PRISMA 1 (2018)
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/

Perbandingan Finite Difference Method dan Finite Element Method dalam Mencari Solusi Persamaan Diferensial Parsial

Tri Sri Noor Asih, St. Budi Waluya, Supriyono

Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang
inung.mat@mail.unnes.ac.id

Abstrak

Finite Difference Methods dan *Finite Element Methods* merupakan dua macam pendekatan numerik untuk mencari solusi persamaan diferensial parsial. *Finite difference methods* lebih awal diperkenalkan untuk menyelesaikan beberapa persamaan fisika, yaitu pada tahun 1930-an. Metode ini menyelesaikan persamaan differensial dengan membagi bidang menjadi sejumlah berhingga pias segi empat. Selanjutnya pada tahun 1950-an diperkenalkan metode lain untuk menyelesaikan beberapa persamaan diferensial parsial yang digunakan pada bidang teknik, yang dikenal dengan *Finite Element Methods.* Metode ini membagi domain dengan sejumlah berhingga elemen, yang direpresentasikan dalam bentuk polinomial. Dengan demikian elemen yang digunakan pada *Finite Element Methods* tidak harus berbentuk segiempat.

Keywords: *Finite Element Methods, Finite Difference Methods*

PENDAHULUAN

Persamaan differensial linier umumnya dapat diselesaikan dengan menggunakan cara analitik seperti pemakaian Transformasi Laplace, tetapi pada bentuk yang kompleks persamaan differensial linier ini menjadi sulit diselesaikan. Metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial dengan menggunakan bantuan komputer sebagai alat hitung, ketika metode analitik sulit digunakan (Munir, 2010). Pada beberapa bentuk persamaan differensial, khususnya pada differensial non-linier, penyelesaian analitik sulit sekali dilakukan sehingga metode numerik dapat menjadi metode penyelesaian yang disarankan.

Ada beberapa metode dalam penyelesaian persamaan differensial biasa yaitu metode Euler, meotode Heun, Metode Deret Taylor , Metode Runge-Kutta,dan Metode predictor-corrector. Sedangkan pada penyelesaian persamaan differensial parsial dapat menggunakan metode beda hingga skema esplisit, skema Implisit, skema Crank-Nicholson, Integral langsung, pemisal variabel, dan lain sebagainya (Sangadji, 2008). Penyelesaian numerik persamaan diferensial parsial dapat menggunakan pendekatan metode beda hingga (*finite difference methods*) maupun metode elemen berhingga (*finite element methods*) (Smith, 1985).

Pada tahun 1928 mulai dikenalkan suatu metode penyelesaian numerik persamaan Dirichlet dengan pendekatan *finite difference* oleh Courant-Friedrichs-Lewy (Thomée, 2001). Setelah itu diteliti pula error metode tersebut serta penggunaannya pada permasalahan yang lain.

Pada tahun 1950-an Richard Courant (1943) memperkenalkan *Finite Element Method (FEM)* sebagai suatu metode pendekatan numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Sejak saat itu FEM terus dipelajari dan dikembangkan menjadi suatu metode yang sangat bermanfaat serta digunakan secara luas dalam penyelesaian numerik persamaan diferensial parsial.

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji histori perkembangan FDM dan FEM sebagai metode pencarian solusi persamaan diferensial, melihat perbedaan kedua metode tersebut serta mengaplikasikannya untuk mencari solusi persamaan, dalam hal ini persamaan aliran debris.

PEMBAHASAN

1. Tinjauan Histori Perkembangan FDM dan FEM

Pada tahun 1928 Courant, Friedrichs dan Lewy menggunakan pendekatan beda hingga untuk menyelesaikan permasalahan Dirichlet persamaan eliptik orde dua dan persamaan biharmonik. Selain itu mereka juga menggunakan untuk masalah syarat batas orde kedua persamaan hiperbolik serta persamaan panas. Meskipun penelitian tersebut tidak bersifat numerik, namun menjadi dasar penting bagi perkembangan metode beda hingga selanjutnya.

Kemudian pada tahun 1930 Gerschgorin menganalisis error metode beda hingga untuk persamaan eliptik. Berkebalikan dengan penelitian Courant dkk, penelitian Gerschgorin berdasar pada versi diskrit prinsip maksimum. Pendekatan beda hingga untuk persamaan eliptik orde yang lebih tinggi diteliti selanjutnya oleh Saulev pada tahun 1957 dan Thomee pada tahun 1964.

Selanjutnya stabilitas konvergensi solusi mulai diteliti pada tahun 1959 oleh Lax dan Richtmyer, yang menyatakan bahwa kestabilan merupakan syarat perlu konvergensi solusi. Tahun 1959 Kreiss membuktikan syarat perlu dan syarat khusus eksistensi operator stabil. Pada tahun 1968 Wendroff membuktikan bahwa masalah syarat awal yang terdefinisi di L_2 dapat mengkonstruksi operator stabil L_2 dengan keakuratan orde tinggi. Selanjutnya uji kestabilan yang sering digunakan adalah kondisi von Neumann.

Perkembangan *Finite Element Methods* (FEM) dimulai pada tahun 1943, diperkenalkan oleh Richard Courant yang menggunakannya untuk mendekati solusi persamaan diferensial parsial, meskipun pada saat itu belum digunakan istilah FEM. Namun metodenya telah dikenalkan dengan istilah metode variasi (*variational* methods). Semenjak itu FEM terus berkembang dan digunakan untuk mendekati solusi berbagai persamaan.

Tahun 1960 Clough mulai mengenalkan istilah FEM. Selanjutnya pada tahun 1968 Birkho, Schultz dan Varga mengembangkanFEM dengan pendekatan fungsi polinomial. Kemudian pada tahun 1971 Babuska menganalisis batas error FEM. Tahun 1989 Aziz menggunakan FEM untuk persamaan panas.

2. Contoh Aplikasi FDM

Aplikasi yang ditampilkan disini adalah aplikasi FDM pada aliran Debris. Aliran Debris adalah suatu endapan material lepas dan material bahan rombakan volkanik yang mudah tererosi oleh air. Aliran Debris kurang lebih adalah aliran sedimen bercampur air yang dipengaruhi oleh gaya gravitasi dan akan menpunyai mobilitas besar seiring dengan membesarnya pori-pori sedimen yang dipenuhi oleh air. Pengaplikasiannya meliputi pendiskritan terhadap persamaan kekekalan massa, dan kekekalan momentum dalam dua dimensi yaitu arah *x* dan arah *y* (Soetrisno, 2015).

2.1 Pendiskritan Persamaan Kekekalan Massa

Telah diperoleh persamaan kekekalan massa pada tinjauan pustaka bahwa sebagai berikut:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}=0$$

Persamaan tersebut akan didiskritan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit dengan mengevaluasi pada ruang (i,j) dan pada waktu ke-n:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial t}\right|_{i,j}^{n}+\left.\frac{\partial M}{\partial x}\right|_{i,j}^{n}+\left.\frac{\partial N}{\partial y}\right|_{i,j}^{n}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{h_{i,j}^{n+1}-h_{i,j}^{n}}{\Delta t}+\frac{M_{i+1,j}^{n}-M_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}+\frac{N_{i,j+1}^{n}-N_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}=0$$

$$\Leftrightarrow h_{i,j}^{n+1}=h_{i,j}^{n}-\Delta t\left(\frac{M_{i+1,j}^{n}-M_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}+\frac{N_{i,j+1}^{n}-N_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}\right)$$

2.2 Pendiskritan Persamaan Kekekalan Momentum dan Gaya Arah sumbu *x*

Persamaan kekekalan momentum pada tinjauan pustaka yang menyatakan pergerakan aliran arah sumbu *x* adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial (uM)}{\partial x}+\frac{\partial (vM)}{\partial y}=-gh\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\tau_{bx}}{\rho}$$

Pendiskritan terhadap persamaan tersebut menghasilkan:

$$\begin{aligned}M_{i,j}^{n+1}=M_{i,j}^{n}-\Delta t\Bigg(&\frac{M_{i,j}^{n}}{h_{i,j}^{n}}\frac{M_{i+1,j}^{n}-M_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}+M_{i,j}^{n}\frac{\frac{M_{i+1,j}^{n}}{h_{i+1,j}^{n}}-\frac{M_{i-1,j}^{n}}{h_{i-1,j}^{n}}}{2\Delta x}\\&+\frac{N_{i,j}^{n}}{h_{i,j}^{n}}\frac{M_{i+1,j}^{n}-M_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y}+M_{i,j}^{n}\frac{\frac{N_{i,j+1}^{n}}{h_{i,j+1}^{n}}-\frac{N_{i,j-1}^{n}}{h_{i,j-1}^{n}}}{2\Delta y}\\&+gh_{i,j}^{n}\frac{h_{i+1,j}^{n}-h_{i-1,j}^{n}+z_{bi+1,j}^{n}-z_{bi-1,j}^{n}}{2\Delta x}\\&+\frac{g\left(n_{i,j}\right)^{2}\frac{M_{i,j}^{n}}{h_{i,j}^{n}}\sqrt{\left(\frac{M_{i,j}^{n}}{h_{i,j}^{n}}\right)^{2}+\left(\frac{N_{i,j}^{n}}{h_{i,j}^{n}}\right)^{2}}}{\left(h_{i,j}^{n}\right)^{\frac{1}{3}}}\Bigg)\end{aligned}$$

2.3 Pendiskritan Persamaan Kekekalan Momentum dan Gaya Arah sumbu *y*

Persamaan kekekalan momentum pada tinjauan pustaka yang menyatakan pergerakan aliran arah sumbu *y* adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial (uN)}{\partial x}+\frac{\partial (vN)}{\partial y}=-gh\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\tau_{by}}{\rho}$$

$$N_{i,j}^{n+1} = N_{i,j}^{n} - \Delta t \left(\frac{M_{i,j}^{n}}{h_{i,j}^{n}} \frac{N_{i+1,j}^{n} - N_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x} + N_{i,j}^{n} \frac{\frac{M_{i+1,j}^{n}}{h_{i+1,j}^{n}} - \frac{M_{i-1,j}^{n}}{h_{i-1,j}^{n}}}{2\Delta x} + \frac{N_{i,j}^{n}}{h_{i,j}^{n}} \frac{N_{i+1,j}^{n} - N_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} \right.$$
$$+ N_{i,j}^{n} \frac{\frac{N_{i,j+1}^{n}}{h_{i,j+1}^{n}} - \frac{N_{i,j-1}^{n}}{h_{i,j-1}^{n}}}{2\Delta y} + g h_{i,j}^{n} \frac{h_{i,j+1}^{n} - h_{i,j-1}^{n} + z_{bi,j+1}^{n} - z_{bi,j+1}^{n}}{2\Delta y}$$
$$\left. + \frac{g\left(n_{i,j}\right)^2 \frac{N_{i,j}^{n}}{h_{i,j}^{n}} \sqrt{\left(\frac{M_{i,j}^{n}}{h_{i,j}^{n}}\right)^2 + \left(\frac{N_{i,j}^{n}}{h_{i,j}^{n}}\right)^2}}{\left(h_{i,j}^{n}\right)^{\frac{1}{3}}} \right)$$

SIMPULAN

Dari penelitian yang telah dilakukan dapat diperoleh kesimpulan bahwa baik FDM maupun FEM dapat digunakan untuk mencari solusi suatu persamaan diferensial parsial, yang sulit ditentukan solusi analitiknya. Kedua metode yaitu FDM dan FEM sama-sama memnggunakan prinsip pendiskritan variabel-variabelnya. Perbedaan kedua metode adalah pada proses pendiskritan, dimana FDM membagi domain variabel menjadi berhingga persegi, sedangkan FEM membagi domain tidak harus dengan bentuk persegi.

DAFTAR PUSTAKA

Courant, R. 1943. Variational Methods for The Solutions of Equilibrium and Vibrations. *Bulletin of American Mathematical Society*, 1–23.

Munir, R. 2010. *Metode Numerik*. Bandung: Penerbit Informatika.

Sangadji, S. 2008. Metode Beda Hingga Untuk Solusi Numerik Persamaan Diferensial. *Jurnal Mat Stat 8(2)*.

Smith, G. D. 1985. Numerical Simulation of Partial Differential Equation: Finite Difference Methods, Third Edition. Oxford University Press: New York.

Soetrisno, B. A., & Khusnaeni, A. 2015. Parameter Yang Mempengaruhi Distribusi Aliran Debris. *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY*. Yogyakarta.

Thomée, V. 2001. From Finite Differences to Finite Elements a short History of Numerical Analysis of Partial Differential Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics 128*, 1-54.