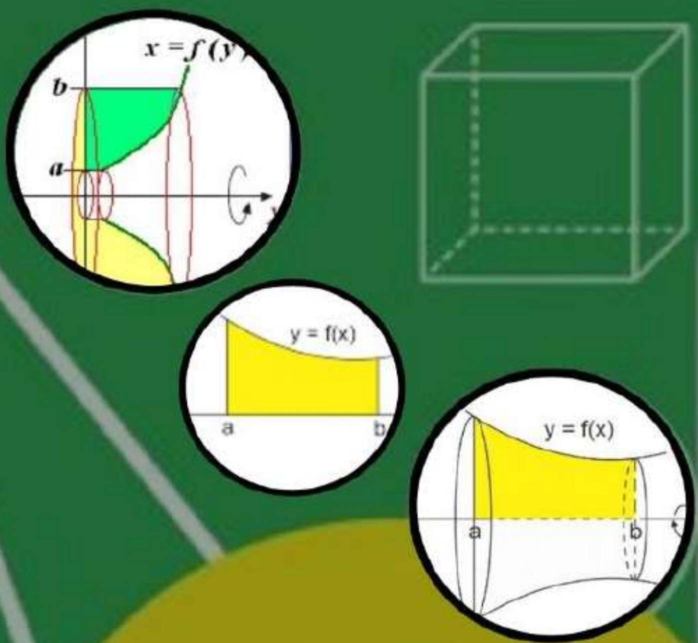
Nuriana Rachmani Dewi

Penerbit
LAKEISHA

Buku Ajar
KALKULUS INTEGRAL
Berorientasi pada Pembelajaran Preprospec Berbantuan TIK



Buku Ajar Kalkulus Integral
Berorientasi pada Pembelajaran Preprospec Berbantuan TIK
Nuriana Rachmani Dewi

BUKU AJAR

KALKULUS INTEGRAL

Berorientasi pada Pembelajaran Preprospec Berbantuan TIK

Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta

Pasal 1:

1. Hak Cipta adalah hak eksklusif pencipta yang timbul secara otomatis berdasakan prinsip deklaratif setelah suatu ciptaan diwujudkan dalam bentuk nyata tanpa mengurangi pembatasan sesuai dengan ketentuan peraturan perundang undangan.

Pasal 9:

2. Pencipta atau Pengarang Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam pasal 8 memiliki hak ekonomi untuk melakukan a.Penerbitan Ciptaan; b.Penggandaan Ciptaan dalam segala bentuknya; c.Penerjemahan Ciptaan; d.Pengadaptasian, pengaransemen, atau pentrasformasian Ciptaan; e.Pendistribusian Ciptaan atau salinan; f.Pertunjukan Ciptaan; g.Pengumuman Ciptaan; h.Komunikasi Ciptaan; dan i. Penyewaan Ciptaan.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak C ipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

Nuriana Rachmani Dewi

BUKU AJAR KALKULUS INTEGRAL

Berorientasi pada Pembelajaran Preprospec Berbantuan TIK

Penerbit Lakeisha
2020

BUKU AJAR KALKULUS INTEGRAL Berorientasi pada Pembelajaran Preprospec Berbantuan TIK

Penulis:
Nuriana Rachmani Dewi

Editor:
Andriyanto, S.S., M.Pd
Layout : Yusuf Deni Kristanto, S.Pd
Design Cover : Tim Lakeisha
Cetak Pertama Desember 2020
14,8 cm × 21 cm, 62 Halaman
ISBN: 978-623-6948-16-3

Diterbitkan oleh Penerbit Lakeisha
(**Anggota IKAPI No.181/JTE/2019**)

Redaksi
Jl. Jatinom Boyolali, Srikaton, Rt.003, Rw.001, Pucangmiliran, Tulung, Klaten, Jawa Tengah
Hp. 08989880852, Email: penerbit_lakeisha@yahoo.com
Website : www.penerbitlakeisha.com

KATA PENGANTAR

Buku Ajar Kalkulus Integral Berorientasi pada Pembelajaran *Preprospec* Berbantuan TIK ini adalah buku pegangan mahasiswa pada Mata kuliah kalkulus integral. Buku ini disusun berorientasi pada Pembelajaran Preprospec Berbantuan TIK. Pembelajaran Preprospec Berbantuan TIK ini dikembangkan khusus untuk pembelajaran matematika dan terdiri dari lima tahapan, yaitu Prepare, Problem Solving, Presentation, Evaluation, Conclusion yang pada beberapa tahapannya menggunakan media yang berbasis Teknologi Informasi dan Komunikasi (TIK). Buku ini berisi materi tentang Anti Turunan, Notasi Sigma, Induksi Matematika, Pendahuluan Luas, Jumlah Riemann, Integral Tertentu, Teorema Dasar Kalkulus, Luas daerah Bidang Rata, Volum Benda Putar, Panjang Busur dan Luas Permukaan Benda Putar, serta Penerapan Integral pada Kerja, Pegas dan Pemompaan Cairan.

Terima kasih kami ucapkan kepada seluruh pihak yang telah membantu dalam penyusunan buku ini. Saran dari berbagai pihak sangat kami harapkan untuk perbaikan buku ini pada edisi selanjutnya.

Penyusun

DAFTAR ISI

ANTI TURUNAN

Kemampuan yang diharapkan

Setelah mempelajari topik ini diharapkan mahasiswa dapat:

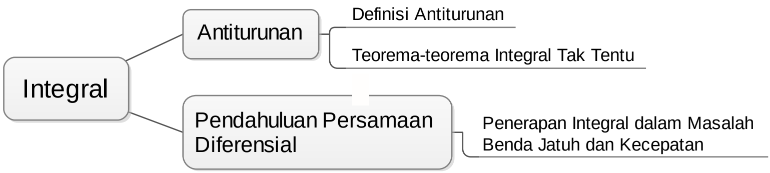
Kognitif

1. Merumuskan definisi tentang anti turunan.
2. Memberikan penjelasan dengan menggunakan model matematika dalam mengerjakan tugas yang berkaitan dengan anti turunan.
3. Menjelaskan hubungan antara anti turunan pada fungsi sinus dan kosinus.
4. Menentukan anti turunan menggunakan teorema aturan pangkat, kelinieran atau integral sinus dan kosinus.
5. Memberikan bukti Teorema Aturan Pangkat, Kelinieran dan Integral Sinus Kosinus.
6. Menyatakan peristiwa sehari-hari yang berkaitan dengan integral dalam bahasa matematis.
7. Membuat pertanyaan yang berkaitan dengan teorema-teorema anti turunan.
8. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan anti turunan.

Afektif

9. Selalu berusaha menyelesaikan tugas Kalkulus.
10. Berusaha mencari bantuan jika menghadapi kesulitan dalam mengerjakan tugas Kalkulus.
11. Berani bertanya dan mengungkapkan pendapat.

PETA KONSEP



APERSEPSI

<u>TURUNAN</u>

Definisi

Turunan sebuah fungsi f adalah fungsi lain f' yang nilainya pada sembarang bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Asalkan limit ini ada dan bukan ∞ atau -∞.

Aturan Pencarian Turunan

Aturan Fungsi Konstanta

Jika $f(x) = k$ dengan k suatu konstanta, maka untuk sembarang $x, f'(x) = 0$; yaitu

$D_x(k) = 0$

Aturan Fungsi Identitas

Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$; yaitu

$D_x(x) = 1$

Aturan Pangkat

Jika $f(x) = x^n$, dengan n bilangan bulat positif, maka $f'(x) = nx^{n-1}$; yaitu

$D_x(x^n) = nx^{n-1}$

Aturan Kelipatan Konstanta

Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka $(kf)'(x) = k.f'(x)$; yaitu

$$D_x[k.f(x)] = k.D_x f(x)$$

Aturan Jumlah

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$; yaitu

$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$$

Aturan Selisih

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$; yaitu

$$D_x[f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x)$$

Aturan Hasilkali

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f.g)'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x)$; yaitu

$D_x[f(x).g(x)] = f(x).D_x g(x) + D_x f(x).g(x)$

Aturan hasilbagi

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan dengan $g(x) \neq 0$, maka $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$; yaitu

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x).D_x f(x) - f(x).D_x g(x)}{g^2(x)}$$

MATERI

CONTOH PENERAPAN MATERI

Sumber: https://m.solopos.com

Suatu kereta berangkat dari Stasiun Tawang dengan percepatan $3\ {}^{m}/_{s^2}$ selama 8 detik. Selanjutnya bergerak dengan kecepatan tetap V_m selama 100 detik, dan akhirnya diperlambat dengan laju $4\ {}^{m}/_{s^2}$ untuk berhenti di Stasiun Poncol. Carilah V_m dan jarak dari Stasiun Tawang ke Stasiun Poncol.

DEFINISI ANTI TURUNAN

1. Buatlah contoh fungsi f.
2. Tentukan fungsi F sedemikian rupa sehingga $D_x F(x) = f(x)$ atau $F'(x) = f(x)$.
3. Apakah fungsi F tersebut tunggal? Jika tidak, berikan beberapa contoh bentuk fungsi F yang berbeda.
4. Apakah yang dapat anda simpulkan?
5. Buatlah definisi F sebagai suatu antiturunan dari f.
6. Apakah notasi dari antiturunan?

TEOREMA-TEORAMA INTEGRAL TAK TENTU

<u>Aturan Pangkat</u>

Jika r adalah sembarang bilangan rasional kecuali -1, maka

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

Anti Turunan Sinus dan Kosinus

$$\int \sin x \, dx = \cos x$$

$$\int \cos x \, dx = -\sin x$$

Integral Tak Tentu adalah Operator Linier

Andaikan f dan g mempunyai antiturunan (integral tak tentu) dan andaikan k adalah suatu konstanta, maka

(i) $\int k\, f(x)dx = k \int f(x)dx$

(ii) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$; dan akibatnya

(iii) $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Aturan Pangkat yang Digeneralisasi

Andaikan g adalah suatu fungsi yang terdiferensialkan dan r suatu bilangan rasional yang bukan -1, maka

$$\int [g(x)]^r g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

Catatan: Pembuktian teorema-teorema di atas dilakukan pada Penugasan.

7. Buatlah dua buah contoh penggunaan teorema Aturan Pangkat yang Digeneralisasi salah satunya memuat fungsi sinus atau kosinus.

PERSAMAAN DIFERENSIAL

1. Tentukan persamaan xy dari suatu kurva yang melalui (1,3) dan kemiringan pada setiap titiknya adalah setengah kali absis titik tersebut.
2. Suatu kereta berangkat dari Stasiun Tawang dengan percepatan 3 $^{m}/_{s^2}$ selama 8 detik. Selanjutnya bergerak dengan kecepatan tetap V_m selama 100 detik, dan akhirnya diperlambat dengan laju 4 $^{m}/_{s^2}$ untuk berhenti di Stasiun Poncol. Carilah V_m dan jarak dari Stasiun Tawang ke Stasiun Poncol.

LATIHAN

Petunjuk

1. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan cermat dan teliti.
2. Jika membutuhkan bimbingan, bertanyalah pada dosen.
3. Selesaikanlah soal yang diberikan dengan penuh keyakinan.

Soal

1. Tentukan nilai $\int 4(x^3 + \sqrt{x})\,dx$.
2. Tentukan $f(x)$ jika diketahui $f''(x) = 2\sqrt[3]{x+1}$.
3. Tentukan penyelesaian dari persamaan $\frac{dy}{dx} = y^2(x^3 - x); y = 4$ pada $x = 0$.

PENUGASAN

Petunjuk

1. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan cermat dan teliti.
2. Jika membutuhkan bimbingan, bertanyalah pada dosen.
3. Selesaikanlah soal yang diberikan dengan penuh keyakinan.

Soal

1. Buktikan Teorema Aturan Pangkat, Antiturunan Sinus dan Kosinus, Integral Tak Tentu adalah Operator Linier serta Aturan Pangkat yang Digeneralisasi.
2. Populasi Orang Utan (P) pada suatu desa di Pulau Kalimantan telah berkembang pada tingkat yang sebanding dengan akar pangkat tiga dari jumlah populasi penduduk di desa tersebut. Jika populasi penduduk pada tahun 2000 adalah 1000 jiwa dan pada tahun 2010 adalah 1700 jiwa, tentukan
   a. Persamaan diferensial untuk P pada waktu t dengan dua syarat yang berkaitan.
   b. Selesaikan persamaan diferensial pada soal (a).
   c. Kapankah populasi Orang Utan akan mencapai 3000 ekor?

NOTASI SIGMA, INDUKSI MATEMATIKA DAN PENDAHULUAN LUAS

Kemampuan yang diharapkan

Setelah mempelajari topik ini diharapkan mahasiswa dapat:

Kognitif

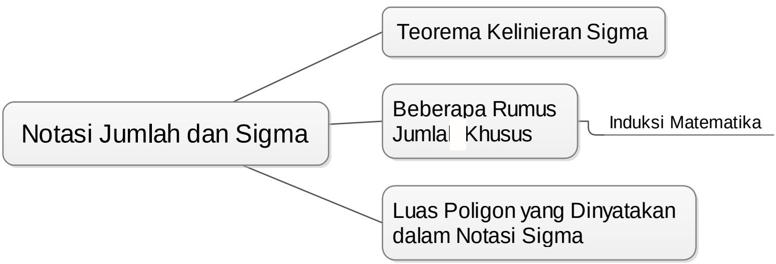
1. Memberikan penjelasan dengan menggunakan sifat-sifat notasi sigma dalam menyelesaikan tugas yang berkaitan dengan notasi sigma.
2. Menyatakan peristiwa sehari-hari dalam bahasa matematis khususnya notasi sigma.
3. Menjelaskan hubungan antara notasi sigma dan Induksi matematika.
4. Menjelaskan hubungan antara notasi sigma dan luas poligon.
5. Menjelaskan luas poligon dalam dan luar dengan menggunakan gambar.
6. Menjelaskan representasi ekuivalen konsep luas poligon luar dan poligon dalam.
7. Memperkirakan luas daerah yang dibatasi fungsi tertentu dengan menggunakan luas poligon dalam maupun poligon luar.

8. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan notasi sigma dan luas poligon.

Afektif

9. Selalu berusaha menyelesaikan tugas Kalkulus.
10. Berusaha mencari bantuan jika menghadapi kesulitan dalam mengerjakan tugas Kalkulus.
11. Berani bertanya dan mengungkapkan pendapat.

PETA KONSEP



APERSEPSI

<u>BARISAN DAN DERET</u>

Barisan merupakan susunan bilangan yang memenuhi aturan tertentu. Untuk menentukan suku-suku suatu barisan kita melihat keteraturan pola dari suku-suku sebelumnya.

Salah satu cara untuk menentukan rumus umum suku ke-n suatu barisan adalah dengan memperhatikan selisih antara dua suku yang berurutan. Bila pada satu tingkat pengerjaan belum diperoleh selisih tetap, maka pengerjaan dilakukan pada tingkat berikutnya sampai diperoleh selisih tetap. Suatu barisan disebut **berderajat satu (linear)** bila selisih tetap diperoleh dalam satu tingkat pengerjaan, disebut **berderajat dua** bila selisih tetap diperoleh dalam dua tingkat pengerjaan dan seterusnya.

Bentuk umum dari barisan-barisan itu merupakan fungsi dalam n sebagai berikut:

Selisih tetap 1 tingkat $Un = an + b$

Selisih tetap 2 tingkat $Un = an2 + bn + c$

Selisih tetap 3 tingkat $Un = an3 + bn2 + cn + d$

Perlu diperhatikan bahwa a dan b pada fungsi ini **tidak sama** dengan a = suku pertama dan b = beda pada suku-suku barisan aritmetika yang dibicarakan sebelumnya.

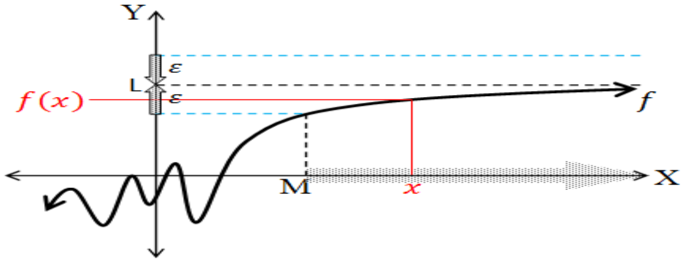
Selanjutnya deret adalah jumlah suku-suku dari suatu barisan. Untuk menghitung jumlah n suku pertama (S_n) dari suatu deret dapat digunakan cara sebagai berikut.

$$S_n = a_1 C_1^n + a_2 C_2^n + a_3 C_3^n + \cdots + a_t C_t^n$$

dengan S_n = jumlah n suku pertama, t = derajat suatu deret, $a_1 =$ suku pertama deret, $a_2, \dots, a_t =$ suku pertama beda sampai diketahui beda tetap, dan $C_1^n, \dots, C_t^n =$ kombinasi sampai derajat tertentu.

LIMIT DI TAK HINGGA

Perhatikan grafik fungsi f yang terdefinisi di $\mathbb{R}$ berikut:

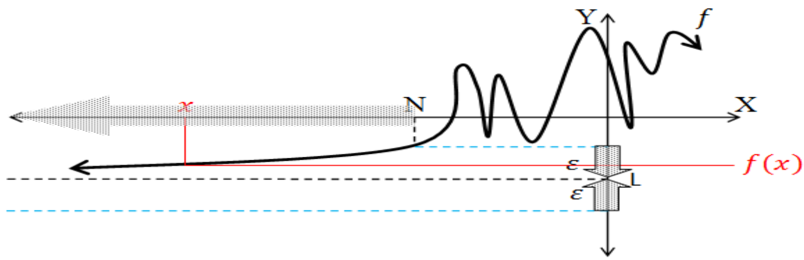


Definisi Limit $x \to \infty$

Misalkan f didefinisikan pada $[c, \infty)$ untuk beberapa bilangan c. Dinyatakan bahwa $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan M sedemikian sehingga

$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Perhatikan grafik fungsi f yang terdefinisi di $\mathbb{R}$ berikut:



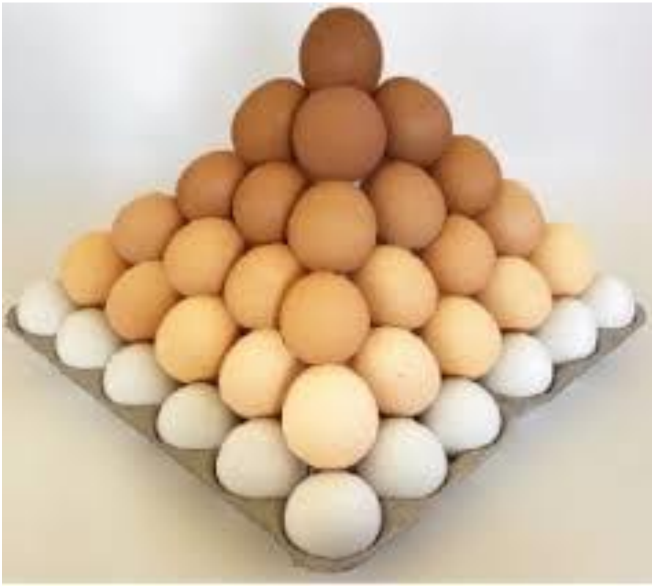
Definisi Limit $x \to -\infty$

Misalkan f didefinisikan pada $(-\infty, c]$ untuk beberapa bilangan c. Dinyatakan bahwa $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan N sedemikian sehingga

$x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

MATERI

CONTOH PENERAPAN MATERI



Sumber: https://hasilun.puspendik.kemdikbud.go.id

Seorang anak menata telur dengan bentuk seperti pada gambar di atas.

1. Nyatakan banyaknya bola yang disusun anak tersebut dalam bentuk deret.
2. Nyatakan juga dalam bentuk Notasi Sigma.

TEOREMA KELINIERAN NOTASI SIGMA

Andaikan $\{a_i\}$ dan $\{b_i\}$ menyatakan dua barisan dan c suatu konstanta. Maka

(i) $\sum_{i=1}^{n} c\, a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$

(ii) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$; dan akibatnya

(iii) $\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

RUMUS JUMLAH KHUSUS

(i) $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(iv) $\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

3. Tentukan jumlah bola yang ditata anak tadi!
4. Jika bola ditata sampai n tingkat,
   a. Nyatakan keadaan ini dalam notasi sigma
   b. Carilah rumus umum untuk notasi sigma tersebut
   c. Buktikan rumus umum yang telah anda peroleh dengan induksi matematika

PENDAHULUAN LUAS

1. Gambarlah grafik $y = x^2$ yang dibatasi sumbu X, $x = 0$ dan $x = 3$.
2. Bagilah selang $[0,3]$ menjadi n bagian selang, sehingga masing-masing mempunyai panjang $\Delta x = \frac{3}{n}$.

LUAS MENURUT POLIGON DALAM

3. Tinjaulah segiempat dengan alas $[x_{i-1}, x_i]$ dan tinggi $f(x_{i-1}) = {x_{i-1}}^2$.
4. Hitunglah luas daerah yang dibatasi dengan $y = x^2$, sumbu X, $x = 0$ dan $x = 3$ dengan menjumlahkan seluruh segi empat (poligon dalam).

LUAS MENURUT POLIGON LUAR

5. Tinjaulah segiempat dengan alas $[x_{i-1}, x_i]$ dan tinggi $f(x_i) = {x_i}^2$.
6. Hitunglah luas daerah yang dibatasi dengan $y = x^2$, sumbu X, $x = 0$ dan $x = 3$ dengan menjumlahkan seluruh segi empat (poligon luar).
7. Apakah luas daerah yang dibatasi dengan $y = x^2$, sumbu X, $x = 0$ dan $x = 3$ memberikan hasil yang berbeda ketika dihitung menurut poligon dalam dan poligon luar?
8. Kesimpulan apa yang dapat anda peroleh?

LATIHAN

Petunjuk

1. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan cermat dan teliti.
2. Jika membutuhkan bimbingan, bertanyalah pada dosen.
3. Selesaikanlah soal yang diberikan dengan penuh keyakinan.

Soal

1. Tentukan nilai yang ditunjukkan notasi sigma berikut:
   a. $\sum_{k=3}^{7} \frac{(-2)^k(-1)^k}{(k+1)}$
   b. $\sum_{l=1}^{4} (l+1)^2$
2. Tuliskan jumlah yang ditunjukkan deret dibawah ini dalam notasi sigma. Tentukan nilainya dengan menggunakan Rumus Jumlah Khusus kemudian buktikan dengan induksi matematika.
   a. 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + ... + 225
   b. 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 50
3. Gambarlah sketsa grafik fungsi $f(x) = 2x^2 + 7x + 6$ pada selang [-7,3], kemudian bagilah selang [-7,3] menjadi 10 bagian selang yang sama. Hitunglah luas poligon luar dan poligon dalam yang berpadanan.

PENUGASAN

Petunjuk

1. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan cermat dan teliti.
2. Jika membutuhkan bimbingan, bertanyalah pada dosen.
3. Selesaikanlah soal yang diberikan dengan penuh keyakinan.

Soal

1. Buktikan Teorema Kelinieran Notasi Sigma
2. Buktikan Rumus Jumlah Khusus dengan induksi matematika
3. Gambarlah sketsa grafik $2x^2 + 1$ pada selang $[0,4]$, bagilah selang menjadi n bagian yang sama
   a. Hitunglah luas poligon luar dan poligon dalam yang berpadanan.
   b. Kemudian anggaplah $n \rightarrow \infty$, hitung luas yang dibatasi $f(x) = 2x^2 + 1$, sumbu X, $x = 0$, dan $x = 4$.

JUMLAH RIEMANN DAN INTEGRAL TERTENTU

Kemampuan yang diharapkan

Setelah mempelajari topik ini diharapkan mahasiswa dapat:

Kognitif

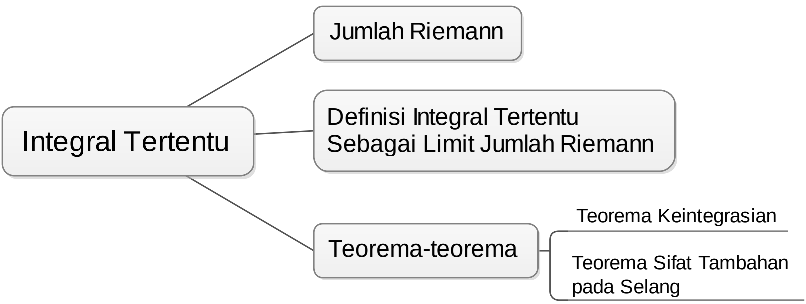
1. Menjelaskan hubungan antara Notasi Sigma, Jumlah Riemann dan Integral.
2. Merumuskan definisi integral tertentu sebagai suatu jumlah Riemann.
3. Melaksanakan perhitungan integral tentu sesuai dengan definisi.
4. Menghubungkan gambar/ grafik ke dalam bahasa matematis khususnya Jumlah Riemann.
5. Menjelaskan jumlah Riemann suatu fungsi pada selang tertentu dengan menggunakan gambar.
6. Menghitung jumlah Riemann yang diperlihatkan pada suatu gambar.
7. Menjelaskan jumlah Riemann untuk data yang diberikan dengan menggunakan gambar.
8. Memperkirakan nilai suatu integral tertentu yang luasannya berada di atas dan di bawah sumbu X.

9. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tertentu.

Afektif

10. Merasa mampu menyelesaikan tugas Kalkulus yang diberikan oleh dosen.
11. Mau menerima bantuan dari teman dan dosen jika menemui kesulitan tentang tugas Kalkulus.
12. Mau dan mampu berdiskusi dalam menyelesaikan tugas kalukulus dengan kelompoknya.

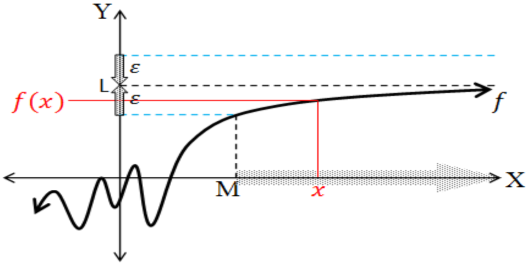
PETA KONSEP



APERSEPSI

LIMIT DI TAK HINGGA

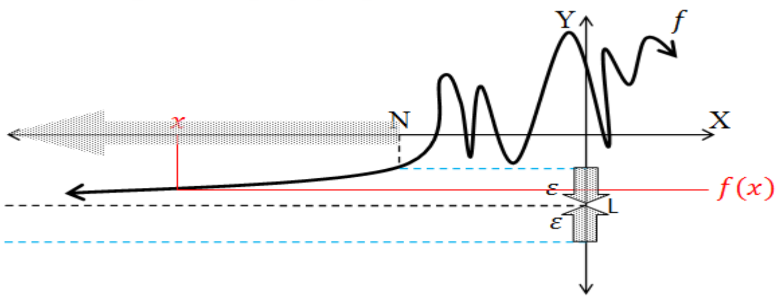
Perhatikan grafik fungsi f yang terdefinisi di $\mathbb{R}$ berikut:



Definisi Limit $x \to \infty$

Misalkan f didefinisikan pada $[c, \infty)$ untuk beberapa bilangan c. Dinyatakan bahwa $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan M sedemikian sehingga
$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Perhatikan grafik fungsi f yang terdefinisi di $\mathbb{R}$ berikut:



Definisi Limit $x \to -\infty$

Misalkan f didefinisikan pada $(-\infty, c]$ untuk beberapa bilangan c. Dinyatakan bahwa $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan N sedemikian sehingga

$x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

<u>NOTASI SIGMA</u>

Simbol $\sum_{i=1}^{n} a_i$ berarti bahwa jumlah bilangan-bilangan $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Teorema Kelinieran Notasi Sigma

Andaikan $\{a_i\}$ dan $\{b_i\}$ menyatakan dua barisan dan c suatu konstanta. Maka

(i) $\sum_{i=1}^{n} c\, a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$; dan akibatnya

(iii) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

Rumus Jumlah Khusus

(i) $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(iv) $\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

LUAS POLIGON DALAM DAN LUAR

Jika akan mencari luas sebuah daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$, sumbu X, garis $x = a$ dan $x = b$, maka dapat digunakan luas menurut poligon-poligon dalam dan luas menurut poligon-poligon luar.

Luas Menurut Poligon-poligon Dalam

Untuk mencari luas menurut poligon-poligon dalam, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

1. Buat selang $[a, b]$ menjadi n bagian selang dengan lebar masing-masing Δx.
2. Tinjaulah segiempat dengan alas $[x_{i-1}, x_i]$ dan tinggi $f(x_{i-1})$ jika $f(x_{i-1}) \leq f(x_i)$ atau $f(x_i)$ jika $f(x_{i-1}) \geq f(x_i)$. Jelas luas segiempat R_n adalah $f.\Delta x$.
3. Gabungan R_n dari semua segiempat yang demikian membentuk poligon dalam. Luas $A(R_n)$ dapat dihitung dengan menjumlahkan luas semua segiempat, atau dapat ditulis sebagai $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$ jika $f(x_{i-1}) \leq f(x_i)$ atau $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ jika $f(x_{i-1}) \geq f(x_i)$.
4. Jika selang $[a, b]$ dibagi menjadi tak hingga banyaknya selang, dengan kata lain $n \to \infty$ atau $\Delta x \to 0$, maka $A(R) = \lim_{n\to\infty} A(R_n)$.

Luas Menurut Poligon-poligon Luar

Untuk mencari luas menurut poligon-poligon luar, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

1. Buat selang $[a, b]$ menjadi n bagian selang dengan lebar masing-masing Δx.
2. Tinjaulah segiempat dengan alas $[x_{i-1}, x_i]$ dan tinggi $f(x_i)$ jika $f(x_{i-1}) \leq f(x_i)$ atau $f(x_{i-1})$ jika $f(x_{i-1}) \geq f(x_i)$. Jelas luas segiempat R_n adalah $f.\Delta x$.
3. Gabungan R_n dari semua segiempat yang demikian membentuk poligon dalam. Luas $A(R_n)$ dapat dihitung dengan menjumlahkan luas semua segiempat, atau dapat ditulis sebagai $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ jika $f(x_{i-1}) \leq f(x_i)$ atau $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$ jika $f(x_{i-1}) \geq f(x_i)$.
4. Jika selang $[a, b]$ dibagi menjadi tak hingga banyaknya selang, dengan kata lain $n \to \infty$ atau $\Delta x \to 0$, maka $A(R) = \lim_{n\to\infty} A(R_n)$.

5. Kesimpulan

Pencarian luas menurut poligon-poligon dalam dan poligon-poligon luar ini menghasilkan nilai yang sama.

MATERI

CONTOH PENERAPAN MATERI

Andaikan sebuah benda bergerak dengan kecepatan $v = (t+2)\ {}^{m}/_{s}$ pada saat t. Seberapa jauhkah benda tersebut bergerak selama 5 detik pertama

JUMLAH RIEMANN

1. Dipunyai $f(x) = x^2 - 4$. Didefinisikan pada selang [-3,3]
   a. Bagilah selang [-3,3] menjadi 6 bagian (tidak harus sama), sedemikian rupa sehingga titik-titik $-3 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 = 3$.
   Kemudian tentukan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
   b. Pada setiap selang $[x_{i-1}, x_i]$ ambilah sebuah titik $\overline{x_i}$ (yang mungkin titik ujung selang) yang disebut sebagai <u>titik sampel</u>.
   c. Gambarkanlah keadaan di atas dalam suatu sketsa grafik.
   d. Hitunglah jumlah luas poligon-poligon tersebut!
   <u>Catatan</u>: untuk luas di bawah sumbu X dinyatakan sebagai negatif dari luasnya.
2. Misalkan f didefinisikan pada selang $[a,b]$. Selanjutnya selang $[a,b]$ dibagi menjadi n selang sedemikian rupa sehingga $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, dan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Titik sampel $\overline{x_i}$ diambil pada setiap selang $[x_{i-1}, x_i]$.

a. Nyatakan jumlah luas poligon-poligon tersebut dalam notasi sigma.
b. Sebut jumlah luas poligon-poligon tersebut sebagai harga yang merupakan jumlah riemann
c. Kesimpulan apa yang dapat anda ambil?

DEFINISI INTEGRAL TERTENTU

Misalkan P adalah panjang selang bagian terpanjang dari partisi-partisi pada selang $[a,b]$ di atas. Andaikan $|P| \to 0$ maka selang terbagi menjadi tak terhingga banyaknya, dengan kata lain $n \to \infty$.

1. Menurut anda apa yang akan terjadi?
2. Buatlah definisi tentang integral tertentu sebagai Limit Jumlah Riemann.

TEOREMA – TEOREMA

<u>TEOREMA KEINTEGRASIAN</u>

Jika f terbatas pada $[a,b]$ dan f kontinu di sana kecuali pada sejumlah titik yang berhingga, maka f terintegralkan pada $[a,b]$. Khususnya jika f kontinu pada seluruh selang $[a,b]$ maka f terintegralkan pada $[a,b]$.

<u>SIFAT TAMBAHAN PADA SELANG</u>

Jika f terintegralkan pada sebuah selang yang mengandung titik-titik a, b, c, maka

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

3. Berikan contoh penggunaan Teorema Sifat Tambahan pada Selang.

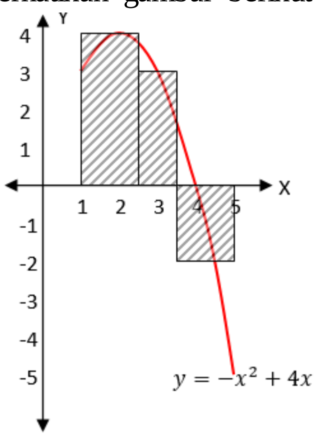
LATIHAN

Petunjuk

1. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan cermat dan teliti.
2. Jika membutuhkan bimbingan, bertanyalah pada dosen.
3. Selesaikanlah soal yang diberikan dengan penuh keyakinan.

Soal

1. Perhatikan gambar berikut



   Hitunglah jumlah Riemann yang diperlihatkan pada gambar tersebut di atas.

2. Taksirlah $\int_{-5}^{5}(x+2)dx$ dengan mendekati daerah di atas sumbu X sebagai sebuah segitiga dan daerah dibawah sumbu x juga sebuah segitiga.

3. Hitunglah jumlah Riemann untuk data berikut
   $f(x) = x - 1;$
   $P : 3 < 3{,}75 < 4{,}25 < 5{,}5 < 6 < 7;$
   $\overline{x_1} = 3, \overline{x_2} = 4, \overline{x_3} = 4{,}75, \overline{x_4} = 6, \overline{x_5} = 6{,}5$
4. Andaikan sebuah benda bergerak dengan kecepatan $v = (t + 2)\ {}^{m}/_{s}$ pada saat t. Seberapa jauhkah benda tersebut bergerak selama 5 detik pertama?

PENUGASAN

Petunjuk

1. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan cermat dan teliti.
2. Jika membutuhkan bimbingan, bertanyalah pada dosen.
3. Selesaikanlah soal yang diberikan dengan penuh keyakinan.

Soal

1. Berilah penjelasan untuk memperlihatkan kebenaran Teorema sifat tambahan pada selang.
2. Dipunyai : $f(x) = 3x^2 + 2$ pada selang [-2, 1].
   a. Gambarlah sketsa $f(x) = 3x^2 + 2$ pada selang [-2, 1].
   b. Nyatakan $\int_{-2}^{1}(3x^2 + 2)\,dx$ sebagai suatu Jumlah Riemann.
   c. Carilah nilai $\int_{-2}^{1}(3x^2 + 2)\,dx$.

TEOREMA DASAR KALKULUS

Kemampuan yang diharapkan

Setelah mempelajari topik ini diharapkan mahasiswa dapat:

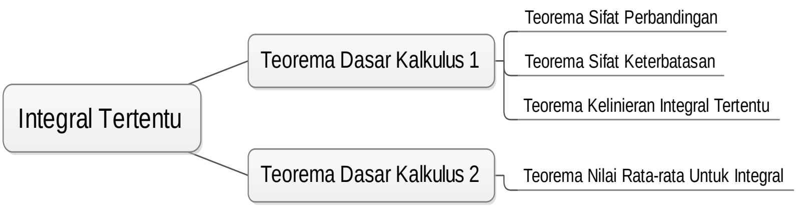
Kognitif

1. Memahami hubungan antara konsep turunan dan integral dalam Teorema Dasar Kalkulus 1.
2. Memberikan bukti Teorema Dasar Kalkulus.
3. Melaksanakan perhitungan berdasarkan teorema dasar kalukulus.
4. Menjelaskan penerapan teorema dasar kalkulus dengan menggunakan gambar.
5. Menyatakan peristiwa sehari-hari dengan menggunakan konsep Teorema Dasar Kalkulus.
6. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan Teorema Dasar Kalkulus.
7. Memberikan penjelasan dengan menggunakan model matematis untuk masalah yang berkaitan dengan integral tertentu.

Afektif

8. Merasa mampu menyelesaikan tugas kalkulus yang diberikan oleh dosen.
9. Mau menerima bantuan dari teman dan dosen jika menemui kesulitan tentang tugas kalkulus.
10. Mau dan mampu berdiskusi dalam menyelesaikan tugas kalukulus dengan kelompoknya.

PETA KONSEP



APERSEPSI

<u>DEFINISI TURUNAN</u>

Turunan sebuah fungsi f adalah fungsi lain f' yang nilainya pada sembarang bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Asalkan limit ini ada dan bukan ∞ atau $-\infty$.

DEFINISI INTEGRAL TERTENTU

Jika f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang $[a, b]$. Jika

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

ada, dikatakan f adalah terintegrasikan pada $[a, b]$. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$, disebut integral tertentu f dari a ke b, diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

MATERI

CONTOH PENERAPAN MATERI

Sebuah bola menggelinding di lantai dengan kecepatan $V = f(t) = \frac{1}{2}t^3 + 1$ saat t detik. Berapakah jarak yang ditempuh bola dari $t = 0$ sampai $t = 3$?

TEOREMA DASAR KALKULUS 1

1. Gambarlah sketsa grafik $V = f(t) = \frac{1}{2}t^3 + 1$ pada selang $[0,3]$.
2. Nyatakan $\int_0^3 \left(\frac{1}{2}t^3 + 1\right) dt$ sebagai Jumlah Riemann dan tentukan pula nilainya.
3. Menyatakan apakah $\int_0^3 \left(\frac{1}{2}t^3 + 1\right) dt$ tersebut?
4. Apa yang dapat Anda simpulkan?

Jika jarak s dihitung dari waktu $t = a$ ke waktu $t = x$.

5. Bentuk apa yang anda dapatkan?
6. Turunkan kedua ruas, tulislah bentuk yang Anda dapatkan.
7. Tuliskan Teorema Dasar Kalkulus Pertama secara lengkap.

TEOREMA-TEOREMA

<u>TEOREMA SIFAT PERBANDINGAN</u>

Jika f dan g terintegralkan pada $[a,b]$ dan jika $f(x) \leq g(x)$ untuk semua x dalam $[a,b]$. Maka

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

<u>TEOREMA SIFAT KETERBATASAN</u>

Jika f terintegralkan pada selang $[a,b]$ dan $m \leq f(x) \leq M$ untuk semua x dalam $[a,b]$. Maka

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

<u>TEOREMA KELINIERAN INTEGRAL TERTENTU</u>

Andaikan f dan g terintegralkan pada $[a,b]$ dan k konstanta, maka kf dan $f+g$ terintegralkan dan:

(i) $\int_a^b k\, f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$;

(ii) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$; dan akibatnya

(iii) $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Buatlah contoh yang menunjukkan penggunaan Teorema Kelinieran Integral Tertentu.

TEOREMA DASAR KALKULUS DUA

Anggaplah f kontinu (dan terintegralkan) pada selang $[a,b]$ dan anggaplah F sebarang anti turunan f pada $[a,b]$. Maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

9. Buktikan Teorema Dasar Kalkulus Dua diatas!

<u>TEOREMA NILAI RATA-RATA UNTUK INTEGRAL</u>

Jika f kontinu pada $[a,b]$ maka terdapat suatu bilangan c antara a dan b sedemikian rupa sehingga

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a)$$

10. Carilah persamaan yang menyatakan nilai rata-rata dari f pada $[a,b]$.
11. Buatlah contoh yang menunjukkan penggunaan teorema nilai rata-rata untuk integral.

LATIHAN

Petunjuk

1. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan cermat dan teliti.
2. Jika membutuhkan bimbingan, bertanyalah pada dosen.
3. Selesaikanlah soal yang diberikan dengan penuh keyakinan.

Soal

1. Carilah:

   a. $\frac{d}{dx}\left[\int_2^x \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{t^3-18}}\,dt\right]$

   b. $\frac{d}{dx}\left[\int_x^5 \tan^2 u \cos^2 u\, du\right]$

2. Carilah $\int_{-1}^{3}(x^2+19x+5)^3\,dx$
3. Carilah nilai rata-rata untuk $f(x) = 8x^3$ pada [2,3].
4. Anggaplah $G(x) = \int_0^x (t^4+4)\,dt$.

   a. Misalkan $y = G(x)$, carilah $\frac{dy}{dx}$.

   b. Carilah penyelesaian persamaan diferensial yang memenuhi $y = G(0)$ ketika $x = 1$.

   c. Carilah $\int_0^5 (t^4+4)\,dt$.

PENUGASAN

Petunjuk

1. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan cermat dan teliti.
2. Jika membutuhkan bimbingan, bertanyalah pada dosen.
3. Selesaikanlah soal yang diberikan dengan penuh keyakinan.

Soal

1. Buktikan Teorema Dasar Kalkulus Petama, Teorema Sifat Pebandingan, Teorema Sifat Keterbatasa, Teorema Integral Tertentu sebagai Operator Linier, dan Teorema Nilai Rata-rata untuk Integral.
2. Ukurlah suhu dirumah anda setiap $\frac{1}{2}$ jam sekali minimal selama 6 jam.
   a. Gambarlah sketsa grafiknya.
   b. Buatlah perkiraan suhu rata-rata selama waktu yang anda ukur.
   c. Haruskan terdapat suatu waktu ketika suhunya sama dengan suhu rata-rata selama waktu yang anda ukur? Jelaskan!

LUAS DAERAH BIDANG RATA

Kemampuan yang diharapkan

Setelah mempelajari topik ini diharapkan mahasiswa dapat:

Kognitif

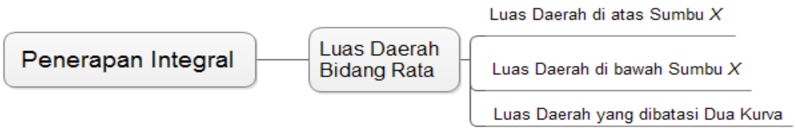
1. Memperkirakan luas daerah bidang rata dengan cara menghampiri luas irisan-irisannya sebagai sebuah segiempat.
2. Memahami hubungan antara konsep integral dan luas bidang rata.
3. Membaca masalah luas daerah bidang rata dengan penuh pemahaman.
4. Menghubungkan suatu situasi matematis (luas daerah bidang rata) dengan menggunakan grafik.
5. Menghitung luas daerah bidang rata yang berada di atas dan di bawah sumbu X.
6. Menghitung luas daerah bidang rata di antara dua kurva.
7. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan Luas Daerah Bidang Rata.

Afektif

8. Merasa menguasai materi Kalkulus yang diberikan oleh dosen.
9. Senang mendapatkan pujian jika berhasil menyelesaikan tugas mata kuliah Kalkulus.

10. Merasa lebih dapat berkembang dengan dorongan orang lain.

PETA KONSEP



APERSEPSI

<u>DEFINISI INTEGRAL TERTENTU</u>

Jika f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang $[a, b]$. Jika

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

ada, dikatakan f adalah terintegrasikan pada $[a, b]$. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$, disebut integral tertentu f dari a ke b, diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

TEOREMA DASAR KALKULUS PERTAMA

Misalkan f kontinu pada selang tutup $[a, b]$ dan anggaplah x sebagai sebuah titik pada (a, b). Maka

$$\frac{dy}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt = f(x)$$

TEOREMA DASAR KALKULUS KEDUA

Misalkan f kontinu (dan terintegrasikan) pada selang tutup $[a, b]$ dan anggaplah F sembarang anti turunan f pada $[a, b]$ jadi

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

MATERI

LUAS DAERAH BIDANG RATA

LUAS DAERAH DI ATAS SUMBU X

Misalkan $y = f(x)$ adalah suatu fungsi yang kontinu dan tak negatif pada selang $[a, b]$, dan daerah di bawah $y = f(x)$ adalah R.

12. Tinjaulah luas daerah $A(R)$ yang dibatasi oleh $y = f(x)$, sumbu X, $x = a$, dan $x = b$.
13. Berikan contoh soal tentang pencarian luas daerah di atas sumbu X.

LUAS DAERAH DI BAWAH SUMBU X

Misalkan $y = g(x)$ adalah suatu fungsi yang kontinu dan negatif pada selang $[c, d]$, dan R menyatakan daerah di atas $y = g(x)$.

1. Apakah luas daerah $A(R)$ yang dibatasi oleh $y = g(x)$, sumbu X, $x = c$, dan $x = d$ dapat dicari dengan cara yang sama seperti luas daerah di atas sumbu X.
2. Mengapa demikian?
3. Kesimpulan apa yang Anda dapatkan?
4. Berikan contoh untuk mencari luas daerah di bawah sumbu X.

LUAS DAERAH DI ANTARA DUA KURVA

Misalkan $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ adalah kurva-kurva dengan $g(x) \leq f(x)$ pada selang $[a,b]$

1. Bagaimana Anda mencari luas daerah diantara kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$. Jelaskan!
2. Berikan contoh soal yang berkaitan dengan mencari luas daerah di antara dua kurva.
3. Diskusikan dengan kelompokmu bagaimana cara untuk menentukan luas pulau-pulau baik di Indonesia maupun seluruh pulau pada umumnya?

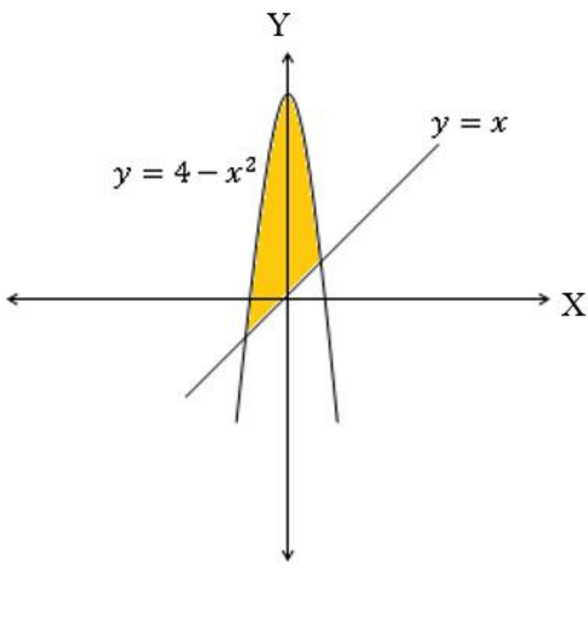
LATIHAN

Petunjuk

1. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan cermat dan teliti.
2. Jika membutuhkan bimbingan, bertanyalah pada dosen.
3. Selesaikanlah soal yang diberikan dengan penuh keyakinan.

Soal

1. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 + 4x - 5$, $y = 0$, $x = -6$, dan $x = 4$.
2. Carilah luas daerah yang di arsir pada gambar di bawah ini.



PENUGASAN

Petunjuk

1. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan cermat dan teliti.
2. Jika membutuhkan bimbingan, bertanyalah pada dosen.
3. Selesaikanlah soal yang diberikan dengan penuh keyakinan.

Soal

1. Sebuah benda bergerak sepanjang suatu garis lurus sedemikian rupa sehingga kecepatannya pada saat t adalah $v(t) = t^2 - 8t + 12\ m/dt$. Carilah perpindahan dan jarak total yang ditempuh untuk $-1 \leq t \leq 9$.
2. Buktikan Prinsip Cavalieri (Bonaventura Cavalieri 1598 – 1674) yang pada tahun 1635 mengembangkan prinsip yang berbunyi
   "Jika dua daerah memiliku tinggi sama pada setiap x di $[a,b]$ maka keduanya akan mempunyai luas yang sama."

VOLUM BENDA PUTAR

Kemampuan yang diharapkan

Setelah mempelajari topik ini diharapkan mahasiswa dapat:

Kognitif

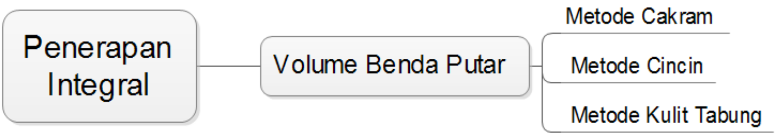
1. Memperkirakan volume benda pejal dengan cara menghampirinya menggunakan jumlah Riemann.
2. Merumuskan definisi volume benda pejal dalam bentuk integral tentu.
3. Menghubungkan konsep integral dengan volume benda putar.
4. Menggambar grafik volume benda putar berdasarkan situasi tertentu.
5. Memberikan penjelasan tentang metode yang dipilih dalam mencari volume benda putar.
6. Menghitung volume benda putar dengan menggunakan metode cakram.
7. Menghitung volume benda putar dengan menggunakan metode cincin.
8. Menghitung volume benda putar dengan menggunakan metode kulit tabung.

9. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan volume benda putar.

Afektif

10. Merasa menguasai materi Kalkulus yang diberikan oleh dosen.
11. Senang mendapatkan pujian jika berhasil menyelesaikan tugas mata kuliah Kalkulus.
12. Merasa lebih dapat berkembang dengan dorongan orang lain.

PETA KONSEP



APERSEPSI

<u>DEFINISI INTEGRAL TERTENTU</u>

Jika f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang $[a,b]$. Jika

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

ada, dikatakan f adalah terintegrasikan pada $[a, b]$. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$, disebut integral tertentu f dari a ke b, diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

<u>TEOREMA DASAR KALKULUS PERTAMA</u>

Misalkan f kontinu pada selang tutup $[a, b]$ dan anggaplah x sebagai sebuah titik pada (a, b). Maka

$$\frac{dy}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

<u>TEOREMA DASAR KALKULUS KEDUA</u>

Misalkan f kontinu (dan terintegrasikan) pada selang tutup $[a, b]$ dan anggaplah F sembarang anti turunan f pada $[a, b]$ jadi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

MATERI

BENDA PUTAR

Apakah yang dinamakan benda putar dan sumbu? Ilustrasikan jawaban anda!

VOLUME BENDA PUTAR

METODE CAKRAM

Misalkan suatu benda diputar dibatasi oleh garis $y = x$, $x = 0$, $x = 3$, yang diputar menurut sumbu Y.

1. Gambarlah sketsa grafiknya.
2. Hampiri volume benda putar tersebut sebagai suatu jumlah Riemann. Tulislah strategi yang anda gunakan.
3. Tentukan volume benda putar tersebut dengan menggunakan Integral Tertentu.

METODE CINCIN

1. Kapan metode cincin digunakan? Jelaskan jawaban anda dengan ilustrasi.
2. Berilah contoh penggunaan metode cincin pada pencarian volume benda putar.

METODE SELIMUT TABUNG

1. Kapan metode kulit tabung digunakan? Jelaskan anda dengan ilustrasi!
2. Berilah contoh penggunaan metode cincin pada pencarian volume benda putar.

BENDA LAIN YANG PENAMPANGNYA DIKETAHUI

Sebuah kaleng berbentuk tabung dengan jari-jari r dan tinggi h penuh berisi air. Sesorang menuangkan air dari dalam kaleng sampai tersisa pada tingkat air persis sama dengan garis tengah alasnya dan tepat menyentuh bibir tabung bagian atas. Carilah volume air yang tersisa!

LATIHAN

Petunjuk

1. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan cermat dan teliti.
2. Jika membutuhkan bimbingan, bertanyalah pada dosen.
3. Selesaikanlah soal yang diberikan dengan penuh keyakin-an.

Soal

1. Tentukan volume benda putar yang dibatasi $y = 2 - x$, $x = 0$, $x = 2$, diputar mengelilingi sumbu X.
2. Tentukan volume benda putar yang dibatasi $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$ yang diputar mengelilingi sumbu X.

PENUGASAN

Petunjuk

1. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan cermat dan teliti.
2. Jika membutuhkan bimbingan, bertanyalah pada dosen.
3. Selesaikanlah soal yang diberikan dengan penuh keyakinan.

Soal

Tentukan volume benda yang terbentuk dengan memutar daerah R yang dibatasi oleh $x = \sqrt{y}$ dan $x = \frac{y^3}{32}$

a. Mengelilingi sumbu X

b. Mengelilingi garis $y = 4$

PANJANG BUSUR DAN LUAS PERMUKAAN BENDA PUTAR

Kemampuan yang diharapkan

Setelah mempelajari topik ini diharapkan mahasiswa dapat:

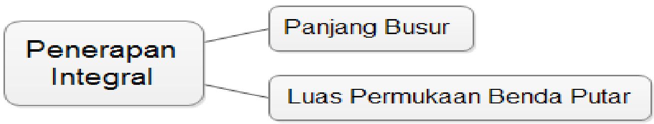
Kognitif

1. Merumuskan definisi kurva mulus.
2. Merumuskan definisi panjang busur sebagai persamaan suatu limit.
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan panjang kurva bidang.
4. Merumuskan luas permukaan benda putar berdasarkan luas permukaan kerucut terpancung.
5. Menghubungkan konsep luas permukaan kerucut terpancung, luas permukaan benda putar dan konsep integral.
6. Menggambar grafik luas permukaan benda putar berdasarkan situasi tertentu.
7. Melakukan perhitungan yang berkaitan dengan luas permukaan benda putar.
8. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan luas benda putar.

Afektif

9. Tidak mudah putus asa.
10. Percaya diri.
11. Berpartisipasi aktif.

PETA KONSEP



APERSEPSI

<u>RUMUS JARAK</u>

Jika diketahui dua buah titik, $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ maka jarak (tak berarah) antara A dan B adalah

$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

<u>DEFINISI INTEGRAL TERTENTU</u>

Jika f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang $[a, b]$. Jika

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

ada, dikatakan f adalah terintegrasikan pada $[a, b]$. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$, disebut integral tertentu f dari a ke b, diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

<u>TEOREMA DASAR KALKULUS PERTAMA</u>

Misalkan f kontinu pada selang tutup $[a, b]$ dan anggaplah x sebagai sebuah titik pada (a, b). Maka

$$\frac{dy}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

<u>TEOREMA DASAR KALKULUS KEDUA</u>

Misalkan f kontinu (dan terintegrasikan) pada selang tutup $[a, b]$ dan anggaplah F sembarang anti turunan f pada $[a, b]$ jadi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

MATERI

CONTOH PENERAPAN MATERI

1. Uang logam yang beredar di Indonesia terdiri dari beberapa nilai, diantaranya adalah pecahan yang bernilai Rp 500,00, Rp 200,00, dan Rp 100,00,

mempunyai diameter masing-masing 27 mm, 26 mm, dan 25 mm. Tentukan keliling koin tersebut!

2. Sungai Rhein yang menjadi batas alam negara Swiss, Liechtenstein, Austria, Prancis, dan Jerman mempunyai panjang 1.320 km. Bagaimana menentukan panjang sungai Rhein tersebut?

PANJANG BUSUR

DEFINISI KURVA MULUS

1. Gambarlah sebuah kurva dengan persamaan parameternya
   $x = 3t + 2$
   $y = t^2 + 2,\ 0 \le t \le 4.$
2. Apakah $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ kontinu pada selang $[a,b]$?
3. Apakah ada $t_1 \in [a,b] \ni f'(t_1) = g'(t_1) = 0$?
4. Buatlah definisi tentang kurva mulus!

PANJANG

1. Diketahui $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, $a \le t \le b$, buatlah partisi pada selang $[a,b]$ kemudian aproksimasikan kurva itu dengan segibanyak.
2. Definisikan panjang L kurva sebagai bentuk limit dari bentuk yang anda dapat pada nomor 1
3. Bagaimana persamaan panjang L jika $y = f(x)$, $a \le x \le b$?
4. Bagaimana persamaan panjang L jika $x = f(y)$, $c \le y \le d$?
5. Uang logam yang beredar di Indonesia terdiri dari beberapa nilai, diantaranya adalah pecahan yang bernilai Rp 500,00, Rp 200,00, dan Rp 100,00, mempunyai diameter masing-masing 27 mm, 26 mm, dan 25 mm. Tentukan keliling koin tersebut!

DIFERENSIAL PANJANG BUSUR

1. Diketahui f sebuah fungsi yang terdiferensialkan pada $[a,b]$. $\forall x \in (a, b)$ definisikan $s(x)$ sebagai panjang busur kurva $y = f(u)$.
2. Gunakanlah teorema tentang pendiferensialan sebuah integral menurut batas atasnya untuk menentukan diferensial panjang busur ds.
3. Sungai Rhein yang menjadi batas alam negara Swiss, Liechtenstein, Austria, Prancis, dan Jerman mempunyai panjang 1.320 km. Bagaimana menentukan panjang sungai Rhein tersebut?

LUAS PERMUKAAN BENDA PUTAR

Diketahui sebuah kerucut terpancung merupakan bagian dari permukaan kerucut yang terletak antara dua bidang tegak lurus pada sumbu kerucut.

1. Gambarlah sebuah kerucut terpancung dengan jari-jari alas r_1 dan r_2 serta tinggi miringnya l.
2. Tentukan luas kerucut terpancung tersebut.

Andaikan $y = f(x)$ pada $[a, b]$

3. Tentukan kurva mulus di setengah bidang atas dari bidang xy.
4. Buatlah partisi pada selang $[a, b]$ menjadi n buah selang. Andaikan Δs_i menyatakan panjang partisi ke-i, dan andaikan y_i adalah titik sampel pada Δs_i. Jika kurva yang terjadi diputar mengelilingi sumbu X, maka akan terbentuklah luasan yang dapat dihampiri dengan meng-

gunakan luas sebuah kerucut terpancung. Tentukan rumus luasan tersebut.

5. Jika Δs_i mendekati nol, dan luasan-luasan tersebut semuanya dijumlahkan maka akan didefinisikan sebagai luas permukaan benda putar. Tentukan luas permukaan benda putar tersebut.

LATIHAN

Petunjuk

1. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan cermat dan teliti.
2. Jika membutuhkan bimbingan, bertanyalah pada dosen.
3. Selesaikanlah soal yang diberikan dengan penuh keyakinan.

Soal

1. Gunakan pengintegralan menurut x untuk menentukan panjang ruas garis yang persamaannya $y = 5x + 2$ antara $x = 1$ dan $x = 5$. Cocokanlah dengan rumus jarak.
2. Carilah panjang kurva $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 4\pi$.

PENUGASAN

Petunjuk

1. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan cermat dan teliti.
2. Jika membutuhkan bimbingan, bertanyalah pada dosen.
3. Selesaikanlah soal yang diberikan dengan penuh keyakinan.

Soal

Tentukan luas permukaan benda putar yang terbentuk dari pemutaran kurva $x = r\cos t, y = r\sin t,\ \ 0 \leq t \leq \pi$.

PENERAPAN INTEGRAL PADA KERJA, PEGAS DAN PEMOMPAAN CAIRAN

Kemampuan yang diharapkan

Setelah mempelajari topik ini diharapkan mahasiswa dapat:

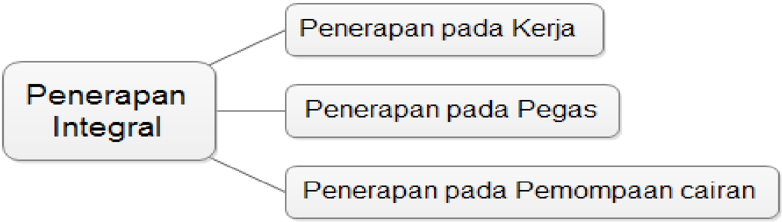
Kognitif

1. Menerapkan konsep integral pada Kerja.
2. Menerapkan konsep integral pada pegas.
3. Menerapkan konsep integral pada pemompaan cairan.
4. Membuat pertanyaan tentang penerapan konsep integral pada kerja.
5. Membuat pertanyaan tentang penerapan konsep integral pada pegas.
6. Membuat pertanyaan tentang penerapan konsep integral pada pemompaan cairan.
7. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral pada kehidupan sehari-hari dan pada bidang fisika.

Afektif

8. Tidak mudah putus asa.
9. Percaya diri.
10. Berpartisipasi aktif.

PETA KONSEP



APERSEPSI

<u>DEFINISI INTEGRAL TERTENTU</u>

Jika f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang $[a, b]$. Jika

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

ada, dikatakan f adalah terintegrasikan pada $[a, b]$. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$, disebut integral tertentu f dari a ke b, diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

TEOREMA DASAR KALKULUS PERTAMA

Misalkan f kontinu pada selang tutup $[a,b]$ dan anggaplah x sebagai sebuah titik pada (a,b). Maka

$$\frac{dy}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

TEOREMA DASAR KALKULUS KEDUA

Misalkan f kontinu (dan terintegrasikan) pada selang tutup $[a,b]$ dan anggaplah F sembarang anti turunan f pada $[a,b]$ jadi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

MATERI

CONTOH PENERAPAN MATERI

Seorang abang bakso mendorong gerobaknya di jalan yang berliku dan naik turun. Bagaimana Kerja yang diperlukan abang tersebut ?

KERJA

Penggunaan integral dalam bidang fisika salah satunya adalah kerja. Jika kita mendorong sebuah peti di lantai licin dan datar sepanjang m meter dengan gaya g Newton.

1. Berapa Joule kerja yang harus diberikan?
2. Pada kenyataannya tidak ada di kehidupan nyata lantai yang licin dan lurus, adanya adalah jalan yang berkelok-

kelok dan naik turun. Bagaimana pendapat anda tentang hal ini?

3. Berapa Joule kerja yang harus diberikan? Apakah sama dengan kerja yang diberikan bila peti di dorong di lantai yang licin? Jelaskan pendapat anda.
4. Nyatakan kerja dalam bentuk rumus.
5. Berikan contoh soal penggunaan kerja dalam kehidupan sehari-hari, kemudian selesaikanlah.

PEGAS

1. Bagaimana bunyi Hukum Hooke dalam fisika?
2. Nyatakan kerja yang dibutuhkan untuk meregangkan pegas sebesar x meter dari panjang alaminya.
3. Berikan contoh soal tentang kerja yang dibutuhkan untuk meregangkan pegas dari panjang alaminya, kemudian selesaikanlah.

PEMOMPAAN AIR

Air pada sebuah sumur yang berbentuk tabung akan di pompa ke atas.

1. Nyatakan kerja yang dibutuhkan untuk memompa air?
2. Berikan contoh soal tentang kerja yang dibutuhkan dalam pemompaan cairan, kemudian selesaikanlah.

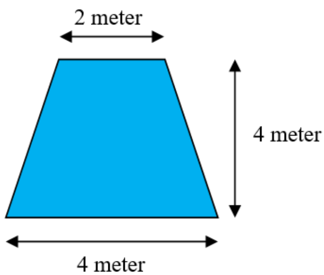
LATIHAN

Petunjuk

1. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan cermat dan teliti.
2. Jika membutuhkan bimbingan, bertanyalah pada dosen.
3. Selesaikanlah soal yang diberikan dengan penuh keyakinan.

Soal

1. Panjang alami sebuah pegas adalah 0,8 meter, diperlukan gaya sebesar 16 Newton untuk meregangkan pegas tersebut menjadi sepanjang 0,86 meter. Tentukan kerja yang diperlukan untuk meregangkan pegas tersebut menjadi sepanjang 0,9 meter.
2. Perhatikan gambar berikut.



Gambar di atas adalah penampang tegak sebuah tanki yang terisi penuh dengan panjangnya 10 meter. Jika air harus dipompa setinggi 1 meter di atas puncak tanki. Berapa kerja yang dibutuhkan untuk mengosongkan tanki tersebut?

PENUGASAN

Petunjuk

1. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan cermat dan teliti.
2. Jika membutuhkan bimbingan, bertanyalah pada dosen.
3. Selesaikanlah soal yang diberikan dengan penuh keyakinan.

Soal

Carilah tanki di dekat rumahmu atau melalui gambar di internet. Carilah ukurannya, kemudian hitunglah kerja yang diperlukan untuk mengosongkan tanki jika tanki dalam keadaan penuh air.

DAFTAR PUSTAKA

Berkey, D. Dennis, (1988). *Calculus, 2nd edition*. New York: Saunders College Publishing.

Dewi, N.R. (2020). *Pembelajaran Preprospec Berbantuan TIK*. Klaten: Penerbit Lakeisha.

Purcell, E.J. & Verberg, D (2005) (Diterjemahkan oleh I Nyoman Susilo, Bana Karta Sasmita, dan Rawuh). *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik, Jilid I*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

BIOGRAFI PENULIS

Nuriana Rachmani Dewi (Nino Adhi), lahir di Semarang pada tanggal 20 Oktober 1978, merupakan anak sulung dari pasangan Bapak (Alm). Achmad Baedlowi dan Ibu Rachmahwati, dan bertempat tinggal di Griya Sekar Gading Blok U Nomor 7 Kalisegoro Gunungpati Semarang. Pada Tahun 2004 menikah dengan Romadona Akbar, kemudian dikaruniai 4 orang putra/ putri, yaitu Remaura Adsenia Putri Rachmani, Maulana Aska Putra Ramadan, Nabil Faisal Putra Ramadan dan Adonia Fatnun Putri Rachmani.

Pada tahun 1984 Nuriana menamatkan pendidikan di TK Pembina Sampangan Semarang; Tahun 1990 menamatkan pendidikan sekolah dasar di SD Negeri Sampangan 2 Semarang; Tahun 1993 menamatkan pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 1 Demak; serta Tahun 1996 menamatkan pendidikan sekolah menengah atas di SMA Negeri 2 Salatiga. Pendidikan di perguruan tinggi dimulai dari tahun 1997 di Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang dan lulus tahun 2001 dengan gelar Sarjana Pendidikan di bidang Pendidikan Matematika. Tahun 2007 berhasil meraih Magister Pendidikan di Bidang Pendidikan

Matematika pada almamater yang sama. Selanjutnya tahun 2017 meraih Doktor Pendidikan Matematika di Sekolah Pascasarjana Univeristas Pendidikan Indonesia.

Riwayat Pekerjaan Nuriana dimulai dengan mengajar sebagai tutor di beberapa Lembaga Bimbingan Belajar dari tahun 1999-2004. Tahun 2002-2006 terdaftar sebagai guru mata pelajaran matematika di SMP Kesatrian 2 Semarang; Tahun 2002-2003 sebagai guru mata pelajaran matematika di SMK Dian Kartika Semarang; Tahun 2008 terdaftar sebagai dosen di STIE Widya Manggala Semarang. Sejak tahun 2008 diterima sebagai dosen di Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang sampai sekarang.

Adapun buku yang telah disusun oleh Nuriana adalah Dasar-dasar Kalkulus Diferensial Berbantuan Geogebra, Model-model Pembelajaran Inovatif untuk Meningkatkan Hardskill dan Softskill Matematis, Pembelajaran Preprospec Berbantuan TIK. Koresponsi dapat dilakukan melalui nurianaramadan@mail.unnes.ac.id

Buku Ajar Kalkulus Integral Berorientasi pada Pembelajaran *Preprospec* Berbantuan TIK ini adalah buku pegangan mahasiswa pada Mata kuliah kalkulus integral. Buku ini disusun berorientasi pada Pembelajaran Preprospec Berbantuan TIK. Pembelajaran Preprospec Berbantuan TIK ini dikembangkan khusus untuk pembelajaran matematika dan terdiri dari lima tahapan, yaitu Prepare, Problem Solving, Presentation, Evaluation, Conclusion yang pada beberapa tahapannya menggunakan media yang berbasis Teknologi Informasi dan Komunikasi (TIK). Buku ini berisi materi tentang Anti Turunan, Notasi Sigma, Induksi Matematika, Pendahuluan Luas, Jumlah Riemann, Integral Tertentu, Teorema Dasar Kalkulus, Luas daerah Bidang Rata, Volum Benda Putar, Panjang Busur dan Luas Permukaan Benda Putar, serta Penerapan Integral pada Kerja, Pegas dan Pemompaan Cairan.

Nuriana Rachmani Dewi (Nino Adhi), lahir di Semarang pada tanggal 20 Oktober 1978. Pada tahun 1997 di menempuh pendidikan S1 di Universitas Negeri Semarang dan lulus tahun 2001 dengan gelar Sarjana Pendidikan di bidang Pendidikan Matematika. Tahun 2007 berhasil meraih Magister Pendidikan di Bidang Pendidikan Matematika pada almamater yang sama. Selanjutnya tahun 2017 meraih Doktor Pendidikan Matematika di Sekolah Pascasarjana Univeristas Pendidikan Indonesia. Pada tahun 2008 diterima sebagai dosen di Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang sampai sekarang.

Penerbit Lakeisha
Jl. Jatinom Boyolali Km 07
Srikaton, Pucangmiliran, Tulung, Klaten
Tlp/Wa. 08989880852
Fb : Penerbit Lakeisha
Instagram : penerbit.lakeisha
Email: penerbit_lakeisha@yahoo.com

SCAN ME

ISBN 978-623-6948-16-3
9 786236 948163