



REPUBLIK INDONESIA  
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

# SURAT PENCATATAN CIPTAAN

Dalam rangka perlindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan : EC00201974223, 4 Oktober 2019

## Pencipta

Nama : **Dr. Ing. Dhidik Prastiyanto, S.T., M.T, Elma Herdiyanti Putri S.Pd.,**  
Alamat : Jalan Lemponsari Raya No. 56, RT 009 RW 027 Sariharjo  
Ngangklik Sleman Yogyakarta, Yogyakarta, Di Yogyakarta, 55581  
Kewarganegaraan : Indonesia

## Pemegang Hak Cipta

Nama : **Dr. Ing Dhidik Prastiyanto, S.T., M.T, Elma Herdiyanti Putri S.Pd.,**  
Alamat : Jl Lemponsari Raya No. 56, RT 0009 RW 027 Sariharjo  
Ngangklik, Yogyakarta, 9, 55581  
Kewarganegaraan : Indonesia  
Jenis Ciptaan : **Buku**  
Judul Ciptaan : **DIGITAL SIGNAL PROCESSING**  
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia : 11 Juni 2019, di Semarang  
Jangka waktu perlindungan : Berlaku selama hidup Pencipta dan terus berlangsung selama 70 (tujuh puluh) tahun setelah Pencipta meninggal dunia, terhitung mulai tanggal 1 Januari tahun berikutnya.  
Nomor pencatatan : 000157809

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.  
Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA  
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL



Dr. Freddy Harris, S.H., LL.M., ACCS.  
NIP. 196611181994031001

**LAMPIRAN PENCIPTA**

No	Nama	Alamat
1	Dr. Ing. Dhidik Prastiyanto, S.T., M.T	Jalan Lemponsari Raya No. 56, RT 009 RW 027 Sariharjo Ngangklik Sleman Yogyakarta
2	Elma Herdiyanti Putri S.Pd.	Jl. Jatisari Tali Asih Blok JJ No.2 RT 007 RW002 Jatisari Mijen

**LAMPIRAN PEMEGANG**

No	Nama	Alamat
1	Dr. Ing Dhidik Prastiyanto, S.T., M.T	Jl Lemponsari Raya No. 56, RT 0009 RW 027 Sariharjo Ngangklik
2	Elma Herdiyanti Putri S.Pd.	Jl. Jatisari Tali Asih Blok JJ No.2 RT 007 RW002 Jatisari Mijen



# Digital Signal Processing

Buku ini berisi tentang dasar-dasar pengolahan sinyal digital. Konsep filter digital dijelaskan dengan disertai contoh aplikasi dalam berbagai bidang. Pembahasan selanjutnya adalah tentang analisis sinyal dan sistem diskrit. Jenis-jenis sinyal dijelaskan disertai dengan operasi yang mungkin dilakukan antar sinyal tersebut. Tanggapan impulse dan konvolusi diskrit dipaparkan dengan beberapa contoh penerapannya. Untuk melihat sinyal dalam kawasan frekuensi transformasi fourier diskrit dijabarkan dan diterapkan dalam perhitungan spektrum frekuensi dari sinyal. Penerapan Discrete Fourier Transform (DFT) dijabarkan untuk memberikan gambaran implementasinya pada pemrograman komputer. Untuk memahami tentang sistem diskrit dan realisasi transformasi z dijelaskan dan diterapkan pada persamaan filter digital. Selanjutnya dijelaskan tentang struktur filter digital dan bagaimana cara perancangan filter digital. Buku ini dapat digunakan oleh mahasiswa program sarjana teknik elektro maupun masyarakat umum yang ingin belajar tentang pengolahan sinyal digital.

**Dr. Ing. Dhidik Prastiyanto, S.T., M.T.  
Elma Herdiyanti Putri, S.Pd.**

**Digital Signal Processing**

**Dr. Ing. Dhidik Prastiyanto, S.T., M.T.  
Elma Herdiyanti Putri, S.Pd.**

## DIGITAL SIGNAL PROCESSING

**Dr. Ing. Dhidik Prastiyanto, S.T., M.T.  
Elma Herdiyanti Putri, S.Pd.**

**DIGITAL SIGNAL PROCESSING**

**PENULIS**

**Dr.-Ing. Dhidik Prastiyanto, S.T., M.T.  
Elma Herdiyanti Putri, S.Pd.**

**2019**



## **KATA PENGANTAR**

Syukur kami panjatkan atas rahmat dan karunia Allah SWT sehingga penulis dapat menyelesaikan buku Digital Signal Processing. Buku ini dapat dijadikan pedoman bagi mahasiswa program sarjana bidang teknik elektro maupun masyarakat umum yang ingin belajar dan memahami tentang pengolahan sinyal digital. Buku ini dapat diselesaikan atas bantuan dari berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan banyak terimakasih.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam buku ini untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran untuk penyempurnaan buku ini. Akhir kata semoga buku ini bermanfaat dan dapat menjadi pedoman bagi para pembaca.

Semarang, Juni 2019

Penulis

## DAFTAR ISI

HALAMAN SAMBUTAN .....	i
KATA PENGANTAR .....	iii
DAFTAR ISI.....	iv
RINGKASAN .....	vi
BAB I PENDAHULUAN .....	1
I.1 Konsep filter digital.....	1
I.2 Komponen filter digital .....	3
I.3 Gambaran kawasan frekuensi sinyal dan sistem .....	6
I.4 Aplikasi filter digital .....	8
I.5 Penggantian filter analog dengan filter digital .....	9
BAB II ANALISIS SINYAL DAN SISTEM DISKRIT .....	12
II.1 Runtun waktu diskrit .....	12
II.2 Prinsip superposisi untuk sistem linier.....	18
II.3 Runtun tanggapan cuplik satuan .....	20
II.4 Konvolusi diskrit .....	22
II.5 Kriteria stabilitas sistem diskrit.....	26
II.6 Persamaan beda koefisien konstan linier .....	28
BAB III TRANSFORMASI FOURIER SINYAL DISKRIT .....	32
III.1Pendahuluan .....	32
III.2Definisi transformasi fourier .....	32
III.3Sifat-sifat transformasi fourier .....	35
III.4Fungsi magnitude dan fase.....	36
III.5Penggunaan dalam pengolahan sinyal.....	37
III.6Transformasi balik.....	38

BAB IV DISCRETE FOURIER TRANSFORM .....	38
IV.1 Pengertian discrete fourier transform (DFT) .....	38
IV.2 DFT dari runtun waktu diskrit .....	41
IV.3 Karakteristik DFT .....	52
IV.4 Konvolusi sirkular .....	54
BAB V TRANSFORMASI Z .....	59
V.1 Pengertian transformasi z .....	59
V.2 Sifat-sifat transformasi z .....	62
V.3 Fungsi alih filter digital .....	65
V.4 Penggabungan filter .....	68
V.5 Penerapan filter digital dari fungsi alih sistem .....	72
V.6 Bidang z kompleks .....	74
V.7 Daerah konvergensi bidang z .....	78
V.8 Invers transformasi z .....	79
BAB VI Struktur Filter Digital .....	82
VI.1 Persamaan filter .....	82
VI.2 Kategori Filter .....	83
VI.3 Struktur direct form I dan direct form II .....	84
VI.4 Gabungan kaskade .....	89
VI.5 Gabungan paralel filter orde 2 .....	93
VI.6 Struktur filter fase linier .....	96
VI.7 Struktur pencuplikan frekuensi untuk Filter FIR .....	100
VI.8 Perancangan filter IIR .....	108
VI.9 Perancangan filter FIR .....	109



## RINGKASAN

Buku ini berisi tentang dasar-dasar pengolahan sinyal digital. Konsep filter digital dijelaskan dengan disertai contoh aplikasi dalam berbagai bidang. Pembahasan selanjutnya adalah tentang analisis sinyal dan sistem diskrit. Jenis-jenis sinyal dijelaskan disertai dengan operasi yang mungkin dilakukan antar sinyal tersebut. Tanggapan impulse dan konvolusi diskrit dipaparkan dengan beberapa contoh penerapannya. Untuk melihat sinyal dalam kawasan frekuensi transformasi fourier diskrit dijabarkan dan diterapkan dalam perhitungan spektrum frekuensi dari sinyal. Penerapan Discrete Fourier Transform (DFT) dijabarkan untuk memberikan gambaran implementasinya pada pemrograman komputer. Untuk memahami tentang sistem diskrit dan realisasi transformasi  $z$  dijelaskan dan diterapkan pada persamaan filter digital. Selanjutnya dijelaskan tentang struktur filter digital dan bagaimana cara perancangan filter digital. Buku ini dapat digunakan oleh mahasiswa program sarjana teknik elektro maupun masyarakat umum yang ingin belajar tentang pengolahan sinyal digital.

# BAB I

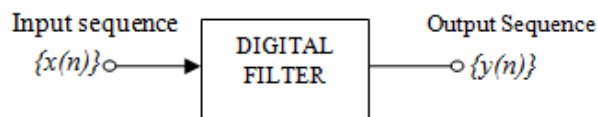
## PENDAHULUAN

Pengolahan sinyal telah digunakan dalam berbagai bidang. Pengolahan sinyal cenderung bergeser dari analog ke digital. Perkembangan teknologi mendorong pengolahan sinyal berkembang sangat pesat. Buku ini secara keseluruhan memberikan landasan bagi mahasiswa untuk mengembangkan penerapan pengolahan sinyal sesuai minatnya. Pada Bab I ini akan dijelaskan konsep filter digital dan komponen-komponen dasarnya. Beberapa aplikasi filter juga dijelaskan secara singkat.

### I.1 Konsep filter digital

Secara umum filter digital diartikan sebagai prosedur numeris atau algoritma yang mengubah runtun yang diberikan menjadi suatu runtun yang mempunyai sifat-sifat yang diinginkan seperti tanpa derau atau distorsi. Seperti gambar 1.1, masukan dilambangkan dengan  $\{x(n)\}$  dan keluaran dilambangkan  $\{y(n)\}$ , dengan  $n$  adalah indeks. Indeks adalah bilangan bulat yang untuk beberapa kasus dapat bernilai dari minus tak berhingga sampai plus tak berhingga

Sifat output tergantung pada aplikasinya. Contohnya pada seperti microphone maka output yang diinginkan adalah sinyal listrik yang mempunyai interferens atau derau latar belakang yang kecil.



Gambar 1.1 Filter digital yang mengubah runtun menjadi  $\{y(n)\}$

Pada aplikasi pengolahan suara maka filter digital dapat digunakan untuk mengurangi redundansi sehingga proses transmisi menjadi lebih efisien.

Runtun input dapat dibangkitkan dengan berbagai cara seperti yang ditunjukkan gambar 1.2. Salah satu cara yang paling sering digunakan adalah metode pencuplikan sinyal kontinu dengan interval pencuplikan yang sama. Jika sinyal kontinu dinyatakan dalam  $x(t)$ , maka nilai sinyal diskrit dinyatakan dengan:

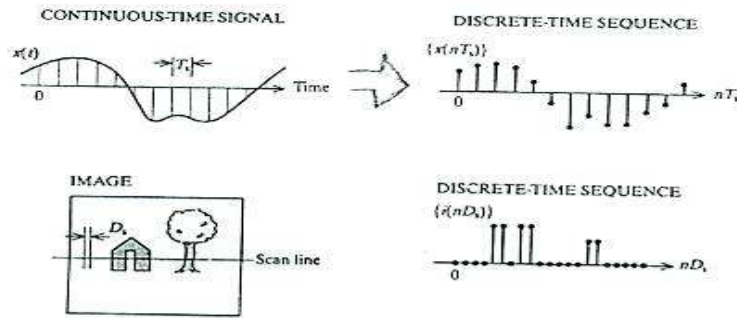
$$x(nT_s) = x(t)_{t=nT_s} \quad (1.1)$$

dengan  $T$  adalah periode sampling yang secara praktis harus lebih kecil minimal setengah kali dibandingkan dengan periode minimum sinyal yang dicuplik. Pada aplikasi pengolahan gambar digunakan garis scanning untuk menghasilkan fungsi intensitas terhadap letak gambar yang dinyatakan dalam  $i(p)$ . Fungsi intensitas ini dapat dicuplik untuk menghasilkan runtun diskrit:

$$i(nD_s) = I(p)_{p=nD_s} \quad (1.2)$$

dengan  $D_s$  adalah interval jarak pencuplikan.

Salah satu aplikasi umum filter digital adalah simulasi sistem fisik. Runtun masukan yang biasanya adalah runtun angka dibangkitkan oleh komputer dan melambangkan sinyal eksitasi  $\{e(n)\}$ . Dalam kasus ini  $\{e(n)\}$  mewakili nilai sesat parameter fisis seperti tegangan, torsi, temperatur dan sebagainya. Runtun ini kemudian diproses untuk menentukan tanggapan sistem yang diwakili oleh  $\{r(n)\}$ .



Gambar 1.2 Proses mendapatkan runtun diskrit.

Untuk menyingkat penulisan maka  $x(nT_s)$  ditulis  $x(n)$ ,  $i(nD_s)$  ditulis  $i(n)$ . Runtun input juga dapat berasal dari kejadian yang semula sudah berbentuk diskrit seperti penjualan harian  $\{m(n)\}$ , atau ukuran berat badan seseorang dalam mingguan  $\{w(n)\}$ .

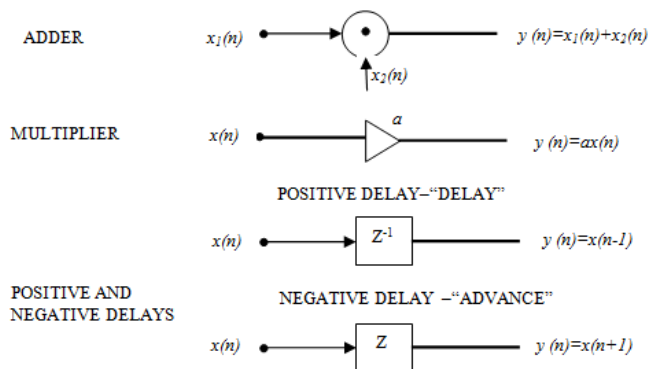
Penerapan filter digital tergantung pada jenis aplikasi dan lingkungan pengguna. Pada bidang pendidikan dan riset filter digital secara khusus diterapkan sebagai program komputer. Jenis komputer yang digunakan berbagai macam seperti PC, minicomputer, atau mainframe. Pada aplikasi industri dan instrumentasi komersial, program filter digital biasanya diterapkan dengan microcomputer yang dapat juga dipakai untuk pengendalian dan pengamatan. Untuk aplikasi kecepatan tinggi atau dalam kapasitas yang besar seperti pada industri otomotif maka filter digital dapat diterapkan dengan sejumlah chip rangkaian terpadu. Rangkaian tersebut menjalankan komputasi dan fungsi yang diperlukan filter digital. Fungsi-fungsi yang sering digunakan dalam filter digital akan dibahas berikut ini.

## I.2 Komponen filter digital

Fiter digital tersusun atas tiga elemen sederhana: *adder*, *multiplier* dan *delay* seperti ditunjukkan gambar 1.3. Penjumlah dan pengali telah banyak digunakan dalam bagian arithmetic logic unit (ALU) dalam komputer. Tunda waktu adalah komponen untuk dapat mengakses runtun

yang telah lalu maupun yang akan datang. Panah kecil menunjukkan arah aliran informasi.

Delay muncul dalam dua bentuk yaitu positif dan negatif. Delay positif atau dikenal lebih singkat sebagai *delay* diterapkan dengan register memori yang dapat menyimpan nilai runtun untuk satu interval cuplikan sekarang yang mungkin digunakan untuk perhitungan selanjutnya. Delay positif pada umumnya dilambangkan dengan kotak berisi huruf  $z^{-1}$ . Delay negative atau lebih populer dengan *advance* atau tunda maju, digunakan untuk melihat harga berikutnya dari suatu runtun dilambangkan dengan kotak berisi  $z$ . Advance secara khusus digunakan untuk aplikasi seperti pengolahan citra yang runtun datanya sudah tersedia pada saat awal pengolahan sehingga piranti tunda maju dapat menyediakan sample data yang selanjutnya pada runtun tersebut. Tunda membuat analisis filter digital menjadi lebih sederhana. Meskipun demikian tunda maju tidak selalu dapat diimplementasikan dalam beberapa aplikasi. Sebagai contoh ketika runtun data didapatkan dengan pencuplikan fungsi waktu, setiap cuplikan biasanya diproses saat diperoleh. Pada kasus ini tunda maju tidak dapat digunakan karena tidak bisa mendapatkan data yang akan datang.



Gambar 1.3 Elemen-elemen dalam filter digital.

Desain filter digital meliputi pemilihan dan pengkombinasian antar elemen dan penentuan harga koefisien pengali.

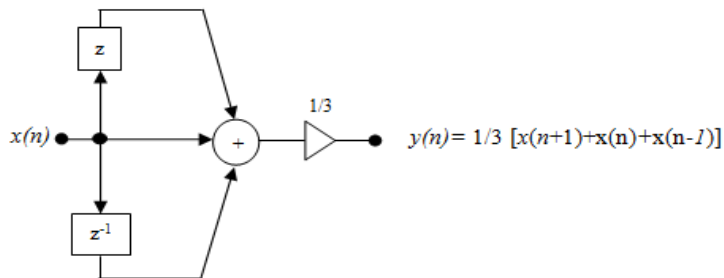
### Contoh 1.1

Tentukan gambar hubungan output  $y(n)$ , dan runtun input  $x(n - 1)$ ,  $x(n)$  dan  $x(n + 1)$ .

$$y(n) = \frac{1}{3} x(n + 1) + \frac{1}{3} x(n) + \frac{1}{3} x(n - 1)$$

Penyelesaian:

Output saat ini  $y(n)$  adalah rerata antara input yang akan datang, sekarang dan sebelumnya. Tunda maju memberikan harga input yang akan datang, sedangkan delay menyimpan harga input yang telah lalu. Gambar hubungan input output dapat dilihat pada gambar 1.4



Gambar 1.4 Hubungan  $y(n)$  dengan  $x(n)$  pada contoh 1.1

Istilah orde dalam sebuah filter menggambarkan jumlah minimum delay dan advance yang digunakan untuk menyusun filter. Pada contoh diatas disebut orde kedua.

### Contoh 1.2

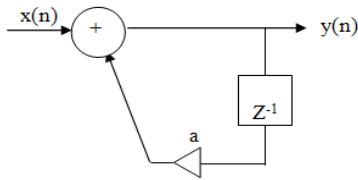
Pertimbangkan hubungan input-output berikut:

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

dengan  $a = \text{konstan}$ .

Penyelesaian:

Dari persamaan tersebut terlihat bahwa output sekarang merupakan input sekarang dan output sebelumnya.

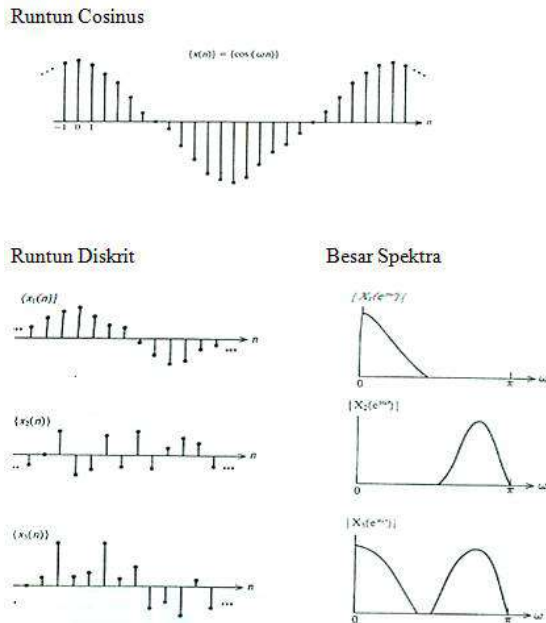


Gambar 1.5 Filter digital hasil implementasi contoh 1.2

Contoh diatas menunjukkan implementasi filter digital untuk sistem feedback. Pada output hanya dapat diterapkan tunda waktu, advance tidak dapat diterapkan.

### I.3 Gambaran kawasan frekuensi sinyal dan sistem

Untuk membahas aplikasi filter digital berikut dibahas tentang analisis kawasan frekuensi.



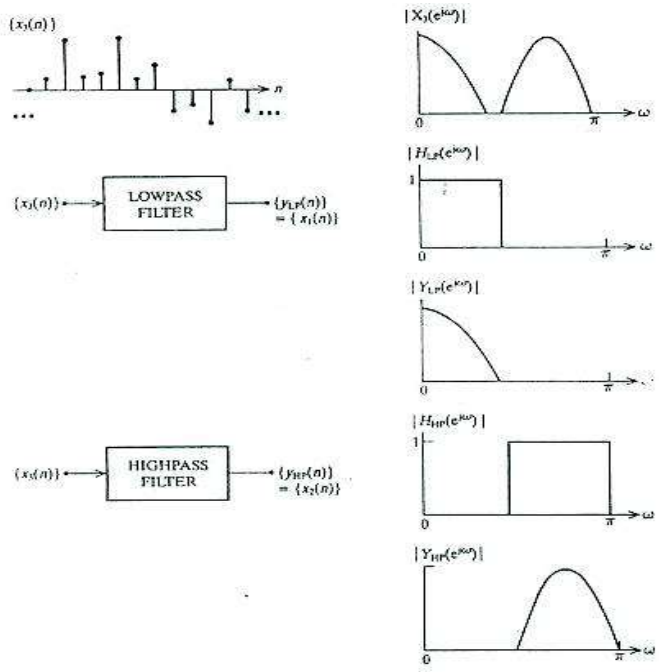
Gambar 1.6 a. Runtun Cosinus b. Gambar runtun diskrit dan spektralnya

Runtun diskrit  $\{x(n)\}$  pada gambar. 1.6 yang paling atas dirumuskan sebagai

$$\{x(n)\} = \{\cos(\omega n)\} \quad (1.3)$$

dengan  $\omega$  adalah frekuensi runtun tersebut dengan satuan radian.  $|x(e^{j\omega})|$  adalah spectrum magnitude suatu runtun. Pada gambar 1.6 diatas digambarkan tiga runtun  $\{x_{1n}\}$  yang mengandung komponen frekuensi rendah, sinyal  $\{x_2\{n\}\}$  yang mengandung komponen frekuensi tinggi dan  $\{X_{3n}\} = \{X_1\{n\}\} + \{X_2\{n\}\}$  yang mengandung kedua komponen frekuensi tersebut.

Salah satu aplikasi filter digital yang sering ditemui adalah pemisahan sinyal berdasar spektrumnya seperti gambar berikut:



Gambar 1.7 Pemulihan isyarat dengan filter.



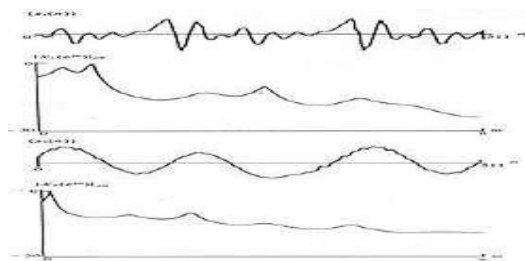
Untuk mendapatkan runtun  $\{x_1(n)\}$  maka runtun  $\{x_3(n)\}$  dilewatkan filter pelewat rendah  $|H_{lp}(e^{j\omega})|$  yang akan melewatkan komponen frekuensi rendah dan menghapus komponen frekuensi tinggi. Untuk mendapatkan runtun frekuensi tinggi  $\{x_2(n)\}$ , maka runtun  $\{x_3(n)\}$  dilewatkan filter pelewat tinggi (*highpass filter*), yang mempunyai tanggapan magnitude  $|H_{hp}(e^{j\omega})|$ . Dua macam tipe filter lagi yaitu *bandpass filter* dan *bandreject filter*.

## I.4 Aplikasi filter digital

Dengan mempelajari pemfilteran secara digital maka kita akan mendapatkan pemahaman tentang pengolahan runtun diskrit. Hal ini sangat penting untuk pengolahan data dengan komputer digital dan untuk penerapan langkah pengolahan sinyal pada aplikasi seperti robotics, sensor cerdas, pemrosesan sinyal seismic, dan aplikasi lain. Filter digital juga sangat berguna dalam pemodelan sistem linier seperti model pemroses suara maupun kanal transmisi. Model seringkali sangat berguna untuk mencari solusi dari permasalahan pada sistem fisis.

### 1.4.1 Pemrosesan suara

Filter digital sangat umum digunakan dalam sistem identifikasi suara. Pertimbangkan dua runtun  $\{x_1(n)\}$  dan  $\{x_2(n)\}$  pada gambar 1.8 berikut:



Gambar 1.8 Sinyal pembicaraan dan spektrumnya runtun  $\{x_1(n)\}$  512 cuplikan berisi suara /a/ dan  $\{x_2(n)\}$  berisi /i/.

Pada gambar 1.8 suara dapat dengan mudah dikenali dengan menghitung spektrum magnitude satu periode. Spektrum  $|x_1(e^{j\omega})|$  dan  $|x_2(e^{j\omega})|$  terdiri dari puncak-puncak yang berkaitan dengan resonansi bentuk vocal yang digunakan untuk membangkitkan suara. Pada pengenalan suara berbagai macam dapat dibedakan berdasarkan lokasi frekuensi puncak-puncak magnitude tersebut.

#### **I.4.2 Simulasi komputer sistem fisis**

Ketika sistem fisis seperti robot sangat kompleks dan sangat mahal untuk dibangun maka seringkali untuk mengetahui kinerja sistem dan sensitivitasnya dibangun model dengan filter digital yang disimulasikan pada komputer.

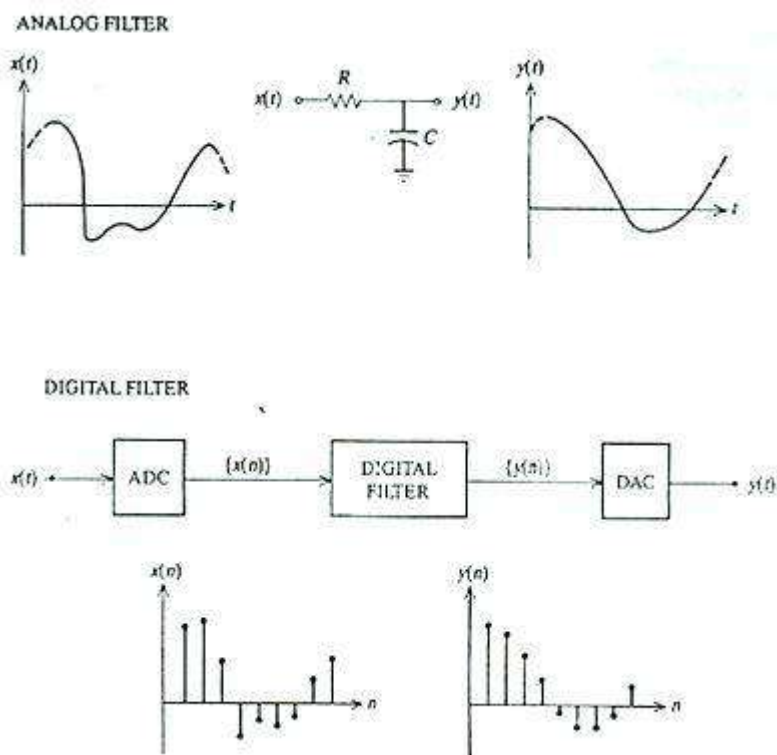
Keuntungan menggunakan simulasi filter digital yaitu yang pertama peneliti mendapatkan data tanpa harus melakukan eksperimen yang mahal dan memakan waktu lama. Yang kedua, simulasi menyediakan parameter sistem dan input yang fleksibel sehingga sangat mudah diganti untuk mendapatkan sistem yang sesuai. Keuntungan yang ketiga yaitu sinyal yang diinginkan dapat diobservasi dengan mudah. Contohnya adalah simulasi sistem komunikasi maupun simulasi sistem lengan robot.

#### **I.5 Penggantian filter analog dengan filter digital**

Filter digital semula diaplikasikan untuk mengganti filter analog. Penggantian ini dilakukan untuk mengatasi beberapa keterbatasan elemen analog resistor R, capacitor C, dan inductor L. Nilai komponen analog berfluktuasi terhadap temperature dan umur. Komponen analog juga memerlukan ukuran yang besar terutama untuk induktor dan kapasitor dengan nilai besar.

Filter digital juga mempunyai keuntungan kemudahan dalam modifikasi nilai komponen. Contohnya koefisien pengali disimpan dalam ROM yang dengan mudah kita modifikasi nilainya. Koefisien juga dapat disimpan dalam memori yang dapat ditulisi dan dibaca kembali sehingga nilai komponen dapat berubah mengikuti masukan yang terkenal dengan *adaptive filters*.

Pengubahan filter analog ke digital dijelaskan dalam gambar 1.9 berikut ini:



Gambar 1.9 Penggantian filter analog ke digital.

### **Soal-soal latihan**

1. Sebutkan aplikasi filter digital yang sering Anda temui.
2. Jelaskan komponen-komponen filter digital.
3. Uji cobakan runtun yang anda bangkitkan sendiri terhadap komponen-komponen filter digital.

## **BAB II**

### **ANALISIS SINYAL DAN SISTEM DISKRIT**

Pada bab ini akan dibahas langkah-langkah untuk menggambarkan perilaku sistem waktu diskrit. Setelah menentukan notasi sinyal diskrit, dijelaskan beberapa runtun diskrit yang penting untuk analisis filter digital. Prinsip superposisi digunakan untuk menentukan persamaan dasar filter digital. Selain itu juga dijelaskan tanggapan cuplik satuan sebagai penjelasan sistem diskrit dalam kawasan waktu. Operasi konvolusi linier berhubungan dengan input, output dan tanggapan cuplik satuan. Persamaan beda koefisien konstan linier dipergunakan untuk analisis dan sintesis filter digital.

#### **II.1 Runtun waktu diskrit**

Pada diktat ini runtun diskrit dilambangkan oleh  $\{x(n)\}$ , atau  $x(n)$ ; untuk  $-N_1 \leq n \leq N_2$ , dengan  $N_1$  dan  $N_2$  bisa bernilai tak berhingga. Seperti telah dijelaskan bahwa waktu diskrit mengacu ke parameter fisis seperti lokasi diskrit untuk aplikasi pengolahan citra ataupun posisi diskrit untuk sensor lengan robot.

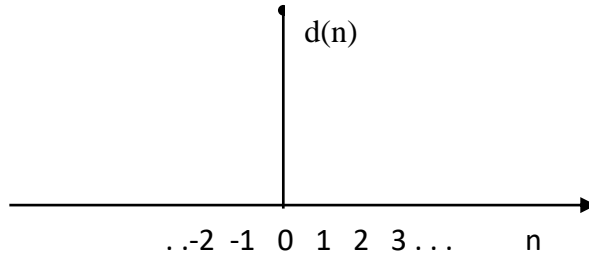
Nilai runtun pada saat waktu  $k$  dinyatakan dengan  $x(k)$ . Runtun yang menjadi pembahasan pada keseluruhan diktat ini dihasilkan oleh teknik pencuplikan fungsi kontinyu dengan interval pencuplikan yang sama. Pada prakteknya tipe runtun dengan interval yang sama adalah yang paling umum digunakan. Berikut ini dijelaskan beberapa runtun yang digunakan dalam proses analisis filter.

#### **Runtun cuplik satuan**

Runtun ini terdiri dari satu elemen tidak nol pada  $n=0$ .

$$d(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases} \quad (2.1)$$

runtun ini seperti yang ditunjukkan gambar 2.1 merupakan runtun yang penting karena secara langsung menandakan efek yang ditimbulkan oleh suatu filter digital.



Gambar 2.1 runtun cuplik satuan.

Runtun cuplik satuan yang tertunda dinyatakan dengan  $\{d(n-k)\}$ , yang mempunyai nilai tak nol pada waktu cuplik  $k$ :

$$d(n-k) = \begin{cases} 1 & :n=0 \\ 0 & :lainnya \end{cases} \quad (2.2)$$

Runtun ini sangat penting untuk alat analisis karena sifat pergeserannya. Nilai elemen suatu runtun pada waktu ke  $k$  bias didapatkan. Nilai runtun  $\{x(n)\}$  pada saat ke  $k$  dapat ditulis sebagai:

$$x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(n-k)x(n) \quad (2.3)$$

Runtun  $d(n-k)$  dapat digunakan untuk memilih elemen tunggal dari suatu runtun secara keseluruhan. Persamaan tersebut sama dengan kebalikannya sehingga runtun cuplik satuan yang mempunyai elemen tak nol pada  $n = k$ :

$$x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(k-n)x(n) \quad (2.4)$$

**Runtun undak satuan.**

Runtun undak satuan dapat dirumuskan sebagai berikut:

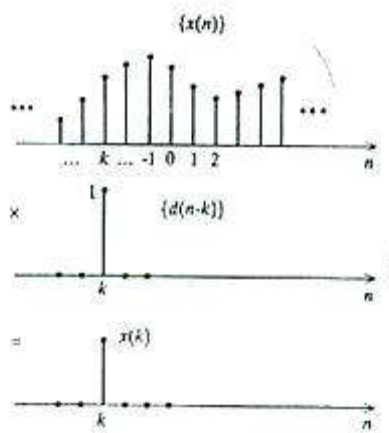
$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases} \quad (2.5)$$

Runtun undak satuan dapat digunakan untuk menentukan titik awal suatu runtun

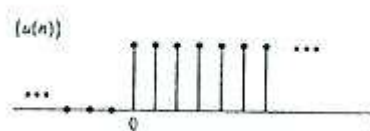
$$x(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases} \quad (2.6)$$

dapat ditulis:

$$x(n) = a^n u(n) \quad \text{semua } n \quad (2.7)$$



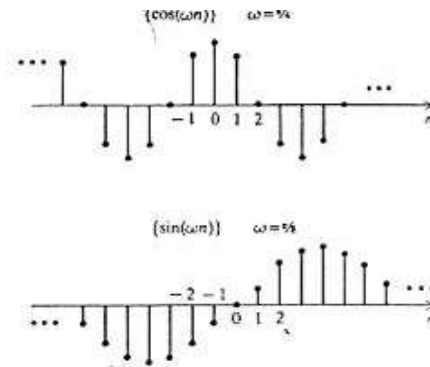
Gambar 2.2 Sifat pergeseran



Gambar 2.3 Runtun undak.

## Runtun sinusoidal

Runtun sinusoidal mempunyai peran yang sangat penting dalam analisis filter kawasan frekuensi. Dengan frekuensi radian  $\omega$ , runtun sinusoidal diskrit  $\{\cos(\omega n)\}$  dan  $\{\sin(\omega n)\}$  dapat dibentuk dengan memberi nilai pada setiap cuplikan  $n$ .



Gambar 2.4 Runtun sinusoidal diskrit

Runtun sinusoidal diskrit penting karena digunakan untuk mencari transformasi fourier untuk sinyal diskrit. Sinusoidal mempunyai sifat yang menarik yang akan dijelaskan sebagai berikut:

Jika  $\omega_0$  berada dalam interval  $(-\pi, \pi)$ , sedangkan  $\omega_1$  berada diluar range ini sebagai contoh:

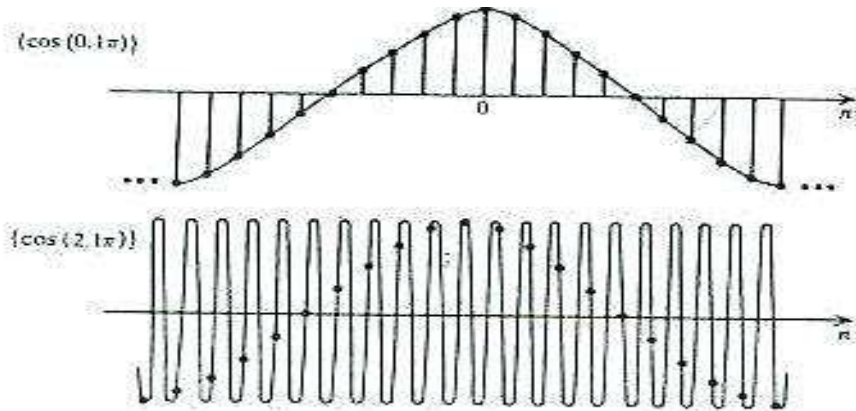
$$\omega_1 = \omega_0 + 2m\pi \quad (2.8)$$

dengan  $\omega$  adalah bilangan bulat tak nol. Harga runtun kosinus pada frekuensi  $\omega_1$  adalah:

$$\{\cos(\omega_1 n)\} = \{\cos((\omega_0 + 2m\pi)n)\} = \{\cos\omega_0 n\} \quad (2.9)$$

Hasil ini didapatkan karena fungsi kosinus periodis  $2\pi$ . Pada gambar berikut ditunjukkan bukti persamaan tersebut untuk  $\omega_0 = 0, 1\pi$  dan  $\omega_1 = 2, 1\pi$





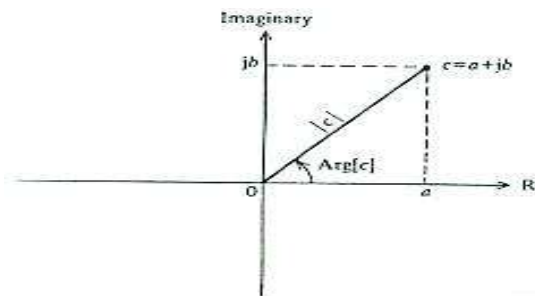
Gambar 2.5 Dua sinyal analog berbeda periode menghasilkan runtun sinusoidal diskrit yang sama.

### Ekspensial kompleks

Bilangan kompleks dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$c = a + jb \quad (2.10)$$

Dengan  $a$  adalah bagian real dan  $b$  adalah bagian imajiner serta  $j = (-1)^{1/2}$ . Representasi  $c$  pada bidang kompleks ditunjukkan gambar 2.6.



Gambar 2.6. Bidang kompleks.

Bentuk lain bilangan kompleks adalah vector kompleks:

$$c = |c| e^{j\text{Arg}[c]} \quad (2.11)$$

dengan  $|c|$  adalah *magnitude* and  $\text{Arg}[c]$  adalah argumen atau fase yaitu sudut anta sumbu real dengan vector tersebut.

$$|c|^2 = a^2 + b^2 \quad (2.12)$$

dan

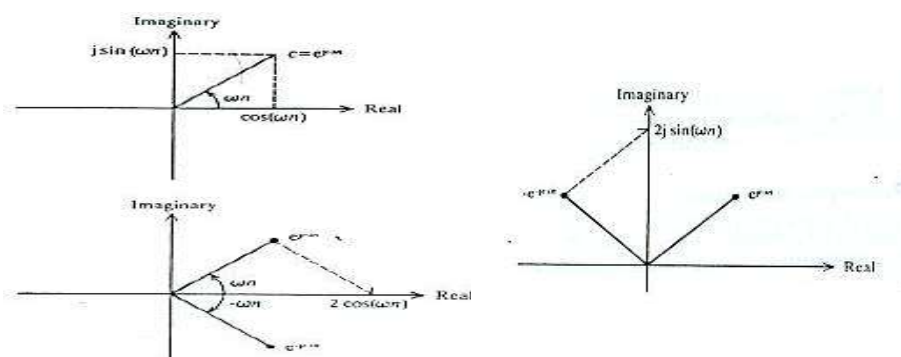
$$\text{Arg}[c] = \arctan [b/a]. \quad (2.13)$$

Runtun eksponensial kompleks penting untuk analisis frekuensi filter digital.

$$\{e^{(a+j\omega)n}\} = \{e^{\sigma n} e^{j\omega n}\} \quad (2.14)$$

dengan  $\sigma$  dan  $\omega$  adalah angka real maka setiap elemen runtun dapat dinyatakan dengan totasi vector kompleks yang mempunyai magnitude  $e^{\sigma n}$  dan fase  $\omega n$ .

Pada saat  $\sigma = 0n$  maka runtun eksponensial dapat dihubungkan dengan runtun sinusoidal dengan identitas Euler seperti yang ditampilkan gambar 2.7 berikut:



Gambar 2.7 Penafsiran identitas Euler pada bidang kompleks.

Hubungan tersebut adalah sebagai berikut :

$$e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j\sin(\omega n) \quad (2.15)$$

dengan

$$\cos(\omega n) = \frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2} \quad (2.16)$$

dan

$$\sin(\omega n) = \frac{e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}}{2j} \quad (2.17)$$

Sifat runtun sinusoidal bahwa semua nilai dapat direpresentasikan dengan  $\omega$  dalam range The property of sinusoidal sequences, that all values can be represented with  $w$  in the range  $(-\pi, \pi)$ , juga berlaku untuk eksponensial. Pada saat  $\omega_1 = \omega_0 + 2m\pi$ , dengan  $m$  bilangan bulat maka:

$$e^{j\omega_1} = e^{j(\omega_0 + 2m\pi)} = e^{j\omega_0} e^{j2m\pi} = e^{j\omega_0} \quad (2.18)$$

Hal ini terjadi karena  $e^{j2m\pi} = 1$  ketika  $m$  bilangan bulat.

## II.2 Prinsip superposisi untuk sistem linier

Filter-filter digital yang dibahas dalam diktat ini masuk dalam kategori sistem linier. Setiap sistem diskrit dapat dipandang sebagai pengubahan runtun input  $\{x(n)\}$  menjadi runtun output  $\{y(n)\}$  dengan transformasi  $G(\bullet)$ . Sistem linier mempunyai dua ciri yaitu:

- Untuk runtun input yang diberikan, perubahan skala amplitudo pada runtun input menghasilkan perubahan skala amplitudo yang sama pada runtun output.
- Jika dua runtun input ditambahkan dan hasil penjumlahan diterapkan pada sistem maka tanggapan sistem akan sama dengan penjumlahan tanggapan

terhadap masing-masing input.

Hal tersebut dapat dinyatakan dalam prinsip superposisi yaitu suatu sistem dengan transformasi  $G\{\bullet\}$ , mempunyai dua runtun masukan  $\{X_1(n)\}$   $\{X_2(n)\}$  yang hasilnya  $\{y_2(n)\} = G\{X_2(n)\}$  dan  $\{y_1(n)\} = G\{x_1(n)\}$ , dengan  $\alpha$  dan  $\beta$  konstan, maka sistem akan linier jika:

$$\begin{aligned} G\{\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)\} &= \alpha G\{x_1(n)\} + \beta G\{x_2(n)\} \\ &= \alpha \{y_1(n)\} + \beta \{y_2(n)\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Berikut disajikan contoh aplikasi prinsip superposisi.

### Contoh 2.1

Buktikan kelinieran transformasi berikut:

$$y(n) = [x(n+1) + x(n) + x(n-1)] / 3 = G\{x(n)\}$$

Penyelesaian :

Untuk mengetes linieritas diterapkan masukan sebagai berikut:

$$\{\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)\}$$

sehingga keluaran transformasi adalah :

$$G\{\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)\}$$

$$= \frac{1}{3} [\alpha x_1(n-1) + \beta x_2(n+1) + \alpha x_1(n) + \beta x_2(n) + \alpha x_1(n+1) + \beta x_2(n-1)]$$

$$= \frac{\alpha}{3} [x_1(n+1) + x_1(n) + x_1(n-1)] + \frac{\beta}{3} [x_2(n+1) + x_2(n) + x_2(n-1)]$$

$$= \alpha \{Y_1(n)\} + \beta \{Y_2(n)\}$$

Persamaan terakhir menunjukkan sifat superposisi sehingga terbukti bahwa sistem linier.

## Contoh 2.2

Tinjaulah apakah sistem berikut linier:

$$\{y(n)\} = G\{x(n)\} = \{x^2(n)\}$$

Penyelesaian:

Dengan menerapkan dua masukan yang terskala maka sistem akan menghasilkan keluaran sebagai berikut:

$$\begin{aligned} G\{\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)\} &= [\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)]^2 \\ &= \alpha^2 x_1^2(n) + \beta^2 x_2^2(n) + 2\alpha\beta x_1(n)x_2(n) \end{aligned}$$

Untuk menjadi sebuah sistem yang linier seharusnya keluarannya adalah  $\alpha^2 x_1^2(n) + \beta^2 x_2^2(n)$  sehingga sistem ini non linier.

## II.3 Runtun tanggapan cuplik satuan

Sifat superposisi penting untuk menurunkan hubungan input output dalam kawasan waktu. Dengan menerapkan runtun cuplik satuan tergeser didapatkan:

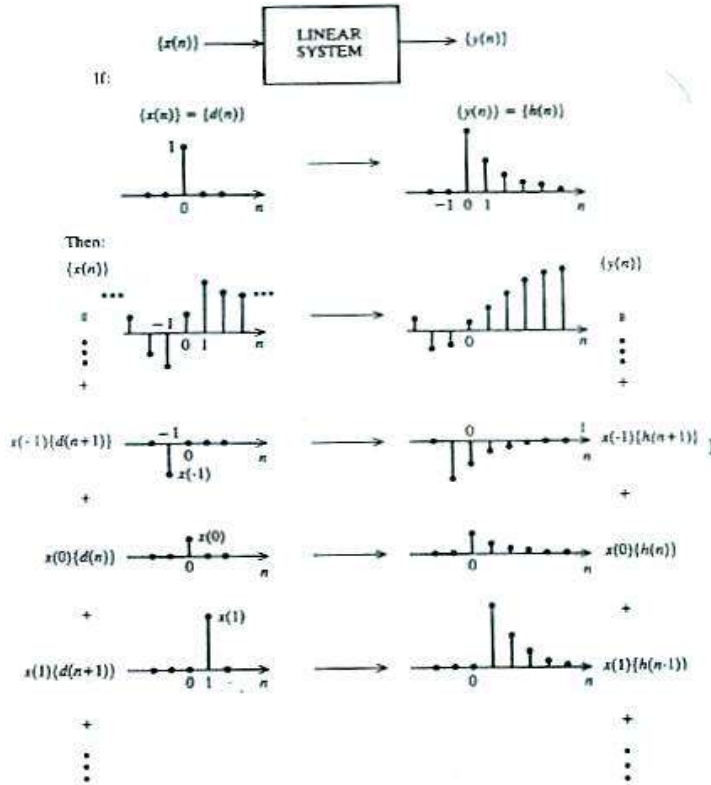
$$\begin{aligned} \{y(n)\} &= G\{x(n)\} = G\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} d(n-k)x(k)\right\} \\ &= G\{.. + x(-1)d(n+1) + x(0)d(n) + x(1)d(n-1) + \dots\} \quad (2.20) \end{aligned}$$

Keluaran sistem ini dapat dilihat sebagai superposisi tanggapan terhadap runtun cuplik satuan yang terskala dan tertunda. Dengan menerapkan superposisi maka persamaan 2.20 menjadi:

$$\begin{aligned} \{y(n)\} &= \dots + x(-1)G\{d(n+1)\} + x(0)G\{d(n)\} + x(1)G\{d(n-1)\} + \dots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)G\{d(n-k)\} \quad (2.21) \end{aligned}$$

$G\{d(n - k)\}$  adalah runtun output ketika sistem mendapatkan masukan runtun cuplik satuan yang mempunyai nilai tak nol saat  $n=k$ . Keluaran ini disebut tanggapan cuplik satuan yang secara singkat ditulis:

$$G\{d(n-k)\} = \{h(n,k)\}. \quad (2.22)$$



Gambar 2.8 Superposisi tanggapan cuplik satuan terskala.

### Contoh 2.3

Tentukan tanggapan cuplik satuan sistem berikut:

$$y(n] = \frac{1}{3}x(n + 1) + \frac{1}{3}x(n - 1)$$

Penyelesaian:

Untuk menentukan tanggapan cuplik satuan  $\{h(n, 0)\}$ , maka masukan diberi nilai  $\{x(n)\} = \{d(n)\}$  dan dengan mencari nilai  $y(n)$  untuk setiap  $n$  didapatkan:

$$n = -2, \quad y(-2) = \{d(-1)+d(-2)+d(-3)\}/3 = 0$$

$$n \leq -2, \quad y(n) = 0, \text{ karena } d(n) = 0 \text{ untuk } n < 0.$$

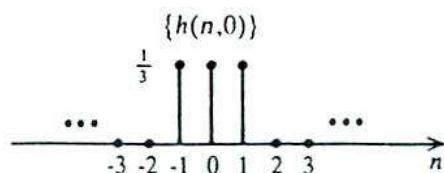
$$n = -1, \quad y(-1) = \{d(0)+d(-1)+d(-2)\}/3 = 1/3$$

$$n = 0, \quad y(0) = \{d(1)+d(0)+d(-1)\}/3 = 1/3$$

$$n = 1, \quad y(1) = \{d(2)+d(1)+d(0)\}/3 = 1/3$$

$$n = 2, \quad y(2) = \{d(3)+d(2)+d(1)\}/3 = 0$$

Dengan demikian  $h(n) = 1/3\{d(n+1) + d(n) + d(n-1)\}$



Gambar 2.9 Tanggapan cuplik satuan sistem pada contoh 2.3.

Untuk mencari tanggapan cuplik satuan dengan  $n$  tidak sama dengan nol misal  $n=1$  maka masukan diset menjadi cuplik satuan tergeser 1 atau  $d(n-1)$ .

## II.4 Konvolusi diskrit

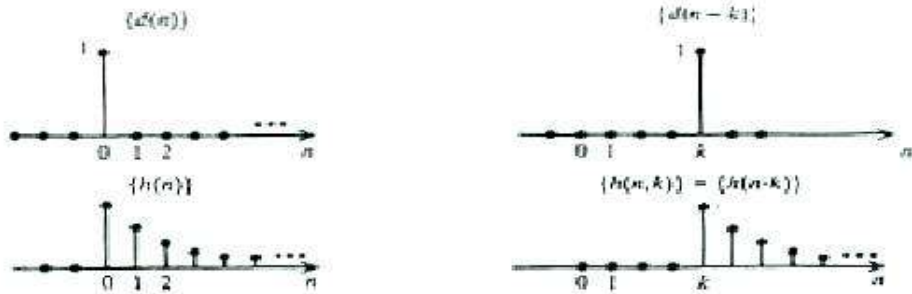
Pada suatu sistem linier tak ubah waktu tidak terjadi perubahan transformasi. Pergeseran input hanya menyebabkan pergeseran output. Jika  $\{y\{n\}\} = G\{x\{n\}\}$ , maka:

$$\{y(n-n_0)\} = G\{x(n-n_0)\} \text{ untuk semua } n_0. \quad (2.21)$$

Pada sistem LTI tanggapan cuplik satuan tidak berubah terhadap waktu.

$$G\{d(n - k)\} = \{h(n,k)\} = \{h(n-k)\} \quad (2.22)$$

Persamaan tersebut menunjukkan pergeseran runtun cuplik satuan hanya akan menggeser tanggapan cuplik satuan. Seperti yang ditunjukkan gambar berikut:



Gambar 2.10 Pergeseran tanggapan cuplik satuan sistem.

Dengan menerapkan persamaan (2.22), maka hubungan input-output sistem LTI dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (2.23)$$

atau secara singkat dapat ditulis

$$\{y(n)\} = \{x(n)\} * \{h(n)\} \quad (2.24)$$

Hal ini lebih dikenal dengan istilah konvolusi sistem. Konvolusi mempunyai beberapa sifat yang penting. Sifat-sifat tersebut mempermudah dalam perhitungan konvolusi.

- *commutative*

$$\{y(n)\} = \{x(n)\} * \{h(n)\} = \{h(n)\} * \{x(n)\} \quad (2.25)$$

sehingga:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \quad (2.26)$$



- *distributive*

$$\{h(n)\} * \{x_1(n) + x_2(n)\} = \{h(n)\} * \{x_1(n)\} + \{h(n)\} * \{x_2(n)\} \quad (2.37)$$

### Contoh 2.4

Hitunglah konvolusi dua runtun berikut:

$$X(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } -1 \leq n \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{dan} \quad h(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } -1 \leq n \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Penyelesaian:

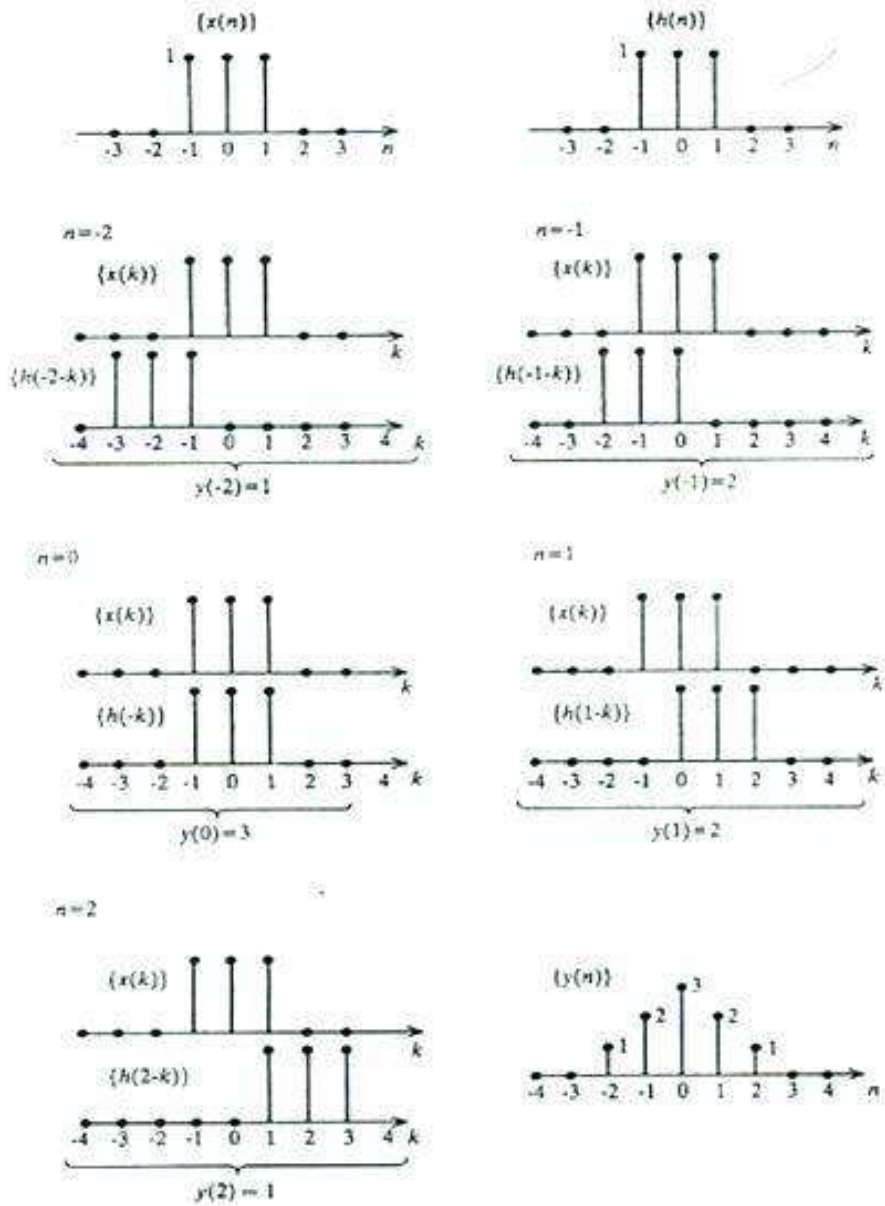
Berdasarkan rumusan konvolusi kita dapatkan

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

dari rumusan tersebut dilakukan beberapa langkah untuk menghitung nilai konvolusi:

1. Mengubah indeks runtun dari  $n$  ke  $k$ . Hal ini sangat mudah dilakukan yaitu dengan mengganti  $n$  dengan  $k$  maka  $n=k$ .
2. Pada runtun  $h(n-k)$  terlihat bahwa runtun  $h(k)$  harus dibalik dan kemudian digeser sejauh  $n$ . Untuk  $n$  positif digeser kanan dan untuk  $n$  negative digeser kiri.
3. Untuk setiap nilai  $n$  dicari harga  $y(n)$  dengan mengalikan runtun  $x(k)$  dengan  $h(n-k)$  untuk semua harga  $k$ .
4. Hal tersebut dilakukan untuk semua nilai  $n$  yang menyebabkan  $y(n)$  mempunyai nilai.

Pada soal diatas nilai  $y(n)$  tidak nol mulai  $n=-2$  secara lengkap dihitung berdasarkan gambar berikut:



Gambar 2.10 Konvolusi pada contoh 2.4 sistem.

## II.5 Kriteria stabilitas sistem diskrit

Pada prakteknya filter digital yang dirancang harus stabil. Sistem dikatakan stabil apabila input yang terbatas menghasilkan output yang terbatas juga. Kriteria kestabilan sistem adalah sebagai berikut:

Sistem stabil jika dan hanya jika faktor faktor stabilitas  $s < \infty$ , dengan  $s$  sebagai berikut:

$$s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \quad (2.28)$$

Stabilitas dinyatakan dengan harga mutlak tanggapan cuplik satuan. Dengan mengambil harga mutlak keluaran sistem maka:

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \quad (2.29)$$

Nilai magnitudo keluaran absolute kurang atau sama dengan penjumlahan:

$$|y(n)| \leq \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \quad (2.30)$$

Oleh karena input adalah terbatas misalkan M, maka:

$$|y(n)| \leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

atau

$$|y(n)| \leq MS \quad (2.31)$$

M dan S adalah nilai terbatas sehingga harga mutlak keluaran juga terbatas.

### Contoh 2.5

Carilah syarat kestabilan filter berikut:

$$y(n) = b_{-1}x(n+1) + b_0x(n) + b_0x(n) + b_1x(n-1)$$

Penyelesaian:

Untuk mengecek kestabilan sistem maka dihitung faktor kestabilan sistem:

$$s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(n)| = |b_{-1}| + |b_0| + |b_1|$$

s akan terbatas saat nilai  $b_{-1}$ ,  $b_0$  dan  $b_1$  terbatas.

### Contoh 2.6

Tentukan syarat kestabilan filter berikut :

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

Penyelesaian:

Filter tersebut mempunyai tanggapan cuplik satuan:

$h(n) = a^n u(n)$ , untuk semua  $n$ . Untuk mengecek kestabilan sistem maka dihitung nilai  $s$  sebagai berikut:

$$s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a|^n \right|$$

Dari persamaan tersebut terlihat bahwa nilai  $s$  akan menjadi tak berhingga saat  $|a| > 1$ . Oleh karena itu diperhitungkan nilai  $s$  untuk  $|a| < 1$ .

$$s = \frac{1}{1-a} \quad \text{untuk } |a| < 1$$

Karena  $s$  terbatas maka sistem stabil untuk  $|a| < 1$ .

## II.6 Persamaan beda koefisien konstan linier

Suatu sistem linier dapat dinyatakan dalam kombinasi linier input dan output sebagai berikut :

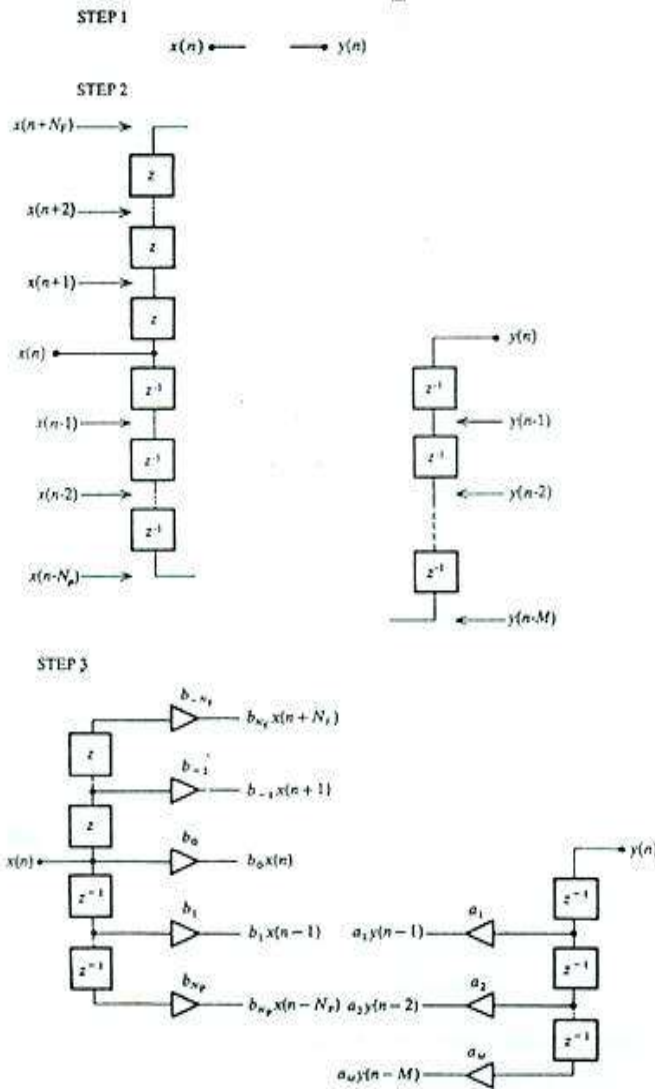
$$y(n) = \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{K=-Nf}^{Np} b_k x(n-k) \quad (2.32)$$

dari persamaan tersebut dapat dilihat bahwa keluaran sekarang  $y(n)$  adalah hasil penjumlahan keluran yang lalu dari  $y(n - 1)$  sampai  $y(n - M)$ , yang dikalikan dengan koefisien feedback  $a_k$ , ditambah penjumlahan input sekarang, yang lalu dan yang akan datang dikalikan dengan koefien umpan maju  $b_k$ .

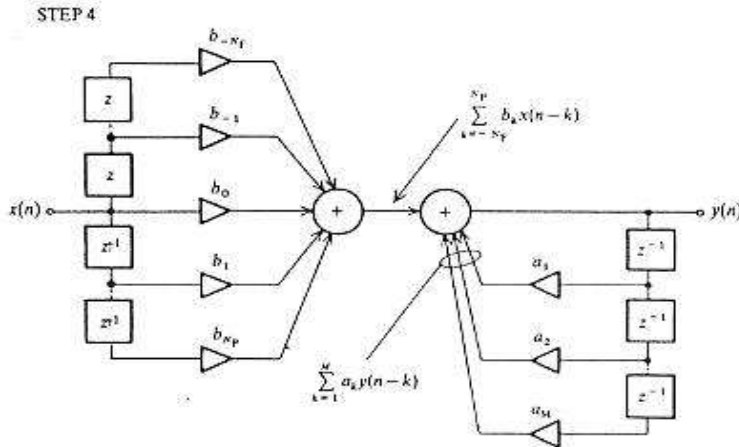
Persamaan beda berguna tidak hanya untuk analisis filter tetapi juga dalam penerapan filter. Penerapan filter dari persamaan beda mengikuti langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menggambarkan dua titik di kiri dan dikanan yang merupakan titik input dan titik output.
2. Untuk mendapatkan akses terhadap nilai input dan output maka dihubungkan elemen delay ke input dan output. Untuk mendapatkan nilai input yang akan datang maka elemen advance dihubungkan dengan input.
3. Pengali dihubungkan dengan keluaran delay dan advance untuk mendapatkan hasil perkalian yang diinginkan.
4. Langkah terakhir yaitu menghubungkan keluaran dari pengali dengan dua buah adder. Adder yang sebelah kiri digunakan untuk menjumlah bagian input dan yang sebelah kanan menjumlah bagian yang terhubung dengan output.

Keempat langkah tersebut dapat dilihat pada gambar 2.11 dan 2.12. Langkah satu sampai 3 pada gambar 2.11. Langkah keempat pada gambar 2.12



Gambar 2.11 Langkah 1-3 untuk mengimplementasikan filter dari persamaan beda sistem



Gambar 2.12 Langkah terakhir untuk mengimplementasikan filter dari persamaan beda sistem

Untuk lebih jelasnya disajikan contoh berikut:

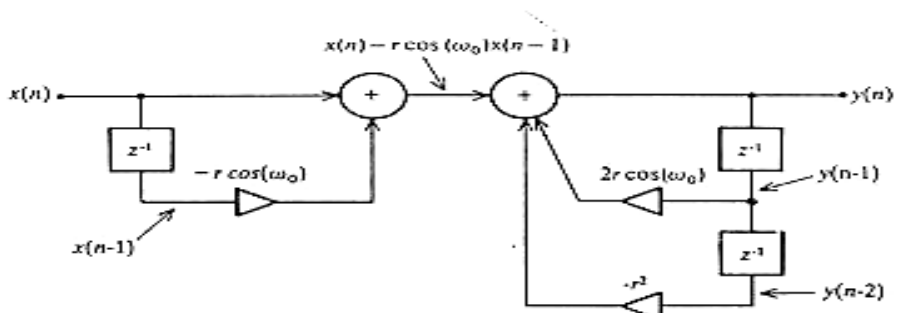
### Contoh 2.7

Gambarkan filter dari persamaan beda sebagai berikut:

$$y(n) = 2r \cos(\omega_0) y(n-1) - r^2 y(n-2) + x(n) - r \cos(\omega_0) x(n-1)$$

Penyelesaian :

Filter digital dapat diterapkan secara langsung dari persamaan beda dengan mengikuti langkah-langkah yang telah dijelaskan.



Gambar 2.13 Implementasi filter dari persamaan beda contoh 2.7

1. Tuliskan dalam notasi vector kompleks
  - a.  $1+e^{-j\theta}$
  - b.  $(1+ja)/(1+jb)$
2. Tentukan tanggapan cuplik satuan persamaan berikut:
  - a.  $y(n) = 5x(n-3) + 2x(n-1) + x(n)$
  - b.  $2y(n) = y(n-1) + 0.5x(n) + x(n-1)$
3. Tentukan konvolusi diskrit antara dua runtun berikut:
  - a.  $x(n) = 2d(n-2) + d(n)$                        $h(n) = u(n)-u(n-4)$
  - b.  $r(n) = 2\{u(n+1) - u(n-2)\}$                        $h(n) = u(n-1)-u(n-3)$
4. Tinjaulah apakah sistem berikut stabil dan kausal serta linier.
  - a.  $G_1(n) = a(x(n-n_0) + bx(n-n_0))$
  - b.  $G_2(n) = x(n)x(n-n_0)$
5. Gambarkan implementasi filter dari persamaan beda berikut:
  - a.  $4y(n-2) + 3y(n-1) + 2y(n) = 2x(n+1) + 3x(n) + 5x(n-2)$
  - b.  $c y(n) = a y(n-1) + b x(n+1) - d x(n-1)$



## BAB III

### TRANSFORMASI FOURIER SINYAL DISKRIT

#### III.1 Pendahuluan

Pada beberapa aplikasi pengolahan sinyal untuk membedakan karakteristik sinyal dan filter lebih mudah dilakukan dalam kawasan frekuensi. Bab ini akan menggambarkan perilaku sinyal dan sistem diskrit dalam kawasan frekuensi. Alat analisis yang dipergunakan adalah transformasi fourier. Ketika transformasi fourier diterapkan pada tanggapan cuplik satuan maka didapatkan fungsi alih sistem. Sedangkan ketika diterapkan pada sinyal maka didapatkan spektrum sinyal.

#### III.2 Definisi Transformasi Fourier

Analisis kawasan frekuensi menggunakan runtun sinusoidal  $\{\cos(\omega n)\}$  dan  $\{\sin(\omega n)\}$  atau lebih singkatnya ditulis dalam  $e^{j\omega n}$ . Suatu sistem LTI yang mendapat input  $\{x(n)\} = e^{j\omega_0 n}$  maka keluarannya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega_0(n-k)} \\ &= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega_0 k} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dengan melihat persamaan diatas maka  $H(e^{j\omega_0})$  dapat dirumuskan sebagai berikut:

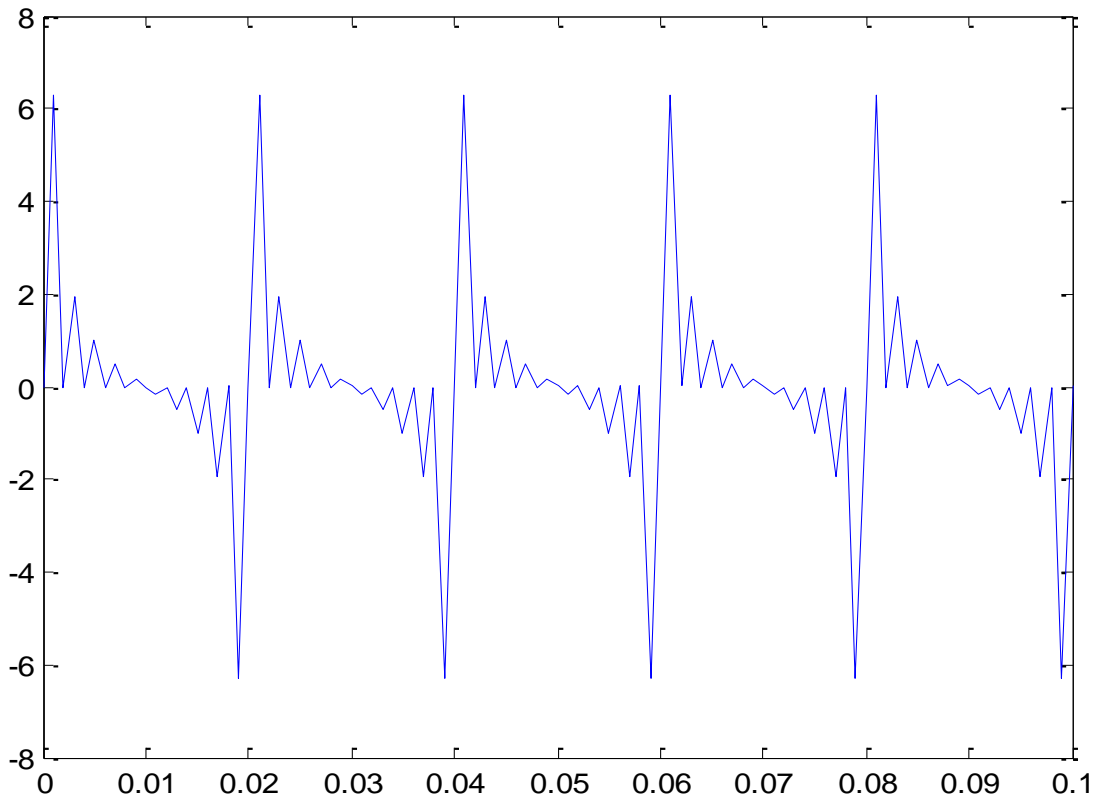
$$H(e^{j\omega_0}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega_0 k} = |H(e^{j\omega_0})| \exp\{j\text{Arg}[H(e^{j\omega_0})]\} \quad (3.2)$$

Dengan generalisasi terhadap semua frekuensi  $\omega$  maka didapatkan persamaan yang merupakan rumusan transformasi fourier:

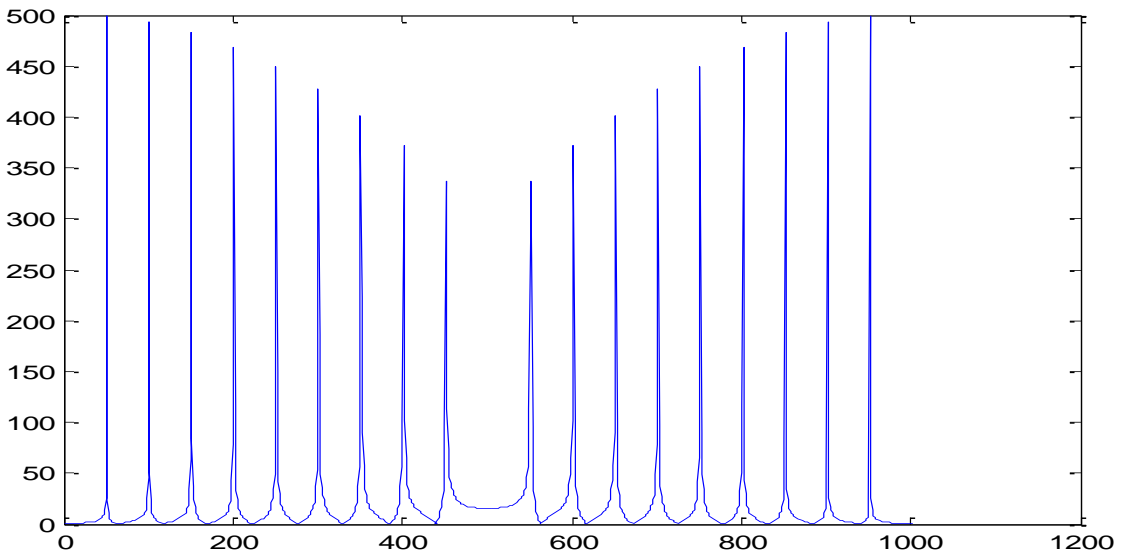
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad (3.3)$$

Hasil transformasi fourier tanggapan cuplik satuan adalah fungsi alih sistem.

Berikut disajikan gambar sinyal kontinyu dan spektrumnya :



Gambar 3.1 Sinyal dengan frekuensi utama 50 Hz



Gambar 3.2 Sinyal dalam kawasan frekuensi

Jika transformasi fourier diterapkan pada sinyal diskrit  $\{x(n)\}$  maka akan menghasilkan spectrum sinyal:

$$X(e^{j\omega_0}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (3.4)$$

### Contoh 3.1

Suatu sistem mempunyai tanggapan cuplik satuan sebagai berikut:

$$h(n) = \{u(n+1) - u(n-2)\}/3$$

Carilah fungsi alih sistem!

Penyelesaian:

Tanggapan cuplik satuan diatas mempunyai nilai 1/3 pada  $n = -1, 0$  dan  $1$ .

Dengan menerapkan transformasi Fourier maka didapatkan:

$$H(e^{j\omega_0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-1}^1 (1/3).e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega_0}) = e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega} \quad 34$$

Berdasarkan identitas Euler:

$$e^{j\alpha} + e^{-j\alpha} = 2 \cos \alpha$$

maka fungsi alih sistem adalah sebagai berikut:

### III.3 Sifat-sifat transformasi Fourier

Transformasi Fourier mempunyai beberapa sifat yang penting dan sering digunakan dalam pemecahan masalah transformasi. Sifat-sifat tersebut antara lain:

- Linieritas

Aplikasi sifat superposisi pada sistem berikut:

$$\{y(n)\} = \{ax_1(n) + bx_2(n)\}$$

Transformasi Fourier sistem tersebut menghasilkan:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega_0}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ax_1(n) + bx_2(n)\}e^{-j\omega n} \\ &= a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-j\omega n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)e^{-j\omega n} \\ &= aX_1(e^{j\omega}) + bX(e^{j\omega}) \end{aligned} \tag{3.5}$$

- Periodis

Transformasi Fourier adalah fungsi periodis dengan periode  $2\pi$ .

$$\begin{aligned} H(e^{j(\omega+2k\pi)}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j(\omega+2k\pi)n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} e^{-j2kn\pi} \end{aligned}$$

Secara langkah sifat-sifat transformasi Fourier yang penting disajikan dalam tabel 3.1.

**Tabel 3.1 Sifat-sifat Transformasi Fourier**

Sifat-sifat	Rumusan
1. Linieritas	Jika $\{y(n)\} = \{x_1(n)\} + \{x_2(n)\}$ maka $Y(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) + X_2(e^{j\omega})$
2. Periodis	$H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2k\pi)})$
3. Delay	Jika $\{y(n)\} = \{x(n-n_0)\}$ maka $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$
4. Konvolusi	Jika $\{y(n)\} = \{x_1(n)\} * \{x_2(n)\}$ maka $Y(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) X_2(e^{j\omega})$
5. Hasil kali	Jika $\{y(n)\} = \{x_1(n)\} \{x_2(n)\}$ maka $Y(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})$

### III.4 Fungsi Magnitude dan Fase

Transformasi fourier menghasilkan spektrum ataupun fungsi alih sistem yang kompleks untuk itu  $H(e^{j\omega})$  dapat dinyatakan dalam notasi vector kompleks sebagai berikut:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \exp\{j\text{Arg}[H(e^{j\omega})]\} \quad (3.6)$$

Apabila  $H(e^{j\omega})$  menyatakan fungsi alih system maka secara umum  $|H(e^{j\omega})|$  disebut sebagai tanggapan magnitude dan  $\text{Arg} |H(e^{j\omega})|$  disebut sebagai tanggapan fase. Apabila diterapkan pada sinyal maka  $|X(e^{j\omega})|$  adalah spektrum magnitude sedangkan  $\text{Arg} X(e^{j\omega})$  adalah spektum fase. Besarnya tanggapan magnitude atau spektrum magnitude adalah sebagai berikut:

$$|H(e^{j\omega})| = (H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}))^{1/2} \quad (3.7)$$

dengan  $H^*(e^{j\omega})$  adalah konjugat kompleks. Untuk tanggapan atau spektrum fase dinyatakan dengan:

$$\text{Arg}[H(e^{j\omega})] = \arctan[ H_I(e^{j\omega}) / H_R(e^{j\omega})] \quad (3.8)$$

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut:

### Contoh 3.2

Carilah tanggapan magnitude dan tanggapan fase fungsi alih berikut:

$$H(e^{j\omega}) = (1+2\cos \omega)/3$$

Penyelesaian:

Karena fungsi sistem diatas bernilai real maka:

$$|H(e^{j\omega})| = ((1+2\cos \omega)/3)^2)^{1/2}$$

$$|H(e^{j\omega})| = |(1+2\cos \omega)/3|$$

sedangkan tanggapan fasenya

$$\text{Arg}[H(e^{j\omega})] = \begin{cases} 0 & \text{ketika } H(e^{j\omega}) > 0 \\ \pm\pi & \text{ketika } H(e^{j\omega}) < 0 \end{cases}$$

### III.5 Penggunaan dalam pengolahan Sinyal

Transformasi Fourier mempunyai kegunaan utama untuk menyederhanakan fungsi konvolusi dalam kawasan waktu menjadi fungsi perkalian pada kawasan frekuensi:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) \quad (3.9)$$

Persamaan tersebut menunjukkan bahwa spektrum masukan  $X(e^{j\omega})$  diubah dengan operasi perkalian  $H(e^{j\omega})$  untuk menghasilkan spektrum keluaran  $Y(e^{j\omega})$ . Persamaan magnitude dan fasenya adalah sebagai berikut:

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| |X(e^{j\omega})| \quad (3.10)$$

dan

$$\text{Arg} [Y(e^{j\omega})] = \text{Arg} [H(e^{j\omega})] = \text{Arg} [X(e^{j\omega})] \quad (3.11)$$

Dengan demikian spektrum magnitude adalah hasil perkalian spektrum input dan tanggapan magnitude filter sedangkan spektrum fase keluaran adalah hasil perkalian spektrum fase input dan tanggapan fase filter.

### III.6 Transformasi Balik

Transformasi fourier balik digunakan untuk mendapatkan tanggapan cuplik satuan dari fungsi alih sistem. Invers juga berguna untuk menentukan runtun keluaran diskrit dari spektrum keluaran. Rumusan transformasi Fourier balik adalah:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.12)$$

Fourier balik juga mudah dilakukan dengan melihat kembali definisi transformasi Fourier:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} \quad (3.13)$$

#### Contoh 3.3

Carilah transformasi Fourier invers dari :

$$H(e^{j\omega}) = (1+2\cos \omega)/3$$

Penyelesaian :

Dengan menerapkan identitas Euler didapatkan :

$$H(e^{j\omega}) = (e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega})/3$$

Kita ingat bahwa  $h(n)$  adalah koefisien dari  $e^{-j\omega n}$  maka dengan melihat fungsi alih tersebut dapat kita tentukan bahwa :

$$h(-1) = h(0) = h(1)$$

sehingga,  $h(n) = d(n-1) + d(n) + d(n+1)$

### Soal-soal latihan

1. Carilah transformasi fourier dari tanggapan cuplik satuan berikut:
  - a.  $h(n) = u(n+3) - u(n-2)$
  - b.  $h(n) = r^n \cos(\omega n) u(n)$
2. Tentukan tanggapan magnitude dan tanggapan fase dari :
  - a.  $h(n) = d(n-1) + d(n) + d(n+1)$
  - b.  $h(n) = r^n \cos(\omega n) u(n)$
3. Tentukan Transformasi Fourier invers dari:
  - a.  $H(e^{j\omega}) = (1 - ae^{-j\omega})^{-1}$
  - b.  $|H(e^{j\omega})| = [(20 + 16 \cos(2\omega))]^{1/2}$  dengan  $\text{Arg}|H(e^{j\omega})| = \text{arc tan}\{(-\sin(2\omega))/(2 + \cos(2\omega))\}$
4. Tentukan fungsi alih dan gambarkan tanggapan magnitude dan fase dari persamaan beda berikut:
  - a.  $y(n) = x(n) + x(n-N)$  dengan  $N=4$
  - b.  $y(n) = 2r \cos(\theta) y(n-1) + r^2 y(n-2) + x(n)$  dengan  $\theta = \pi/4$  dan  $r=0.9$



## **BAB IV**

### **DISCRETE FOURIER TRANSFORM**

Transformasi fourier diskrit (DFT) , yang dinyatakan dengan  $\{H(k)\}$  membuat transformasi fourier  $H(e^{j\omega})$  dapat dievaluasi pada komputer digital. Runtun bernilai kompleks didapat dengan pencuplikan satu periode Transformasi Fourier pada sejumlah frekuensi yang terbatas. DFT digunakan untuk menentukan komposisi frekuensi suatu sinyal untuk dapat melakukan analisis spektral sinyal. DFT juga dapat digunakan untuk melaksanakan operasi pemfilteran pada kawasan frekuensi. Pada bab ini dibahas tentang definisi DFT dan Inverse DFT (IDFT) dan karakteristiknya. DFT dapat diterapkan secara langsung pada tipe filter kausal dan finite, sedangkan untuk filter non kausal dan infinite muncul kesulitan-kesulitan. Untuk prosedur komputasi yang lebih efisien dijelaskan tentang algoritma fast fourier transform (FFT).

#### **IV.1 Pengertian Discrete Fourier Transform (DFT)**

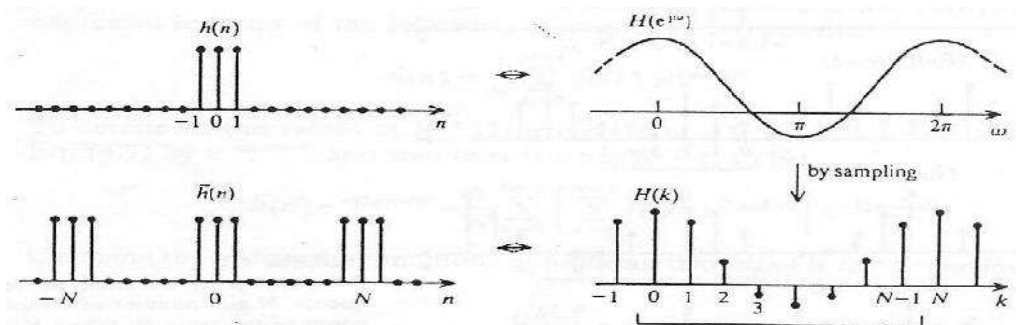
DFT adalah runtun frekuensi diskrit berdurasi terbatas yang didapat dengan pencuplikan transformasi Fourier satu periode. Pencuplikan dilakukan pada:

$$\omega_k = 2\pi k / N \text{ untuk } 0 \leq k \leq N-1 \quad (4.1)$$

Jika  $\{h(n)\}$  adalah runtun diskrit dengan Transformasi Fourier  $H(e^{j\omega})$ , maka DFT,  $\{H(k)\}$  adalah sebagai berikut:

$$H(k) = H(e^{j\omega}) \quad \omega = \omega_k = 2\pi k/N \quad \text{untuk } 0 \leq k \leq N - 1 \quad (4.2)$$

Untuk lebih jelasnya disajikan gambar 4.1.  $H(e^{j\omega})$  dicuplik dengan perioda sampling  $\omega_s = 2\pi / N$ , maka runtun waktu diskrit  $\{h(n)\}$  menjadi periodik dengan periode  $2\pi / \omega_s = N$ .



Gambar 4.1 Periodisasi runtun  $h(n)$  ketika spectrum dicuplik dengan  $N=8$  Pada  $0 \leq \omega \leq 2\pi$ .

Sinyal  $\{\bar{h}(n)\}$  pada gambar diatas dapat dinyatakan sebagai:

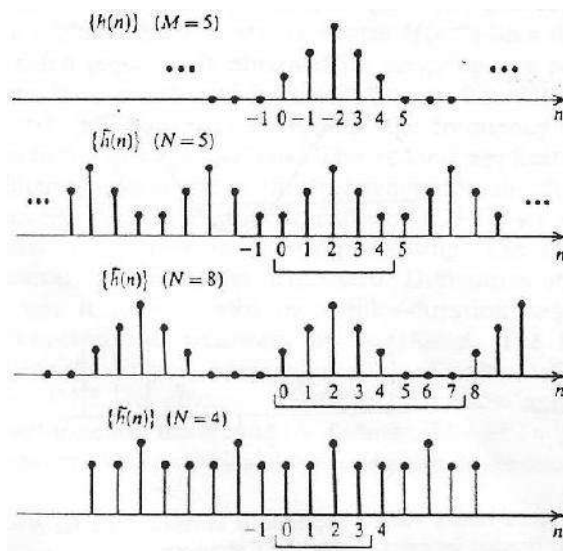
$$\bar{h}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n + mN) \quad (4.3)$$

Runtun  $\bar{h}(n)$  adalah runtun  $\{h(n)\}$  yang periodis dengan periode sama dengan periode pencuplikan spektrum yaitu  $N$ . Nilai  $N$  bebas dipilih berhubungan dengan jumlah cuplikan  $H(e^{j\omega})$  pada  $0 \leq \omega < 2\pi$ . Akan tetapi pemilihan nilai  $N$  harus hati-hati karena berhubungan dengan periode  $\{h(n)\}$ . Berikut gambaran pemilihan

nilai  $N$ . Runtun  $\{h(n)\}$  adalah runtun kausal finite yang mengandung  $M$  cuplikan. Jika  $M \leq N$ , maka:

$$\bar{h}(n) = \begin{cases} h(n) & \text{untuk } 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{untuk } M \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (4.4)$$

Hal penting adalah bahwa runtun berdurasi terbatas  $h(n)$ ,  $0 \leq n \leq M-1$ , dapat diperoleh kembali dari periode pertama  $\{\bar{h}(n)\}$ . Sedangkan titik titik selain itu dalam satu periode  $\{\bar{h}(n)\}$  dan  $kM \leq n \leq k(N-1)$  untuk  $k$  bilangan bulat adalah nol.



Gambar 4.2 Hubungan durasi runtun  $M$  dan jumlah cuplikan spektrum  $N$ .

Jika  $M > N$  maka durasi  $\{h(n)\}$  lebih panjang daripada  $\{h(n)\}$  sehingga akan mengakibatkan overlap seperti yang ditunjukkan

gambar 4.2. Keadaan yang sering disebut sebagai aliasing ini menyebabkan error ketika dilakukan pengembalian  $\{h(n)\}$  dari periode pertama  $\{\bar{h}(n)\}$ . Untuk mengatasi aliasing  $H(e^{j\omega})$  harus dicuplik paling sedikit dua kali elemen  $\{h(n)\}$  pada  $0 \leq \omega < 2\pi$  atau  $N \geq 2M$ .

## IV.2 DFT dari Runtun Waktu Diskrit

Runtun periodik  $\{h(n)\}$  dapat dinyatakan dalam ekspansi deret Fourier:

$$\bar{h}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{H}(k) e^{j2\pi kn/N} \quad (4.5)$$

dengan  $[H\{k\}]$  adalah himpunan koefisien-koefisien kompleks yang harus ditentukan. Oleh karena runtun eksponensial kompleks diskrit  $(e^{j2\pi kn/N})$  periodis dengan periodis dengan periode. Runtun tersebut hanya mempunyai sejumlah runtun yang berbeda terbatas yaitu  $e^{2\pi kn/N}$ , untuk  $0 \leq k \leq N-1$ . Untuk menunjukkan hal ini pertimbangkan frekuensi diluar range  $0 \leq k \leq N-1$  misalkan  $e^{j2\pi(k+N)n/N}$  maka:

$$e^{j2\pi(k+N)n/N} = e^{j2\pi kn/N} e^{j2\pi n} = e^{j2\pi kn/N}$$

yang identik dengan  $e^{j2\pi kn/N}$ . Dengan demikian hanya sejumlah komponen frekuensi yang terbatas N diikuti dalam penjumlahan  $\bar{h}(n)$ :

$$\bar{h}(n) = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} \overline{H(k)} e^{j2\pi nk/N} \quad (4.7)$$

Untuk menentukan nilai  $H(k)$ , pada  $0 \leq k \leq N - 1$ , persamaan (4.7) dikalikan dengan  $e^{-j2\pi nr/N}$  dan dijumlah saat  $0 \leq n \leq N - 1$ , didapatkan:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \bar{h}(n) e^{-j2\pi nr/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \overline{H(k)} e^{j2\pi nk/N} \right] e^{-j2\pi nr/N} \quad (4.8)$$

dengan mengubah urutan penjumlahan maka

$$\sum_{n=0}^{N-1} \bar{h}(n) e^{-j2\pi nr/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{H(k)} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} \overline{H(k)} e^{j2\pi n(k-r)/N} \right] \quad (4.9)$$

penjumlahan tersebut dapat dievaluasi dengan rumusan penjumlahan geometrik:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(k-r)/N} = \frac{1 - e^{j2\pi(k-r)}}{1 - e^{j2\pi(k-r)/N}} \quad (4.10)$$

Untuk Nilai  $(k - r)$  adalah bilangan integer maka pembilang adalah nol untuk semua harga  $k$  dan  $r$ . sedangkan untuk  $k = r + mN$  dengan  $m$  adalah bilangan bulat maka penyebut juga nol. Dengan teori L Hospital maka penjumlahan saat suatu nilai  $N$  adalah bernilai 1 sehingga:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(k-r)/N} = \begin{cases} N & \text{untuk } k = r + mN \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases} \quad (4.11)$$

Oleh karena  $k$  terletak pada daerah 0 sampai  $N - 1$  seperti pada pers (4.9), dapat diterapkan  $k = r$ , atau  $m = 0$  sehingga menghasilkan  $H(r)$ .

$$\bar{H}(r) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{h}(n) e^{-j2\pi n(k-r)/N} \quad (4.12)$$

dengan mengganti  $k = r$  maka didapatkan  $\bar{H}(k)$ .

Berikut hubungan transformasi fourier dengan runtun awalnya  $\{h(n)\}$ . Jika  $\bar{h}(n)$  adalah kausal dan berdurasi terbatas yang mengandung  $M$  cuplikan maka:

$$\bar{H}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} \bar{h}(n) e^{-j\omega n} \quad (4.13)$$

Durasi  $\{h(n)\}$  dapat diperpanjang dari  $M$  menjadi  $N$  cuplikan dengan menerapkan sejumlah zero yang tepat karena komponen zero tidak memberikan pengaruh apapun maka:

$$\bar{H}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{h}(n) e^{-j\omega n} \quad (4.14)$$

Pencuplikan  $H(e^{j\omega})$  dengan jarak  $N$  yang sama pada  $0 \leq \omega < 2\pi$  menghasilkan runtun:

$$H(k) = H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j2\pi n/N} \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (4.15)$$

Oleh karena jumlah titik cuplikan pada  $N$  adalah sama dengan jumlah komponen runtun aslinya maka  $\bar{h}(n) = h(n)$  untuk  $0 \leq n \leq N-1$ . Hanya nilai pertama  $N$  yang diperlukan pada persamaan (4.12). Dengan membandingkan (4.15) dengan (4.12), maka  $H(k) = \bar{H}(r)$ , untuk  $0 \leq k \leq N - 1$ . dengan substitusi ke persamaan (4.7) didapatkan:

$$\bar{h}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j2\pi nk/N} \quad (4.16)$$

Dengan merangkum hasil-hasil diatas didapatkan hubungan DFT sebagai berikut:

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{h}(n) e^{-j2\pi nk/N} \quad \text{untuk } 0 \leq k \leq N - 1 \quad (4.17)$$

sedangkan invers DFT adalah sebagai berikut:

$$\bar{h}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j2\pi nk/N} \quad (4.18)$$

Persamaan (4.17) dan (4.18) adalah dasar algoritma komputr untuk melaksanakan DFT dan dapat langsung diterapkan pada runtun kausal finite. Untuk mendapatkan lebih banyak titik pada DFT dapat dilakukan dengan menambahkan elemen nol pada durasi  $\{h(n)\}$  yang disebut padding. Untuk lebih jelasnya tentang DFT disajikan contoh berikut:

### Contoh 4.1

Hitung DFT dengan  $N=3$  untuk fungsi sistem berikut:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{untuk } 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

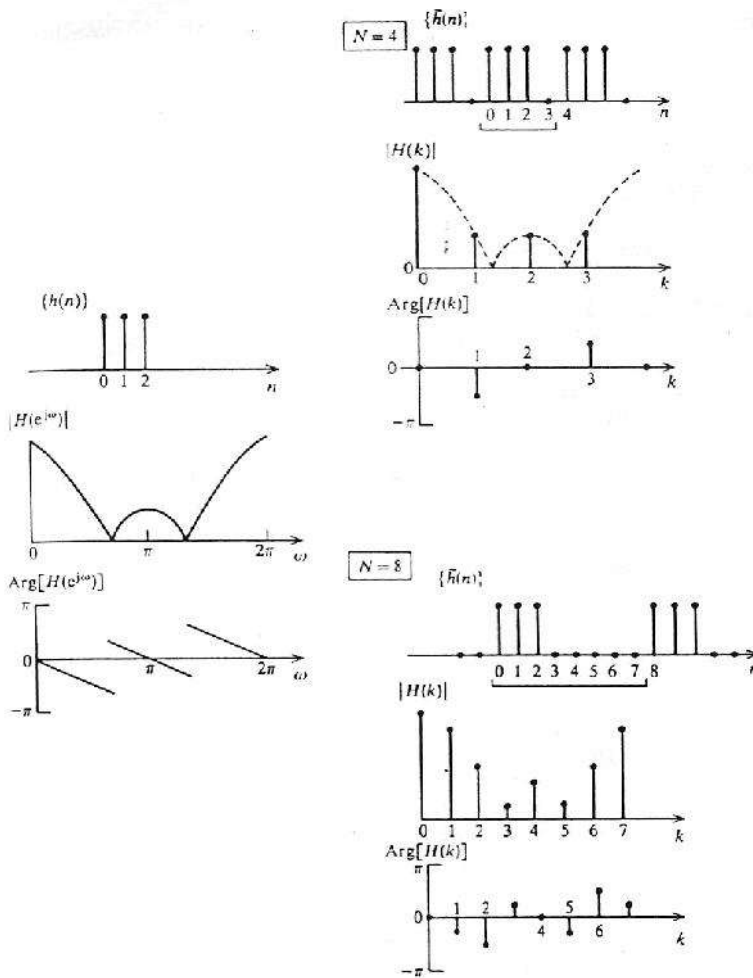
Penyelesaian:

Dengan menerapkan rumusan DFT didapatkan untuk  $0 \leq k \leq N - 1$ :

$$\begin{aligned} H(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^2 \frac{1}{3} e^{-j2\pi nk/N} \\ &= \frac{1}{3} (1 + e^{-j2\pi nk/N} + e^{-j4\pi nk/N}) \\ &= \frac{1}{3} e^{-j2\pi nk/N} (e^{j2\pi nk/N} + 1 + e^{-j2\pi nk/N}) \\ &= e^{-j2\pi nk/N} \frac{1 + 2\cos(2\pi k/N)}{3} \end{aligned}$$

Untuk  $N=4$  dan  $N=8$  hasilnya adalah sama dengan  $N=3$  hanya mempunyai cuplikan yang lebih banyak dapat diperlihatkan dalam gambar 4.3 berikut:





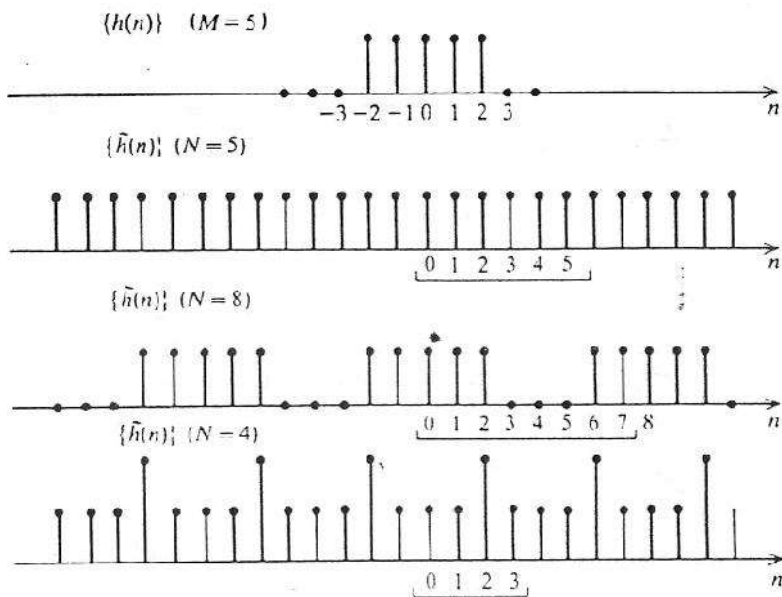
Gambar 4.3 Hubungan transformasi Fourier dengan DFT pada runtun kausal terbatas untuk N=4 dan N=8

### Runtun Non Kausal

Runtun  $\{h_{NC}(n)\}$  adalah runtun non kausal terbatas yang mengandung M cuplikan. Dengan periodiasi didapatkan :

$$\bar{h}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{NC}(n+mN) \quad (4.19)$$

Bagian non kausal  $\{h_{NC}(n)\}$  akan muncul pada akhir runtun hasil IDFT. Pada  $N=8$  periode kedua menjadi bagian non kausal seperti ditunjukkan dalam gambar 4.4.



Gambar 4.4 Hubungan durasi runtun M dengan jumlah titik cuplikan pada spektrum N.

### Contoh 4.2

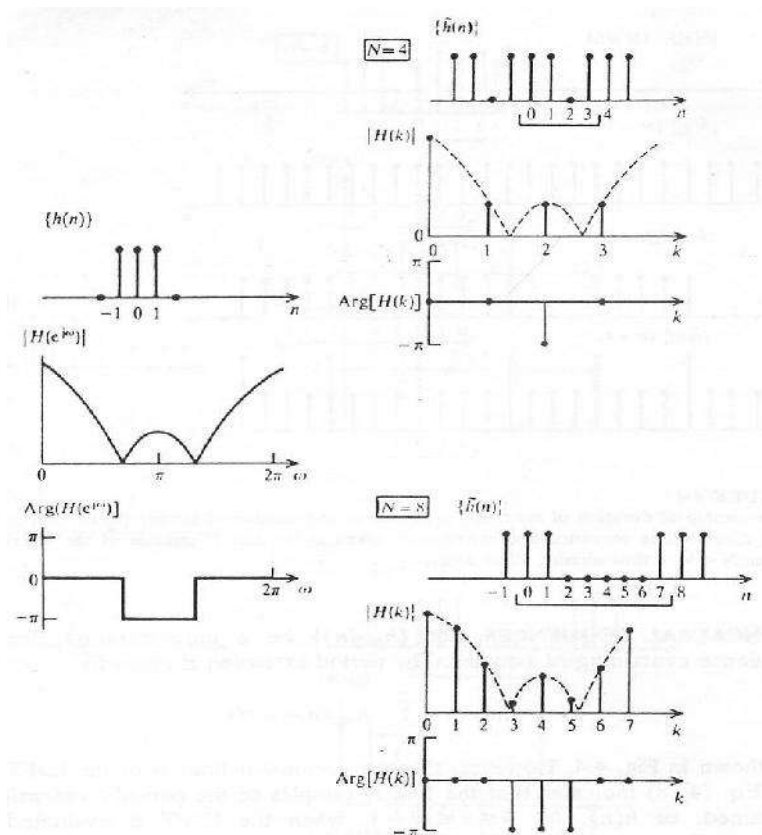
Cari runtun DFT dari fungsi sistem non kausal berikut:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{for } -1 \leq n \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Penyelesaian:

Dengan perluasan periode maka didapatkan  $\bar{h}(n)$  seperti pada gambar 4.5 maka runtun yang digunakan untuk melaksanakan DFT adalah sebagai berikut:

$$h(n) \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{for } n = 0, 1, N - 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Gambar 4.5 Hubungan antara transformasi Fourier dengan DFT untuk runtun non kausal dengan N=4 dan N=8.

Maka dengan menerapkan rumusan DFT didapatkan:

$$H(k) = \frac{1}{3} \left( 1 + e^{-j2\pi k/N} + e^{-j2(N-1)\pi k/N} \right)$$

Penambahan  $2\pi$  tidak berpengaruh apapun pada runtun:

$$e^{-j2\pi(N-1)\pi k/N} = e^{-j[2(N-1)\pi k/N + 2\pi N/N]} = e^{-j2\pi k/N}$$

maka:

$$\begin{aligned} H(k) &= \frac{1}{3} (1 + e^{-j2\pi nk/N} + e^{j2\pi nk/N}) \\ &= \frac{1 + 2\cos(2\pi k/N)}{3} \end{aligned}$$

Secara manual sebenarnya hasilnya sama dengan menerapkan DFT pada indeks negative, namun pada peneran dengan computer digital tidak membolehkan adanya indeks negative.

### **Runtun Durasi tak berhingga.**

Pada penerapan DFT terhadap runtun berdurasi tak berhingga selalu terjadi aliasin, untuk itu pemilihan nilai N harus diambil cukup besar sehingga kesalahan akibat aliasing dapat diabaikan.

### **Contoh 4.3**

Tentukan DFT dan IDFT dari runtun berdurasi tak berhingga berikut :

$$g\{n\} = a^n u\{n\} \quad \text{untuk semua } n$$

Penyelesaian:

Dengan transformasi fourier didapatkan:

$$H(e^{j\omega}) = [1 - a e^{-j\omega}]^{-1}$$

Pencuplikan terhadap fungsi ini menghasilkan runtun DFT sebagai berikut:

$$H(k) = H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/N} = [1 - a e^{-j2\pi k/N}]^{-1} \quad \text{For } 0 \leq k \leq N-1$$

dengan menerapkan IDFT didapatkan runtun awal sebagai berikut:

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{e^{j2\pi k n/N}}{1 - a e^{-j2\pi k/N}} \quad \text{for } 0 \leq n \leq N-1$$

dengan ekspansi deret Tylor terhadap penyebut didapatkan

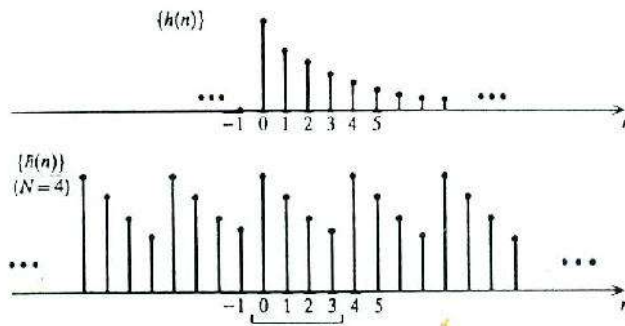
$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k n/N} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} a e^{-j2\pi k r/N} \right] \quad \text{for } 0 \leq n \leq N-1 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{\infty} a^r \left[ \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(n-r)/N} \right] \quad \text{for } 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.11), penjumlahan dalam kurung adalah nol kecuali untuk  $r = n + mN$ , dengan m adalah bulat. Penjumlahan tersebut menghasilkan:

$$h(n) = \sum_{\substack{r=0 \\ r=n+mN}}^{\infty} a^r \quad \text{untuk } 0 \leq n \leq N-1$$

Untuk r lebih besar daripada nol maka m juga lebih besar dari nol sehingga:

$$h(n) = \sum_{m=0}^{\infty} a^{(n+mN)} = a^n \sum_{m=0}^{\infty} (a^N)^m = \frac{a^n}{1-a^N} \quad \text{untuk } 0 \leq n \leq N-1$$



Gambar 4.6 Aliasing pada runtun berdurasi tak terbatas ketika diterapkan DFT  $N=4$ .

Hasil diatas tidak sesuai dengan runtun aslinya karena adanya adanya aliasing seperti yang dicontohkan pada gambar 4.6 untuk  $N=4$

### IV.3 Karakteristik DFT

DFT terdiri dari cuplikan transformasi Fourier. Oleh karena itu sifat-sifat linieritas, sifat-sifat simetrik yang dimiliki transformasi Fourier juga berlaku untuk DFT

Sifat-sifat tersebut terangkum dalam tabel 4.1 berikut:

TABLE 4.1 Sifat-sifat DFT

1. Untuk runtun berdurasi terbatas  $h(n)$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$ ,

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j2\pi kn/N} \text{ untuk } 0 \leq k \leq N-1 \quad (DFT)$$

dan

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j2\pi kn/N} \text{ for } 0 \leq n \leq N-1 \quad (IDFT)$$

2. Ekspansi periode

$$\bar{h}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n + mN)$$

3. Linearitas: jika  $\{x(n)\} = \{h_1(n)\} + \{h_2(n)\}$  maka  $X(k) = H_1(k) + H_2(k)$
4. Periodik:  $H(k) = H(k + N)$ .
5. Fungsi magnitudo dan fasa jika  $H(k) = H_R(k) + jH_I(k)$ , maka

$$[H(k)]^2 = H_R^2(k) + H_I^2(k)$$

$$\text{Arg}[H(k)]^2 = \arctan [H_I(k) / H_R(k)]^2$$

6. Pada runtun tertunda:

$$\text{jika } \{y(n)\} = \{x(n - n_0)\} \text{ maka } Y(k) = X(k)e^{-j2\pi k n_0/N}$$

7. Pada konvolusi dua runtun:

$$\text{jika } \{y(n)\} = \{h(n)\} * \{x(n)\} \text{ maka } Y(k) = H(k)X(k)$$

Konvolusi linear  $\{h(n)\}$  and  $\{x(n)\}$  dihasilkan ketika runtun DFT  $N_y$  titik dihitung untuk  $\{h(n)\}$  dan  $\{x(n)\}$ , saat  $N_y$  adalah durasi  $\{y(n)\}$ . Selain durasi tersebut menghasilkan konvolusi sirkular  $\{h(n)\}$  dan  $\{x(n)\}$ .

8. Hasil kali dua runtun:

$$\text{jika } \{y(n)\} = \{h(n)x(n)\} \text{ maka } Y(k) = H(k) * X(k)$$

(konvolusi sirkular)

9. Untuk runtun  $h(n)$  bernilai real,  $0 \leq n \leq N - 1$ :

$$H_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(2\pi k n / N), \text{ for } 0 \leq k \leq N-1$$

$$H_I(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(2\pi k n / N), \text{ for } 0 \leq k \leq N-1$$

- (a) Konjugat kompleks:  $H(k) = H^*(N - k)$
- (b) Fungsi genap komponen real:  $H_R(k) = H_R(N - k)$
- (c) Fungsi ganjil komponen imajiner:  $H_I(k) = -H_I(N - k)$
- (d) Fungsi genap komponen magnitude:  $|H(k)| = |H(N - k)|$
- (e) Fungsi ganjil komponen fasa:  $\text{Arg}[H(k)] = -\text{Arg}[H(N - k)]$
- (f) Jika  $\{h(n)\} = \{h(-n)\}$  (fungsi genap), maka  $H(k)$  adalah real.
- (g) Jika  $\{h(n)\} = \{-h(-n)\}$  (fungsi ganjil), maka  $H(k)$  adalah imajinar.



#### IV.4 Konvolusi sirkular

Konvolusi antara runtun  $h\{n\}$ , untuk  $0 \leq n \leq N - 1$ , dan  $\{x(n)\}$ , menghasilkan:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \quad \text{untuk semua } n \quad (4.20)$$

Untuk membedakan konvolusi ini dengan operasi yang dilaksanakan dalam DFT maka persamaan (4.20) disebut *konvolusi linier*. Transformasi Fourier berguna untuk mengubah operasi konvolusi menjadi perkalian biasa. Runtun  $\{y(n)\}$  dihitung dengan perhitungan transformasi Fourier invers  $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$ . Sedangkan untuk konvolusi sirkular adalah sebagai berikut:

$$\bar{y}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{h}(k)\bar{x}(n-k) \quad \text{untuk } 0 \leq n \leq N-1 \quad (4.21)$$

secara singkat:

$$\{\bar{y}(n)\} = \{\bar{h}(n)\} \Theta \{\bar{x}(n)\} \quad (4.22)$$

dengan  $\Theta$  melambangkan operasi konvolusi sirkular. Langkah perhitungan pada konvolusi sirkular adalah sama dengan pada konvolusi linier kecuali penjumlahan yang hanya dilakukan dalam satu periode. Runtun hasil  $\{y(n)\}$  adalah periodik, dengan periode  $N$ . Pergeseran indeks dalam konvolusi sirkular sebenarnya adalah rotasi.

#### Contoh 4.4

Diketahui runtun  $x(n)$  dan  $h(n)$  sebagai berikut :

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } n = 0 \\ 0.5 & \text{untuk } n = 1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

dan

$$h(n) = \begin{cases} 0.5 & \text{for } n = 0 \\ 1 & \text{for } n = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Tentukan konvolusi linier dan konvolusi sirkular!

Penyelesaian:

Untuk menentukan konvolusi linier adalah sebagai berikut:

$$\{y(n)\} = \{x(n)\} * \{h(n)\}$$

dengan menerapkan rumusan konvolusi diskrit maka:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

dengan rumusan tersebut maka dibutuhkan  $x(k)$  dan  $h(n-k)$

$$x(k) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } k = 0 \\ 0.5 & \text{untuk } k = 1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

dan

$$h(n-k) = \begin{cases} 0.5 & \text{untuk } k = n \\ 1 & \text{for } k = n-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$y(n)$  baru mempunyai nilai pada saat

$$n=0$$

$$n=-1 \quad y(-1) = 0$$

$$n=0 \quad y(0) = (1)(0.5) = 0.5$$

$$n=1 \quad y(1) = (1)(1) + (0.5)(0.5) = 1.25$$

$$n=1 \quad y(2) = (0.5)(0.5) = 0.5$$

Untuk menghitung konvolusi sirkular adalah sebagai berikut:

Oleh karena  $\{x(n)\}$  dan  $\{h(n)\}$  memiliki durasi dua cuplikan maka mungkin beralasan (*tetapi salah*) menggunakan DFT 2-titik. Berikut analisis dalam kawasan frekuensi dan kawasan waktu:

*Kawasan Frequency .*

Dengan menerapkan DFT dua titik didapatkan:

$$X(0) = 1.5 \quad \text{and} \quad X(1) = 0.5 \quad \text{and} \quad H(0) = 1.5 \quad \text{and} \quad H(1) = -0.5$$

Dalam kawasan frekuensi  $Y(k)$  didapatkan dengan perkalian antara  $\{X(k)\}$  dengan  $\{H(k)\}$  sehingga untuk  $k = 0, 1$ , didapat  $Y(0) = 2.25$  dan  $Y(1) = -0.25$ .

Dengan menerapkan IDFT didapatkan  $y(0) = 1$  dan  $y(1) = 1.25$ , yang tidak sama dengan hasil konvolusi linier yang diharapkan seperti pada gambar. 4.7(b).

*Kawasan waktu.*

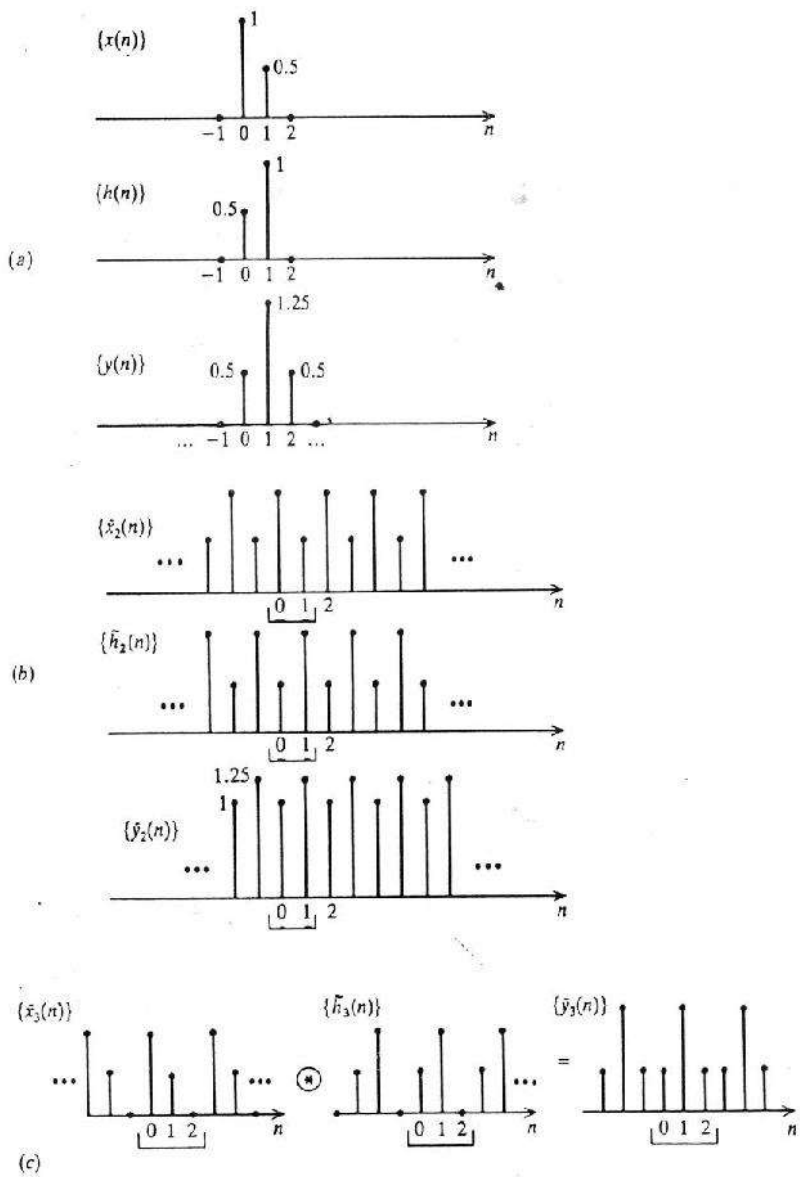
Oleh karena digunakan DFT 2 titik ,aka konvolusi periodis antara runtun periodis  $\{\bar{x}_2(n)\}$  dan  $\{\bar{h}_2(n)\}$  dengan periode 2 cuplikan, yang didapat dari  $\{x(n)\}$  dan  $\{h(n)\}$  yang diperpanjang periodis. Dengan konvolusi periodis didapatkan

$$\bar{y}_2(0) = \bar{x}_2(0) \bar{h}_2(0) + \bar{x}_2(1) \bar{h}_2(-1) = 1$$

$$\bar{y}_2(1) = \bar{x}_2(0) \bar{h}_2(1) + \bar{x}_2(1) \bar{h}_2(0) = 1.25$$

$$\bar{y}_2(2) = \bar{x}_2(0) \bar{h}_2(2) + \bar{x}_2(1) \bar{h}_2(1) = 1$$

Runtun  $\{\bar{y}_2(n)\}$  adlah periodis dengan periode 2.



Gambar 4.7 (a) konvolusi linier dua runtun berdurasi terbatas. (b) Konvolusi sirkular dengan DFT 2 titik. (c) Konvolusi sirkular dengan DFT 3 titik

## Soal-soal Latihan

1. Tentukan 8-point DFT untuk

a.  $x(n) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } -3 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$

b.  $x(n) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$

2. Tentukan konvolusi sirkular dari:

a.  $x(n) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } -2 \leq n \leq 1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$

$$h(n) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

b.  $x(n) = 0.5d(n-1) + d(n) + 0.5d(n+1)$

$$h(n) = 0.5 d(n-1) + d(n) +$$

## BAB V

### TRANFORMASI Z

Transformasi z digunakan untuk analisis dan sintesis tapis digital. Bab ini akan membahas transformasi untuk runtun diskrit. Transformasi z sangat biasa digunakan untuk menyatakan fungsi sistem digital. Fungsi sistem suatu tapis digital didefinisikan sebagai transformasi z dari tanggapan cuplik satuan. Bidang z kompleks sering digunakan untuk menampilkan pole dan zero fungsi sistem. Istilah lingkaran satuan pada bidang z adalah lingkaran yang berpusat pada titik 0 bidang z dan berjari satu. Daerah konvergensi di dalam bidang z menentukan nilai z untuk transformasi z. Bentuk ROC juga direlasikan dengan watak runtun waktu diskrit

Titik-titik singular fungsi alih sistem dapat dipergunakan untuk beberapa hal. Stabilitas sistem waktu diskrit dapat ditentukan dengan melihat titik-titik tersebut. Untuk sistem diskrit kausal maka titik-titik kutub berada di dalam lingkaran satuan, sedangkan sistem diskrit non kausal dapat memiliki kutub di tak berhingga. Selain itu koefisien tapis digital dapat ditentukan dari lokasi pole dan zero.

#### V.1 Pengertian Transformasi z

Transformasi z runtun diskrit  $h(n)$  didefinisikan sebagai :

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (5.1)$$

Transformasi z dikatakan mempunyai setiap nilai untuk semua z adalah saat penjumlahan diatas adalah berhingga. Apabila  $h(n)$  adalah tanggapan cuplik satuan sistem maka transformasi z runtun  $h(n)$  merupakan

fungsi alih sistem  $H(z)$ . Demikian juga untuk transformasi  $z$  suatu runtun masukan atau keluaran dari suatu sistem dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (5.2)$$

Transformasi  $z$  mengubah konvolusi pada kawasan waktu menjadi perkalian pada kawasan  $z$ . Hal ini adalah kegunaan utama transformasi  $z$  dalam analisis dan sintesis filter digital dalam kawasan  $z$ .

### Contoh 5.1

Carilah transformasi  $z$  dari sistem perata-rata 5 buah masukan berikut:

$$h(n) = \begin{cases} 1/5 & \text{untuk } -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Penyelesaian:

Dengan menerapkan rumusan transformasi  $z$  didapatkan:

$$H(z) = \frac{z^2}{5} + \frac{z}{5} + \frac{1}{5} + \frac{z^{-1}}{5} + \frac{z^{-2}}{5}$$

### Contoh 5.2

Transformasi  $z$  filter rekursif orde 1 dengan  $h(n)$  sebagai berikut:

$$h(n) = \begin{cases} a^n & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Penyelesaian:

Transformasi  $z$  runtun  $h(n)$  adalah sebagai berikut:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Dengan menerapkan penjumlahan geometrik didapatkan:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ untuk } |az^{-1}| < 1$$

Runtun seringkali dinyatakan dalam  $\sin(\omega n)$  and  $\cos(\omega n)$ . Untuk melakukan penjumlahan geometric runtun harus diubah dulu dalam bentuk eksponensial dengan menerapkan identitas Euler.

### Contoh 5.3

Transformasi z filter rekursif orde 2

$$h(n) = \begin{cases} r^n \cos(\omega_0 n), & \text{untuk } n \geq 0 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Penyelesaian:

Dengan rumusan transformasi z didapat:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(\omega_0 n) z^{-n}$$

Dengan menerapkan identitas Euler dan penjumlah geometik didapat:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})}{2} z^{-n} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (r e^{j\omega_0} z^{-1})^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} (r e^{-j\omega_0} z^{-1})^n \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 - r e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{1 - r e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right] \quad \text{for } |r z^{-1}| < 1 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2 - r(e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0})z^{-1}}{(1 - r e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - r e^{-j\omega_0} z^{-1})} \right] \\ &= \frac{1 - r \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \end{aligned}$$

### Contoh 5.4

Transformasi z sistem orde 2 dengan h(n) sebagai berikut:

$$h(n) = \begin{cases} r^n \sin(\omega_0 n) & \text{untuk } n \geq 0 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$



Penyelesaian:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(\omega_0 n) z^{-n}$$

dengan identitas Euler maka:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2j} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (r e^{j\omega_0} z^{-1})^n - \sum_{n=0}^{\infty} (r e^{-j\omega_0} z^{-1})^n \right] \\ &= \frac{1}{j} \left[ \frac{1}{1 - r e^{j\omega_0} z^{-1}} - \frac{1}{1 - r e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right] \\ &= \frac{r \sin(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \end{aligned}$$

## V.2 Sifat-sifat Transformasi z

Transformasi z mempunyai beberapa sifat penting yang akan dibahas berikut. Sifat-sifat ini sangat berguna dalam penerapan transformasi z pada analisis dan sintesis filter digita. Beberapa sifat penting tersebut adalah :

- Linieritas transformasi z

Transformasi z adalah transformasi linier dengan demikian berlaku prinsip superposisi. Apabila terdapat runtun  $\{x(n)\} = \{ah_1(n) + bh_2(n)\}$ , dengan a dan b konstan maka transformasi z runtun x(n) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [ah_1(n) + bh_2(n)] z^{-n} \\ &= a \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1(n) z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_2(n) z^{-n} \\ &= aH_1(z) + bH_2(z) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Linieritas transformasi z mempermudah dalam implementasi filter digital.

- Transformasi z pada runtun tertunda

Penundaan pada runtun sangat sering dilakukan dalam implementasi filter digital. Runtun  $\{h_k(n)\} = \{h(n - k)\}$  adalah runtun  $h(n)$  yang tertunda sebesar k cuplikan. Transformasi z dari runtun tersebut adalah:

$$H_z(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_k(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k) z^{-n} \quad (5.4)$$

dengan  $m = n - k$ , maka:

$$H_k(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) z^{-(m+k)} = z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) z^{-m} = z^{-k} H(z) \quad (5.5)$$

Dengan demikian penundaan runtun k cuplikan akan membuat transformasi z dikalikan dengan  $z^{-k}$ . Hal inilah yang menjadi alasan tunda waktu dalam filter digital direpresentasikan sebagai blok yang berisi  $z^{-1}$ .

- Transformasi z pada konvolusi dua runtun

Seperti telah dijelaskan dalam bab I bahwa konvolusi mempunyai persamaan sebagai berikut:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) \quad (5.6)$$

dengan transformasi z maka:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) \right] z^{-n} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Pada persamaan ini diinginkan persamaan  $Y(z)$  dalam  $H(z)$  dan  $X(z)$ . Untuk itu dibutuhkan tambahan  $z^{-k}$  pada  $h(k)$  dan  $z^k$  pada  $x\{n - k$ . Hasil perkalian persamaan (5.7) dengan  $z^k z^{-k}$  dan dengan mengubah susunan penjumlahan didapatkan:

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ h(k) z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k) z^{-(n-k)} \right] \quad (5.8)$$

Pada penjumlahan dalam variabel  $n$ , variabel  $k$  mewakili tunda waktu  $k$  cuplikan pada  $\{x(n)\}$ . Hal ini juga terjadi pada eksponensial  $z$ . Dengan substitusi  $m = n - k$ , maka penjumlahan tersebut akan sama dengan  $X(z)$ . Oleh karena  $X(z)$  bukan fungsi  $k$ , maka dapat dikeluarkan dari penjumlahan dalam variabel  $k$  sehingga akan sama dengan  $H(z)$ , menghasilkan

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (5.9)$$

Tabel 5.1 Sifat-sifat transformasi  $z$

---

1. Definisi

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

2. daerah konvergence (ROC): nilai  $z$  untuk

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n) z^{-n}| < \infty$$

3. Linieritas:

jika  $\{x(n)\} = \{ah_1(n)\} + \{bh_2(n)\}$  maka  $X(z) = aH_1(z) + bH_2(z)$

4. Transformasi  $z$  runtun tertunda

jika  $\{y(n)\} = \{x(n-n_0)\}$  maka  $Y(z) = z^{-n_0} X(z)$

5. Transformasi  $z$  terhadap konvolusi 2 runtun:

jika  $\{y(n)\} = \{h(n)\} * \{x(n)\}$  maka  $Y(z) = H(z)X(z)$

---

### V.3 Fungsi alih filter digital

Seperti pembahasan sebelumnya, fungsi alih sistem  $H(z)$  adalah transformasi  $z$  dari tanggapan cuplik satuan (*unit-sample response*). Transformasi  $z$  runtun output  $Y(z)$  disebut *response transform*, sedangkan untuk runtun input  $X(z)$  disebut *excitation transform*. Atau dengan kata lain transformasi tanggapan adalah hasil kali transformasi exitasi dan fungsi sistem Berikut dicontohkan hal tersebut..

#### Contoh 5.5

Diketahui runtun input:

$$x(n) = \begin{cases} r^n \cos(\omega_0 n) & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

sedangkan runtun output:

$$y(n) = \begin{cases} r^n \sin(\omega_0 n) & \text{untuk } n \geq 0 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Carilah fungsi alih sistem

Penyelesaian:

Dari contoh 5.3 didapatkan:

$$X(z) = \frac{1 - r \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Dari contoh 5.4 didapatkan:

$$Y(z) = \frac{r \sin(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Fungsi alih sistem

$$H(z) = Y(z) / X(z)$$

$$= \frac{r \sin(\omega_0) z^{-1}}{1 - r \cos(\omega_0) z^{-1}}$$

Selain dengan transformasi z terhadap tanggapan cuplik satuan, fungsi sistem juga dapat dinyatakan dengan koefisien-koefisien persamaan beda. Persamaan beda sistem LTI terbatas adalah sebagai berikut:

$$y(n) = \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{k=-N_p}^{N_p} b_k x(n-k) \quad (5.10)$$

dengan transformasi z:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{k=-N_p}^{N_p} b_k x(n-k) \right] z^{-n} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Susunan penjumlahan diubah:

$$Y(z) = \sum_{k=1}^M a_k \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k) z^{-n} \right] + \sum_{k=-N_p}^{N_p} b_k \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k) z^{-n} \right] \quad (5.12)$$

dengan menerapkan hubungan untuk transformasi z runtun tertunda

$$Y(z) = \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} Y(z) + \sum_{k=-N_p}^{N_p} b_k z^{-k} X(z) \quad (5.13)$$

Oleh karena Y(z) dan X(z) bukan merupakan fungsi k, maka dapat dikeluarkan membentuk:

$$Y(z) \left[ 1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} \right] = X(z) \sum_{k=-N_p}^{N_p} b_k z^{-k} \quad (5.14)$$

dengan menerapkan definisi fungsi alih sistem didapatkan:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=-N_p}^{N_p} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} \quad (5.15)$$

Bagian pembilang terdiri dari pangkat negative dan positif artinya bagian input dapat merupakan harga waktu yang lalu maupun yang akan datang sedangkan pada penyebut hanya tidak terdapat pangkat positif yang berarti hanya keluaran sekarang dan yang telah lalu. Untuk dapat menerapkan fungsi alih dalam filter digital maka penyebut harus dinyatakan dalam suatu bentuk yang mengandung penyebut nol atau negatif.

### Contoh 5.6

Diketahui persamaan beda sebagai berikut: .

$$y(n) = \frac{1}{3} [x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$$

Tentukan fungsi alih sistem!

Penyelesaian:

$$Y(z) = \frac{1}{3} [zX(z) + X(z) + z^{-1}X(z)]$$

Fungsi alih sistem adalah:

$$H(z) = Y(z)/X(z) = z/3 + \frac{1}{3} + z^{-1}/3$$

### Contoh 5.7

Filter rekursif mempunyai persamaan beda sebagai berikut:

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

Tentukan Fungsi alih sistem!

Penyelesaian:

Dengan transformasi z maka:

$$Y(z) = a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z)$$

$$(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}) Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1}) X(z)$$

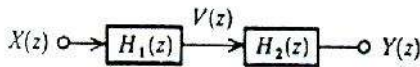
Fungsi alih sistem:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

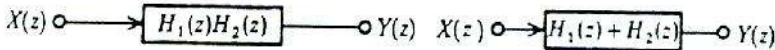
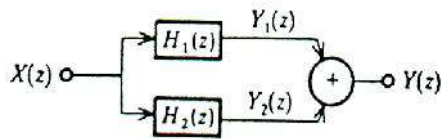
#### V.4 Penggabungan Filter

Filter digital yang kompleks dapat dibuat dari filter-filter digital sederhana. Penggabungan dapat dilakukan secara kaskade (seri) atau secara paralel. Berikut gambar penggabungan filter

Hubungan kaskade



Hubungan Pararel



Gambar 5.1 Hubungan filter secara kaskade dan paralel

Pada gambar hubungan kaskade didapatkan:

$$V(z) = H_1(z)X(z) \quad Y(z) = H_2(z)V(z) \quad (5.16)$$

dengan menggabungkan dua persamaan tersebut didapatkan:

$$Y(z) = H_2(z)H_1(z)X(z) \quad (5.17)$$

atau dapat ditulis:

$$Y(z) = H_1(z)H_2(z)X(z) \quad (5.18)$$

Hasil ini dapat digeneralisasi untuk hubungan kaskade N buah filter sederhana. Jika  $H_n(z)$  adalah fungsi alih sistem bagian kaskade ke n maka transformasi tanggapan sistem menghasilkan:

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= H_1(z) H_2(z) \cdots H_N(z) X(z) \\
 &= \prod_{n=1}^N H_n(z) X(z)
 \end{aligned}
 \tag{5.19}$$

dengan demikian:

$$H_c(z) = \prod_{n=1}^N H_n(z)
 \tag{5.20}$$

### Contoh 5.8

Pertimbangkan dua filter perata-rata 3 masukan yang digabung secara kaskade.

$$H(z) = (z/3 + \frac{1}{3} + z^{-1}/3)$$

Penyelesaian:

Gabungan secara kaskade menyebabkan persamaan  $H(z)$  total adalah sebagai berikut:

$$H(z) = (z/3 + \frac{1}{3} + z^{-1}/3)^2 = (z^2 + 2z + 3 + 2z^{-1} + z^{-2})/9$$

Pada contoh tersebut dapat dilihat bahwa penggabungan dua filter orde 2 secara seri akan mendapatkan filter orde 4. Secara umum jumlah tunda waktu yang diperlukan pada filter gabungan adalah penjumlahan tunda waktu filter-filter penyusunannya. Secara umum kombinasi filter dari dua filter yang lebih sederhana dinyatakan sebagai berikut:



$$Y(z) = H(z)X(z) = H_1(z)H_2(z)X(z) \quad (5.21)$$

dengan

$$H_1(z) = \sum_{k=-N_p}^{N_p} b_k z^{-k}$$

dan

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}$$

$H_1(z)$  adalah bagian *filter non rekursif* sedangkan  $H_2(z)$  adalah bagian rekursif filter.

### Contoh 5.9

Terapkan fungsi alih berikut dalam filter rekursif orde 2 dengan dua bentuk yang berbeda

$$H(z) = \frac{1 - r \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Penyelesaian:

Fungsi alih filter dapat ditulis sebagai berikut:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

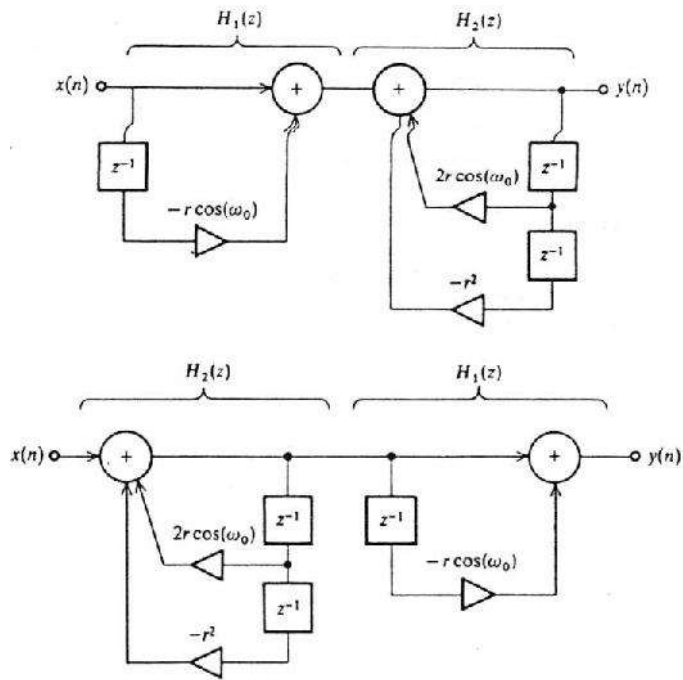
dengan:

$$H_1(z) = 1 - r \cos(\omega_0) z^{-1}$$

dan

$$H_2(z) = (1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2})^{-1}$$

Filter dapat diterapkan dalam dua cara yaitu:  $H(z) = H_1(z) H_2(z)$  atau  $H(z) = H_2(z) H_1(z)$



Gambar 5.2 Struktur filter digital contoh 5.9 dengan 2 cara penerapan.

Untuk hubungan paralel setiap komponen memiliki input yang sama dan keluarannya adalah penjumlahan keluaran filter-filter penyusunnya. Pada gambar 5.1 hubungan paralel adalah penyusunan paralel  $N$  filter dengan  $N=2$ . Fungsi sistem filter ke  $k$  dinyatakan dengan  $H_k(z)$ , untuk  $1 \leq k \leq N$ , sedangkan keluaran filter ke  $k$  yaitu  $Y_k(z)$

$$Y_k(z) = H_k(z)X(z) \quad (5.22)$$

Keluaran filter secara keseluruhan:

$$Y(z) = \sum_{k=1}^N Y_k(z) = \sum_{k=1}^N H_k(z)X(z) = X(z) \sum_{k=1}^N H_k(z) \quad (5.23)$$

Dengan demikian fungsi alih sistem keseluruhan  $H_p(z)$  adalah:

$$H_p(z) = \sum_{k=1}^N H_k(z) \quad (5.24)$$

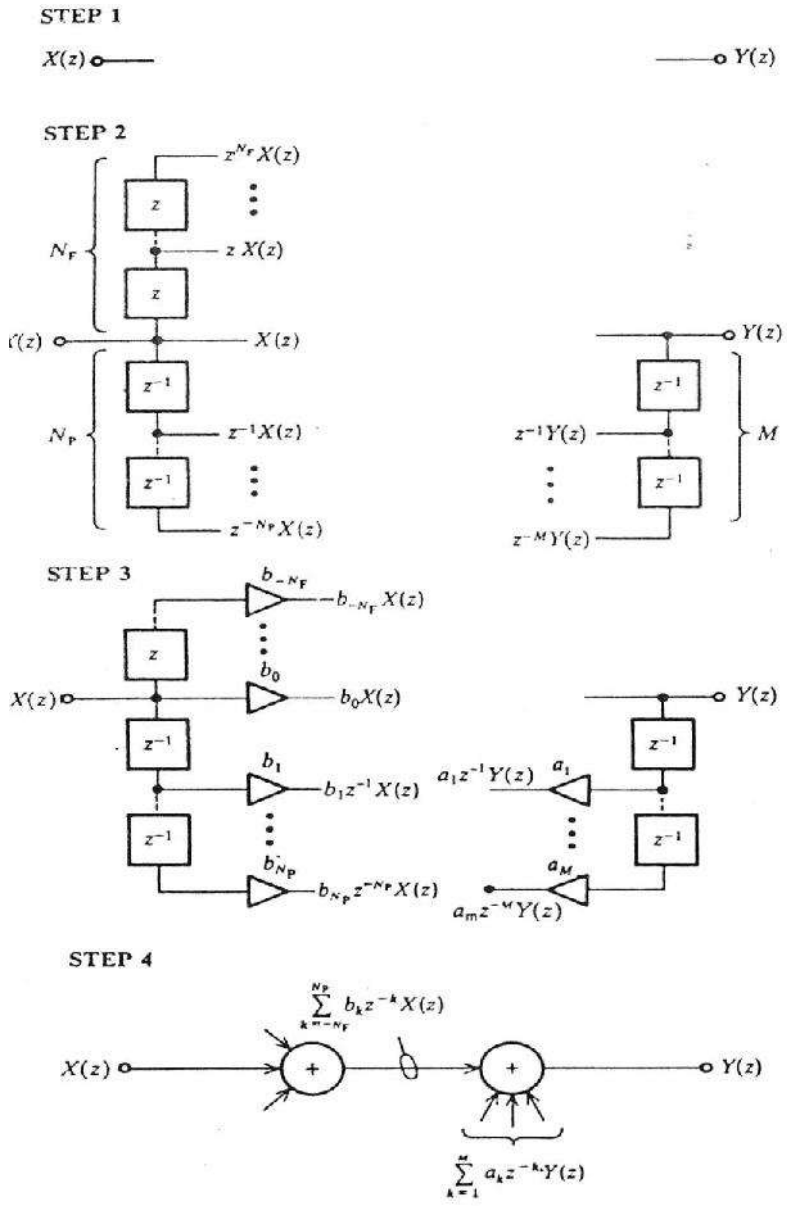
## V.5 Penerapan filter digital dari fungsi alih sistem

Transformasi  $z$  adalah transformasi linier sehingga prosedur implementasi filter digital sama dengan prosedur implementasi dalam kawasan waktu. Bentuk transformasi persamaan beda yaitu :

$$Y(z) = \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} Y(z) + \sum_{k=-N_p}^{N_p} b_k z^{-k} X(z) \quad (5.25)$$

Dalam bentuk ini transformasi tanggapan dinyatakan dalam transformasi tanggapan yang lalu dan yang akan datang serta transformasi eksitasi yang lalu, sekarang dan yang akan datang. Tunda waktu beroperasi sebagai perkalian dengan koefisien  $z^{-1}$ . Seperti pada kawasan waktu struktur filter ditentukan dengan 4 langkah:

- *Langkah 1.* Menggambarkan dua titik yaitu titik masukan  $X(z)$  dan titik keluaran  $Y(z)$ .
- *Langkah 2.* Eksitasi dan tanggapan tertunda didapatkan dengan menghubungkan tunda waktu  $z^{-1}$  dengan titik yang dimaksud. Tunda maju  $z$  dihubungkan hanya dengan transformasi eksitasi saja..
- *Langkah 3.* Pengali dihubungkan dengan keluaran tunda waktu dan tunda maju untuk mendapatkan hasil yang diinginkan.
- *Langkah 4.* Keluaran tunda waktu maupun tunda maju digabungkan dengan penjumlahan



Gambar 5.3 Tahapan penerapan filter digital dari fungsi sistem  $H(z)$

**Contoh 5.10**

Diketahui suatu persamaan beda filter rekursif orde 2 sebagai berikut:

$$y(n) = 2r \cos(\omega_0) y(n-1) - r^2 y(n-2) + x(n) - r \cos(\omega_0) x(n-1)$$

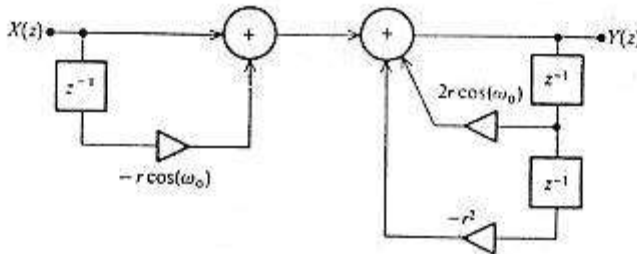
Gambarkan filter digital hasil implementasi persamaan beda tersebut!

Penyelesaian:

Dengan menerapkan transformasi z pada persamaan beda sistem didapatkan:

$$Y(z) = 2r \cos(\omega_0)z^{-1} Y(z) - r^2 Y(z) + X(z) - r \cos(\omega_0)z^{-1} X(z)$$

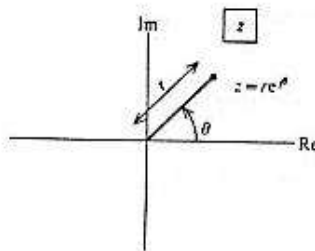
Dengan mengikuti langkah menggambar filter dari fungsi alih maka didapatkan:



Gambar 5.4 Penerapan filter orde 2 dari fungsi alih contoh 5.10

## V.6 Bidang z kompleks

Transformasi z adalah fungsi variabel kompleks z. Bidang kompleks z mempunyai sumbu horizontal nilai real dan sumbu vertical nilai imajiner.



Gambar 5.5 Bidang z kompleks

Pada bab ini akan dijelaskan tentang singularity untuk menentukan tipe filter digital rekursif atau non rekursif serta analisis frekuensinya. Untuk

menentukan titik-titik singular pada transformasi  $z$  disajikan fungsi alih sistem secara umum sebagai berikut:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=-N_p}^{N_p} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} \quad (5.26)$$

Akar-akar pembilang yang menyebabkan nilai  $H(z) = 0$  menentukan lokasi zero pada bidang  $z$  sedangkan akar penyebut yang membuat  $H(z)$  bernilai tak berhingga menentukan lokasi pole atau kutub. Lokasi pole dan zero dapat diperlihatkan secara eksplisit dengan faktorisasi bentuk penjumlahan diatas sebagai berikut:

$$H(z) = A z^{N_F} \prod_{k=1}^{N_p + N_F} (1 - c_k z^{-1}) \bigg/ \prod_{k=1}^M (1 - d_k z^{-1}) \quad (5.27)$$

dengan  $A$  adalah konstanta gain nyata;  $c_k$ , untuk  $1 \leq k \leq N_p + N_f$ , adalah lokasi (kemungkinan kompleks) zero ke  $k$  dan  $d_k$ , untuk  $1 \leq k \leq M$ , adalah lokasi pole ke  $k$ . Persamaan 5.27 mengandung beberapa pengertian sebagai berikut:

1. Pembilang  $(1 - c_k z^{-1})$  membangkitkan zero pada  $z = c_k$  dan pole pada  $z = 0$ .
2. Penyebut membangkitkan pole pada  $z = d_k$  dan zero pada  $z = 0$ .
3. Jika  $N_F > 0$ , maka filter adalah non kausal dan mempunyai tanggapan cuplik satuan sebanyak  $N_F$  dengan indeks negatif. Bagian  $z^{N_F}$  membangkitkan sebanyak  $N_F$  pole pada  $z = \infty$  dan  $N_F$  zero pada  $z = 0$ .
4. Pada  $z = 0$  terdapat penghapusan pole/zero yaitu pole pembilang menghapus zero pada penyebut.
5. Agar digital filter mempunyai koefisien real maka titik singular kompleks harus mempunyai pasangan konjugatnya.

6. Tipe filter dapat dikenali dengan mudah dengan melihat konfigurasi pole dan zero. Filter non rekursif dinyatakan dengan polynomial pembilang dengan demikian semua titik singular kecuali titik  $z = 0$  dan  $z = \infty$  adalah zero, sedangkan filter rekursif mempunyai paling tidak satu pole selain pada  $z = 0$  dan  $z = \infty$ .

Tabel 5.2 titik singular bidang  $z$  kompleks

Fungsi alih sistem secara umum:

$$H(z) = Az^{N_F} \prod_{k=1}^{N_p + N_z} (1 - c_k z^{-1}) \bigg/ \prod_{k=1}^M (1 - d_k z^{-1})$$

Lokasi titik-titik singular adalah sebagai berikut:

Zero pada  $z = c_k$ , untuk  $1 \leq k \leq N_p + N_z$ , dan  $N_p + N_z$  pole pada  $z = 0$

Pole pada  $z = d_k$ , untuk  $1 \leq k \leq M$ , dan  $M$  zero pada  $z = \infty$

$N_F$  pole pada  $z = \infty$  dan  $N_F$  zero pada  $z = 0$  terdapat pada bagian non kausal  $\{h(n)\}$ .

(Pole/zero cancellation will usually occur at  $z = 0$ .)

### Contoh 5.11

Diketahui fungsi alih sistem sebagai berikut:

$$H(z) = z/3 + \frac{1}{3} + z^{-1}/3$$

Tentukan pole dan zero sistem tersebut!

Penyelesaian:

dengan mengubah bentuk fungsi alih menjadi perkalian suku-sukunya maka didapat:

$$H(z) = z(1 + z^{-1} + z^{-2})/3 = z(1 - c_1 z^{-1})(1 - c_2 z^{-1})/3$$

dengan

$$A = 1/3 \quad c_1 = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} = e^{j2\pi/3} \quad \text{dan} \quad c_2 = \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2} = e^{-j2\pi/3}$$

Suku  $z$  yang pertama membuat pole pada  $z = \infty$  dan zero pada  $z = 0$ . Suku berikutnya yang mengandung  $z^{-1}$  membuat zero pada  $z = c_1$  dan  $z = c_2$  serta dua pole pada  $z = 0$ .

### Contoh 5.12

Diketahui fungsi alih sistem sebagai berikut:

$$H(z) = \frac{1 - r \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

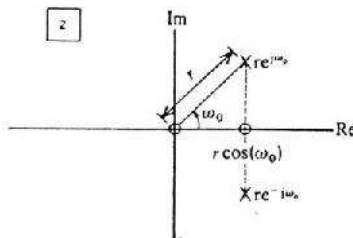
Tentukan pole dan zero sistem tersebut!

Penyelesaian:

Fungsi alih tersebut dapat diuraikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 - r \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \\ &= \frac{1 - r \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - r(e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \\ &= \frac{1 - r \cos(\omega_0) z^{-1}}{(1 - r e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - r e^{-j\omega_0} z^{-1})} \end{aligned}$$

Bagian pembilang mengandung zero pada  $z = r \cos(\omega_0)$  dan pole pada  $z = 0$ , sedangkan penyebut membangkitkan dua zero pada  $z = 0$  and pole pada  $z = r e^{\pm j\omega_0}$  seperti gambar berikut:



Gambar 5.6 Pola pole dan zero untuk  $H(z) = (1 - r \cos(\omega_0) z^{-1}) / (1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2})$



## V.7 Daerah konvergensi bidang z

Konsep transformasi z hanya berguna saat penjumlahan hasil transformasi bernilai terbatas. Nilai z yang membuat nilai  $H(z)$  terbatas disebut daerah konvergensi (ROC), in the z plane. Pada runtun  $\{h(n)\}$ , ROC didefinisikan sebagai daerah z yang membuat

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| < \infty \quad (5.28)$$

Oleh karena  $H(z)$  adalah tak berhingga pada lokasi pole, maka pole tidak dapat masuk dalam wilayah ROC. Daerah konvergensi sangat berguna untuk menentukan kestabilan filter, tipe filter kausal atau non kausal serta finite dan non finite.

Tabel 5.3 hubungan ROC dengan tipe runtun

---

Jika terdapat  $h(n)$ , untuk  $-N_F \leq n \leq N_P$ , dengan  $N_P$  mungkin infinite dan  $\rho$  adalah jari-jari pole finite terbesar dari  $H(z)$  maka:

Untuk runtun finite ( $N_P < \infty$ ),  $\rho = 0$ .

Untuk runtun infinite ( $N_P$  adalah infinite),  $\rho > 0$ .

### Daerah konvergensi

$$|z| = \rho \quad (\rho < 1)$$

$$|z| > \rho \quad (\rho > 1)$$

$$\rho < |z| < \infty \quad (\rho < 1)$$

Untuk sistem kausal stabil ( $N_F \leq 0$  dan semua pole berada pada lingkaran satuan)

Untuk sistem kausal tak stabil ( $N_F \leq 0$  minimal salah satu pole diluar lingkaran satuan)

Untuk sistem non kausal stabil ( $N_F > 0$ ) ( $N_F$  pole pada  $z = \infty$ )

---

### Contoh 5.13

Tentukan daerah konvergensi untuk filter berikut:

$$h(n) = \begin{cases} a^n & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Penyelesaian:

Daerah konvergensi filter adalah sebagai berikut

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |a z^{-1}|^n = [1 - |a z^{-1}|]^{-1} \quad \text{untuk } |a z^{-1}| < 1$$

Penjumlahan diatas konvergensi untuk  $|a z^{-1}| < 1$  atau  $|z| > |a|$ . dengan demikian ROC adalah daerah pada lingkaran berjari-jari  $|a|$  pada bidang  $z$  kompleks.

### V.8 Invers transformasi z

Transformasi  $z$  dapat di inverskan dengan melihat rumusan transformasi tersebut.  $H(z)$  adalah polinomial dalam  $z$  dengan demikian  $h(n)$  dapat ditentukan dengan melihat koefisien  $z^{-n}$

### Contoh 5.14.

Tentukan  $h(n)$  dari fungsi alih berikut:

$$H(z) = az + b + cz^{-1}$$

Penyelesaian:

Dari rumusan transformasi  $z$  maka dapat kita tentukan bahwa:

$$h(-1) = a, h(0) = b \text{ dan } h(1) = c, \text{ serta } h(n) = 0 \text{ for } n \geq 2 \text{ dan } n \leq -2.$$

### Soal-soal Latihan

1. Hitunglah transformasi z, gambarkan pola kutub dan nol serta diagram blok filter

(a)  $h(-1) = 1, h(1) = 1, h(n) = 0$  untuk  $n$  lainnya

(b)  $h(0) = 1, h(1) = -1, h(n) = 0$ , untuk  $n$  lainnya

(c)  $h(-1) = 1, h(0) = -2, h(1) = 1$ , untuk  $n$  lainnya

2. Untuk persamaan beda berikut, hitung transformasi z dari  $h(n)$ , gambarkan pola pole dan zero serta diagram blok filter

(a)  $y(n) = x(n) - x(n - N)$ . Dengan  $N = 5$

(b)  $y(n) = x(n) + x(n - N)$ . Dengan  $N = 5$

(c)  $y(n) = 2r \cos(\theta)y(n-1) + r^2 y(n-2) + x(n)$ . dengan  $\theta = \pi/4$  dan  $r = 0.9$

3. Untuk tanggapan magnitude dan fase berikut berikut, hitung transformasi z, gambarkan pola pole dan zero serta diagram blok filter

(a)  $|H(e^{j\omega})| = 2\sin(\omega/2)$  for  $0 \leq \omega \leq 2\pi$

$\text{Arg}[H(e^{j\omega})] = \pi/2 - \omega/2$  for  $0 \leq \omega \leq 2\pi$

(b)  $|H(e^{j\omega})| = [5 + 4\cos(2\omega)]^{1/2}$ ,

$$\text{Arg}[H(e^{j\omega})] = \arctan \left[ \frac{-\sin(2\omega)}{2 + \cos(2\omega)} \right], \quad \text{Arg}[H(e^{j0})] = 0$$

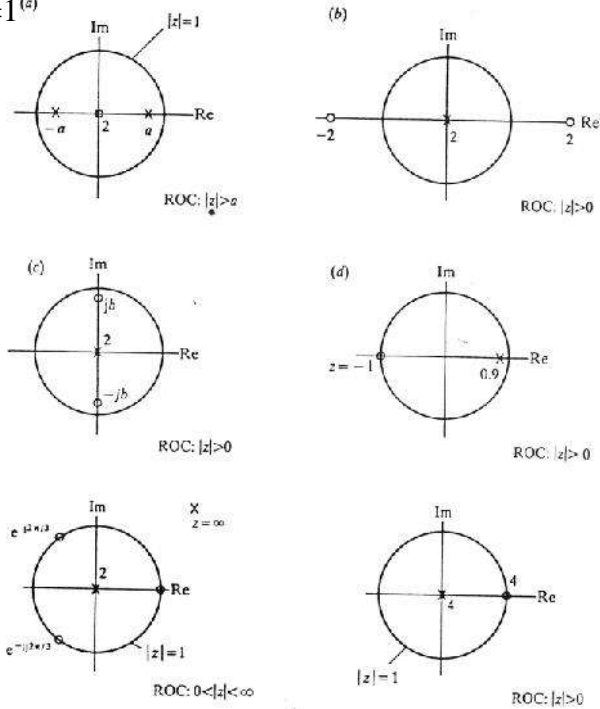
(c)  $|H(e^{j\omega})| = [17 - 8\cos(2\omega)]^{1/2}$

$$\text{Arg}[H(e^{j\omega})] = \arctan \left[ \frac{4\sin(2\omega)}{1 - 4\cos(2\omega)} \right], \quad \text{Arg}[H(e^{j0})] = 0$$

(d)  $|H(e^{j\omega})| = [1.81 - 1.8\cos(\omega)]^{1/2}$ ,

$$\text{Arg}[H(e^{j\omega})] = \omega + \arctan\left[\frac{0.9 \sin(\omega)}{1 - 0.9 \cos(\omega)}\right], \quad \text{Arg}[H(e^{j0})] = 0$$

4. Tentukan transformasi z dan gambarkan diagram blok filternya, Gain filter = 1<sup>(z)</sup>



## BAB VI

### Struktur Filter Digital

Pada bab ini akan dijelaskan metode untuk menerapkan filter digital dari persamaan beda, tanggapan cuplik satuan maupun transformasi z. Struktur filter digital dapat ditentukan secara langsung dari persamaan beda atau fungsi sistem disebut bentuk langsung pertama (*Direct Form I*). Bentuk lain yang lebih efisien dalam penggunaan memori disebut bentuk langsung kedua (*Direct Form II*). Struktur filter secara kaskade maupun paralel mempunyai keuntungan pada penerapan secara perangkat keras. Metode tersebut adalah penerapan filter secara umum yang mempunyai pole dan zero.

#### VI.1 Persamaan filter

Filter dapat dinyatakan dalam hubungan input/output dalam kawasan waktu maupun transformasi z. Persamaan konvolusi sistem adalah sebagai berikut:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (6.1)$$

dan persamaan beda sistem:

$$y(n) = \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{k=-N_f}^{N_p} b_k x(n-k) \quad (6.2)$$

Pada kawasan transformasi z, sistem dapat dinyatakan dalam dua bentuk sebagai berikut:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=-N_F}^{N_P} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} \quad (6.3)$$

bentuk yang kedua adalah sebagai berikut:

$$H(z) = Az^{N_F} \frac{\prod_{k=1}^{N_P+N_F} (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - d_k z^{-1})} \quad (6.4)$$

Sebelum membahas lebih lanjut tentang kedua bentuk ini maka dibahas terlebih dahulu tentang jenis-jenis filter.

## VI.2 Kategori Filter

Filter digital dapat diklasifikasikan berdasar durasi tanggapan cuplik satuan maupun struktur filter. Berdasar durasi tanggapan cuplik satuan:

- *Infinite-impulse response (IIR) filter*. Tanggapan cuplik satuan filter ini mempunyai durasi tak terbatas, pada filter analog disebut tanggapan impulse.
- *Finite-impulse response (FIR) filter*. Filter dikatakan sebagai filter FIR jika mempunyai durasi tanggapan cuplik satuan terbatas.

Berdasarkan strukturnya filter dapat dibedakan menjadi dua:

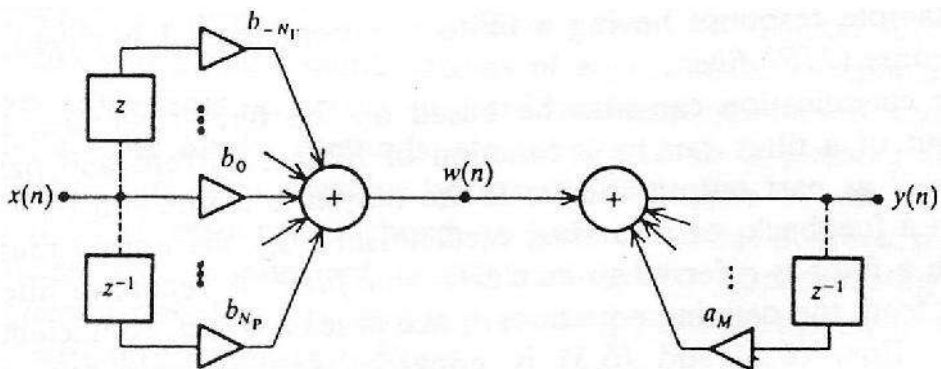
- *Recursive*, Terdapat umpan balik yang terhubung dengan keluaran. Filter ini dapat dikenali dari persamaan filter yaitu setidaknya satu koefisien  $a_k$  untuk  $1 \leq k \leq M$ , pada persamaan (6.2) dan (6.3) tidak nol, dan setidaknya satu koefisien  $d_k$  coefficient, untuk  $1 \leq k \leq M$ , pada persamaan (6.4) adalah tidak nol.
- *Nonrecursive filter*. Filter non rekursif adalah filter yang hanya fungsi dari runtun masukan. Filter ini dengan mudah dikenali dari persamaan filter yaitu  $a_k = 0$  untuk persamaan (6.2) dan (6.3), dan  $d_k = 0$  untuk persamaan (6.4), untuk semua nilai  $k$ .

Untuk mendapatkan filter IIR biasanya menggunakan struktur rekursif sedangkan filter FIR biasa diterapkan dengan struktur non rekursif. Oleh karena itu istilah filter IIR dan rekursif serta FIR dan non rekursif sering dipertukarkan. Namun demikian sebenarnya kedua pasang istilah ini berbeda karena filter FIR dapat diterapkan dengan struktur rekursif.

Istilah lain yang sering digunakan dalam pemodelan, statistik maupun identifikasi system yaitu *autoregressive (AR)*, *moving-average (MA)* and *autoregressive/moving-average (ARMA)*. Filter FIR dapat dipandang sebagai sistem MA, sedangkan filter IIR yang mempunyai pole dan zero adalah sistem ARMA. Sistem AR adalah filter IIR yang titik zeronya berada pada  $z = 0$ .

### VI.3 Struktur direct Form I dan Direct Form II

Struktur filter digital yang memisahkan penyangga delay runtun input maupun runtun output disebut *Direct Form I*.



Gambar 6.1 Penerapan umum Direct Form.

Gambar diatas menunjukkan dengan jelas harga input maupun output tertunda sehingga dapat dengan mudah diterapkan dalam pemrograman komputer. Satu bagian untuk mengimplementasikan bagian zero, satu sub rutin untuk mengimplementasikan bagian pole. Kelemahan bentuk ini adalah ketidakefisienan dalam penggunaan memori.

Bentuk lain yang lebih efisien dalam penggunaan memori diturunkan dalam penjelasan berikut. Fungsi alih sistem yang tertulis dalam persamaan 6.3 dapat dibagi menjadi dua yang terhubung secara kaskade. Bagian pertama adalah yang mengandung bagian nol sedangkan bagian yang satu adalah bagian yang mengandung kutub. Seperti yang ditunjukkan gambar 6.1, terdapat runtun perantara  $\{w(n)\}$  yang mewakili keluaran bagian pertama dan merupakan input bagian kedua yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$w(n) = \sum_{k=-N_F}^{N_P} b_k x(n-k) \quad (6.5)$$

dan

$$y(n) = \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + w(n) \quad (6.6)$$

dengan transformasi z

$$W(z) = X(z) \sum_{k=-N_F}^{N_P} b_k z^{-k} \quad (6.7)$$

maka

$$Y(z) = W(z) \Big/ 1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} \quad (6.8)$$

Oleh karena sistemnya adalah linier maka dua bagian tersebut dapat dipertukarkan posisinya seperti yang ditunjukkan gambar 6.2 (a), dengan fungsi sistem secara keseluruhan tetap sama sedangkan runtun perantara  $\{u(n)\}$ . Persamaan Persamaan sistem kedua adalah sebagai berikut:

$$u(n) = \sum_{k=1}^M a_k u(n-k) + x(n) \quad (6.9)$$

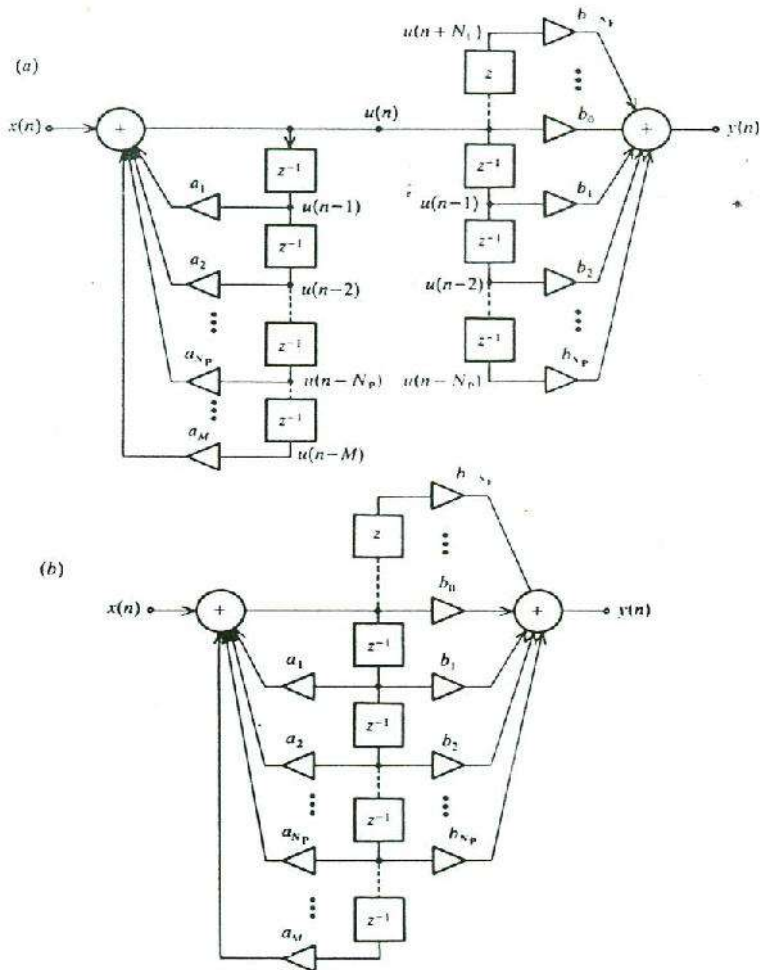
dan



$$y(n) = \sum_{k=-N_F}^{N_P} b_k u(n-k) \quad (6.10)$$

dengan transformasi z

$$U(z) = X(z) \left/ 1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} \right. \quad (6.11)$$



Gambar 6.2 Langkah mendapatkan filter Direct Form II

a) Pertukaran bagian rekursif dan non rekursif. b) Penggabungan delay.

Sedangkan transformasi z dari  $y(n)$  menghasilkan

$$Y(z) = U(z) \sum_{k=-N_F}^{N_P} b_k z^{-k} \quad (6.12)$$

Dengan melihat gambar 6.a didapatkan keluaran yang sama untuk delay kanan dan kiri. Dengan demikian delay-delay tersebut dapat digabung menjadi satu seperti gambar 6.b. Struktur ini disebut *Direct Form II* yang lebih efektif dalam penggunaan elemen delay yaitu sebanyak  $M$  atau  $N_F + N_P$ , sedangkan pada bentuk *Direct Form I*, menggunakan elemen tunda waktu sebanyak  $M + N_F + N_P$ . Filter bentuk *Direct Form II* menggunakan elemen tunda waktu minimum sehingga sering disebut bentuk kanonik atau bentuk yang paling sederhana.

### Contoh 6.1

Suatu persamaan filter diketahui sebagai berikut:

$$y(n) = 2r \cos(\omega_0) y(n-1) - r^2 y(n-2) + x(n) - r \cos(\omega_0) x(n-1)$$

Gambarkan realisasi filter dalam bentuk langsung kedua

Penyelesaian:

Dalam fungsi alih sistem dapat ditulis sebagai berikut:

$$H(z) = \frac{1 - r \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Bentuk *Direct Form I* didapatkan dengan faktorisasi fungsi sistem sehingga didapatkan:

$$Y(z) = H_1(z) H_2(z) X(z)$$

Dengan  $H_1(z)$  adalah pembilang dari  $H(z)$  sedangkan  $H_2(z)$  adalah sisanya. Runtun perantara  $\{w(n)\}$ , yang mempunyai transformasi z  $W(z)$ , berfungsi sebagai penghubung dua bagian tersebut:

$$H_1(z) = 1 - r \cos(\omega_0) z^{-1} = \frac{W(z)}{X(z)}$$

dan

$$H_2(z) = (1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2})^{-1} = \frac{Y(z)}{W(z)}$$

Urutan komponen filter dapat dibalik sehingga:

$$Y(z) = H_2(z) H_1(z) X(z)$$

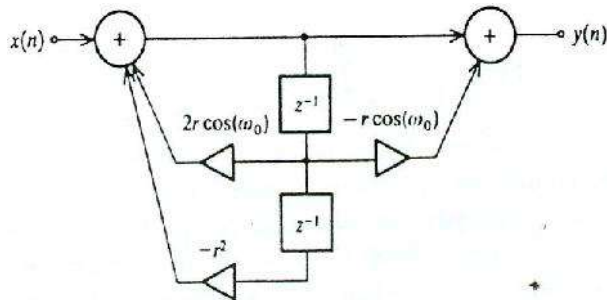
Pada bentuk ini digunakan runtun perantara yang menghubungkan bagian depan dengan belakang  $\{u(n)\}$ , atau dengan transformasi  $z$   $U(z)$ , maka:

$$z(z) = (1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2})^{-1} = \frac{U(z)}{X(z)}$$

dan

$$H_1(z) = 1 - r \cos(\omega_0) z^{-1} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Dengan demikian dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 6.3 Penerapan bentuk Direct Form II dari contoh 6.1

Bentuk Direct Form I dan II sangat umum digunakan untuk implementasi filter digital baik software maupun hardware. Meskipun demikian bentuk ini mempunyai dua kelemahan yaitu yang pertama adalah fleksibilitas dalam penerapan hardware. Filter yang mempunyai orde yang berbeda akan mempunyai jumlah pengali dan elemen delay yang berbeda juga sehingga memerlukan struktur perangkat keras yang berbeda. Kelemahan yang kedua adalah sensitivitas koefisien filter terhadap efek kuantisasi ketika digunakan presisi yang terbatas. Untuk mengatasi hal tersebut maka filter dapat disusun dari bagian bagian kecil filter yang disusun secara kaskade ataupun paralel. Bentuk kaskade mempunyai keuntungan fungsi sistem secara keseluruhan dapat ditentukan dengan mudah. Bentuk kaskade adalah bentuk perkalian masing-masing komponennya sehinggaaa beberapa fungsi sistem mempunyai pole dan zero seperti komponen penyusunnya. Bentuk paralel mempunyai keuntungan pengendalian nilai sinyal yang mudah dalam range yang dinamis. Implementasi paralel juga memungkinkan pemrosesan secara paralel yang sangat bermanfaat pada aplikasi filter kecepatan tinggi. Pada aplikasi ini prosessor yang terpisah dapat diterapkan pada masing-masing struktur filter sehingga dapat diproses secara bersama.

#### **VI.4 Gabungan Kaskade**

Untuk mendapatkan gabungan secara kaskade, fungsi alih sistem  $H(z)$  difaktorkan menjadi hasil kali bentuk orde dua dalam pembilang dan penyebut setelah bagian non kausal dikeluarkan. Jika jumlah tunda waktu penyebut  $M$ , lebih besar daripada jumlah delay pembilang  $N_P + N_F$ , maka:

$$H(z) = Az^{N_F} \prod_{k=1}^{\lceil M/2 \rceil} H_k(z) \quad (6.13)$$

dengan

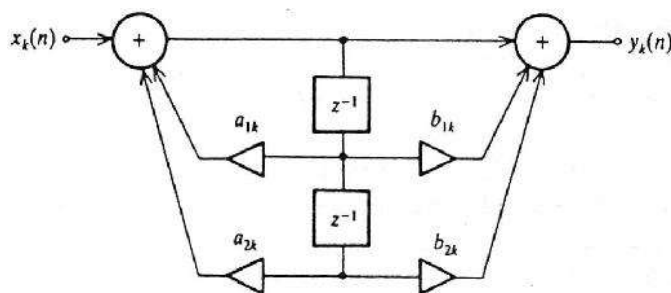
$$H_k(z) = \frac{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}} \quad (6.14)$$

Konstanta A adalah gain,  $z^{NF}$  adalah komponen tunda maju non kausal [M/2] adalah integer dengan pembulatan M/2 ke nilai integer di atasnya. Agar koefisien filter real maka dua pole conjugate kompleks digabungkan sebagai penyebut dan dua zero konjugat kompleks sebagai pembilang atau titik-titik sengilar tersebut semua bernilai real untuk membentuk orde dua.. Setiap  $H_k(z)$  menggambarkan sebuah *cascade second-order section (CSOS)*, yang secara efisien dapat diterapkan dengan Direct Form II, seperti pada gambar 6.4. Persamaan yang mewakili CSOS ke k adalah:

$$y_k(n) = a_{1k}y_k(n-1) + a_{2k}y_k(n-2) + x_k(n) + b_{1k}x_k(n-1) + b_{2k}x_k(n-2) \quad (6.15)$$

dalam kawasan z:

$$Y_k(z) = a_{1k}z^{-1}Y_k(z) + a_{2k}z^{-2}Y_k(z) + X_k(z) + b_{1k}z^{-1}X_k(z) + b_{2k}z^{-2}X_k(z) \quad (6.16)$$



Gambar 6.4 Struktur filter orde dua kaskade (CSOS)

Dengan menyusun dalam bentuk kaskade maka filter akan dapat diimplementasikan secara efisien dalam bentuk orde dua pada penerapan perangkat keras. Untuk mendapatkan filter yang diinginkan beberapa bentuk

orde dua disusun secara kaskade sesuai kebutuhan.. Harga koefisien pengali untuk suatu desain filter tertentu dapat disimpan dalam suatu read-only memory (ROM). Modifikasi pada disain filter dengan mudah dapat dilaksanakan dengan mengubah isi ROM.

### Contoh 6.2

Pertimbangkan fungsi filter berikut dalam bentuk CSOS

$$H(z) = \frac{z/3 + 5/12 + 5z^{-1}/12 + z^{-2}/12}{1 - z^{-1}/2 + z^{-2}/4}$$

Penyelesaian:

Fungsi sistem dapat difaktorkan sebagai berikut:

$$H(z) = \frac{z/3(1 + z^{-1}/4)(1 + z^{-1} + z^{-2})}{1 - z^{-1}/2 + z^{-2}/4}$$

Filter dapat diimplementasikan dengan dua cara tergantung pada pembilang yang dikombinasikan dengan penyebut untuk membentuk CSOS.

Yang pertama adalah:

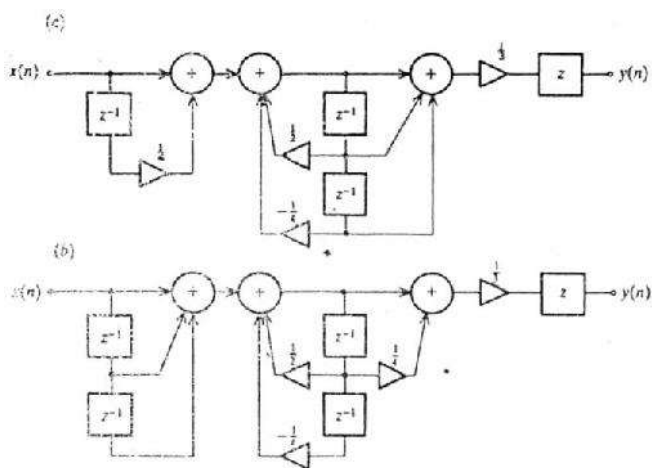
$$H(z) = \frac{1}{3} z(1 + z^{-1}/4) \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1}/2 + z^{-2}/4}$$

dengan hasil seperti yang ditunjukkan gambar 6.5(a). yang kedua adalah:

$$H(z) = \frac{1}{3} z(1 + z^{-1} + z^{-2}) \frac{1 + z^{-1}/4}{1 - z^{-1}/2 + z^{-2}/4}$$

dengan hasil seperti gambar 6.5(b).

Dalam teori tidak ada alasan khusus untuk menentukan struktur yang dipilih. Secara praktek urutan adalah penting ketika berhubungan dengan sejumlah hardware dengan presisi terbatas



Gambar 6.5 Penerapan contoh 6.4 dalam bentuk CSOS

Implementasi filter dengan teknik CSOS mempunyai keuntungan efisiensi dalam penggunaan jumlah hardware. Apabila prosedur pengolahan sinyal dalam CSOS membutuhkan waktu  $T_p$  detik maka dengan chip DSP khusus yang berkecepatan 200 ns untuk sebuah perkalian maka  $T_p$  kira-kira  $\mu s$ .

Apabila dalam sebuah operasi real time, sample datang setiap  $T_s$  detik dengan  $T_p < T_s$  maka pengolahan telah selesai sebelum sample berikutnya datang. Untuk menerapkan filter orde tinggi maka dapat digunakan sejumlah hardware CSOS yang sama. Apabila  $T_p$  jauh lebih kecil daripada  $T_s$ , maka perangkat keras melakukan pemrosesan dengan sangat cepat dan sebagian besar waktunya idle. Hal ini dapat dimanfaatkan dengan hanya menggunakan satu hardware CSOS untuk filter orde tinggi dengan cara penggunaan berulang. Apabila  $T_p \ll T_s$ , data input dapat diolah dengan struktur yang koefisiennya (didapat dari ROM) adalah koefisien bagaikan

pertama fungsi alih. Keluaran bagian ini dan keluaran tertundanya disimpan dalam RAM. Keluaran bagian ini menjadi masukan bagian selanjutnya.. Bagian kedua diimplementasikan dengan perangkat keras CSOS yang sama dengan koefisien yang didapatkan dari ROM dan masukan tertunda didapatkan dari RAM. Prosedur ini diulangi sampai seluruh bagian filter beroperasi. Proses ini dimulai lagi saat sample berikutnya datang.

Untuk lebih jelasnya disajikan ilustrasi berikut ini. Pembicaraan pada telepon yang memadai membutuhkan alokasi frekuensi 300 sampai 3500 Hz. Pesat pencuplikan yang biasa digunakan sekitar 8 kHz, atau  $T_s = 125 \mu s$ . Apabila filter diimplementasikan dengan hubungan kaskade CSOS sebanyak  $[M/2]$  bagian, maka untuk operasi real-time  $[M/2]$  harus kurang dari  $T_s/T_p$ . Jika  $T_p < 1 \mu s$ , maka  $T_s/T_p$  lebih besar dari 100. Harga orde filter  $M$  jarang yang melebihi 12. Dengan demikian operasi real-time dapat dijalankan hanya dengan satu struktur CSOS. Ketika  $T_s/T_p \gg [M/2]$ , seperti telah dijelaskan maka bukan hanya satu filter saja yang dapat dilayani tetapi struktur CSOS dapat menjalankan pemrosesan data pada kanal suara tambahan. Pada kasus diatas 16 kanal suara dapat dilayani dengan satu struktur CSOS tunggal.

## VI.5 Gabungan pararel filter orde 2

Selain kombinasi kaskade yang telah dijelaskan terdapat kombinasi lain yang juga berguna pada penerapan filter digital yaitu *parallel second-order sections (PSOS)*. Struktur ini berguna pada penerapan struktur filter FIR pencuplikan frekuensi. Jika  $M \geq N_P + N_F$ , maka  $H(z)$  dapat difaktorkan menjadi

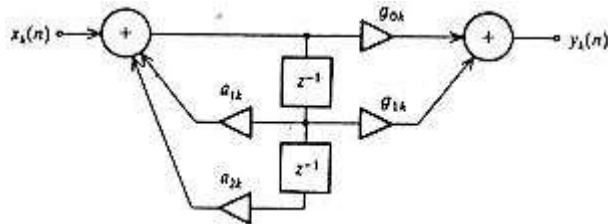
$$H(z) = z^{N_F} \sum_{k=1}^{[M/2]} G_k(z) \quad (6.17)$$



dengan

$$G_k(z) = \frac{g_{0k} + g_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$

Konfigurasi filter ini dapat dilihat pada gambar 6.6 berikut:



Gambar 6.6 Struktur PSOS

Untuk For  $N_P + N_F > M$ , batas atas penjumlahan menjadi  $(N_P + N_F) / 2$ .

Persamaan filter PSOS adalah sebagai berikut:

$$y_k(n) = a_{1k} y_k(n-1) + a_{2k} y_k(n-2) + g_{0k} x_k(n) + g_{1k} x_k(n-1) \quad (6.18)$$

pada kawasan z:

$$Y_k(z) = a_{1k} z^{-1} Y_k(z) + a_{2k} z^{-2} Y_k(z) + g_{0k} X_k(z) + g_{1k} z^{-1} X_k(z) \quad (6.19)$$

Oleh karena runtun input  $\{x(n)\}$  diterapkan secara simultan pada bagian PSOS maka diperlukan faktor skala untuk tiap bagian. Faktor skala termasuk dalam koefisien pembilang  $g_{0k}$  dan  $g_{1k}$ . Kutub-kutub pada sistem PSOS persamaan (6.17) sama dengan kutub-kutub pada CSOS persamaan (6.14).

Walaupun demikian hanya ada satu zero pada setiap PSOS, sebagai lawan pasangan kutub konjugat kompleks pada CSOS. Hal ini terjadi karena tambahan zero dibangkitkan dalam fungsi alih sistem secara keseluruhan

untuk membuat hubungan paralel. Secara umum penentuan lokasi zero pada hubungan paralel bukan persoalan yang mudah.

#### Contoh 6.4

Pertimbangkan pole dan zero gabungan paralel filter IIR orde satu berikut

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

Penyelesaian:

Dengan menyatukan penyebut maka didapatkan:

$$H_2(z) = \frac{2 - (a + b)z^{-1}}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}$$

$H_2(z)$  mempunyai pole yang sama dengan pole pada suku suku  $H_1(z)$ , tetapi pada  $H_2(z)$  secara eksplisit dapat diketahui ada sebuah zero pada  $z = (a + b)/2$ . Tentu saja zero ini juga terdapat pada  $H_1(z)$  tetapi tidak terlihat jelas.

#### Contoh 6.5.

Terapkan fungsi sistem berikut dalam kombinasi struktur PSOS

$$H(z) = \frac{z/3 + 5/12 + 5z^{-1}/12 + z^{-2}/12}{1 - z^{-1}/2 + z^{-2}/4}$$

Penyelesaian:

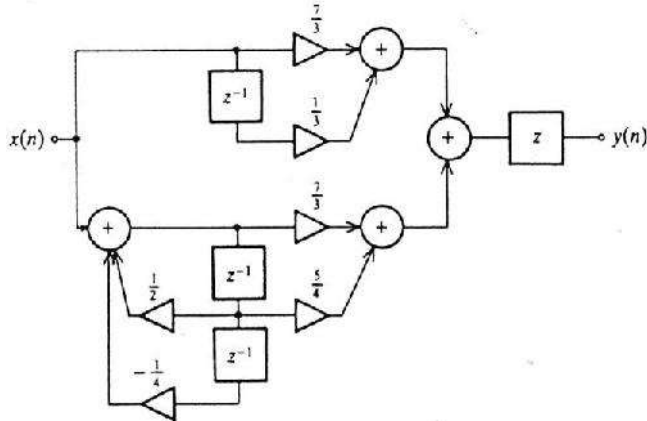
Dengan mengeluarkan z didapat:

$$H(z) = \frac{z(1/3 + 5z^{-1}/12 + 5z^{-2}/12 + z^{-3}/12)}{1 - z^{-1}/2 + z^{-2}/4}$$

Untuk mendapatkan bentuk  $H(z)$  seperti pada persamaan (6.17), maka kita memisahkan penyebut sesuai pembilang sebagai berikut:

$$H(z) = z \left[ \frac{7}{3} + \frac{z^{-1}}{3} + \frac{7/3 + 5z^{-1}/4}{1 - z^{-1}/2 + z^{-2}/4} \right]$$

sehingga dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 6.7 Struktur PSOS hasil penerapan contoh 6.5

Bentuk paralel maupun kaskade diatas dapat diterapkan untuk filter rekursif maupun non rekursif.

## VI.6 Struktur Filter fase Linier

Suatu filter akan mempunyai fase linier apabila runtun tanggapan cuplik satuannya adalah simetrik atau anti simetrik pada beberapa titik waktu. Oleh karena koefisien filter sama dengan besarnya tanggapan cuplik satuan pada titik-titik waktu maka sepasang pengali mempunyai koefisien yang sama besar. Untuk menghemat operasi perkalian maka masukan pengali dapat digabungkan dahulu baru dikalikan. Dengan ini jumlah perkalian akan berkurang kira-kira setengah. Hal ini dilakukan karena perkalian paling banyak memakan waktu pada operasi filter digital.

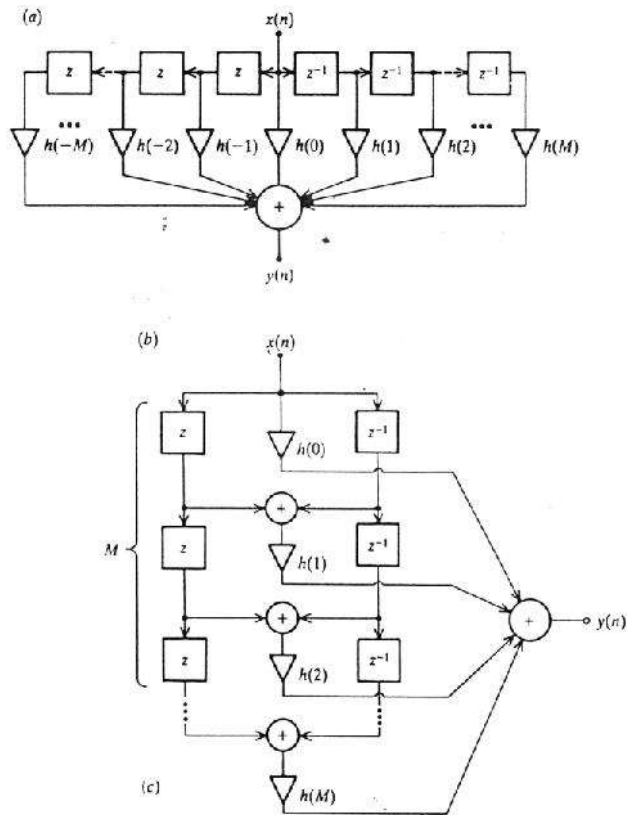
Untuk menggambarkan hal ini pertimbangkan Filter FIR non kausal yang mempunyai tanggapan cuplik satuan genap antara  $M \leq n \leq M$ . Fungsi sistemnya adalah sebagai berikut:

$$H(z) = \sum_{n=-M}^M h(n) z^{-n} \quad (6.20)$$

Penerapan dalam Direct Form I seperti ditunjukkan dalam gambar 6.8(a) membutuhkan  $2M + 1$  perkalian. Untuk tanggapan cuplik satuan genap maka koefisien bernilai sama dapat digabungkan sehingga:

$$H(z) = h(0) + \sum_{n=1}^M h(n) [z^n + z^{-n}] \quad (6.21)$$

Persamaan ini menjelaskan bahwa koefisien  $h(n)$  dapat diaplikasikan pada penjumlahan keluaran dua elemen delay seperti gambar 6.8(b). Jumlah perkalian yang dibutuhkan hanya  $M + 1$  perkalian.



Gambar 6.8 (a) Direct Form I untuk filter non kausal (b) struktur filter fasa linier non kausal

**Contoh 6.6**

Gambarkan fungsi alih berikut dalam struktur FIR fase linier

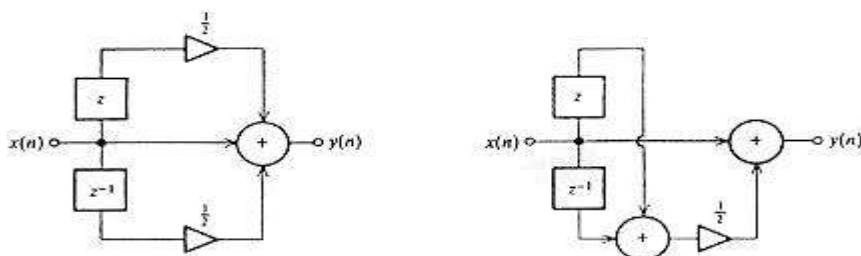
$$H(z) = \frac{z}{2} + 1 + \frac{z^{-1}}{2}$$

Penyelesaian:

Interpolator linier dapat diterapkan langsung pada struktur filter langsung seperti gambar 6.9. Untuk menunjukkan tanggapan cuplik satuan simetris genap dapat ditulis:

$$H(z) = 1 + [z + z^{-1}] / 2$$

Dan dapat diterapkan dengan satu perkalian. Langkah yang sama juga dapat diterapkan untuk filter kausal. Filter kausal dapat diterapkan langsung dalam struktur Direct Form I. Tunda waktu yang mempunyai koefisien sama dijumlahkan dahulu sebelum dikalikan.



Gambar 6.9 Dua struktur ekuivalen Filter FIR fase linier non kausal contoh 6.6

### Contoh 6.7

Diketahui:

$$H(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} + \frac{z^{-2}}{2}$$

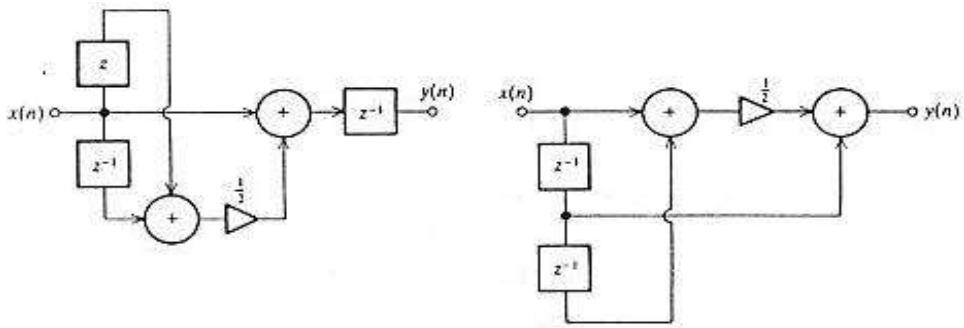
Kombinasikan keluaran delay menjadi satu perkalian jika koefisiennya sama.

Penyelesaian:

Fungsi sistem tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$H(z) = z^{-1} + [1 + z^{-2}]/2$$

Dengan demikian dapat kita gambarkan filter sebagai berikut:



Gambar 6.10 Dua struktur ekuivalen Filter FIR fase linier non kausal contoh 6.7.

### VI.7 Struktur pencuplikan frekuensi untuk Filter FIR

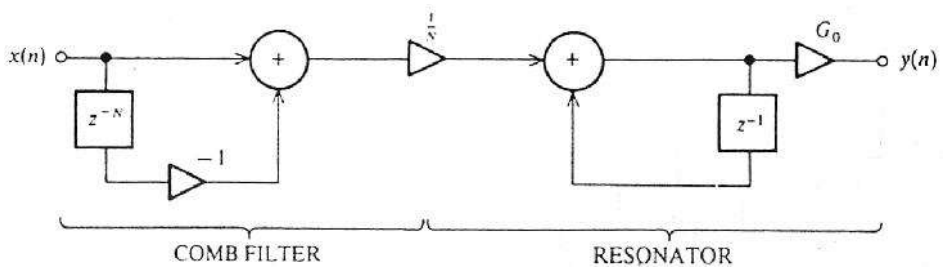
Pada sub bab berikut dibahas metode lain dalam implementasi filter FIR. Pada struktur ini terjadi penggabungan kaskade filter non rekursif dan sejumlah filter rekursif untuk membangkitkan tanggapan cuplik satuan terbatas.

Pertimbangkan filter FIR berikut yang mempunyai tanggapan cuplik satuan berdurasi terbatas kausal sebanyak  $N$ .

$$h_0(n) = \begin{cases} G_0 / N & \text{untuk } 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Fungsi alih filter adalah sebagai berikut:

$$H_0(z) = \frac{G_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} \quad (6.23)$$



Gambar 6.11 Comb filter followed by a resonator to implement an FIR filter.

Dengan menggunakan rumusan penjumlahan geometric maka:

$$H_0(z) = \frac{G_0}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \quad (6.24)$$

Bentuk ini memungkinkan implementasi filter sebagai gabungan kaskade dua bagian seperti ditunjukkan gambar 6.11. Fungsi sistem kaskade tersebut:

$$H_0(z) = H_C(z) H_{R,0}(z) \quad (6.25)$$

dengan

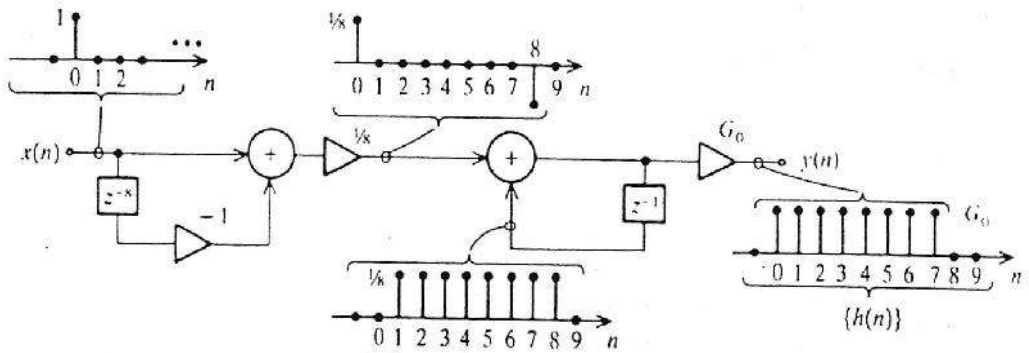
$$H_C(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N}$$

dan

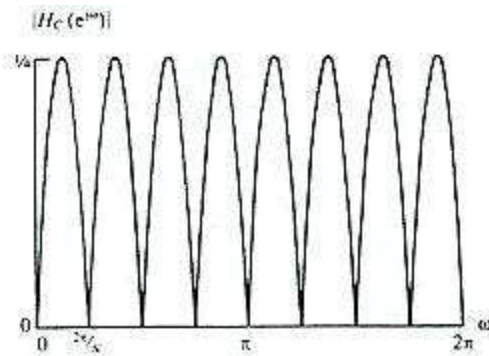
$$H_{R,0}(z) = \frac{G_0}{1 - z^{-1}}$$

$H_C(z)$  disebut fungsi alih filter sisir yang namanya dilihat dari tanggapan magnitude filter. Filter sisir mempunyai tanggapan cuplik satuan sebanyak  $(N + 1)$  titik dengan dua elemen tidak nol,  $h(0) = 1/N$  dan  $h(N) = -1/N$ , seperti ditunjukkan gambar 6.12.





Gambar 6.12 Implementasi filter FIR dengan filter sisir yang mempunyai struktur resonator.



Gambar 6.13 Tanggapan magnitude filter sisir.

Dua elemen tidak nol tersebut menghasilkan fungsi alih sinusoidal:

$$\begin{aligned}
 H_c(e^{j\omega}) &= \frac{1 - e^{-jN\omega}}{N} \\
 &= \frac{2j}{N} e^{-jN\omega/2} \sin(N\omega/2)
 \end{aligned}
 \tag{6.26}$$

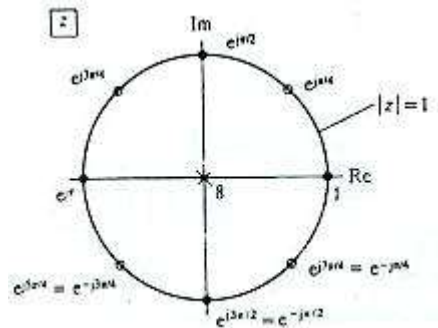
Gambar 6.13 untuk  $N = 8$ .  $H_c(e^{j\omega})$  mempunyai  $N$  zero yang tersebar merata pada range frekuensi  $0 \leq \omega \leq 2\pi$ . Bentuk fungsi transfer ini juga

dapat dijelaskan dengan mempertimbangkan pola kutub dan nol.  $H_c(z)$ .  $H_c(z)$  dapat dijabarkan sebagai:

$$H_c(z) = \frac{1}{N} \prod_{k=0}^{N-1} (1 - e^{j2\pi k/N} z^{-1}) \quad (6.27)$$

Bentuk ini secara eksplisit menandakan terdapat  $N$  zero yang tersebar secara merata pada lingkaran satuan dengan zero pertama pada  $z = 1$  dan semua pole terdapat pada  $z = 0$  seperti yang ditunjukkan gambar 6.14 untuk  $N = 8$ .

$H_{R,k}(z)$  adalah fungsi alih sistem *resonator*, atau filter yang mempunyai pole pada lingkaran satuan saat frekuensi  $\omega_k = 2\pi k/N$ .  $H_{R,0}$  adalah resonator pada  $\omega = 0$ .



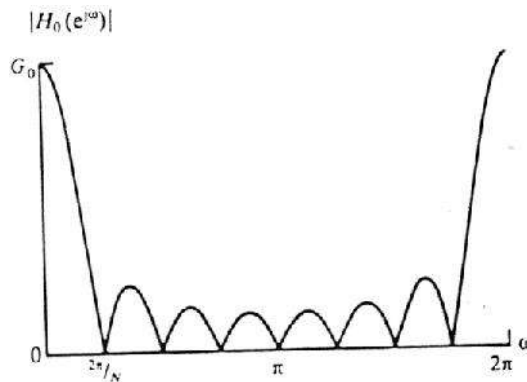
Gambar 6.14 Pola pole dan zero filter sisir untuk  $N=8$ .

Resonator  $H_{R,0}(z)$  mempunyai kutub pada lingkaran satuan saat  $z = 1$ . Oleh karena pole tidak berada di dalam lingkaran satuan sehingga filter tidak stabil. Tanggapan cuplik satuan tidak menuju nol seiring dengan waktu. Aplikasi yang umum untuk filter tipe ini adalah osilator. ch a filter is to implement an oscillator.

Apabila resonator di gabungkan secara kaskade dengan filter sisir maka bagian zero filter sisir yang berlokasi pada  $z = 1$  akan menghapus pole resonator membuat suatu kombinasi yang stabil sehingga tanggapan cuplik satuan mempunyai durasi yang terbatas. Fungsi alih gabungan dua bagian tersebut sama dengan:

$$\begin{aligned}
 H_0(e^{j\omega}) &= \frac{G_0}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} \\
 &= \frac{G_0}{N} e^{-j(N-1)\omega/2} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}
 \end{aligned}
 \tag{6.28}$$

seperti ditunjukkan gambar. 6.15 untuk  $N=8$ ,  $|H_0(e^{j\omega})|$  mempunyai nilai maksimum  $G_0$  saat  $\omega = 0$ , dan mempunyai nilai nol saat  $\omega_k = 2\pi k/N$ , untuk  $1 \leq k \leq N - 1$ . Dengan demikian kita dapat mengatur gain pada  $\omega = 0$  dengan nilai  $G_0$  sembarang tanpa mengakibatkan perubahan pada titik  $\omega_k$  karena gain pada titik ini adalah nol. Hasilnya dapat dihubungkan dengan resonator tambahan secara paralel  $H_{R,0}(z)$  untuk mengatur nilai gain pada titik selain titik  $\omega_k$ .



Gambar 6.15 Tanggapan magnitudo filter sisir yang digabung dengan resonator (N-8).

Perilaku kombinasi filter ini juga dapat dijelaskan dalam kawasan waktu. Filter sisir memberi masukan resonator dengan cuplikan tidak nol pada saat waktu  $n = 0$ . Resonator tanpa rugi-rugi karena koefisien umpan balik tidak pecahan. Hal ini menjaga nilai keluaran sebelum filter sisir kembali memberi masukan negative pada saat  $n = N$ . Kombinasi dua filter ini menghasilkan pulsa kotak dengan cuplikan sebanyak  $N$ .

Pembahasan lebih lanjut tentang gabungan kedua filter ini dilakukan dengan mempertimbangkan resonator bernilai kompleks dengan pole terletak didekat lokasi zero filter sisir yaitu pada saat  $\omega_1 = 2\pi/N$ . Fungsi sistem resonator

$$H_{R,1}(z) = \frac{G_1}{1 - e^{j2\pi/N} z^{-1}} \quad (6.29)$$

dengan  $G_1$  adalah gain bernilai kompleks. Angka ini diatur bernilai sesuai fungsi alih yang diinginkan  $H(e^{j\omega})$  pada  $\omega = 2\pi/N$ , or

$$G_1 = H(e^{j2\pi/N}) \quad (6.30)$$

Untuk mendapatkan koefisien filter yang real diperlukan resonator bernilai kompleks yang kedua, dengan pole konjugat kompleks dari  $H_{R,1}$ . Pole ini juga harus dapat menghapus zero ke  $(N-1)$  filter sisir. Fungsi alih resonator kedua tersebut :

$$H_{R,N-1}(z) = \frac{G_{N-1}}{1 - e^{j2\pi/N} z^{-1}} \quad (6.31)$$

dengan  $G_{N-1}$  adalah gain bernilai kompleks yang bernilai sama dengan  $H(e^{j\omega})$  saat  $(\omega = 2\pi(N-1)/N = 2\pi/N)$ . Fungsi alih filter yang mempunyai tanggapan cuplik satuan bernilai real mempunyai sifat:

$$H(e^{j\omega}) = H^*(e^{j\omega}) \quad (6.32)$$

dengan,  $G_{N-1} = G_1^*$ . Penggabungan dua resonator secara paralel menghasilkan:

$$\begin{aligned} H_{R,1}(z) + H_{R,N-1}(z) &= \frac{G_1}{1 - e^{j2\pi/N} z^{-1}} + \frac{G_{N-1}}{1 - e^{-j2\pi/N} z^{-1}} \\ &= \frac{G_1 + G_1^* - [G_1 e^{-j2\pi/N} + G_1^* e^{j2\pi/N}] z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi/N) z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{2\operatorname{Re}[G_1] - 2\operatorname{Re}[G_1 e^{j2\pi/N}] z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi/N) z^{-1} + z^{-2}} \end{aligned}$$

Gabungan ini membentuk resonator orde dua yang semua koefisiennya bernilai real.

Langkah ini dapat digeneralisasi untuk memasukkan resonator bernilai kompleks pada setiap lokasi zero ke N dari filter sisir. Semua resonator tersebut dihubungkan secara paralel dan setelah itu dihubungkan secara kaskade dengan filter sisir menghasilkan fungsi alih total  $H_T(z)$ , yaitu

$$H_T(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{G_k}{1 - e^{j2\pi k/N} z^{-1}} \quad (6.34)$$

### Contoh 6.8

Pertimbangkan penerapan interpolator linier kausal dengan struktur sisir dan resonator. Tanggapan cuplik satuan sistem

$$h(0) = \frac{1}{2} \quad h(1) = 1 \quad h(2) = \frac{1}{2} \quad h(n) = 0, \quad \text{otherwise}$$

Penyelesaian:

Fungsi alih sistem:

$$H(e^{j\omega}) = (1 + \cos(\omega)) e^{-j\omega}$$

Oleh karena jumlah elemen tanggapan cuplik satuan sama dengan 3 maka dipilih  $N = 3$ . The comb filter system function is then

$$H_c(z) = (1 - z^{-3})/3$$

$H_c(z)$  mempunyai tiga zero yang berlokasi pada  $z = e^{j2\pi k/3}$ , untuk  $k = 0, 1$  dan  $2$ . Zero pada  $z = 1$  akan menghapus resonator real sedangkan zero pada  $z = e^{\pm j2\pi/3}$  akan dihapus oleh pasangan resonator kompleks. Gain resonator:

$$G_0 = H(e^{j0}) = 2$$

$$G_1 = H(e^{j2\pi/3}) = \frac{1}{2} e^{-j2\pi/3}$$

$$G_2 = H(e^{j4\pi/3}) = \frac{1}{2} e^{j2\pi/3}$$

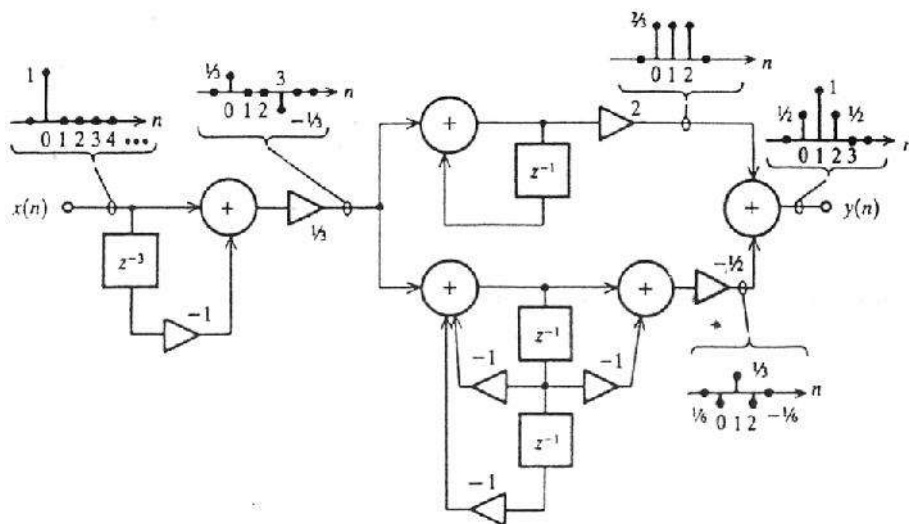
Tampak bahwa  $G_0$  adalah real dan  $G_2 = G_1^*$ . Fungsi sistem resonator orde pertama bernilai real adalah:

$$H_{R,0}(z) = \frac{2}{1 - z^{-1}}$$

Fungsi sistem kombinasi paralel resonator orde pertama real adalah:

$$\begin{aligned} H_{R,1}(z) + H_{R,2}(z) &= \frac{\frac{1}{2} e^{-j2\pi/3}}{1 - e^{j2\pi/3} z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2} e^{j2\pi/3}}{1 - e^{-j2\pi/3} z^{-1}} \\ &= \frac{2 \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} e^{-j2\pi/3} \right] - 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} e^{-j4\pi/3} \right] z^{-1}}{1 - 2 \cos(2\pi/3) z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{\cos(2\pi/3) - \cos(4\pi/3) z^{-1}}{1 - 2 \cos(2\pi/3) z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} (1 - z^{-1})}{1 + z^{-1} + z^{-2}} \end{aligned}$$

Koefisien resonator orde kedua adalah real. Struktur filter digambarkan pada gambar 6.16. Tanggapan cuplik satuannya juga ditunjukkan dalam gambar berikut:



Gambar 6.16 Implementasi filter FIR dengan menggunakan filter sisir dan resonator pada contoh 6.8.

## VI.8 Perancangan Filter IIR

Perancangan filter jenis ini sering dimulai dengan perancangan filter analog. Suatu fungsi alih filter analog sering dituliskan:

$$H(j\Omega) = H(s)|_{s=j\Omega} \quad (6.35)$$

Ada beberapa teknik perancangan filter analog yang kita kenal seperti Butterworth, Chebyshev dan teknik, teknik lainnya. Yang diperlukan adalah hal ini adalah didapatkannya  $H(s)$  filter analog.

Dengan diketemukannya filter analog tersebut maka dengan mudah dapat dirancang filter digital dengan teknik-teknik:

### 1. Metode impulse invariant

Metode ini digunakan dengan cara pencuplikan fungsi respon analog sehingga didapatkan respon diskrit:

$$H(nT_s) = h_A(t)/_{t=nT_s} \quad (6.36)$$

## 2. Metode bilinear transformation

Metode ini dilakukan dengan cara mengubah parameter  $s$  menjadi parameter  $z$  dengan rumusn:

$$Z = \{(sT_s/2 + 1) / (sT_s/2 - 1)\} \quad (6.37)$$

$T_s$  yang terdapat dalam rumusan diatas adalah periode sampling.

## VI.9 Perancangan filter FIR

Perancangan filter FIR lebih mudah daripada perancang filter IIR. Yang terpenting pada perancangan ini adalah menentukan fungsi alih sistem atau tanggapan cuplik satuan sistem:

$$H_{FIR}(z) = \sum_{n=-NF}^{Np} b_k z^{-k} \quad (6.38)$$

atau menentukan tanggapan cuplik satuan sistem  $h(n)$ . Setelah  $H(z)$  ataupun  $h(n)$  diketemuka maka dengan mudah dapat digambarkan struktur filturnya.  $H(z)$  maupun  $h(n)$  dapat dicari dari tanggapan magnitudo dan fase yang diinginkan. Apabila diketahui suatu tanggapan cuplik satuan yang tidak terhingga durasinya maka dapat dilakukan teknik pemotongan dengan jendela persegi maupun segitiga.



## Soal-Soal Latihan

1. Implementasikan fungsi sistem berikut dalam bentuk Direct Form I, Direct Form II, kascade dan paralel dengan semua koefisien real.

$$(a) H(z) = \frac{1}{(1 + az^{-1})(1 - bz^{-1})} \text{ (gunakan bagian orde pertama)}$$

$$(b) H(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})^3}$$

$$(c) H(z) = \frac{1 - b \cos(\theta) z^{-1}}{(1 - az^{-1})(1 - 2b \cos(\theta) z^{-1} + b^2 z^{-2})}$$

$$(d) H(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})^2} + \frac{1}{(1 - bz^{-1})^2}$$

2. Terapkan fungsi alih berikut dalam Direct Form I, Direct Form II, cascade, parallel dan struktur pencuplikan frekuensi dengan semua koefisien real.

$$(a) H(z) = \frac{1 - 2r_1 \cos(\theta_1) z^{-1} + r_1^2 z^{-2}}{1 - 2r_2 \cos(\theta_2) z^{-1} + r_2^2 z^{-2}}$$

$$(b) H(z) = \frac{1 - z^{-4}}{1 - 2r \cos(\theta) z^{-2} + r^2 z^{-4}}$$

$$(c) H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{(1 - 2r \cos(\theta) z^{-1} + r^2 z^{-2})^2}$$

3. Terapkan fungsi alih berikut dalam Direct Form I, Direct Form II, Kascade dan paralel bagian-bagian orde kedua dengan semua koefisien real.

$$(a) H(z) = \frac{A(1 + z^{-1})(1 + z^{-2})(1 + z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 0.7z^{-1})(1 - 1.2z^{-1} + 0.8z^{-2})(1 - 1.2z^{-1} + 0.6z^{-2})(1 - 0.9z^{-1} + 0.4z^{-2})}$$

$$(b) H(z) = \frac{A(1-z^{-2})(1+1.8z^{-1}+z^{-2})(1-1.8z^{-1}+z^{-2})}{(1+0.1z^{-1}+0.5z^{-2})(1-0.6z^{-1}+0.8z^{-2})(1+0.7z^{-1}+0.8z^{-2})}$$

$$(c) H(z) = \frac{A}{(1-1.7z^{-1}+0.7z^{-2})(1-1.7z^{-1}+0.9z^{-2})}$$

$$(d) H(z) = A \frac{1+z^{-1}}{1-0.8z^{-1}} \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-1.6z^{-1}+0.8z^{-2}}$$

$$(e) H(z) = A \frac{1-z^{-2}}{1-0.4z^{-1}+0.9z^{-2}} \frac{1-z^{-2}}{1+0.1z^{-1}+0.7z^{-2}} \frac{1-z^{-2}}{1+0.6z^{-1}+0.9z^{-2}}$$

$$(f) H(z) = A \frac{1-0.1z^{-1}+z^{-2}}{1+0.1z^{-1}+0.2z^{-2}} \frac{1-0.1z^{-1}+z^{-2}}{1-0.4z^{-1}+0.9z^{-2}} \frac{1-0.1z^{-1}+z^{-2}}{1+0.6z^{-1}+0.9z^{-2}}$$

4. Tentukan tanggapan cuplik satuan pada sambungan filter sisir dengan resonator orde pertama (pole pada  $z = 1$ ) ketika gabungan itu dibalik susunannya.
5. Dengan metode transformasi bilinear rancanglah filter yang mempunyai spesifikasi :  
 passband  $-1 < |H(j\Omega)|_{dB} \leq 0$  untuk  $0 < \Omega < 1404\pi$  rad/s dengan  $\Omega_p = 1404\pi$   
 stopband  $|H(j\Omega)|_{dB} \leq -60$  untuk  $\Omega > 8268$  rad/s dengan  $\Omega_s = 8268\pi$
6. Rancanglah suatu filter FIR dengan  $h(n) = 0.9^n$  untuk  $n > 0$  dan  $h(0) = 0$  gunakan teknik jendela persegi.

## DAFTAR PUSTAKA

- Antoniou, A., 2016. *Digital signal processing*, McGraw-Hill
- Barsainya, R., Rawat, T.K. and Kumar, M., 2017. Design of minimum multiplier fractional order differentiator based on lattice wave digital filter. *ISA transactions*, 66, pp.404-413.
- Cavicchi J.T., Moriarty, E., 2000, *Digital Signal Processing*, John Wiley & Son, New York
- Kuc R. 1982, *Introduction to Digital Signal Processing*, Mc Graw Hill, New York
- Meador D. 2002., *Analog Signal Processing with Laplace Transform and Filter Design*, Thomson Learning Inc, New York
- Oh, H.E., Park, D.J., Park, J.P., Ahn, S.J. and Jeong, W.B., 2017. Digital filter design of frequency weighting function to measure and assess human vibration. *Noise Control Engineering Journal*, 65(3), pp.183-190.
- Proakis, J.G., 2001, *Digital signal processing: principles algorithms and applications*, Pearson Education India.
- Stearns, S.D. and Hush, D.R., 2016. *Digital signal processing with examples in MATLAB®*. CRC Press.
- Tan, L. and Jiang, J., 2018. *Digital signal processing: fundamentals and applications*. Academic Press.
- Widmann, A., Schröger, E. and Maess, B., 2015. Digital filter design for electrophysiological data—a practical approach. *Journal of neuroscience methods*, 250, pp.34-46.