

dengan :

$\beta_0 = b_0$

$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0$

$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0$

•

•

•

$\beta_n = b_n - a1\beta_{n-1} \ldots\ldots\ldots - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0$

maka didapatkan

$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u$

$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u$

•

•

•

$\dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1}u$

$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots - a_1 x_n + \beta_n u$

dan

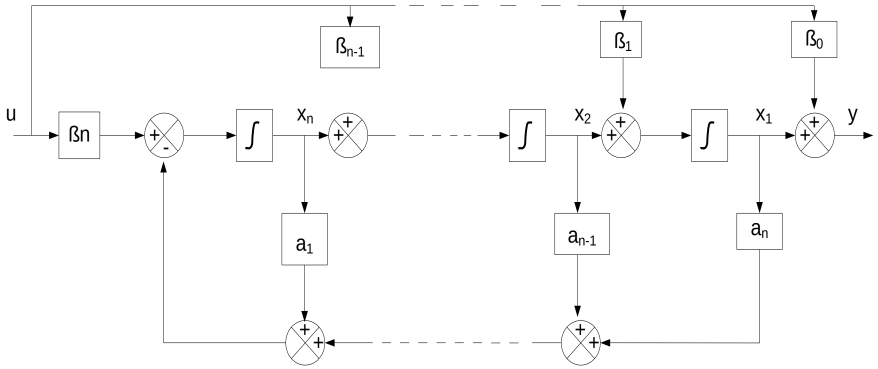
$y = x_1 + \beta_0 u$

dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

Realisasi :



Gambar 5.8 Realisasi umum persamaan ruang keadaan dari fungsi alih dengan masukan mengandung turunan

Contoh 5.3

Diketahui :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{160(s+4)}{s^3 + 18s^2 + 192s + 640}$$

tentukan representasi persamaan ruang keadaan !

<u>Penyelesaian:</u>

Dari fungsi alih di dapatkan persamaan deferensial sebagai berikut :

$$\dddot{y} + 18\ddot{y} + 192\dot{y} + 640y = 160\dot{u} + 640u$$

ditentukan :

$x_1 = y - \beta_0 u$

$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u$

$x_3 = \dddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u$

dengan

$\beta_0 = b_0 = 0$

$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = 0$

$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = b_2 = 160$

$\beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0$

$= 640 - 18 \times 160$

$= -2240$

maka diperoleh

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = x_3$

$\dot{x}_3 = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 \ldots\ldots\ldots - a_1 x_n + \beta_n u$

$= -640\, x_1 - 192\, x_2 - 18\, x_3 - 2240\, u$

dan $y = x_1$

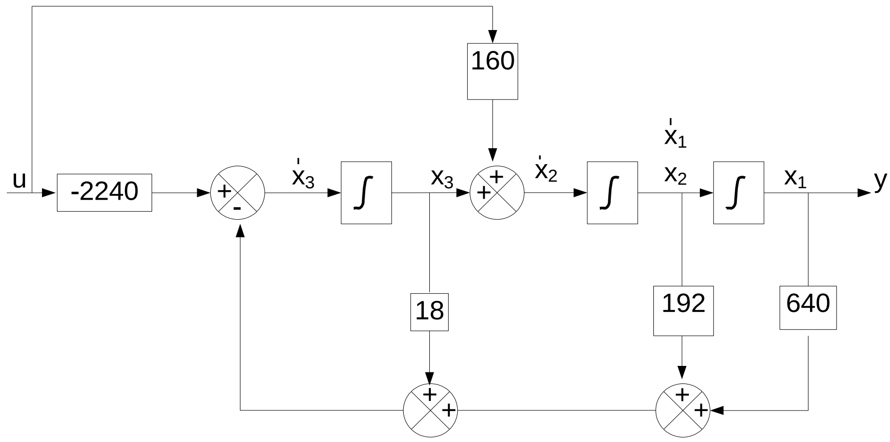
dalam bentuk matriks di tulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -2240 \end{bmatrix} u$$

dan

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0] u$$

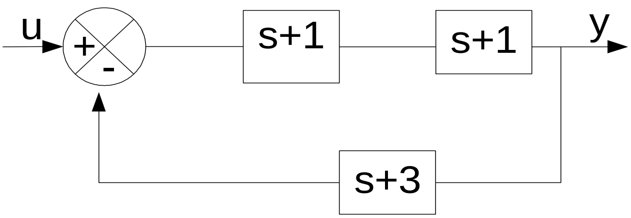
realisasi persamaan diatas adalah sebagai berikut :



Gambar 5.9 Realisasi sistem contoh 5.3

Contoh 5.4

Carilah representasi dalam persamaan ruang keadaan untuk diagram blok berikut :



Gambar 5.10 Sistem contoh 5.4

Penyelesaian:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)(s+2)}{1+(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$= \frac{s^2+3s+2}{s^3+6s^2+11s+7}$$

persamaan diferensialnya :

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 7y = \ddot{u} + 3\dot{u} + 2u$$

dengan persamaan umum

$$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 = b_0\dddot{u} + b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3$$

di dapatkan :

$a_1 = 6$; $a_2 = 11$; $a_3 = 7$

$b_0 = 0$; $b_1 = 1$; $b_2 = 3$; $b_3 = 2$

ditentukan :

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$

$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u$$

dengan :

$\beta_0 = b_0 = 0$

$\beta_1 = b_1 – a_1\beta_0 = 1$

$\beta_2 = b_2 – a_1\beta_1 – a_2\beta_0 = 3- 6 \text{ x } 1 – 0 = -3$

$\beta_3 = b_3 – a_1\beta_2 – a_2\beta_1 – a_3\beta_0$

$= 2 – (6 \text{ x } –3) – (11 \text{ x } 1) = 9$

maka diperoleh :

$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + u$

$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u = x_3 – 3u$

$\dot{x}_3 = -7x_1 – 11x_2 – 6x_3 + 9u$

dan

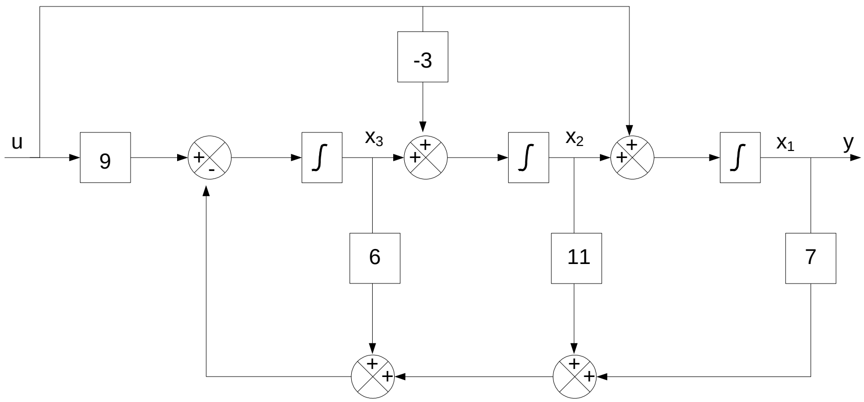
$y = x_1 + \beta_0 u = x_1$

dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

realisasi



Gambar 5.11 Realisasi sistem contoh 5.4

Bentuk lain penyajian persamaan ruang keadaan dari Fungsi alih yang mengandung turunan masukan

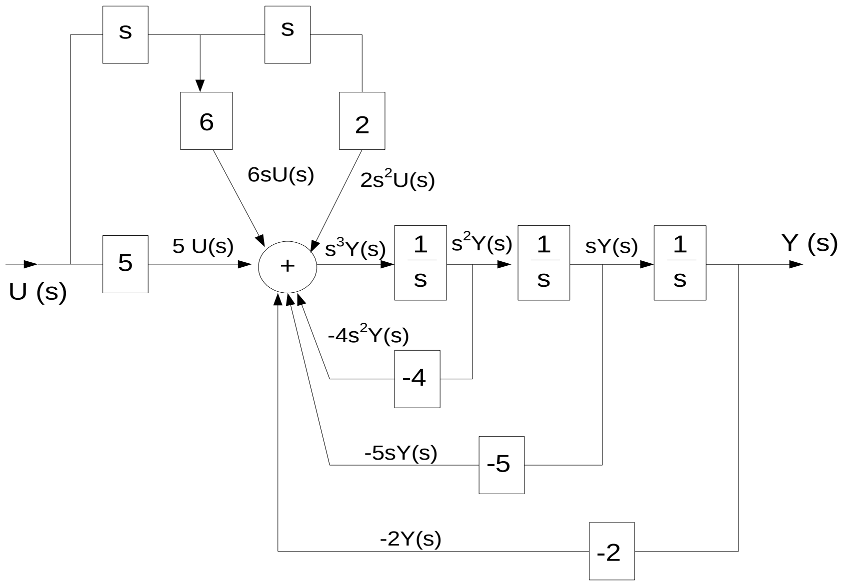
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 6s + 5}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

sistem dapat gambar dengan menulis kembali persamaan diatas menjadi :

s^3 Y(s) + $4s^2$ Y(s) + 5s Y(s) +2Y(s) = $2s^2$U(s) +6sU(s) + 5U(s)

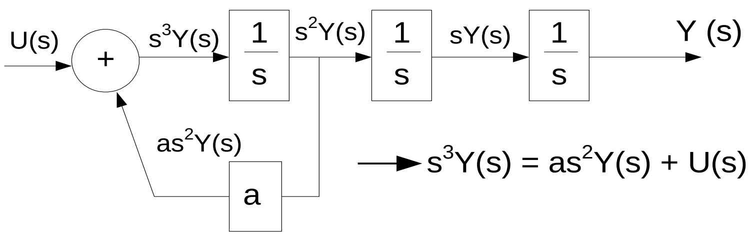
s^3 Y(s) = - $4s^2$ Y(s) - 5s Y(s) - 2Y(s) + $2s^2$U(s) +6sU(s) + 5U(s)

Persamaan diatas jika digambarkan

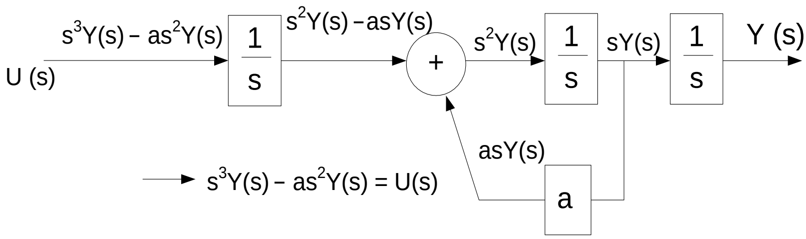


Gambar 5.12 Bentuk dasar realisasi sistem gambar 5.10

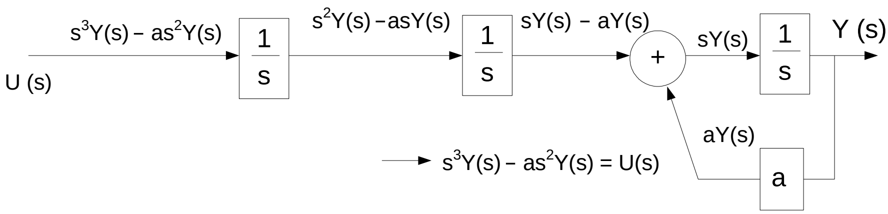
Diagram di modifikasi dengan mengingat



(a)



(b)

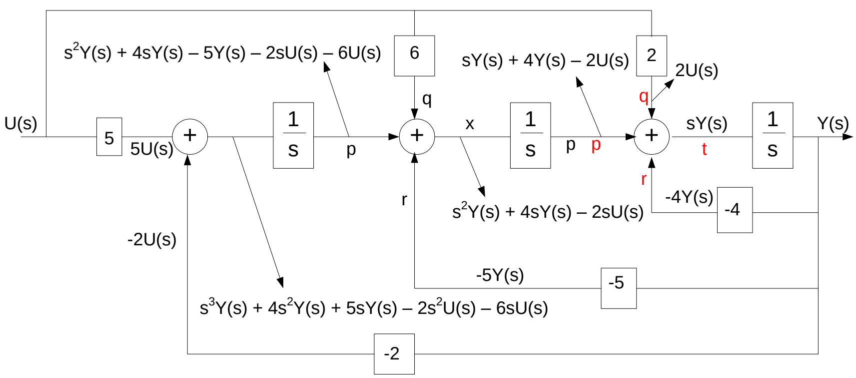


(c)

Gambar 5.13 Dasar pembentukan gambar 5.11

Umpan balik dalam suatu rangkaian mempunyai hasil yang sama walaupun di tempatkan dimana saja.

Diagram dapat di gambar sebagai berikut :



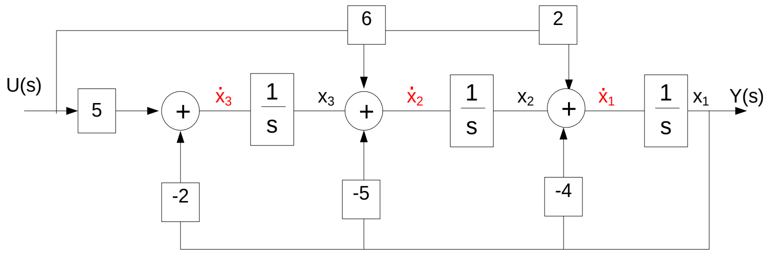
Gambar 5.14Modifikasi realisasi sistem gambar 5.11

$s^3Y(s) + 4s^2Y(s) + 5sY(s) + 2Y(s) = 2s^2U(s) + 6sU(s) + 5U(s)$

$t = p + q + r$

$p = t- q – r \quad = \quad sY(s) – 2U(s) – (- 4Y(s))$

Representasi persamaan keadaannya adalah sebagai berikut :



Gambar 5.15 Realisasi dalam bentuk lain sistem contoh 5.4

didapatkan

$\dot{x}_1 = -4x_1 + x_2 + 2u$

$\dot{x}_2 = -5x_1 + x_3 + 6u$

$\dot{x}_3 = -2x_1 + 5u$

dan

$y = x_1$

dalam bentuk matriks ditulis

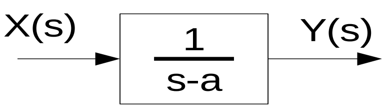
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

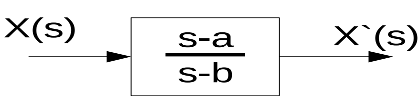
V.4 Kompensator

Kompensator dipasang mendapat sistem yang stabil dengan cara mengkompensasi bagian sistem yang tidak stabil.

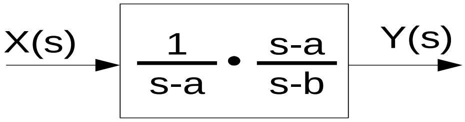
Sistem tak stabil :



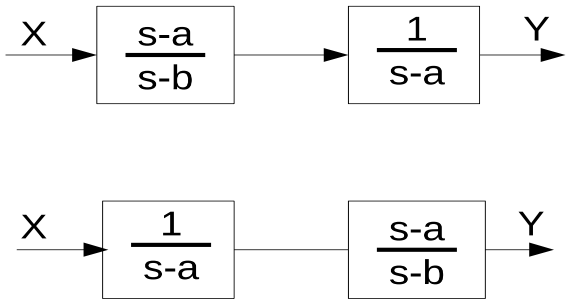
Kompensator :



Secara aljabar jelas :



Kompensator dapat di pasang di depan atau di belakang sistem :

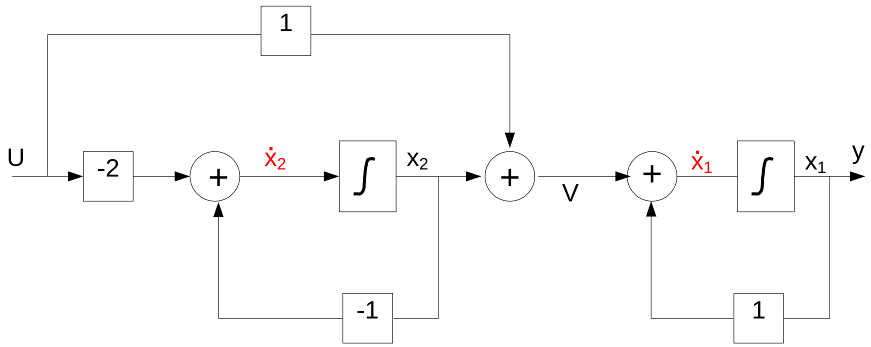


Gambar 5.15 Realisas sistem dengan kompensator di depan

Perbedaan efek pemasangan kompensator di depan atau dibelakang akan dalam representasi persamaan keadaan berikut :

Untuk sistem dengan H(s) = $\frac{1}{s-1}$ dikompensasi dengan $\frac{s-1}{s+1}$

maka :



Gambar 5.16 Realisasi sistem dengan kompensator di depan

untuk kompensator :

$\dot{x}_2$ = -x2 – 2u

keluaran kompensator : $V = x_2 + u$

untuk sistem yang di kompensasi

$\dot{x}_1 = x_1 + v = x_1 + x_2 + u$

keluaran $y = x_1$

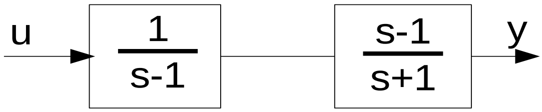
dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u$$

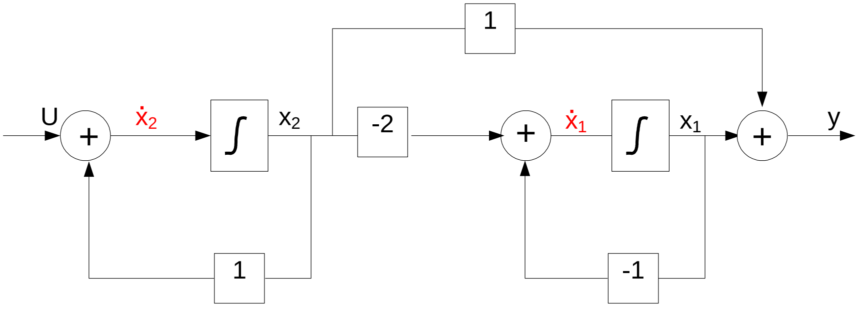
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

bentuk kontrollable, masukan dari masing-masing sistem dapat di kendalikan.

Kompensator di pasang di belakang



dengan penguraian di dapat :



Gambar 5.17 Realisasi sistem dengan kompensator di belakang

$\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2$

$\dot{x}_2 = x_2 + u$

dan

$y = x_1 + x_2$

dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

dan

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

bentuk observable, dari keluaran dapat dilihat penyebab ketidakterkendalian.

V.5 Controllability dan Observability Sistem

Controllability

Syarat suatu sistem controllable

Rank [$A^{n-1}B$ $A^{n-2}B$ ………..AB B] = n

Contoh 5.5

Diketahui suatu persamaan keadaan

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,2 \\ 0,4 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Tinjaulah apakah sistem contollable ?

Penyelesaian:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -0,2 \\ 0,4 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

jadi :

$$\begin{bmatrix} AB & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 1 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rank \begin{bmatrix} 0,8 & 1 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

n =2   rank seharusnya   = 2   jadi sistem *uncotrollable*

Observability

Syarat suatu sistem observable

$$rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

contoh 5.6

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

tinjaulah apakah sistem observable ?

Penyelesaian:

n = 2 (sistem orde 2)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rank \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1$$

jadi sistem unobservable

contoh perhitungan rang matriks

Contoh 5.7

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

rank M = ….?

Penyelesaian

1. Operasi : baris ke 3 - baris ke 2

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Operasi : baris ke 4 - baris ke 1

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Operasi : baris ke 2 - 2x baris ke 1

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jadi rank M = 2

Soal-soal Latihan

1. Tentukan representasi sistem dalam persamaan ruang keadaan untuk sistem berikut:

   a. $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{s+5}{s^2+4s+3}$

   b. $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{5s^2+4s+3}{s^3+7s^2+6s+5}$

2. Tinjaulah observability dan controllability soal no 1.
3. buatlah compensator untuk sistem berikut , representasikan dalam persamaan ruang keadaan
   a. $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s - 8}$
   b. $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + s - 6}$
4. periksalah observability dan controlllability sistem berikut

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

DAFTAR PUSTAKA

Ahmed, F. and Hawas, Y.E., 2015. An integrated real-time traffic signal system for transit signal priority, incident detection and congestion management. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 60, pp.52-76.

Chen, X., Wang, Q. and Srebric, J., 2015. A data-driven state-space model of indoor thermal sensation using occupant feedback for low-energy buildings. *Energy and Buildings*, 91, pp.187-198.

Diaz, G.B., Suul, J.A. and D'Arco, S., 2015, September. Small-signal state-space modeling of modular multilevel converters for system stability analysis. In *Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE), 2015 IEEE* (pp. 5822-5829). IEEE.

Hans J. W., (*penerjemah*), 1996, *Sinyal dan Sistem Linier*, Edisi ke-3, Erlangga, Jakarta.

Krebs, F., Böck, S. and Widmer, G., 2015. *An Efficient State-Space Model for Joint Tempo and Meter Tracking*. In ISMIR(pp. 72-78).

Mohanty, S.R., Kishor, N., Ray, P.K. and Catalo, J.P., 2015. Comparative study of advanced signal processing techniques for islanding detection in a hybrid distributed generation system. *IEEE Transactions on sustainable Energy*, 6(1), pp.122-131.

O’Flynn M., Moriarty, E., 1987, *Linier Systems, Time Domain and Transform Analysis*”, John Wiley & Son, New York

Ogata K., *Teknik Kendali Automatik,* Edisi ke-3, Erlangga, Jakarta.

Robert, M. J., Signal and System, Mc Graw Hill, New York

Simon H., Barry V. V. , 2004, *Signal and Sistem*, John Wiley & Son, New York

Villasenor, R., Kalaidzidis, Y. and Zerial, M., 2016. Signal processing by the endosomal system. *Current opinion in cell biology*, 39, pp.53-60.

Yang, J. and Juntao, C.H.E.N., Huawei Technologies Co Ltd, 2018. *Signal display output method, apparatus, and system*. U.S. Patent Application 10/116,895.

TENTANG PENULIS

Dr. Ing. Dhidik Prastiyanto menyelesaikan S1 dan S2 Teknik Elektro Universitas Gadjah Mada pada tahun 2000 dan 2005. Penulis mendapatkan gelar Doktor tahun 2015 dari Karlsruhe Institute of Technology Germany. Bidang yang ditekuninya adalah sinyal sistem, pengolahan isyarat dan teknologi gelombang mikro. Sejak tahun 2005 menjadi dosen di Jurusan Teknik Elektro Fakultas Teknik Universitas Negeri Semarang.