



## MODEL PENYEBARAN FLU BURUNG PADA MANUSIA DAN DINAMIKA POPULASI *RECRUITMENT-DEATH* PADA UNGGAS

Dewi Aulia Afifah <sup>✉</sup>, Muhammad Kharis, Tri Sri Noor Asih

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia  
Gedung D7 Lantai 1 Kampus Sekaran, Gunungpati, Semarang, 50229

### Info Artikel

Sejarah Artikel:  
Diterima April 2018  
Disetujui Juni 2019  
Dipublikasikan Agustus 2020

#### Keywords:

*Avian Influenza, Mathematical Model, Treatment, Stability Analysis, Numerical Simulation*

### Abstrak

Flu burung adalah penyakit yang disebabkan oleh virus tipe A H5N1. Proses penyebaran flu burung terjadi karena adanya migrasi dari unggas liar. Flu burung menular dari unggas ke unggas dan dari unggas ke manusia melalui air liur, lendir dari hidung dan kotoran. Penyakit tersebut dapat mengakibatkan kematian pada manusia dengan tingkat kematian yang cukup tinggi. Kematian karena infeksi virus flu burung dapat dihindari dengan pemberian *treatment* pada manusia dan melakukan pembakaran pada unggas yang terinfeksi. Oleh sebab itu, mengingat betapa bahayanya penyakit flu burung bagi manusia, maka sangat perlu bagi manusia untuk mempelajari penyakit tersebut, salah satunya dengan pemodelan matematika penyebaran flu burung. Analisa yang dilakukan meliputi eksistensi titik kesetimbangan model dan analisisnya terkait kestabilan titik kesetimbangan tersebut. Simulasi memberikan hasil untuk memvalidasi penafsiran hasil analitik dan numerik dari proses analisis.

### Abstract

*Avian influenza is a disease caused by H5N1 virus type A. The spreading process of avian influenza caused by wild poultry migration. Avian influenza is transmitted from poultry to poultry and from poultry to humans through saliva, mucus of nose and feces. The disease can cause death for humans with high mortality. Deaths due to infection avian influenza virus can be avoided by giving treatment for humans and burning infected poultry. Therefore, considering how dangerous avian influenza disease for humans, it is very necessary for humans to study this disease, one of them with a mathematical model of avian influenza. We analyzed the existence of the equilibrium point of the model and its stability analysis of the equilibrium point. The simulation gives results to validate the interpretation of analytic and numerical results from the analysis process.*

### How to cite:

Afifah D. A., M. Kharis., & Tri Sri Noor Asih. (2018). Model Matematika Penyebaran Flu Burung dengan Treatment pada Manusia dan Dinamika Populasi Recruitment-Death pada Unggas. *UNNES Journal of Mathematics*. 8(2):1-10.

## PENDAHULUAN

Pada awal tahun 1918, wabah pandemik virus *influenza* telah membunuh lebih dari 40.000 orang di dunia. Subtipe yang mewabah saat itu adalah virus H1N1 yang dikenal dengan “*Spanish Flu*”. Tahun 1957 virus bermutasi menjadi H2N2 atau “*Asian Flu*” yang telah merenggut 100.000 jiwa. Tahun 1968 virus bermutasi menjadi H3N2 atau “*Hongkong Flu*” yang telah menyebabkan 700.000 orang meninggal. Tahun 1977 virus bermutasi menjadi H5N1 atau “*Avian Influenza*” [1]. Virus flu burung disebabkan oleh virus influenza tipe A dalam hal ini adalah H5N1 [2].

Proses serangan virus flu burung pada manusia perlu diwaspadai karena dapat berpotensi untuk menular antar manusia dan menyebabkan kematian. Walaupun saat ini, transmisi penyakit ini masih sangat jarang, akan tetapi pengawasan dan monitoring perlu terus menerus ditingkatkan guna mengantisipasi semakin meningkatnya adaptasi virus HPAI ini terhadap manusia [1]. Flu burung menular dari unggas ke unggas dan dari unggas ke manusia, melalui air liur, lendir dari hidung dan dapat menular melalui udara yang tercemar virus H5N1 yang berasal dari kotoran atau sekreta unggas/unggas yang menderita flu burung [3].

Sejak tahun 2003 telah terjadi penyebaran yang semakin luas dari HPAI-H5N1 ke beberapa negara lain, dengan angka kematian yang cukup tinggi. Pada tahun 2003-2006 terjadi kecenderungan yang meningkat baik angka kesakitan ataupun angka kematian manusia yang terkena infeksi virus H5N1 [4]. Kematian karena infeksi virus flu burung dapat dihindari dengan pemberian *treatment* kepada manusia yang terinfeksi flu burung. Dalam [5] disebutkan bahwa *treatment* dapat mengendalikan masalah optimal untuk meminimalkan jumlah populasi yang rentan dan terinfeksi. *Treatment* memiliki dampak positif dalam mengendalikan penularan penyakit. [6] menyatakan bahwa pemberian *treatment* tidak dipengaruhi oleh faktor umur dan *treatment* lebih efektif untuk semua kriteria umur manusia. Kemudian diperoleh proporsi minimum *treatment* agar epidemi tidak meluas. Pada penelitian [7], [8] dan [9] disebutkan bahwa ada berbagai macam obat yang dapat digunakan sebagai pengobatan infeksi virus flu burung H5N1. Salah satu upaya untuk mencegah terjadinya penularan flu burung adalah dengan memusnahkan unggas yang terinfeksi. Menurut [10] pemusnahan unggas yang terinfeksi dapat mengurangi laju kontak

manusia rentan dengan individu terinfeksi mutan flu burung.

Epidemi merupakan suatu keadaan berjangkitnya penyakit menular pada periode yang singkat dalam populasi di suatu tempat yang melebihi perkiraan yang normal. Model matematika mengenai penyebaran penyakit (model epidemi) adalah metode yang tepat untuk menggambarkan pola penyebaran penyakit dari unggas ke manusia. Banyak orang yang mengembangkan model dasar epidemi untuk pola penyebaran penyakit flu burung dari unggas ke manusia. Diantaranya ada [8], [11], [12], [13], [14], dan [15].

Model matematika  $S_v I_v V S_h I_h R_h T$  dengan kompartemen vaksinasi pada populasi unggas tak konstan dan *treatment* pada populasi manusia tak konstan. Analisis model ini menggunakan metode Algoritma Genetika untuk mengoptimalkan vaksinasi dan *treatment* dengan biaya minimal untuk mengontrol penyakit flu burung [8].

Penelitian tentang penyebaran flu burung dengan model matematika  $SIRS_0 I_0$ . Penelitian tersebut memberikan hasil bahwa jika semakin kecil penyebaran flu burung dari unggas sakit ke unggas rentan maka bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) kurang dari satu atau tidak terjadi epidemi. Begitu pula sebaliknya jika  $R_0 > 1$  maka penyebaran flu burung semakin besar dari unggas sakit ke unggas rentan sehingga menimbulkan terjadinya epidemi [11].

Model matematika  $SEIR$  untuk flu burung dengan penularan pada manusia dan menggabungkan efek infeksi laten dan *treatment*. Dalam penelitian ini, *treatment* secara signifikan dapat mengurangi jumlah manusia yang *exposed* dan *infected* [12].

Peneliti [13] merumuskan tentang model matematika flu burung dengan *half-saturated incidence*. Pada penelitian ini populasi unggas dibagi menjadi dua sub-populasi yaitu *Susceptible bird* ( $S_b$ ) dan *Infected bird* ( $I_b$ ). Jumlah unggas rentan pada populasi unggas bertambah dari laju *recruitment* baru (kelahiran). Pada penelitian [14] menjelaskan bahwa unggas yang berada di dalam kelas rentan itu berasal dari perkembangbiakan unggas (kelahiran), imigrasi (perpindahan) ataupun unggas yang telah menetap di alam bebas atau di suatu penangkaran/kandang.

Model matematika dengan berfokus pada intervensi non - farmasi seperti pemusnahan burung yang terinfeksi dan isolasi manusia dengan gejala. Tujuan utama dari penelitian ini adalah untuk membangun model dengan menggabungkan dinamika burung liar dan

domestik, pemusnahan unggas yang terinfeksi dan isolasi orang yang terinfeksi dengan strain flu burung [15].

Dari sekian banyak model matematika, belum ada yang memodelkan  $SITRS_bI_b$  dengan  $T$  adalah kompartemen *treatment* sementara *treatment* mempunyai bagian penting dalam penanganan flu burung. Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk mengkaji tentang model matematika mengenai penyebaran virus flu burung dengan pemberian *treatment* pada manusia karena dapat mengurangi tingkat kematian pada manusia yang terinfeksi virus flu burung dan dinamika populasi *recruitment-death* pada populasi unggas. Pada penelitian ini populasi manusia diasumsikan konstan yaitu populasi tertutup (tidak terjadi proses migrasi), laju individu yang masuk pada populasi sama dengan laju kematian pada populasi tersebut, dan tidak ada manusia mati karena infeksi. Sedangkan populasi unggas diasumsikan tak konstan dengan laju *recruitment* (kelahiran, migrasi) pada populasi, dan laju kematian proporsional dengan jumlah populasi.

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka permasalahan yang timbul adalah sebagai berikut: (i) Bagaimana model matematika untuk penyebaran flu burung dengan *treatment* pada manusia dan dinamika populasi *recruitment-death* pada unggas? (ii) Bagaimana analisis kestabilan titik kesetimbangan dari model matematika yang dihasilkan? (iii) Bagaimana simulasi model matematika tersebut dengan menggunakan program Maple 12?

Berdasarkan masalah yang telah dirumuskan, tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut: (i) menyusun model matematika untuk penyebaran flu burung dengan *treatment* pada manusia dan dinamika populasi *recruitment-death* pada unggas; (ii) menganalisis kestabilan titik kesetimbangan dari model matematika yang dihasilkan; (iii) mensimulasikan model matematika menggunakan program Maple 12.

## METODE

Pada penelitian ini penulis melakukan langkah-langkah pemecahan sebagai berikut: (1) identifikasi masalah; (2) membuat asumsi; (3) membentuk model berdasarkan fakta-fakta dan asumsi-asumsi yang telah dibuat; (4) menyelesaikan dan menginterpretasikan model, setelah model terbentuk, perlu diselesaikan secara matematika yaitu mencari titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, dan melakukan analisis kestabilan model; (5) simulasi numerik dinamika model pada

penyebaran penyakit flu burung; (6) penafsiran hasil analitik dan numerik berdasarkan simulasi pada *software*; (7) penarikan kesimpulan.

Dalam setiap langkah-langkah pemecahan masalah di atas dilakukan kajian pustaka. Yang dimaksud kajian pustaka adalah menelaah sumber pustaka yang relevan dengan informasi-informasi yang diperlukan dalam penelitian. Penulis mengumpulkan informasi-informasi dari referensi berupa jurnal, buku, *ebook* yang mencakup pembahasan tentang fakta-fakta medis flu burung serta pemodelan matematika flu burung.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan fakta-fakta medis dalam [1], [3], [5], [8], [12], [16], [17], dan [18] dibentuk asumsi-asumsi dalam penyusunan model matematika diantaranya (1) Populasi unggas dianggap tak konstan dan populasi manusia dianggap konstan. (2) Laju kelahiran yang masuk pada populasi sama dengan laju kematian pada populasi manusia. (3) Populasi manusia tertutup (tidak terjadi proses migrasi). (4) Setiap manusia yang lahir masuk ke kelas  $S$ . (5) Adanya migrasi pada populasi unggas. (6) Setiap unggas yang masuk ke populasi unggas masuk ke kelas  $S_b$ . (7) Setiap unggas yang terinfeksi tidak akan sembuh mengingat umurnya yang pendek. (8) Virus flu burung menular melalui kontak langsung antara unggas rentan dengan unggas yang sakit flu burung dan kontak antara manusia rentan dengan unggas yang menderita flu burung. (9) Virus tidak menular melalui kontak antara manusia rentan dengan manusia yang sakit. (10) Terjadi kematian karena infeksi virus flu burung pada populasi unggas *infected*. (11) Terjadi kematian karena pemusnahan (dibakar) pada populasi unggas *infected*. (12) Pasien flu burung dikategorikan positif terkena flu burung ketika muncul gejala-gejala. (13) yang terinfeksi dan teridentifikasi akan masuk ke rumah sakit dan mendapat *treatment*. (14) *Treatment* pada manusia terinfeksi mempunyai tingkat keberhasilan 100%, artinya setiap manusia yang mendapat *treatment* akan sembuh dan tidak ada manusia mati karena infeksi. (15) *treatment* diasumsikan tidak terkendala faktor biaya.

Populasi manusia dibagi ke dalam empat kelas yakni kelas yang rentan terhadap penyakit (*Susceptible*), kelas yang terinfeksi penyakit (*Infected*), kelas terinfeksi yang diberi *treatment* (*Treatment*), dan kelas yang telah sembuh dari penyakit (*Recovered*). Sedangkan populasi unggas dibagi menjadi dua kelas yakni kelas yang rentan terhadap penyakit

(*Susceptible*), dan kelas yang terinfeksi penyakit (*Infected*).

Table 1 Daftar Variabel-variabel

Variabel	Makna
$N(t)$	:Jumlah populasi manusia pada waktu $t$
$S(t)$	:Jumlah manusia yang rentan terinfeksi penyakit pada waktu $t$
$I(t)$	:Jumlah manusia yang terinfeksi penyakit pada waktu $t$
$T(t)$	: Jumlah manusia terinfeksi yang diberi <i>treatment</i> pada waktu $t$
$R(t)$	:Jumlah manusia yang telah sembuh pada waktu $t$
$N_b$	: Jumlah populasi unggas pada waktu $t$
$S_b$	: Jumlah unggas yang rentan terinfeksi penyakit pada waktu $t$
$I_b$	: Jumlah unggas yang terinfeksi penyakit pada waktu $t$

$\beta_b$	: Peluang terjadinya kontak yang menyebarkan virus pada populasi unggas
$M_1$	: Laju kematian karena infeksi pada unggas terinfeksi
$M_2$	:Proporsi kematian karena dibakar terhadap unggas terinfeksi
$\gamma$	:Laju kesembuhan manusia terinfeksi
$\theta$	:Laju kehilangan immunitas
$\alpha$	:Proporsi <i>treatment</i> pada manusia yang terinfeksi
$\eta$	:Laju kesembuhan manusia dari <i>treatment</i>
$A$	:Laju individu masuk ke populasi (kelahiran, migrasi atau adanya penambahan unggas dari luar daerah)

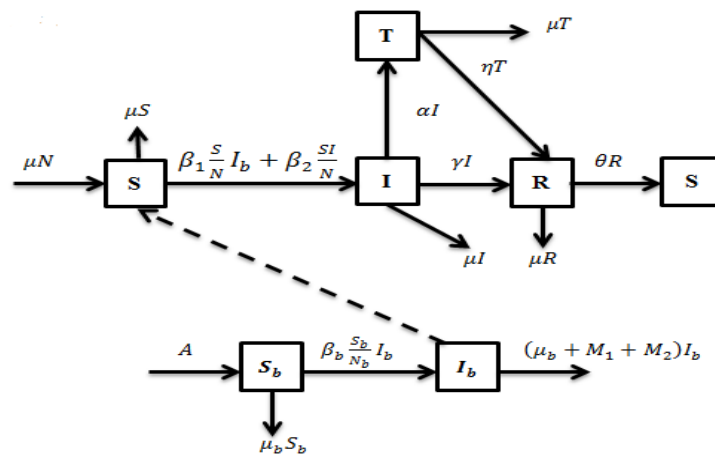
Table 2 Daftar Parameter-parameter

Parameter	Makna
$\mu$	:Laju kelahiran yang diasumsikan sama dengan laju kematian alami pada populasi manusia
$\mu_b$	:Laju kematian alami pada populasi unggas
$\beta_1$	:Peluang terjadinya kontak unggas terinfeksi yang menyebarkan virus pada populasi manusia
$\beta_2$	:Peluang terjadinya kontak manusia terinfeksi yang menyebarkan virus pada populasi manusia

Model matematika yang dibentuk merupakan suatu sistem persamaan differensial dapat dilihat pada Sistem (1).

$$\begin{aligned}
 \dot{S} &= \mu N + \theta R - S \left( \beta_1 \frac{I_b}{N} + \beta_2 \frac{I}{N} + \mu \right) \\
 \dot{I} &= S \left( \beta_1 \frac{I_b}{N} + \beta_2 \frac{I}{N} \right) - (\mu + \alpha + \gamma) I \\
 \dot{T} &= \alpha I - (\mu + \eta) T \\
 \dot{R} &= \gamma I - (\theta + \mu) R + \eta T \\
 \dot{S}_b &= A - \left( \beta_b \frac{I_b}{N_b} + \mu_b \right) S_b \\
 \dot{I}_b &= \beta_b \frac{S_b}{N_b} I_b - (\mu_b + M_1 + M_2) I_b \\
 N &= S + I + T + R \\
 N_b &= S_b + I_b
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Berdasarkan fakta-fakta dan asumsi-asumsi yang telah diberikan, disusun diagram perpindahan individu dalam kasus epidemi ini yang dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Transfer Epidemi Flu Burung dengan Treatment pada Manusia Terinfeksi

Karena populasi manusia konstan maka  $N$  dapat diganti dengan suatu konstanta  $K$ . Sementara itu populasi unggas  $N_b = S_b + I_b$  sehingga  $\frac{dN_b}{dt} = A - \mu_b N_b - (M_1 + M_2)I_b$ , dengan mensubstitusikan  $S_b = N_b - I_b$  diperoleh  $\frac{dI_b}{dt} = \beta_b \frac{N_b - I_b}{N_b} I_b - (\mu_b + M_1 + M_2)I_b$ . Pada penelitian ini diasumsikan nilai  $\beta_2 = 0$ , sehingga sistem di atas dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu K + \theta R - S \left( \frac{\beta_1}{K} I_b + \mu \right) \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta_1}{K} S I_b - (\mu + \alpha + \gamma) I \\ \frac{dT}{dt} &= \alpha I - (\mu + \eta) T \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - (\theta + \mu) R + \eta T \\ \frac{dN_b}{dt} &= A - \mu_b N_b - (M_1 + M_2) I_b \\ \frac{dI_b}{dt} &= \beta_b \frac{N_b - I_b}{N_b} I_b - (\mu_b + M_1 + M_2) I_b \end{aligned} \tag{2}$$

**Analisis Model Matematika**

Dari Sistem (2) akan dicari titik kesetimbangannya dengan membuat nol ruas kanan sehingga diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \mu K + \theta R - S \left( \frac{\beta_1}{K} I_b + \mu \right) &= 0 \\ \frac{\beta_1}{K} S I_b - (\mu + \alpha + \gamma) I &= 0 \\ \alpha I - (\mu + \eta) T &= 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan fakta-fakta dan asumsi-asumsi yang telah diberikan, disusun diagram perpindahan individu dalam kasus epidemi ini yang dapat dilihat pada Gambar 1.

$$\Leftrightarrow J_b(P) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_1 I_b}{K} - \mu & 0 & 0 & \theta & 0 & -\frac{\beta_1}{K} S \\ \frac{\beta_1 I_b}{K} & -(\mu + \alpha + \gamma) & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_1}{K} S \\ 0 & \alpha & -(\mu + \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \eta & -(\theta + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_b & -M_1 - M_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_b I_b^2}{N_b^2} & \frac{\beta_b (N_b - 2I_b)}{N_b} - (\mu_b + M_1 + M_2) \end{bmatrix}$$

untuk

$$P_0 = (S, I, T, R, N_b, I_b) = \left( K, 0, 0, 0, \frac{A}{\mu_b}, 0 \right) \text{ dan}$$

$$P_1 = (S^*, I^*, T^*, R^*, N_b^*, I_b^*) = \left( \frac{K(\mu + \alpha + \gamma) I^*}{\beta_1 I_b^*}, I^*, \frac{\alpha I^*}{\mu + \eta}, \frac{I^* [\gamma(\mu + \eta) + \eta \alpha]}{(\mu + \eta)(\theta + \mu)}, N_b^*, I_b^* \right)$$

dengan

$$I^* = \frac{\beta_1 I_b^* K (\mu + \eta) (\theta + \mu)}{\beta_1 I_b^* [(\mu + \eta)(\theta + \mu + \alpha + \gamma) + \theta \alpha] + K (\mu + \eta) (\theta + \mu) (\mu + \alpha + \gamma)}$$

$$I_b^* = \frac{A [\beta_b - (\mu_b + M_1 + M_2)]}{(M_1 + M_2) [\beta_b - (\mu_b + M_1 + M_2)] + \mu_b \beta_b}, \text{ dan}$$

$$N_b^* = \frac{A \beta_b}{(M_1 + M_2) [\beta_b - (\mu_b + M_1 + M_2)] + \mu_b \beta_b}.$$

$$\begin{aligned} \gamma I - (\theta + \mu) R + \eta T &= 0 \\ A - \mu_b N_b - (M_1 + M_2) I_b &= 0 \\ \beta_b \frac{N_b - I_b}{N_b} I_b - (\mu_b + M_1 + M_2) I_b &= 0. \end{aligned}$$

Hasil analisa proses di atas menghasilkan Teorema 1.

**Teorema 1**

Didefinisikan  $R_0 = \frac{\beta_b}{\mu_b + M_1 + M_2}$

1. Jika  $R_0 < 1$  maka Sistem (2) mempunyai sebuah titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu

$$P_0 = (S, I, T, R, N_b, I_b) = \left( K, 0, 0, 0, \frac{A}{\mu_b}, 0 \right).$$

2. Jika  $R_0 > 1$  maka Sistem (2) mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu  $P_0$  dan

$$P_1 = (S^*, I^*, T^*, R^*, N_b^*, I_b^*) = \left( \frac{K(\mu + \alpha + \gamma) I^*}{\beta_1 I_b^*}, I^*, \frac{\alpha I^*}{\mu + \eta}, \frac{I^* [\gamma(\mu + \eta) + \eta \alpha]}{(\mu + \eta)(\theta + \mu)}, N_b^*, I_b^* \right)$$

dengan

$$I^* = \frac{\beta_1 I_b^* K (\mu + \eta) (\theta + \mu)}{\beta_1 I_b^* [(\mu + \eta)(\theta + \mu + \alpha + \gamma) + \theta \alpha] + K (\mu + \eta) (\theta + \mu) (\mu + \alpha + \gamma)}$$

$$I_b^* = \frac{A [\beta_b - (\mu_b + M_1 + M_2)]}{(M_1 + M_2) [\beta_b - (\mu_b + M_1 + M_2)] + \mu_b \beta_b}, \text{ dan}$$

$$N_b^* = \frac{A \beta_b}{(M_1 + M_2) [\beta_b - (\mu_b + M_1 + M_2)] + \mu_b \beta_b}.$$

Untuk kasus  $P_0$ , diperoleh semua nilai eigen negatif apabila  $R_0 < 1$ . Dengan kata lain, jika  $R_0 < 1$  maka titik kesetimbangan  $P_0$  stabil asimtotik lokal dan jika  $R_0 > 1$  maka titik kesetimbangan  $P_0$  tidak stabil.

Untuk kasus  $P_1$  diperoleh

$$A_3 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0$$

dengan

$$A_3 = K$$

$$A_2 = K(\theta + \alpha + \eta + 3\mu + \gamma) + \beta_1 I_b^*$$

$$A_1 = K(3\mu^2 + \theta\gamma + \eta\alpha + 2\alpha\mu + 2\gamma\mu + 2\eta\mu + 2\theta\mu + \eta\gamma + \eta\theta + \theta\alpha) + \beta_1 I_b^* (\theta + \gamma + \eta + 2\mu + \alpha)$$

$$A_0 = 2\mu + \alpha$$

$$A_0 = K(\gamma\mu^2 + \eta\mu^2 + \eta\theta\gamma + \mu^2\theta + \alpha\theta\mu + \alpha\mu^2 + \mu^3 + \eta\theta\mu + \eta\theta\alpha + \eta\mu\alpha + \gamma\theta\mu + \eta\mu\gamma) + \beta_1 I_b^*(\mu^2 + \eta\alpha + \mu\theta + \alpha\theta + \theta\eta + \gamma\mu + \alpha\mu + \eta\mu + \eta\gamma).$$

Jelas nilai  $A_0 > 0, A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0$ , dan  $A_1A_2 - A_0A_3 > 0$  saat  $R_0 > 1$ . Berdasarkan Kriteria *Routh-Hurwitz*, untuk polinom pangkat 3 diperoleh simpulan bahwa  $A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0$  mempunyai akar-akar dengan bagian real negatif. Maka titik kesetimbangan endemik  $P_1$  stabil asimtotik lokal.

Hasil analisa proses di atas menghasilkan Teorema 2.

**Teorema 2**

Diberikan  $R_0 = \frac{\beta_b}{\mu_b + M_1 + M_2}$ .

1. Jika  $R_0 < 1$  maka titik kesetimbangan  $P_0$  stabil asimtotik lokal
2. Jika  $R_0 > 1$  maka titik kesetimbangan  $P_0$  tidak stabil dan  $P_1$  stabil asimtotik lokal.

**Simulasi Model**

Simulasi model matematika penyebaran penyakit flu burung dengan *treatment* pada populasi manusia dan dinamika populasi *recruitment-death* pada unggas dengan memberikan nilai-nilai untuk masing-masing parameter sesuai dengan kondisi nilai  $R_0$  dalam teorema-teorema yang telah diberikan di atas. Simulasi ini diberikan untuk memberikan ilustrasi pemodelan tersebut sehingga mampu memvalidasi hasil analitik yang dilakukan. Simulasi ini dilakukan terhadap titik kesetimbangan bebas penyakit ( $P_0$ ) dan titik kesetimbangan endemik ( $P_1$ ).

Nilai parameter-parameter yang diberikan untuk membuat simulasi dari penyebaran flu burung dapat dilihat pada Table 3.

Tabel 3. Nilai Parameter-parameter untuk Simulasi Model

Paramete	Nilai	Sumber
r		
A	1000	Chong <i>et al</i> , (2013)
$\mu$	0,015	Iwami <i>et al</i> , (2007)
$\mu_b$	0,04	Derouich & Boutayeb, (2008)

$\beta_1$	$\frac{5}{300}$	Tasmi & Nuning, (2016)
$M_1$	0,1	Gulbudak & Martcheva, (2013)
$M_2$	0,6	Kimbir <i>et al</i> , (2014)
$\gamma$	0,001	Tasmi & Nuraini, (2016)
$\theta$	0,4	Rahmalia (2015)
$\alpha$	0,585	Tasmi & Nuraini, (2016)
$\eta$	0,1	Tasmi & Nuraini, (2016)

Berdasarkan parameter-parameter yang telah disebutkan di atas, nilai  $A = 1000$  artinya terdapat 1000 unggas yang masuk populasi unggas setiap harinya. Nilai  $\mu = 0,015$  artinya rata-rata ada 15 manusia yang lahir dan meninggal tanpa pengaruh flu burung setelah 1000 hari. Nilai  $\mu_b = 0,04$  artinya rata-rata ada 4 unggas yang mati tanpa pengaruh flu burung setelah 100 hari. Nilai  $\beta_1 = \frac{5}{300}$  artinya rata-rata ada 5 manusia rentan yang menjadi terinfeksi apabila ada 300 manusia yang kontak langsung dengan unggas terinfeksi. Nilai  $M_1 = 0,1$  artinya rata-rata ada 1 unggas yang mati akibat flu burung setelah 10 hari. Nilai  $M_2 = 0,6$  artinya rata-rata 60% individu unggas terinfeksi flu burung dibakar oleh manusia. Nilai  $\gamma = 0,001$  artinya rata-rata ada 1 manusia terinfeksi yang sembuh sendiri setelah 1000 hari (masa infeksi virus 1000 hari). Nilai  $\theta = 0,4$  artinya rata-rata ada 4 manusia yang mengalami penurunan kekebalan tubuh setelah 10 hari. Nilai  $\alpha = 0,585$  artinya rata-rata ada 585 individu manusia terinfeksi yang diberi *treatment* dari 1000 manusia terinfeksi flu burung. Nilai  $\eta = 0,1$  artinya rata-rata ada 1 individu manusia sembuh dari flu burung setelah diberi *treatment* setelah 10 hari.

Penelitian ini menganalisis tentang dua kondisi  $R_0$  yang berbeda yaitu ketika  $R_0 < 1$  dan  $R_0 > 1$ . Jika  $R_0 < 1$  maka penyakit akan menghilang dari populasi pada waktu tertentu sedangkan jika  $R_0 > 1$  maka penyakit akan tetap ada sampai waktu yang tidak terbatas (endemik). Salah satu solusi terhadap penyebaran penyakit flu burung dengan *treatment* pada manusia dan dinamika populasi *recruitment-death* pada unggas, dilakukan dengan membuat variasi  $\beta_b$ .

Dipunyai  $R_0 = \frac{\beta_b}{\mu_b + M_1 + M_2}$  sehingga dapat dicari nilai batas  $\beta_b$  dengan cara mengasumsikan  $R_0 = 1$  diperoleh nilai batas  $\beta_b = 0,74$ . Ketika dalam kondisi bebas penyakit ( $R_0 < 1$ ) maka nilai  $\beta_b < 0,74$  sedangkan ketika dalam kondisi endemik ( $R_0 > 1$ ) maka nilai  $\beta_b > 0,74$ .

**Simulasi Model Matematika untuk  $P_0$**

Analisis model matematika penyebaran flu burung dengan *treatment* pada manusia dan dinamika populasi *recruitment-death* pada unggas dilakukan dengan membuat variasi nilai  $\beta_b$  yang dapat dilihat pada Tabel 4.

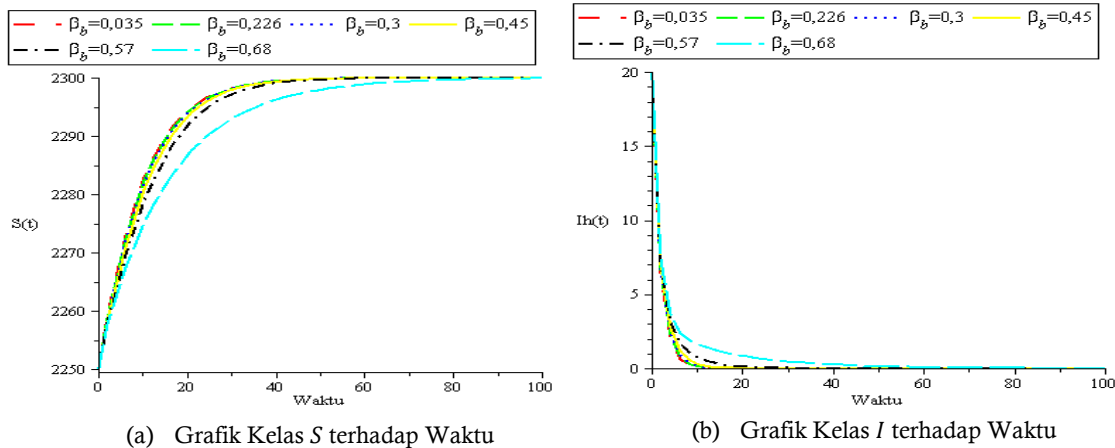
Tabel 4 Variasi Nilai  $\beta_b$  untuk  $R_0 < 1$

$\beta_b$	$R_0$
0,035	0,047
0,226	0,305
0,30	0,405
0,45	0,608
0,57	0,77
0,68	0,919

Pada Gambar 2 (a) dan (b) dengan variasi nilai parameter  $\beta_b = 0,035; 0,226; ; 0,3; 0,45; 0,57; 0,68$  terlihat bahwa  $S, I$  menuju satu titik yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $P_0 = (2300; 0)$  dan  $P_0$  stabil asimtotik lokal. Pada Gambar 2(a) jelas terlihat bahwa laju pertumbuhan sub-populasi manusia rentan  $S(t)$  mengalami kenaikan pada saat kondisi awal awal untuk setiap  $\beta_b$ , hal itu terjadi karena adanya penambahan individu. Kemudian sub-populasi manusia rentan tidak mengalami dinamika/penurunan hingga konstan di titik  $S = 2300$  untuk  $\beta_b = 0,035; 0,226; 0,3; 0,45; 0,57$  pada  $t = 60$ , untuk  $\beta_b = 0,68$  pada saat  $t = 100$ , kemudian konstan pada titik tersebut dan  $S(t)$  stabil asimtotik lokal.

Nilai awal populasi unggas adalah 5000 ( $N_b(0) = 5000$ ), nilai awal sub-populasi unggas yang terinfeksi penyakit adalah 100 ( $I_b(0) = 100$ ), nilai awal sub-populasi manusia yang rentan terhadap penyakit adalah 2250 ( $S(0) = 2250$ ), nilai awal sub-populasi manusia yang terinfeksi penyakit adalah 20 ( $I(0) = 20$ ), nilai awal sub-populasi manusia terinfeksi yang diberi *treatment* adalah 16 ( $T(0) = 16$ ), nilai awal sub-populasi manusia yang sembuh dari penyakit adalah 14 ( $R(0) = 14$ ).

**Hasil simulasi di  $P_0$  dapat dilihat pada Gambar 2.**



**Gambar 2 (Grafik Banyak Masing-masing Individu terhadap Waktu di titik  $P_0$  saat  $R_0 < 1$  dengan  $N_b(0) = 5000, I_b(0) = 100, S(0) = 2250, I(0) = 20, T(0) = 16, R(0) = 14$  untuk  $\beta_b = 0,035; 0,226; 0,3; 0,45; 0,57; 0,68$ ).**

Pada Gambar 2(b) jelas terlihat bahwa laju pertumbuhan sub-populasi manusia yang terinfeksi flu burung  $I(t)$  mengalami penurunan pada saat kondisi awal untuk setiap  $\beta_b$ , hal itu terjadi disebabkan oleh sebagian manusia yang meninggal alami, sebagian manusia menjalani *treatment*, dan sebagian lagi sembuh sendiri tanpa menjalani *treatment* dari penyakit flu

flu burung. Selanjutnya pada laju pertumbuhan sub-populasi manusia yang terinfeksi terlihat bahwa sub-populasi ini tidak mengalami dinamika/perubahan atau konstan di titik 0 untuk  $\beta_b = 0,035; 0,226; 0,3; 0,45$  pada saat  $t = 20$ , untuk  $\beta_b = 0,57$  pada saat  $t = 30$ , dan untuk  $\beta_b = 0,68$  pada saat  $t = 100$ , kemudian konstan pada titik tersebut dan  $I(t)$  stabil asimtotik lokal.

**Simulasi Model Matematika untuk  $P_1$**

Analisis model matematika penyebaran flu burung dengan *treatment* pada manusia dan dinamika populasi *recruitment-death* pada unggas dilakukan dengan membuat variasi nilai  $\beta_b$  yang dapat dilihat pada Tabel 5.

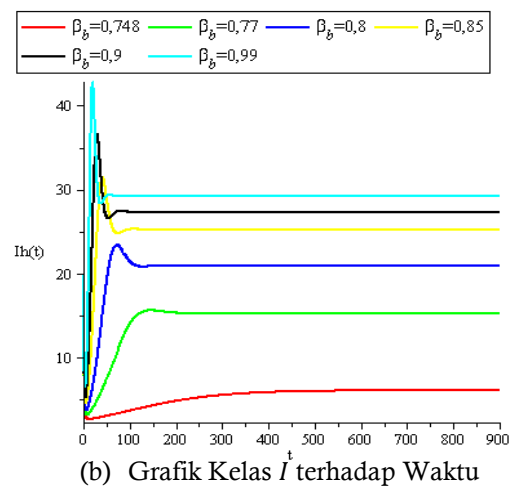
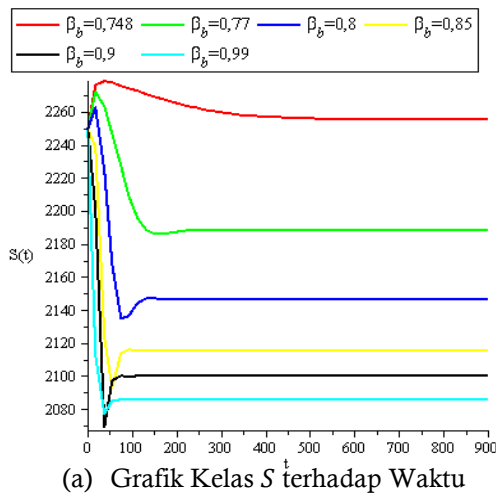
Tabel 5 Variasi Nilai  $\beta_b$  untuk  $R_0 > 1$

$\beta_b$	$R_0$
0,748	1,01
0,77	1,04
0,80	1,08
0,85	1,15

0,90	1,22
0,99	1,34

Nilai awal populasi unggas adalah 5000 ( $N_b(0) = 5000$ ), nilai awal sub-populasi unggas yang terinfeksi penyakit adalah 100 ( $I_b(0) = 100$ ), nilai awal sub-populasi manusia yang rentan terhadap penyakit adalah 2250 ( $S(0) = 2250$ ), nilai awal sub-populasi manusia yang terinfeksi penyakit adalah 20 ( $I(0) = 20$ ), nilai awal sub-populasi manusia terinfeksi yang diberi *treatment* adalah 16 ( $T(0) = 16$ ), nilai awal sub-populasi manusia yang sembuh dari penyakit adalah 14 ( $R(0) = 14$ ).

Setelah di analisis diperoleh hasil yang dapat dilihat pada Gambar 3.



Pada Gambar 3(a) jelas terlihat bahwa laju pertumbuhan sub-populasi manusia rentan  $S(t)$  mengalami kenaikan pada saat kondisi awal untuk  $\beta_b = 0,748; 0,77; 0,8$ , hal itu terjadi karena adanya penambahan individu. Kemudian sub-populasi manusia rentan mengalami penurunan pada  $t$  tertentu, hal ini disebabkan oleh manusia yang meninggal alami. dan mengalami penurunan pada saat kondisi awal untuk  $\beta_b = 0,85; 0,9; 0,99$ , hal itu terjadi karena semakin banyak manusia rentan yang terinfeksi dan sebagian mati alami. Kemudian sub-populasi manusia rentan mengalami kenaikan pada  $t$  tertentu, hal ini disebabkan oleh adanya penambahan individu. Selanjutnya pada laju pertumbuhan sub-populasi manusia rentan terlihat bahwa sub-populasi ini mengalami dinamika hingga konstan di titik  $S^* = 2255$  untuk  $\beta_b = 0,748$  pada saat  $t = 800$ , titik  $S^* = 2188$  untuk  $\beta_b = 0,77$  pada saat  $t = 400$ , titik  $S^* = 2146$  untuk

$\beta_b = 0,8$  pada saat  $t = 200$ , titik  $S^* = 2115$  untuk  $\beta_b = 0,85$  pada saat  $t = 150$ , titik  $S^* = 2099$  untuk  $\beta_b = 0,9$  pada saat  $t = 100$ , dan titik  $S^* = 2085$  untuk  $\beta_b = 0,99$  pada saat  $t = 82$ , kemudian  $S^*(t)$  stabil asimtotik lokal. Pada Gambar 3(b) jelas terlihat bahwa laju pertumbuhan sub-populasi manusia yang terinfeksi flu burung  $I(t)$  mengalami penurunan pada saat kondisi awal untuk setiap  $\beta_b$ , hal itu terjadi karena manusia yang meninggal alami. Kemudian sub-populasi manusia yang terinfeksi mengalami kenaikan pada  $t$  tertentu, hal ini disebabkan oleh adanya penambahan individu manusia rentan yang terinfeksi flu burung. Selanjutnya pada laju pertumbuhan sub-populasi manusia yang terinfeksi terlihat bahwa sub-populasi ini tidak mengalami perubahan atau konstan di titik  $I^* = 6$  untuk  $\beta_b = 0,748$  pada saat  $t = 600$ , titik  $I^* = 15$  untuk  $\beta_b = 0,77$  pada saat  $t = 300$ , titik  $I^* = 20$  untuk  $\beta_b = 0,8$  pada saat  $t = 150$ , titik  $I^* = 25$  untuk  $\beta_b = 0,85$  pada saat  $t = 150$ , titik  $I^* = 27$  untuk  $\beta_b = 0,9$



pada saat  $t = 150$ , dan titik  $I^* = 29$  untuk  $\beta_b = 0,99$  pada saat  $t = 100$ , kemudian  $I^*(t)$  stabil asimtotik lokal.

Pada simulasi model matematika di  $P_1$ , selain parameter  $\beta_b$  yang diubah seperti yang telah disebutkan di atas yaitu  $\beta_b = 0,748; 0,77; 0,8; 0,85; 0,9; 0,99$  juga dilakukan analisis pengaruh pembakaran unggas terinfeksi flu burung ( $M_2$ ) terhadap epidemi flu burung dengan membuat variasi proporsi pada parameter  $M_2$ . Penentuan proporsi minimum pembakaran unggas terinfeksi agar epidemi tidak meluas digunakan syarat  $R_0 < 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Dipunyai } R_0 &= \frac{\beta_b}{\mu_b + M_1 + M_2} \\ \text{Jelas } R_0 < 1 &\Leftrightarrow \frac{\beta_b}{\mu_b + M_1 + M_2} < 1 \\ &\Leftrightarrow \mu_b + M_1 + M_2 > \beta_b \\ &\Leftrightarrow M_2 > \beta_b - (\mu_b + M_1) \end{aligned}$$

Dari tabel 3, diperoleh nilai  $\mu_b = 0,04$  dan  $M_1 = 0,1$ . Proporsi minimum untuk masing-masing  $M_2$  berdasarkan nilai  $\beta_b$  dapat dilihat pada Tabel 6

Tabel 6 Proporsi Minimum Masing-masing  $M_2$  Berdasarkan Nilai  $\beta_b$

$\beta_b$	$M_2$
0,748	0,608
0,77	0,63
0,8	0,66
0,85	0,71
0,9	0,76
0,99	0,85

Diperoleh hasil analisis bahwa semakin besar unggas terinfeksi yang dibakar akan semakin berkurang jumlah individu yang terjangkit penyakit flu burung, artinya penyakit dapat berkurang hingga menghilang dari suatu populasi apabila pembakaran dilakukan lebih dari proporsi minimum yang diberikan. Berdasarkan proporsi minimum yang diberikan, dalam analisis ini pembakaran dilakukan lebih dari 0,6 (60%) untuk setiap peluang kontak antara unggas rentan dengan unggas terinfeksi ( $\beta_b$ ). Hal ini sesuai dengan penelitian Kimbir et al (2014) bahwa pembakaran lebih efektif apabila lebih dari 0,6 (60%) unggas terinfeksi yang dibakar.

## PENUTUP

Berdasarkan fakta-fakta dan asumsi-asumsi yang telah dibuat, diperoleh model  $SITRN_bI_b$  pada penyebaran penyakit flu burung dengan treatment pada manusia dan dinamika populasi recruitment-death pada unggas sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu K + \theta R - S \left( \frac{\beta_1}{K} I_b + \mu \right) \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta_1}{K} S I_b - (\mu + \alpha + \gamma) I \\ \frac{dT}{dt} &= \alpha I - (\mu + \eta) T \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - (\theta + \mu) R + \eta T \\ \frac{dN_b}{dt} &= A - \mu_b N_b - (M_1 + M_2) I_b \\ \frac{dI_b}{dt} &= \beta_b \frac{N_b - I_b}{N_b} I_b - (\mu_b + M_1 + M_2) I_b \\ N &= S + I + T + R \\ N_b &= S_b + I_b \end{aligned}$$

Dari model tersebut diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Analisis yang dilakukan diperoleh bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ), yakni  $R_0 = \frac{\beta_b}{\mu_b + M_1 + M_2}$ . Berdasarkan hasil tersebut, apabila  $R_0 < 1$  maka titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik sedangkan apabila  $R_0 > 1$  maka titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik.

Simulasi model matematika penyebaran flu burung dengan treatment pada manusia dan dinamika populasi recruitment-death pada unggas diberikan hasil bahwa semakin kecil nilai peluang kontak antara unggas terinfeksi dengan unggas rentan akan mengurangi jumlah individu yang terjangkit penyakit flu burung. Kemudian diperoleh proporsi minimum unggas terinfeksi yang dibakar ( $M_2$ ) agar epidemi tidak meluas yaitu  $M_2 > \beta_b - (\mu_b + M_1)$ . Berdasarkan proporsi minimum yang diberikan, dalam analisis ini pembakaran dilakukan lebih dari 60% untuk setiap peluang kontak antara unggas rentan dengan unggas terinfeksi ( $\beta_b$ ).

## DAFTAR PUSTAKA

- Radji, M. 2006. Avian Influenza A (H5N1): Patogenesis, Pencegahan dan Penyebaran pada Manusia. *Review Artikel Majalah Ilmu Kefarmasian*, 3(2):55-65.
- National Science Foundation. 2015. *Mathematical Modeling of Disease Outbreak*, BioMath. USA: COMAP, Inc. 62 In

- conjunction with DIMACS, Rutgers University.
- Sya'baningtyas, FS., M. Chotim., M. Kharis. 2013. Model Matematikawabah Flu burung Pada Populasi Unggasdengan Pengaruh Vaksinasi. *Unnes Journal of Mathematics*, 2(2):127-132.
- World Health Organization (WHO). 2017. Cumulative Number of Confirmed Human Cases for Avian Influenza A (H5N1) reported to WHO, 2003-2017. [Diakses di [http://www.who.int/influenza/human\\_animal\\_interface/2017\\_07\\_25\\_tableH5N1.pdf](http://www.who.int/influenza/human_animal_interface/2017_07_25_tableH5N1.pdf) pada tanggal 12 Februari 2018].
- Lashari, A. A. 2016. Optimal Control of an SIR Epidemic Model with a Saturated Treatment. *Applied Mathematics & Information Sciences An International Journal*, 10(1):185-191.
- Kharis, M & R Arifudin. 2017. Mathematical Model of Seasonal Influenza with Treatment in Constant Population. *Journal of Physics*. 824 012034 doi: 10.1088/012034
- Setiyono, A & Nurliani, B. 2013. Potensi Tanaman Obat untuk Penanggulangan Flu burung: Uji In Vitro pada Sel Vero. *Jurnal Sain Veteriner*, 31(1):27-34.
- Tasmi & Nuraini, N. 2016. Optimal Vaccination and Treatment Schedules in a Deterministic Avian influenza Model. *J. Math. Fund. Sci*, 48(2):164-177.
- Sompet, B, *et al*. 2017. Antiviral activity of five Asian medicinal plant crude extracts against highly pathogenic H5N1 avian influenza virus. *Asian Pacific Journal of Tropical Medicine*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.apjtm.2017.08.010>.
- Iwami S., Takeuchi, Y., Liu, X. 2007. Avian-Human Influenza Epidemic Model. *Mathematical Biosciences*, doi:10.1016/j.mbs.2006.08.001.
- Siswanto., Supriyono., Wuryanto. 2013. Model Matematika Penyebaran Flu burung dari Unggas ke Manusia. *Unnes Journal of Mathematics*, 2(1):32-38.
- Modnak, C. 2017. Optimal Treatment Strategy of An Avian Influenza Model With Latency. *International Journal of Biomathematics*, 10(5):1-21.
- Chong, N.S., Jean M.T., Robert J.S. 2014. A Mathematical Model Of Avian Influenza With Half-Saturated Incidence. *Theory Biosci*, DOI 10.1007/s12064-013-0183-6
- Putri, D.P. & Herri, S. 2016. Kajian Pemodelan Matematika terhadap Penyebaran Virus Avian Influenza Tipe-H5N1 pada Populasi Unggas. *Teorema, Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika FKIP-Universitas Galuh Ciamis*, 3(2):501-516.
- Kimbir, A.R, P.N Okolo. 2014. A Model Analysis for the Transmission Dynamics of Avian Influenza. *Mathematical Theory and Modelling*, 4(13):15-28.
- Gulbudak H & M. Martcheva. 2013. Forward Hysteresis and Backward Bifurcation Caused By Culling in An Avian Influenza Model. *MathBiosciences*, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.mbs.2013.09.001>
- Pongsumpun, P & Lamwong, J. 2016. Mathematical Model for The Transmission of Avian Influenza by Age Group of Patients in Thailand. *International Journal of Multidisciplinary Academic Research*. 4(1):12-23.
- Enatsu, Y., Messina, E., Nakata, Y., Muroya, Y., Russo, E., & Vecchio, A. 2012. Global Dynamics of a Delayed SIRS Epidemic Models With a Wide Class of Non Linear Incidence Rates. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, DOI: 10.1007/s12190-011-0507-y
- Derouich, M. & Boutayeb. 2008. An Avian Influenza Mathematical Model. *Applied Mathematical Sciences*, 2(36):1749-1760.
- Rahmalia, D. 2015. Pemodelan Matematika dan Analisis Stabilitas dari Penyebaran Penyakit Flu burung. *Jurnal UJMC*, 1(1):11-19.