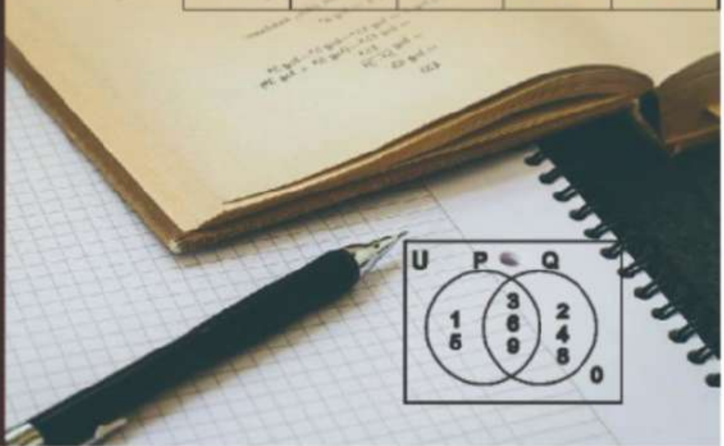
Dra. Junarti, M.Pd.
Prof. Dr. YL. Sukestiyarno, M.S, Ph.D.
Dr. Mulyono, M.Si.
Dr. Nurkaromah Dwidayati, M.Si.

MODUL BERBASIS *STRUCTURE SENSE* MATERI GRUP

*	a	b	c	d
a	d	c	a	b
b	c	d	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c



MODUL BERBASIS STRUCTURE SENSE MATERI GRUP

Unggul dan Luhur

MODUL BERBASIS *STRUCTURE SENSE*

MATERI GRUP

Dra. Junarti, M.Pd.
Prof. Dr. YL. Sukestiyarno, M.S, Ph.D.
Dr. Mulyono, M.Si.
Dr. Nurkaromah Dwidayati, M.Si.

Penerbit

CONFIDENT

Unggul dan Luhur

MODUL BERBASIS *STRUCTURE SENSE* MATERI GRUP

Penulis:
Dra. Junarti, M.Pd.
Prof. Dr. YL. Sukestiyarno, M.S, Ph.D.
Dr. Mulyono, M.Si.
Dr. Nurkaromah Dwidayati, M.Si.

Editor:
Erik Santoso,.M.Pd.

Tata Aksara:
Dian Herdiansyah, S.Pd.

Layout:
Tim Kreatif CV. Confident

Desain Cover
Tim Kreatif CV. Confident

Cetakan Pertama, September 2020

Penerbit:
CV. Confident (Anggota IKAPI Jabar)
Jl. Karang Anyar No.17 Jamblang Kab.Cirebon 45156

ISBN 978-602-0834-98-6

KATA PENGANTAR

Dengan mengucapkan syukur alhamdulillah kepada Allah SWT, sehingga Modul Pendampingan Berbasis *Structure Sense* ini dapat diselesaikan dengan baik. Mengingat rendahnya pemahaman struktur dan kemampuan koneksi matematika. Modul berbasis struktur ini selain membantu pemahaman struktur pada konsep grup, juga membentuk karakter kemandirian, dan membangun kemampuan koneksi matematika mahasiswa.

Buku Ajar ini berjudul Modul Berbasis *Structure Sense* Materi Grup ditulis diperuntukkan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dikalangan calon guru sekolah menengah. Diharapkan dengan Modul Pendampingan Berbasis *Structure Sense* Materi Grup ini mahasiswa menjadi terbantu dalam menempuh mata kuliah Aljabar Abstrak I.

Modul Berbasis Struktur ini disusun dengan menyesuaikan kebutuhan mahasiswa dengan berdasarkan Silabus yang sudah dirumuskan dalam mata kuliah Aljabar Abstrak I.

Jika penulisan Modul Pendampingan Berbasis *Structure Sense* ini masih ada kesalahan konsep maupun kesalahan penulisan, untuk itu penulis senantiasa mengharapkan kritik dan saran untuk penyempurnaan Modul ini. Semoga Modul ini bermanfaat bagi yang memerlukannya.

Semarang, Maret 2019

Penulis,

DAFTAR ISI

DESKRIPSI MODUL

Modul ini berjudul "Teori Grup (Modul Berbasis *Structure Sense*)" digunakan untuk kegiatan kemandirian belajar mahasiswa dalam membangun koneksi matematika pada materi aljabar abstrak khusunya pada Teori Grup. Modul ini disusun oleh Dra. Junarti, M.Pd., Prof. Dr. YL. Sukestiyarno, M.S., Ph.D., Dr. Mulyono, M.Si., Dr. Nurkaromah Dwidayati, M.Si. Penulis pertama merupakan pengampu mata kuliah aljabar abstrak yang sedang menempuh studi lanjut S3 di Pascasarjana Universitas Negeri Semarang, penulis kedua, ketiga, dan keempat adalah sebagai Promotor, Kopromotor, dan Anggota Promotor Disertasi pada Program Studi Pendidikan Matematika Pascasarjana Universitas Negeri Semarang. Modul ini sebagai bagian dari penelitian pada disertasi.

Modul ini berisi tentang materi grup yang merupakan bagian dari materi Aljabar Abstrak. Modul ini terdiri dari tiga modul yang terdiri dari modul 1 membahas materi prasyarat yakni tentang struktur himpunan dan operasi biner, modul 2 membahas materi tentang struktur grup beserta sifat-sifatnya, dan modul 3 membahas materi tentang struktur grup permutasi dan grup siklik beserta sifat-sifatnya. Dalam setiap kegiatan belajar terdiri atas penyajian materi, contoh-contoh soal, soal latihan, petunjuk pengerjaan, rangkuman, tes formatif, pedoman penilaian, dan kunci jawaban, serta diselingi sejarah dan aplikasi dari beberapa konsep matematika.

Modul ini berbeda dengan modul yang sudah ada, karena modul ini disajikan dengan lebih mengutamakan tampilan dari struktur himpunannya, struktur operasi binernya, dan struktur pada sifat-sifat yang berkaitan. Dengan tampilan struktur himpunan, operasi biner, dan sifat-sifatnya secara vulgar, diharapkan dapat membantu mahasiswa dalam menangkap ekspresi tampilan secara visual. Modul ini juga dilengkapi juga dengan sejarah konsep matematika, yang disajikan di awal penyajian materi, yang dapat bernmanfaat untuk menginspirasi dan memotivasi belajar mahasiswa. Sedangkan di akhir sajian materi disajikan gambaran aplikasi dari konsep matematika yang sedang dibahas, yang dapat bermanfaat dalam mengaplikasikannya pada kehidupan sehari-hari sebagai salah satu bentuk koneksi matematika.

Struktur dalam matematika yang disajikan pada modul ini dapat digunakan sebagai analisis pandangan luas tentang cara dimana suatu entitas terdiri dari bagian-bagiannya. Analisis pandangan ini membantu menggambarkan sistem koneksi atau hubungan antara bagian-bagian komponen. Gambaran sistem koneksi antara bagian-bagiannya, diharapkan dapat membantu dalam membangun koneksi matematika pada materi grup.

MODUL 1: STRUKTUR PADA ELEMEN HIMPUNAN, OPERASI BINER DAN SIFAT-SIFAT PADA OPERASI BINER

Gambaran Umum:

Uraian materi pada bab ini merupakan bagian dari materi prasyarat maupun materi yang mendasar dalam memahami pada struktur-struktur berikutnya dari bagian-bagian Teori Grup. Materi pada bagian ini meliputi pengertian himpunan, himpunan bilangan, himpunan bagian, gabungan pada himpunan, irisan pada himpunan, selisih pada himpunan, relasi, fungsi atau pemetaan, struktur operasi biner dengan menggunakan operasi biner yang familiar seperti operasi: penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian; sedangkan operasi yang tidak familiar misalnya: operasi yang didefinisikan tersendiri, contoh: "operasi $*$" yng didefinisikan sebagai $a * b = a + b - 2ab$. Diharapkan sebelum mempelajari materi bab ini, mahasiswa sudah menguasai Teori Himpunan, Relasi, Fungsi atau Pemetaan, Matriks, dan artimatika jam (bilangan modulo).

Tujuan Pembelajaran:

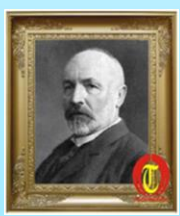
1. Mampu menjelaskan pengertian Himpunan dengan lengkap dan benar.
2. Mampu mengenali elemen himpunan dari suatu himpunan bilangan
3. Mampu mengenali elemen himpunan dari suatu himpunan yang terdiri dari matrik-matrik
4. Mampu mengenali elemen himpunan dari suatu himpunan yang terdiri dari fungsi-fungsi
5. Mampu mengenali elemen himpunan dari suatu himpunan yang terdiri dari bilangan bulat modulo n.

Aplikasi Himpunan

Aplikasi operasi himpunan pada bidang kesehatan dalam hal ilmu radiologi. Teori himpunan membaur dalam penyusunan suatu radiograf pada pemotretan konvensional. Antara film yang digunakan untuk pemeriksaan organ yang satu dengan yang lain harus tepat. Untuk penggunaan film yang tepat sehingga dapat menekan biaya pengeluaran. Prinsip efisien tetapi ekonomis inilah yang menjadi awal bagaimana seorang radiografer memperlakukan dan menggunakan film dengan sebaik-baiknya.

Sejarah Teori Himpunan

Teori himpunan, diciptakan pada akhir abad ke-19, dalam pendidikan matematika teori himpunan merupakan bagian yang sangat diperlukan dan bahkan sejak tingkat sekolah dasar. Teori ini bisa dikatakan sebagai bahasa untuk menjelaskan matematika modern. Teori himpunan juga digunakan untuk membangun hampir semua aspek dari matematika dan merupakan sumber dari mana semua matematika diturunkan. Pada abad ke-17, Galileo mencoba untuk memikirkan tentang himpunan tak terhingga (infinite), namun terdapat ketidakcocokan dari hasil analisisnya yang kemudian dikenal dengan Galileo Paradox. George Cantor yang kurang puas dengan gagasan Galileo akhirnya berusaha menemukan konsep himpunan tak terhingga, hingga pada akhirnya menjadi penemu teori himpunan di sekitar tahun 1870. Nama lengkapnya Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) seorang matematikawan asal Jerman, penemu teori himpunan, penemu konsep bilangan lewat terhingga (transfinit), beliau juga seorang doktor, guru besar dan pengarang.



George Cantor

Kegiatan Belajar 1: Struktur Elemen Himpunan

Materi himpunan pada bab ini diperuntukkan sebagai materi prasyarat dalam mempelajari struktur pada aljabar abstrak terutama pada topik teori grup. Agar lebih mudah paham struktur pada teori grup, diharapkan terlebih dahulu memahami dan mengenali struktur Himpunan beserta struktur elemen-elemennya. Dengan demikian pembahasan pada bab ini di awali dengan pengenalan kembali struktur yang terkait dengan struktur pada elemen himpunan.

1.1.1 Pengantar Himpunan

Teori himpunan merupakan salah satu ilmu matematika dalam bidang analisis yang muncul pada periode modern. Meskipun demikian, teori himpunan kini juga digunakan dalam bidang matematika yang muncul terlebih dahulu seperti bidang aljabar dan geometri.

Himpunan adalah merupakan kumpulan objek yang memiliki sifat yang dapat didefinisikan dengan jelas atau sebagai koleksi benda-benda tertentu yang dianggap sebagai satu kesatuan. Himpunan merupakan salah satu konsep penting yang mendasari dalam belajar matematika modern termasuk mempelajari teori grup dan strukturnya, sehingga studi tentang struktur pada himpunan dan elemen-elemennya, sangatlah diperlukan.

Untuk menyatakan himpunan ditulis dengan huruf besar (huruf kapital) misalnya A, B, C, H, P, dan lain sebagainya, sedangkan untuk anggota himpunan dinyatakan dengan huruf kecil misalnya a, b, c, x, y, z, dan lain sebagainya. Notasi elemen (anggota) digunakan $\in$, dan notasi bukan elemen (bukan anggota) digunakan $\notin$.

Untuk mengenal struktur himpunan beserta struktur elemen-elemennya, maka dikenalkan cara menyatakan himpunan.

Penyajian Himpunan dapat dinyatakan dengan cara:

1) Enumerasi

Contoh 1:

- Himpunan lima bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- $D = \{$kambing, p, Kurdi, 11, kayu$\}$
- $R = \{ x, y, \{x, y, z\}, \{x, z\} \}$
- $K = \{x, \{x\}, \{\{x\}\} \}$
- $L = \{ \{\} \}$

2) Keanggotaan $x \in A$: x merupakan anggota himpunan A; $x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

Contoh 2:

Misalkan: $A = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$, dan $K = \{\{\}\}$ maka

$3 \in A, 5 \notin B, \{a, b, c\} \in R,\quad c \notin R, \{\} \in K, \{\} \notin R$

3) Simbol-simbol Baku

P = himpunan bilangan bulat positif $= \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{N}$ = himpunan bilangan alami (natural) $= \{1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ = himpunan bilangan bulat $= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$ = himpunan bilangan rasional

$\mathbb{R}$= himpunan bilangan riil

$\mathbb{C}$ = himpunan bilangan kompleks

Himpunan yang universal: semesta, disimbolkan dengan S atau U.

Contoh 3:

Misalkan $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan A adalah himpunan bagian dari U, dengan $A = \{1, 3, 5\}$.

4) Notasi Pembentuk Himpunan

Notasi: $\{ x \mid$ syarat yang harus dipenuhi oleh x $\}$

Contoh 4:

(i) A adalah himpunan bilangan bulat positif yang kecil dari 5

$A = \{ x \mid x$ adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari 5$\}$ atau

$A = \{ x \mid x \in P, x < 5 \}$ yang ekivalen dengan

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

(ii) $P = \{y \mid y$ adalah mahasiswa yang mengikuti kuliah Aljabar Abstrak I$\}$

5) Diagram Venn

Penyajian himpunan dengan menggunakan diagram venn yakni suatu himpunan yang penyajiannya di tuliskan ke bentuk diagram dengan menggunakan lingkaran untuk mewakili suatu himpunan dan elemennya dituliskan sesuai dengan kaidah penulisan.

<u>Contoh 5:</u>

Misalkan $U = \{0, 1, 2, \ldots, 9, 10\}, P = \{2, 3, 5, 7, 9\}$ dan $Q = \{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$.

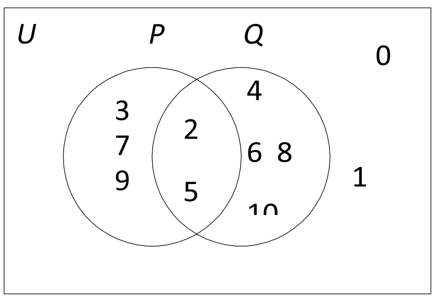


Diagram Venn:

Gambar 1

Di dalam konsep himpunan beberapa definisi yang penting untuk diingat kembali pada saat akan memahami struktur himpunan beserta struktur elemen-elemennya, yakni sebagai berikut:

1) Himpunan Semesta (Universal)

Himpunan semesta adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri atas semua obyek yang sedang dibicarakan. Simbol: S atau U.

Contoh 6:

Misalkan $A = \{b, c, d\}$, maka himpunan semesta dari A antara lain adalah :

$U_1 = \{b, c, d\}$

$U_2 = \{a, b, c, d\}$

$U_3 = \{a, b, c, d, e\}$

$U_4 = \{a, b, c, d, e, f\}$

2) Himpunan Kosong (Null Set)

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki elemen Simbol: { } atau ∅.

Contoh 7:

$F = \{x \mid x < x\}$

3) Proper Subset

Suatu himpunan A dikatakan merupakan himpunan bagian dari himpunan B, jika setiap anggota dari himpunan A merupakan anggota dari himpunan B, yang dilambangkan dengan $A \subseteq B$ (proper subset).

Atau jika $x \in A$, maka $x \in B \Leftrightarrow A \subseteq B$

Contoh 8:

Misalkan $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A = \{1, 2\}$ dan $B = \{3, 2, 1\}$. Maka $A \subseteq B$.

4) Subset

Suatu himpunan A dikatakan merupakan himpunan bagian sejati (subset) dari himpunan B, jika $A \subseteq B$ dan terdapat sedikitnya satu unsur dari B yang bukan anggota dari A, yang dilambangkan dengan $A \subset B$.

Atau dengan kata lain:

a. $A \subset B$ artinya $A \subseteq B$ tetapi B bukan merupakan himpunan bagian dari A,

b. $A \subset B$ artinya $A \subseteq B$ tetapi $B \nsubseteq A$.,

c. $A \subset B$ artinya $A \subseteq B$ tetapi $A \neq B$.

5) Kesamaan dua himpunan

Kesamaan dua himpunan A dan B jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $A \supseteq B$ atau himpunan A dikatakan sama dengan himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B juga merupakan elemen A. Simbol : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

<u>Contoh 9:</u>

Misalkan $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dan $B = \{x \mid x < 10, x \text{ bilangan cacah}\}$. Himpunan B jika dituliskan dengan metode tabulasi maka di dapat $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Dengan memperhatikan anggota-anggota pada A dan B, maka jelas bahwa $A = B$.

6) Himpunan yang Ekivalen

Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama. Simbol : $A \sim B$ atau $n(A) = n(B)$.

<u>Contoh 10:</u>

Jika $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ dan $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ sehingga $n(A) = 6$ $n(B) = 6$, maka $A \sim B$.

7) Himpunan Saling Lepas (Disjoint)

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas jika tidak memiliki elemen yang sama. Notasi : $A // B$.

<u>Contoh 11:</u>

$A = \{x \mid x < 8, x \in P\}$; $B = \{10, 20, 30, \ldots\}$ maka A dan B adalah himpunan yang saling lepas.

8) Gabungan

A gabungan B ditulis $A \cup B$ adalah himpunan yang semua anggotanya merupakan anggota A atau anggota B. Atau dapat ditulis $A \cup B = \{x \in A$ atau $x \in B\}$.

<u>Contoh 12:</u>

$A = \{x \mid 1 < x \leq 5$, maka x ialah bilangan bulat $\} = \{2, 3, 4, 5\}$.

$B = \{x \mid x \geq 5$, maka x ialah bilangan prima $\} = \{5, 7, 11, 13\}$

Maka $A \cup B = \{ 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13 \}$.

9) Irisan

A irisan B ditulis $A \cap B$ adalah himpunan yang semua anggotanya merupakan anggota A sekaligus anggota B atau dapat ditulis $A \cap B = \{ x \in A$ dan $x \in B \}$.

Contoh 13:

$A = \{ x \mid 1 < x < 20$, maka x ialah bilangan prima $\}$

$B = \{ y \mid 1 \leq y < 10$, maka y ialah bilangan ganjil $\}$

Maka hasil dari $A \cap B = \ldots\ldots.$

Diketahui:

$A = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 16, 17, 19 \}, B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Maka: $A \cap B = \{ 3, 5, 7 \}$

Jadi, hasil dari $A \cap B = \{ 3, 5, 7 \}$.

10) Komplemen

Komplemen dari suatu himpunan A adalah himpunan anggota-anggota x dengan $x \notin A$, yang dinyatakan dengan A^C

Contoh 14:

Misalkan $U = \{ 1, 2, 3, \ldots, 9 \}$, jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $A^C = \{2, 4, 5, 6, 8\}$

Contoh 15

Diketahui semesata dari sebuah himpunan dan himpunan A sebagai berikut:

$S = \{x \mid 1 \leq x \leq 10\}, A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

Tentukan komplemen dari himpunan A

<u>Pembahasan:</u>

Koplemen dari himpunan A adalah anggota semesta yang bukan anggota dari A. Sehingga: $A^C = \{1,2,4,6,8,12\}$

11) Selisih Dua Himpunan

Selisih himpunan A dan B adalah $A - B = \{x \mid x \in A$ dan $x \in B\}$

<u>Contoh 16:</u>

Jika $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, maka $A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ dan $B - A = \emptyset$

<u>Contoh 17:</u>

Berdasarlan 35 mahasiswa diperoleh data 17 mahasiswa suka minum es soda, 12 mahasiswa suka minum es soda dan susu dan 4 mahasiswa tidak suka minum susu maupun es soda. Tentukan:

a) banyaknya mahasiswa yang suka minum es soda saja

b) banyaknya mahasiswa yang suka minum susu saja

Penyelesaian:

Jumlah mahasiswa yang suka minum es soda saja adalah $17 - 12 = 5$ orang. Jumlah mahasiswa yang suka minum susu saja adalah $35 - (5 + 12 + 4) = 14$ orang.

12) Jumlah dua Himpunan

Jumlah dua himpunan A dan B adalah himpunan A atau anggota B tetapi bukan anggota persekutuan A dan B.

$A + B = \{x \mid x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}$

<u>Contoh 18:</u>

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, maka $A + B = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$

13) Perkalian Cartesian himpunan

Diberikan himpunan H dan K, perkalian kartesian himpunan H dan K, disimbolkan HxK, ialah himpunan yang terdiri dari semua pasangan berurutan (h, k) dengan h anggota H, k anggota K.

<u>Contoh 19:</u>

$H = \{a, b, c\}$ dan $K = \{d, e\}$, maka:

$HxK = \{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$

$KxH = \{(d, a), (d, b), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c)\}$

14) Himpunan Kuasa (Power Set)

Himpunan Kuasa (power set) dari A adalah himpunan yang terdiri dari himpunan bagian dari A. Banyaknya anggota himpunan kuasa dari himpunan yang mempunyai n anggota (n bilangan bulat) adalah 2^n.

<u>Contoh 20:</u>

Himpunan kuasa dari $A = \{a, b, c)$ adalah $2^n = 2^3 = 8$ yaitu $\{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$.

15) Keluarga (Koleksi) Himpunan

Misalkan $\mathfrak{K}$ suatu keluarga (kolekasi) himpunan tak kosong, maka:

Gabungan himpunan-himpunan di $\mathfrak{K}$ adalah himpunan yang ditulis dengan simbol $\bigcup_{\mathbb{R} \in \mathfrak{K}}$

Jika suatu himpunan semua anggotanya adalah himpunan disebut keluarga (family) atau koleksi himpunan dinotasikan dengan huruf cantik.

<u>Contoh 21:</u>

Misalkan $\mathbb{R}_1 = \{1,2\}, \mathbb{R}_2 = \{1,4\}, \mathbb{R}_3 = \{1,2,3\}$ maka keluarga dari himpunan tersebut adalah $\mathfrak{K} = \{\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2, \mathbb{R}_3\}$

1.1.2 Sifat-sifat pada Operasi Himpunan

Operasi pada himpunan mempunyai sifat-sifat yang harus dipahami, pada penjelasan di bawah ini akan dijelaskan sifat-sifat yang berlaku pada operasi himpunan sebagai berikut.

1) Sifat Komutatif

   Secara formal sifat komutatif untuk dua himpunan bisa dituliskan sebagai berikut. Untuk setiap himpunan A dan B berlaku :

   a) $A \cup B = B \cup A$

   b) $A \cap B = B \cap A$

2) Sifat Asosiatif

   Secara formal sifat asosiatif untuk tiga himpunan bisa dituliskan sebagai berikut. Untuk setiap himpunan A, B dan C berlaku :

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3) Sifat Distributif

Untuk setiap A, B, dan C berlaku:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4) Sifat Identitas

$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$, dualnya: $A \cap S = A$

5) Sifat Dominasi

$A \cap \emptyset = \emptyset$, dualnya $A \cup S = S$

6) Sifat Komplemen

$A \cup A^c = S = U$, dualnya $A \cap A^c = \emptyset$

7) Sifat Idempoten

$A \cup A = A$, dualnya $A \cap A = A$

1.1.3 Struktur Himpunan pada Relasi

Himpunan pada relasi merupakan himpunan yang mempunyai hubungan dalam dua buah himpunan yang saling terkait yang merupakan relasi biner yakni relasi yang mengkaitkan dua komponen himpunan yang tidak kosong, seperti disajikan pada definisi berikut.

Definisi 1.1.1:

Misalkan A dan B merupakan dua himpunan tak kosong, maka suatu relasi T biner dari A ke B adalah suatu himpunan bagian dari $A \times B$. jika $A = B$, maka T disebut relasi biner pada A.

<u>Contoh 21:</u>

Relasi $<$ pada himpunan $A = \{a, b, c\}$ adalah himpunan$\{(a, b), (a, c), (b, c)\}$ dan relasi $\leq$ pada A adalah $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$

Bila T suatu relasi pada A, maka $(a, b) \in T$, ditulis aTb.

Di dalam relasi mempunyai jenis-jenis relasi yang mengkaitkan dua himpunan sebagai relasi refleksi, simetri, transitif, dan trikotomi.

Definisi 1.1.2:

Misalkan T suatu relasi pada A, maka T:

a. Refleksif jika aTa berlaku $\forall\ a \in A$
b. Simetris jika aTb maka bTa berlaku $\forall\ a, b \in A$
c. Transitif jika aTb dan bTc maka aTc berlaku $\forall\ a, b, c \in A$
d. Trikotomi jika $\forall\ a, b \in A$ tepat salah satu berlaku: aTb atau $a = b$ atau bTa

1.1.4 Struktur Himpunan pada Pemetaan

Himpunan pada pemetaan, berkaitan dengan pemetaan dari suatu himpunan tertentu ke suatu himpunan yang lain yang merupakan himpunan bagian dari hasil product ke-dua himpunan tersebut yang memenuhi suatu aturan pemetaan dan termuat dalam keterkaitan kedua himpunan tersebut. Seperti yang dijelaskan pada Definisi 1.1.3 berikut ini.

Definisi 1.1.3:

Misalkan A, B himpunan tak kosong, fungsi atau pemetaan dari A ke B adalah suatu himpunan bagian f dari $A \times B$ demikian sehingga $\forall\, a \in A \; \exists\, b \in B$ dengan $(a, b) \in$f. Himpunan A disebut daerah asal (domain) dari f dan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain).

Dengan kata lain misalkan A, B suatu himpunan tak kosong. Suatu pengaitan dari A ke B disebut pemetaan atau fungsi jika:

a. $\forall\, a \in A \; \exists\, b \in B$ sehingga $f(a) = b$

b. $\forall\, a_1, a_2 \in A$ dengan $a_1 = a_2$, maka $f(a_1) = f(a_2)$

Untuk setiap anggota A dipetakan tepat pada satu anggota B, didefinisikan $A \times B = \{(a, b) |\, a \in A$ dan $b \in B\}$. Dalam koordinat kartesius pemetaan $A \times B \neq B \times A$

<u>Contoh 23:</u>

Jika $A, B \in \mathbb{R}$ didefinisikan $A = \{x \,|\, 1 \leq x \leq 4\}$ dan $B = \{x \,|\, 2 \leq x \leq 3\}$

Tunjukkan bahwa hasil perkalian silang berlaku komutatif $(A \times B \neq B \times A)$!

Penyelesaian:

$A \times B = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (4,2), (4,3)\}$

$B \times A = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$

Dari hasil di atas diperoleh bahwa $A \times B \neq B \times A$. silahkan diilustrasikan dg koordinat kartesius.

Beberapa sifat-sifat pada pemetaan meliputi sifat injektif, sifat surjektif, dan sifat bijektif. Agar lebih jelas memahami sifat-sifat pada pemetan, perhatikan Definisi 1.4 dan contoh sebagai berikut.

Definisi 1.1.4:

Misalkan A, B himpunan tak kosong

a. Suatu pemetaan f dari A ke B disebut pemetaan $1-1$ (injektif) jika untuk sembarang $a_1, a_2 \in A$ dengan $f(a_1) = f(a_2)$ maka $a_1 = a_2$

b. Suatu pemetaan f dari A ke B disebut pemetaan onto/pada (surjektif) jika untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sehingga $f(a) = b$

c. Suatu pemetaan f dari A ke B disebut pemetaan bijektif (korespondensi $1-1$) jika f pemetaan $1-1$ (injektif) dan onto/pada (surjektif)

<u>Contoh 24:</u>

a. Pemetaan Injektif

Untuk memahami definisi fungsi injektif, pandanglah himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ dan himpunan $B = \{a, b, c\}$. Dari himpunan A ke himpunan B ditentukan fungsi f dan fungsi g dalam bentuk pasangan terurut sebagai berikut.

$f : A \rightarrow B$ dengan $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

$g : A \rightarrow B$ dengan $g = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$

Fungsi $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ nampak bahwa $f(1) = a$, $f(2) = b$ dan $f(3) = c$. Ini berarti bahwa untuk setiap anggota dalam himpunan A yang berbeda mempunyai peta yang berbeda pula di himpunan B. Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ dengan setiap anggota A yang berbeda memiliki peta yang berbeda di B seperti itu disebut fungsi satu-satu atau fungsi injektif.

Bukan fungsi injektif: contohnya fungsi $g = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$, tampak bahwa $g(1) = a$, $g(2) = b$ dan $g(3) = b$. Perhatikan bahwa $2 \neq 3$, tetapi $g(2) = g(3) = b$. Karena terdapat anggota yang berbeda di himpunan A tetapi memiliki peta yang sama di himpunan B maka fungsi g bukan fungsi satu-satu atau bukan fungsi injektif.

b. Pemetaan Surjektif

Sebagai contoh dapat diperhatikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan himpunan $B = \{a, b, c\}$. Dari himpunan A ke himpunan B ditentukan fungsi-fungsi f dan g dalam bentuk pasangan berurutan sebagai berikut.

$f : A \rightarrow B$ dengan $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, c)\}$

$g : A \rightarrow B$ dengan $g = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, b)\}$

Fungsi $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, c)\}$ tampak bahwa wilayah hasil fungsi f adalah $W_f = \{a, b, c\} = B$. Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ dengan wilayah hasil $W_f = B$ seperti itu dinamakan fungsi kepada B. Istilah lain untuk fungsi kepada adalah fungsi onto atau fungsi surjektif.

Sedangkan untuk fungsi $g = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, b)\}$ tampak bahwa wilayah hasil fungsi g adalah $W_g = \{a, b\}$ dan $W_g \subset B$ (dibaca: W_g himpunan bagian B) . Suatu fungsi $g : A \rightarrow B$ dengan wilayah hasil $W_g \subset B$ seperti itu dinamakan fungsi ke dalam B atau fungsi into.

c. Pemetaan Bijektif

Sebagai contoh dapat diperhatikan,

Fungsi $f : A \rightarrow B$ dengan $A = \{0, 1, 2)$ dan $B = \{a, b, c\}$. Fungsi f dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut $f = \{(0, a), (1, b), (2, c)\}$ dengan diagram panahnya diperlihatkan pada gambar (a) di atas. Perhatikan bahwa fungsi f adalah fungsi surjektif dan juga fungsi injektif. Fungsi f yang bersifat surjektif dan juga injektif disebut dengan fungsi bijektif (bi = dua) atau fungsi korespondensi satu-satu.

Fungsi $g: A \rightarrow B$ dengan $A = \{0, 1, 2\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$. Fungsi g dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut $g = \{(0, a), (1, b), (2, c)\}$ dengan diagram panahnya diperlihatkan pada gambar (b) di atas. Perhatikan bahwa fungsi g adalah fungsi injektif tetapi bukan fungsi surjektif. Dengan demikian, fungsi g dikatakan bukan fungsi bijektif. Dari penjelasan tersebut dapat disimpulkan pengertian dari fungsi bijektif sebagai berikut.

Bagaimana dengan konsep bahwa kedua fungsi yang dikatakan sama. Untuk menyatakan kedua fungsi sama dan berkorespondensi satu-satu yakni perhatikan Definisi 1.1.5 dan Definisi 1.1.6 dan contoh-contohnya sebagai berikut.

Definisi 1.1.5:

Misalkan $f, g: A \to B$, suatu fungsi f dikatakan sama dengan g ditulis $f = g$ jika $f(a) = g(a), \forall a \in A$.

Dua himpunan dikatakan ekuivalen jika setiap elemen dari himpunan domain mempunyai korespondensi satu-satu dengan himpunan kodomainnya. Hal ini dijelaskan secara lengkap pada Definisi 1.1.6 berikut ini.

Definisi 1.1.6:

Misalkan A dan B suatu himpunan tak kosong. Himpunan A dan B dikatakan ekuivalen jika dan hanya jika terdapat $f: A \to B$ fungsi korespondensi $1 - 1$.

<u>Contoh 25:</u>

Himpunan $\mathbb{Z}$ dan $5\mathbb{Z}$ adalah ekuivalen, karena terdapat pengaitan $f(n) = 5n$ untuk $n \in \mathbb{Z}$ yang mendefinisikan fungsi korespondensi $1 - 1$.

Himpunan hingga suatu himpunan yang mempunyai batasan jumlah sebagai kardinalitasnya, sedangkan himpunan tak hingga merupakan suatu himpunan yang tidak mempunyai batas secara kardinalitasnya, seperti yang dijelaskan pada definisi di bawah ini.

Definisi 1.1.7:

Misalkan A suatu himpunan tak kosong. Himpunan A dikatakan hingga (finite), jika terdapat n bilangan bulat positif demikian sehingga A dan $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ adalah ekuivalen. Sedangkan himpunan A dikatakan tak hingga (infinite) jika A dan $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ tidak ekuivalen untuk setiap n bilangan bulat positif.

<u>Contoh 26:</u>

Misalkan H adalah himpunan semua bilangan bulat positif yang kurang dari 30, maka H adalah suatu himpunan hingga. Sedangkan contoh himpunan tak terhingga misalnya pada himpunan bilangan Real, himpunan bilangan bulat, himpunan bilangan asli, himpunan bilangan rasional, dan sebagainya.

1.1.5 Stuktur Himpunan pada Bilangan Bulat Modulo n

Banyak bilangan bulat adalah tak hingga. Pada suatu kasus, yang hanya peduli pada hasil bagi suatu bilangan bulat (modulo) dengan bilangan bulat. Modulo akan membatasi ketidakhinggaan bilangan bulat.

<u>Contoh 27</u>:

- Pada jam dengan sistem 24 jam, jam ke-24 dianggap sama dengan jam ke-0 (modulo 24)
- Pada penanggalan masehi, banyak bulan adalah 12. Bulan ke-13 dianggap sama dengan bulan ke-1 (modulo 12)

Aritmatika Modulo

Misalkan a dan m bilangan bulat $(m > 0)$. Operasi a mod m (dibaca a modulo m) memberikan sisa jika a dibagi dengan m. Notasi: a mod $m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 < r < m$, m disebut modulus atau modulo, dan hasil aritmetika modulo m terletak di dalam himpunan $\{0, 1, 2, \ldots, m - 1\}$.

Contoh 28:

Beberapa hasil operasi dengan operator modulo:

(i) 23 mod $5 = 3$ $(23 = 5 . 4 + 3)$

(ii) 27 mod $3 = 0$ $(27 = 3.9 + 0)$

(iii) 6 mod $8 = 6$ $(6 = 8 . 0 + 6)$

(iv) 0 mod $12 = 0$ $(0 = 12 . 0 + 0)$

(v) $- 41$ mod $9 = 4$ $(- 41 = 9 (- 5) + 4)$

(vi) $- 39$ mod $13 = 0$ $(- 39 = 13(- 3) + 0)$

Penjelasan untuk (v) : -41 mod $9 = -5$. karena ingin hasil modulo harus positif maka tambahkan 9 ke hasil modulo sehingga didapat $-5 + 9 = 4$

Kongruen Modulo

1) Sebuah bilangan bulat positif a dan b merupakan kongruen modulo dari bilangan bulat positif m jika $(a - b)$ dibagi m tidak memiliki sisa (m habis membagi $a - b$).
2) Atau a dan b memiliki sisa bagi yang sama ketika dibagi m.

3) Notasi : $a \equiv b \pmod{m}$ baca : a kongruen b modulo m.
4) Negasinya adalah $a \not\equiv b \pmod{m}$ baca : a tidak kongruen b modulo m.
5) $a \bmod m = r$ dapat ditulis $a \equiv r \pmod{m}$

<u>Contoh 29:</u>

Contoh kongruen

1) $14 \equiv 2 \pmod{3}$, karena 3 habis membagi $(14 - 2 = 12)$
2) $100 \equiv 30 \pmod{10}$, karena 10 habis membagi $(100 - 30 = 70)$
3) $12 \not\equiv 5 \pmod{4}$, karena 4 tidak habis membagi $(12 - 5 = 7)$
4) $5 \not\equiv 4 \pmod{3}$, karena 3 tidak habis membagi $(5 - 4 = 1)$

<u>Contoh 30 :</u>

a) $23 \bmod 4 = 3$, maka $23 \equiv 3 \pmod{4}$
b) $27 \bmod 3 - 0$, maka $27 \equiv 0 \pmod{3}$
c) $40 \bmod 13 = 1$, maka $40 \equiv 1 \pmod{13}$
d) $0 \bmod 15 = 0$, maka $0 \equiv 0 \pmod{15}$
e) $6 \bmod 7 = 6$, maka $6 \equiv 6 \pmod{7}$

Kongruensi modulo juga mempunyai sifat-sifat yang harus diperhatikan, sifat-sifat tersebut dijabarkan pada pembahasan berikut ini

Sifat Kongruen Modulo :

Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan c adalah sembarang bilangan bulat maka

1) $(a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$
2) $ac \equiv bc \pmod{m}$
3) $ap \equiv bp \pmod{m}$, p bilangan bulat tak-negatif

Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$, maka:

1) $(a + c) \equiv (b + d) \pmod{m}$
2) $ac \equiv bd \pmod{m}$

Sifat pada Operasi dalam Modulo

Berdasarkan sifat tersebut, kita dapat menentukan bahwa

1) $(a + b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$
2) $(a - b) \bmod m = ((a \bmod m) - (b \bmod m)) \bmod m$
3) $(ab) \bmod m = ((s \bmod m)(b \bmod m)) \bmod m$
4) $ap \bmod m = ((ax \bmod m)(ay \bmod m)) \bmod m$,
   dengan $x, y \geq 0$, $x + y = p$

<u>Contoh 31:</u>

carilah 2 angka terakhir dari 2^{20}

Jawab :

2 angka terakhir artinya sama dengan mencari $2^{20} \bmod 100$.

$2^{20} \bmod 100 = 2^{10} \times 2^{10} \bmod 100$

$2^{20} \bmod 100 = 2^{5} \times 2^{5} \bmod 100$

Karena $2^{5} \bmod 100 = 32 \bmod 100$, maka

$2^{10} \bmod 100 = 32 \times 32 \bmod 100$

$= 1024 \bmod 100$

$= (1000 + 24) \bmod 100$

$= 24$

Karena $2^{10} \bmod 100 = 24$ maka

$2^{20} \bmod 100 = 24 \times 24 \bmod 100$

$= 576 \bmod 100$

$= (500 + 76) \bmod 100$

$= 76$

Algoritma Pemangkatan

$$f(a,p) = \underbrace{a * a * a * a * \cdots * a}_{\text{Sebanyak } p}$$

<u>Contoh 32:</u>

Menghitung $f(2,8)$ dengan cara biasa

$f(2,8) = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2$, terdapat 7 operasi dengan simbol bintang (operasi perkalian)

Cara lain :

$f(2,8) = f(2,4) * f(2,4)$

$f(2,4) = f(2,2) * f(2,2)$

$f(2,2) = f(2,1) * f(2,1)$

$f(2,1) = f(2,0) * 2$

$f(2,0) = 1$

Pada cara ini terdapat 4 langkah dalam penggunaan operasi.

Jika p sangat besar, maka dapat dipergunakan cara $f(a,p) \bmod m$

Algoritma Pemangkatan

Berdasarkan sifat $a^p \bmod m = ((a^x \bmod m)(a^y \bmod m)) \bmod m$, kita dapat menghitung $a^p \bmod m$ dengan p yang sangat besar, misalnya $p = 1.000.000$ tanpa harus mengalikan a sebanyak $1.000.000$ kali.

Ide yang digunakan adalah :

–Jika $p = 0$, maka $a^0 \bmod m = 1 \bmod m$.

–Jika p ganjil, maka hitung $a^p \bmod m = (a \bmod m)(a^{p-1} \bmod m) \bmod m$

–Jika p genap, maka hitung $a^{p/2} \bmod m$, misal hasilnya t.

Dengan rumus $a^p \bmod m = (a^{p/2} \bmod m)(a^{p/2} \bmod m) \bmod m$ maka

$$a^p \bmod m = t \times t \bmod m$$

Algoritma tersebut lebih cepat karena pada p genap, dia membagi dua nilai p dan hanya menghitung $(a^{p/2} \bmod m)$ sekali saja. Dan sifat tersebut berlaku rekursif

atau bisa juga dengan rumus sebagai berikut:

$$\mathrm{f(a,p)} = \begin{cases} 1, \text{jika } \mathrm{n} = 0 \\ \left(\mathrm{f}(\mathrm{a}, \frac{\mathrm{n}}{2})\right)^2, \text{jika } \mathrm{n} \bmod 2 = 0 \\ \mathrm{a} * \mathrm{f}(\mathrm{a}, \mathrm{n}-1), \text{jika } \mathrm{n} \bmod 2 = 1 \end{cases}$$

Untuk mempelajari topik struktur aljabar diperlukan juga topik tentang bilangan bulat modulo n. Bilangan bulat modulo n dan Algoritma pembagian bilangan bulat menggunakan prinsip kongruensi. Dan dalam kehidupan sehari-hari juga bisa memanfaat aritmetika modulo. Seperti yang dicontohkan pada penjelasan di bawah ini.

<u>Contoh 33:</u>

Contoh sederhana penggunaan aritmetika modulo terdapat pada sistem 24-jam. Dalam satu hari, mulaidari tengah malam sampai tengah malam, terdapat 24 jam yang dimulai dari 0 sampai 23. Jika sekarang pukul 20.00, maka 9 jam lagi adalah pukul 05.00, bukan pukul 29.00. Karena angka jam direset kalau mencapai 24, aritmetika jam adalah aritmetika modulo 24. Perlu diingat bahwa 24.00 bukanlah angka jam yang valid karena sama dengan pukul 00.00, sama halnya dengan 02.60 yang sama dengan 03.00.

<u>Contoh 34:</u>

Contoh pada himpunan dari bilangan modulo yang sering digunakan untuk menunjukkan dalam memenuhi sifat-sifat pada aksioma teori grup pada suatu operasi biner yang berlaku pada modulo tertentu, maka dalam hal ini dikenalkan contoh-contoh himpunan bilangan modulo sebagai berikut:

- Himpunan bilangan modulo 5, maka himpunannya memuat: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

- Himpunan modulo 7 tanpa nol, maka himpunannya memuat: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Masih banyak contoh himpunan bilangan modulo yang lain yang lebih besar lagi, yang jelas elemennya berbentuk bilangan bulat positif.

1.1.6 **Stuktur Himpunan pada Matrik**

Struktur pada himpunan matrik merupakan struktur himpunan yang tersusun elemennya dari matrik-matrik sejenis. Yang dimaksud dengan matrik sejenis yaitu matrik yang ordonya sama, seperti $M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $M_{m\times n}(\mathbb{Q})$, $M_{m\times n}(\mathbb{Z})$. Pada definisi berikut ini dijelaskan matrik ber-ordo $m \times n$.

Definisi 1.1.8:

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ adalah himpunan dari matrik $m \times n$ dengan elemen di dalam $\mathbb{R}$. Didefinisikan yang sama berlaku untuk $M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $M_{m\times n}(\mathbb{Q})$, $M_{m\times n}(\mathbb{Z})$ dan seterusnya.

Contoh di bawah ini contoh himpunan matriks yang elemen-elemennya terdiri dari anggota himpunan bilangan Real.

<u>Contoh 35:</u>

$$M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$$

<u>Contoh 36:</u>

$$M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ac - bd \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$$

Contoh 37:

$$M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \ \in \mathbb{R}\right\}$$

Contoh 38:

$$M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

Contoh 39:

Matriks identitas pada operasi perkalian matriks

$$M_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Contoh 41:

Misalnya matriks A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \ \in \mathbb{R}$. Maka matriks invers dari matriks A adalah $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

1.1.7 Soal Latihan

Kerjakanlah soal di bawah ini dengan lengkap dan jelas!

1) Jika $A \in R$ didefinisikan $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 4\}$, maka nyatakan himpunan A dalam bentuk penulisan yang lain yang memungkinkan untuk bisa menjelaskan elemennya yang termuat dalam himpunan tersebut!
2) Relasi "<" pada himpunan $A = \{a, b, c\}$ adalah himpunan $\{(a, b), (a, c), (b, c)\}$ Nyatakan himpunan A dalam notasi yang lain yang memungkinkan untuk memuat elemen himpunannya!
3) Himpunan kuasa dari $A = \{a, b, c\}$ adalah $2^n = 2^3 = 8$ yaitu$\{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$.

Apakah yang Anda ketahui tentang himpunan kuasa menurut pendapat Anda?

4) Jika $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$, dan $S \times S = \{(a, b) | \, a \in S$ dan $b \in S\}$ dan $T \subset S \, x \, S$ dengan $T = \{(a, b) | a, b \in S$ dan $a > b\}$. Apakah yang Anda ketahui tentang himpunan $S \times S$ dan himpunan T menurut pendapat Anda?

5) Diketahui $\varphi: \; T \rightarrow S$, dengan $\varphi(a, b) = a - b$. tentukan himpunan dari hasil pemetaan φ.

1.1.8 Petunjuk Pengerjaan

1) $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 4\}$ dan $B = \{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$, kedua himpunan A dan B dapat ditulis dengan notasi menggunakan pendekatan garis bilangan karena $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bilangan real.
2) A merupakan himpunan pasangan berurutan dari himpunan $\{a, b, c\}$ dengan syarat $b > a, \; c > b, c > a$.
3) Himpunan kuasa adalah himpunan yang elemen-elemennya merupakan himpunan bagian dari suatu himpunan tertentu dalam soal ini dari himpunan $A = \{a, b, c\}$.
4) SxS adalah merupakan himpunan pasangan berurutan dari $a \in S$ dan $b \in S$. Sedangkan T adalah merupakan himpunan pasangan berurutan dengan $a, b \in S$ dan dengan syarat $a > b$.
5) Akan ditunjukkan himpunan dari hasil pemetaan φ

Ambil beberapa anggota S

$2 \in S, 1 \in S$ dan $(2,1) \in T$ dengan $(2,1) \rightarrow \varphi(2,1) = 1 \in S$

$3 \in S, 1 \in S$ dan $(3,1) \in T$ dengan $(3,1) \rightarrow \varphi(3,1) = 2 \in S$

$6 \in S, 2 \in S$ dan $(6,2) \in T$ dengan $(6,2) \rightarrow \varphi(6,2) = 4 \in S$

∀ a, b ∈ S, dengan $a \,.\, b$ memenuhi $\varphi(a,b) = a - b \in S$

1.1.9 Rangkuman

1. Himpunan adalah kumpulan dari suatu objek-objek yang dapat didefinisikan secara jelas.
2. Penyajian Himpunan dapat dinyatakan dengan cara:
   a. Enumerasi, contoh: Himpunan lima bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
   b. Keanggotaan $x \in A$: x merupakan anggota himpunan A; $x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.
   c. Simbol-simbol Baku, contoh: ℕ= himpunan bilangan alami (natural) = $\{1, 2, \ldots\}$
   d. Notasi Pembentuk Himpunan, misalnya: { x | syarat yang harus dipenuhi oleh x }
   e. Diagram Venn
3. Suatu himpunan A dikatakan merupakan himpunan bagian dari himpunan B, jika setiap anggota dari himpunan A merupakan anggota dari himpunan B, yang dilambangkan dengan $A \subseteq B$ (proper subset). Atau jika $x \in A$, maka $x \in B \Leftrightarrow A \subseteq B$.
4. Suatu himpunan A dikatakan merupakan himpunan bagian sejati (subset) dari himpunan B, jika $A \subseteq B$ dan terdapat sedikitnya satu unsur dari B yang bukan anggota dari A,

yang dilambangkan dengan $A \subset B$.
Atau dengan kata lain:
a. $A \subset B$ artinya $A \subseteq B$ tetapi B bukan merupakan himpunan bagian dari A,
b. $A \subset B$ artinya $A \subseteq B$ tetapi $B \nsubseteq A$,
c. $A \subset B$ artinya $A \subseteq B$ tetapi $A \neq B$.

5. Kesamaan dua himpunan A dan B jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $A \supseteq B$.
6. A gabungan B ditulis $A \cup B$ adalah himpunan yang semua anggotanya merupakan anggota A atau anggota B atau dapat ditulis $A \cup B = \{x \in A$ atau $x \in B\}$.
7. A irisan B ditulis $A \cap B$ adalah himpunan yang semua anggotanya merupakan anggota A sekaligus anggota B. Atau dapat ditulis $A \cap B = \{x \in A$ dan $x \in B\}$.
8. Komplemen dari suatu himpunan A adalah himpunan anggota-anggota x dengan $x \notin A$, yang dinyatakan dengan A^c
9. Selisih himpunan A dan B adalah $A - B = \{x \mid x \in A$ dan $x \in B\}$
10. Himpunan Kuasa (power set) dari A adalah himpunan yang terdiri dari himpunan bagian dari A. Banyaknya anggota himpunan kuasa dari himpunan yang mempunyai n anggota (n bilangan bulat) adalah 2^n
11. Misalkan $\mathfrak{K}$ suatu keluarga (koleksi) himpunan tak kosong, maka:
    Gabungan himpunan-himpunan di $\mathfrak{K}$ adalah himpunan yang ditulis dengan symbol $\bigcup_{R \in \mathfrak{K}}$
12. Struktur Himpunan pada Relasi
    a. Misalkan A dan B merupakan dua himpunan tak kosong, maka suatu relasi T biner dari A ke B adalah suatu himpunan bagian dari $A \times B$. jika $A = B$, maka T disebut relasi biner pada A.
    b. Misalkan T suatu relasi pada A, maka T:

1) Refleksif jika aTa berlaku $\forall\ a \in A$
2) Simetris jika aTb maka bTa berlaku $\forall\ a, b\ \in A$
3) Transitif jika aTb dan bTc maka aTc berlaku $\forall$ $a, b, c\ \in A$
4) Trikotomi jika $\forall\ a, b\ \in A$ tepat salah satu berlaku: aTb atau $a = b$ atau bTa

13. Struktur Himpunan pada Pemetaan
    a. Misalkan A, B himpunan tak kosong, fungsi atau pemetaan dari A ke B adalah suatu himpunan bagian f dari $A\ x\ B$ demikian sehingga $\forall\ a\ \in A\ \exists\ b\ \in B$ dengan $(a, b)\ \in f$. Himpunan A disebut daerah asal (domain) dari f dan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain).
    b. Untuk setiap anggota A dipetakan tepat pada satu anggota B, didefinisikan $A \times B = \{(a, b) |\ a \in A$ dan $b\ \in B\}$. Dalam koordinat kartesius pemetaan $A \times B\ \neq\ B \times A$
    c. Misalkan A, B himpunan tak kosong
       1) Suatu pemetaan f dari A ke B disebut pemetaan $1-1$ (injektif) jika untuk sembarang $a_1,\ a_2\ \in A$ dengan $f(a_1) = f(a_2)$ maka $a_1 = a_2$
       2) Suatu pemetaan f dari A ke B disebut pemetaan onto/pada (surjektif) jika untuk setiap $b\ \in B$ terdapat $a\ \in\ A$ sehingga $f(a) = b$
       3) Suatu pemetaan f dari A ke B disebut pemetaan bijektif (korespondensi $1-1$) jika f pemetaan $1-1$ (injektif) dan onto/pada (surjektif)
    d. Misalkan $f, g: A \to B$, suatu fungsi f dikatakan sama dengan g ditulis $f = g$ jika $f(a) = g(a),\ \forall\ a\ \in A$.
    e. Jika A, B, dan C himpunan dan $f: A \to B, g: B \to C$ fungsi, maka $g \circ f: A \to C$ adalah fungsi yang didefinisikan dengan $(g \circ f)(a) = g(f(a))\ \forall\ a\ \in A$. Fungsi gof ini disebut komposisi dari f dan $g, \forall\ a\ \in$

A.

f. Misalkan A dan B suatu himpunan tak kosong. Himpunan A dan B dikatakan ekuivalen jika dan hanya jika terdapat $f: A \rightarrow B$ fungsi korespondensi $1-1$.

g. Misalkan A suatu himpunan tak kosong. Himpunan A dikatakan hingga (finite), jika terdapat n bilangan bulat positif demikian sehingga A dan $\{1, 2, 3, \ldots., n\}$ adalah ekuivalen. Sedangkan himpunan A dikatakan tak hingga (infinite) jika A dan $\{1, 2, 3, \ldots., n\}$ tidak ekuivalen untuk setiap n bilangan bulat positif.

14. Stuktur Himpunan pada Bilangan Bulat Modulo n

Bilangan bulat modulo n dan Algoritma pembagian bilangan bulat menggunakan prinsip kongruensi. Contoh: Himpunan bilangan modulo 5, misalnya: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

15. Stuktur Himpunan pada Matrik

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ adalah himpuna dari matrik m×n dengan elemen di dalam $\mathbb{R}$. Didefinisikan yang sama berlaku untuk $M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $M_{m\times n}(\mathbb{Q})$, $M_{m\times n}(\mathbb{Z})$ dan seterusnya. Contoh: $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$

1.1.10 Tes Formatif 1

Kerjakan soal di bawah ini pada lembar buku masing-masing dengan lengkap dan benar!

1) Dikethui himpunan $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0\right\}$, manakah penulisan bentuk lain dari himpunan M adalah:

A. $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}, \ldots\right\}$

B. $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}, \ldots\right\}$ dengan syarat $a, b, c, d, p, q, r, s, w, x, y, z \in \mathbb{R}$

C. $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}, \ldots\right\}$ dengan syarat $a, b, c, d, p, q, r, s, \ w, x, y, z \in \mathbb{R}, ad - bc \ \neq 0, \quad ps - qr \ \neq 0$, dan $wz - xy \ \neq 0$

D. tidak dapat ditulis dengan cara mendaftar elemen-lemen himpunan M

2) Bentuk lain dari himpunan $M \ = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\right\}$ adalah:

A. $M \ = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \ldots\right\}$

B. $M \ = \ \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \ldots\right\}, a, b, c, d, p, q, r, s \in \mathbb{R},$

C. $= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \ldots\right\}, a, b, c, d, p, q, r, s \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$

D. $= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \ldots\right\}, a, b, c, d, p, q, r, s \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$ dan $ps - qr = 1$

3) Diketahui $B \ = \ \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ dan $B^* \ = \ B - \{0\}$, tuliskan elemen himpunan yang termuat pada himpunan B^*!

A. $B^* = \{\ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots\}$

B. $B^* = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

C. $B^* = \{\ldots, -4, -2, -1, 1, 2, 4, \ldots\}$

D. $B^* = \{\ldots, -4, -2, -1, 0, 1, 2, 4, \ldots\}$

4) Tentukan himpunan hasil relasi $"\leq"$ dari himpunan $A \ = \ \{a, b, c\}$

A. $A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$.

B. $A = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$.

C.

$A = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(b,b)\}$.

D. $A =$

$\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$.

5) Jika $\mathbb{Q} = \{x \mid x$ bilangan rasional$\}$ dan $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$, tuliskan elemen -elemen himpunan yang termuat pada himpunan $\mathbb{Q}^*$!

A. $\mathbb{Q}^* = \{x, y, z, ...\}$

B. $\mathbb{Q}^* = \{x, y, z, ...\}$ dengan $x = \frac{a}{b}, b \neq 0, a, b \in \mathbb{Q}$,

C. $\mathbb{Q}^* = \{x, y, z, ...\}$ dengan $x = \frac{a}{b}, b \neq 0, a, b \in \mathbb{Z}$

D. $\mathbb{Q}^* = \{x, y, z, ...\}$ dengan $x = \frac{a}{b}, b \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$

6) Jika $x \in \mathbb{R}$ didefinisikan $B = \{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$, maka nyatakan himpunan B dalam bentuk penulisan yang lain yang memungkinkan untuk bisa menjelaskan elemennya yang termuat dalam himpunan tersebut!

A. $B = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

B. $B = \{1, 2, 3, , , ,\}$

C. $B = \{2, 3\}$

D. $B = \{2, 3, ...\}$

7) Misalkan $\mathbb{R} = \{x \mid x$ bilangan real$\}$ dan $\mathbb{R}* = \mathbb{R} - \{0\}$, tuliskan elemen-elemen himpunan yang termuat pada himpunan $\mathbb{R}*$!

A. $\mathbb{R}* = \{x \mid x$ bilangan real$\}$

B. $\mathbb{R}* = \{x \mid x$ bilangan real$\} \cap \{0\}$

C. $\mathbb{R}^* = \{x \mid x \text{ bilangan real}\} \cup \{0\}$

D. $\mathbb{R}^* = \{x \mid x \text{ bilangan real}\}$ dengan $x \neq 0$

1.1.11 Penilaian

Tingkat Penguasaan = $\dfrac{\text{Jumlah jawaban benar}}{7} \times 100\%$

Kategori Penilaian yang dicapai:

$90\% - 100\%$ = baik sekali

$80\% - 89\%$ = baik

$70\% - 79\%$ = cukup

$< 70\%$ = kurang

Jika Anda mencapai tingkat penguasaan sebesar 80% ke atas, maka Anda dapat melanjutkan kegiatan belajar 2 pada bab berikutnya dan Anda mendapat penilaian yang bagus. Namun jika Anda belum mencapai tingkat penguasaan sebesar 80%, maka Anda disarankan mengulangi pada kegiatan belajar 1 dengan penekanan pada materi yang belum Anda pahami dengan baik.

1.1.12 Kunci Jawaban

1) C
2) D
3) A
4) A
5) B
6) C

7) D

1.1.13 Daftar Pustaka

Ilwaru, V.Y.I, Lesnussa, Y.A., Sahetapy, E.M., & Leleury, Z.A. 2016. Aplikasi Operasi Himpunan dan Matematika Morfologi Pada Pengolahan Citra Digital. Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan.10(2): 83 – 96.

Nugraha, A. & Dwiyana, A.S.D. *Himpunan*. PAUD4305/MODUL 1.

Pinter, C.C. 2014. *Set Theory*. New York: Dover Publications. Inc.

Widodo, S. *Teori dan Operasi Pada Himpunan*. http://file.upi.edu/Direktori/KD-PURWAKARTA/198012182005011001-Suprih_Widodo/Pemecahan% 20Masalah %20Matematika/Teori%20Himpunan.pdf.

Kegiatan Belajar 2: Struktur Operasi Biner

Tujuan Pembelajaran:

1. Mampu mengenali struktur operasi biner yang familiar dari suatu himpunan.
2. Mampu mengenali struktur operasi biner yang tidak familiar dari suatu himpunan.
3. Mampu memahami persamaan dan perbedaan struktur operasi biner dalam bentuk rumus ataupun tabel.

Aplikasi Operasi Himpunan

Perkembangan teknologi pengolahan citra dewasa ini berkembang dengan sangat pesat, baik itu perkembangan jumlah pemakai maupun perkembangan jenis teknologi yang menggunakan pengolahan citra, misalnya bidang biomedis, astronomi, penginderaan jauh, dan arkeologi yang umumnya banyak memerlukan teknik peningkatan mutu citra, informasi yang diwakili oleh titik tersebut. **(Ilwaru, Lesnussa, Sahetapy, & Leleury, 2016)**

1.2.1 Pengertian Operasi Biner

Pada Himpunan bilangan, telah dikenal penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, perpangkatan, penarikan akar, dan penarikan logaritma yang disebut operasi hitung pada bilangan. Operasi hitung pada bilangan adalah operasi biner.

Aplikasi Operasi Himpunan dalam kemajuan teknologi antara lain pada pengolahan citra digital.

Operasi biner dapat dipandang sebagai aturan yang mengaitkan dua elemen, dapat pula dipandang sebagai suatu pemetaan, yang kedua-duanya mempunyai pengertian sama. Dalam hal ini operasi biner dipandang sebagai pemetaan. Misalkan S suatu himpunan. Operasi biner pada S adalah aturan yang untuk setiap dua elemen S memberikan suatu hasil elemen S lainnya. Sebagai contoh, penjumlahan adalah operasi dua arah pada $\mathbb{R}$, karena mengingat dua bilangan real, hasil penjumlahannya adalah bilangan real. Salah satu cara ahli matematika suka mengatakan ini adalah "$\mathbb{R}$ tertutup pada operasi penjumlahan". Semua itu dapat berarti bahwa jumlah dari dua bilangan real adalah bilangan real.

Penjumlahan (Addition) juga merupakan operasi biner pada himpunan $\mathbb{C}$ $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{N}$. Demikian juga, multiplikasi adalah operasi biner pada himpunan $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Untuk operasi biner pengurangan dalam hasil operasi pada suatu himpunan. Pengurangan adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. *Subtraction* bukan operasi biner pada $\mathbb{N}$; misalnya $1{,}2 \in \mathbb{N}$ tetapi $1 - 2 = -1, -1 \notin \mathbb{N}$. Jadi $\mathbb{N}$ tidak tertutup pada operasi pengurangan.

Apakah pembagian operasi biner pada $\mathbb{R}$? Tidak, karena $1, 0$ adalah bilangan real tetapi $\frac{1}{0}$ tidak didefinisikan. Dengan demikian $\mathbb{R}$ tidak tertutup di bawah operasi pembagian. $\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\}$

Sekarang pembagian adalah suatu operasi biner pada $\mathbb{R}^*$. Tetapi perhatikan bahwa penambahan bukan lagi operasi biner pada $\mathbb{R}^*$; misalnya $5, -5 \in \mathbb{R}^*$ tetapi $5 + (-5) = 0, 0 \notin \mathbb{R}^*$.

1.2.2 Struktur Operasi pada Vektor

Didefinisikan Euclidean berdimensi-n sebagai bentuk

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Jadi $\mathbb{R}^2$ adalah himpunan vektor dalam bidang, dan $\mathbb{R}^3$ adalah himpunan vektor dalam 3-dimensi. Penjumlahan adalah operasi biner pada $\mathbb{R}^n$, dan begitu juga pengurangan. Bagaimana dengan perkalian dengan skalar? Jika λ adalah skalar (mis. $\lambda \in \mathbb{R}$) dan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ adalah sebuah vektor, kita definisikan

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Perhatikan bahwa hasilnya berada pada di dalam $\mathbb{R}^n$, tetapi masih dikalikan dengan skalar bukanlah operasi biner pada $\mathbb{R}^n$, karena kita tidak 'menggabungkan' dua elemen $\mathbb{R}^n$, tetapi satu elemen $\mathbb{R}$ yaitu λ, dan satu elemen $\mathbb{R}^n$ yang adalah x. Bagaimana dengan produk titik dan produk silang? Produk titik didefinisikan pada $\mathbb{R}^n$ untuk semua n. Jika $x = (x_1, \dots, x_n)$ dan $y = (y_1, \dots, y_n)$ diperoleh produk dot dari x dan y menjadi

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Perhatikan bahwa hasilnya adalah dalam $\mathbb{R}$, bukan dalam $\mathbb{R}^n$, jadi produk titik bukan operasi biner. Produk silang didefinisikan hanya pada $\mathbb{R}^n$. Jika $x, y \in \mathbb{R}^n$ maka $x \times y$ lagi termuat dalam $\mathbb{R}^n$. Jadi produk silang adalah operasi biner pada $\mathbb{R}^n$.

1.2.3 Struktur Operasi pada Fungsi (Komposisi pada Fungsi)

Komposisi fungsi misalkan himpunan S_1, S_2, S_3 dan f, g merupakan fungsi

$$f : S_1 \to S_2,\ g : S_2 \to S_3.$$

Kita dapat mendefinisikan komposisi $g \circ f : S_1 \to S_3$ menurut aturan:

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Yaitu $g \circ f$ adalah fungsi yang diperoleh dengan mensubstitusi f kepada g.

Jika $A, B,$ dan C himpunan dan $f: A \to B, g: B \to C$ fungsi, maka $g \circ f: A \to C$ adalah fungsi yang didefinisikan dengan $(g \circ f)(a) = g(f(a))\ \forall\ a \in A$. Fungsi $g \circ f$ ini disebut komposisi dari f dan $g, \forall\ a \in A$.

<u>Contoh 1</u>

Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 5$ dan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 3x + 2$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = (3x + 2)^2 - 5 = 9x^2 + 12x - 1$,

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 5) = 3(x^2 - 5) + 2 = 3x^2 - 13$.

Urutan penting di sini: $f \circ g$ adalah hasil dari penggantian g menjadi f, dan $g \circ f$ adalah hasil dari penggantian f menjadi g.

Perhatikan bahwa dalam contoh kita mulai dengan fungsi $R \to R$ dan disusun untuk memperoleh fungsi $R \to R$.

Demikian juga, dalam definisi di atas, jika $S_1 = S_2 = S_3 = S$ berkata, sehingga f dan g adalah fungsi $S \to S$ kemudian $g \circ f$ adalah fungsi $S \to S$. Dalam hal ini (misalnya ketika domain dan kodomain sama) $\circ$ adalah operasi biner. Ini bukan operasi biner pada S, karena tidak mengambil dua elemen S dan memberi elemen lain. Ini adalah operasi biner pada himpunan fungsi dari S ke dirinya sendiri.

Lemma berikut mungkin terlihat konyol dan tidak berguna, tetapi itu salah satu hasil paling penting yang akan kita temui dalam modul ini, dan kita akan menggunakannya berulang kali.

Lemma 1.2.1

Biarkan S_1, S_2, S_3, S_4 merupakan himpunan dan f, g, h fungsi dengan h: $S_1 \to S_2$, g: $S_2 \to S_3$, f: $S_3 \to S_4$. Kemudian $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Bukti:

Misalkan $k = g \circ h$ dan $h = f \circ g$. Perhatikan bahwa $k(x) = g(h(x))$ dan $k'(x) = f(g(x))$. Jadi $(f \circ (g \circ h))(x) = (f \circ k)(x) = f(k(x)) = f(g(h(x)))$. Juga $((f \circ g) \circ h)(x) = (k' \circ h)(x) = k'(h(x)) = f(g(h(x)))$. Jadi $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Tabel Komposisi

Perhatikan bahwa definisi tentang operasi biner pada himpunan S: ini hanyalah sebuah aturan yang untuk setiap pasangan elemen S menghasilkan elemen ketiga. Operasi biner ini tidak harus 'alami', apa pun artinya. Itu tidak harus menjadi sesuatu yang kita temui sebelumnya, seperti penjumlahan, perkalian, komposisi fungsi, dan lain-lain. Kita dapat dengan mudah menemukan himpunan S dan operasi biner di atasnya. Jika S adalah pasti, ini mudah dengan menggunakan tabel komposisi yang memberitahu kita untuk setiap pasangan elemen S apa elemen ketiga.

Contoh 2

Misalkan $S = \{a, b, c\}$. Mari kita operasi biner pada S dengan tabel komposisi berikut:

Tabel 1

$\circ$	a	b	c
a	b	c	a
b	a	c	a
c	b	b	c

Hasil komposisi $a \circ b$, ditemukan pada persimpangan baris yang dikepalai dengan kolom yang dikepalai oleh b. Dengan kata lain, untuk tabel komposisi, elemen pertama menentukan baris dan kolom penentu kedua. Demikianlah tabel komposisi di atas dipaparkan hasil operasi $\circ\circ$ diperoleh hasil sebagai berikut:

$a \circ a = b,\quad a \circ b = c,\quad a \circ c = a,\quad b \circ a = a,$

$b \circ b = c,$

$b \circ c = a,\quad c \circ a = b,\quad c \circ b = b,\quad c \circ c = c.$

Semua elemen hasil operasi semuanya termuat di dalam himpunan S. dengan demikian operasi biner ∘ dikatakan mempunyai sifat tertutup.
Dengan menggunakan tabel komposisi ini operasi biner ◦ yang sudah didefinisikan lebih mudah dilihat hasil operasinya di dalam tabel.

Tabel komposisi sebagai bentuk penyajian operasi biner dari dua elemen dalam suatu himpunan dengan ketentuan yang disusun dengan definisi operasi biner ∘ yang berbeda dari Tabel 1 di atas . definisi operasi biner yang ditetapkan pada tabel sebagai definisi operasi biner ◦ yang berlaku hanya pada kasus tabel komposisi tertentu.

1.2.4 Struktur Operasi pada Matriks

Definisi 1.2.2:

Matriks yang diberikan $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ dengan ordo $m \times n$, kami mendefinisikan jumlah dari bentuk $A + B$ menjadi matriks berordo $m \times n$ dengan (i,j) −jumlah elemennya adalah $a_{ij} + b_{ij}$. Didefinisikan pengurangan dari bentuk $A - B$ menjadi matriks $m \times n$ dengan (i,j) −elemen sehingga menjadi a_{ij}- b_{ij}. Misalkan λ menjadi skalar. Didefinisikan λA sebagai matriks $m \times n$ dengan (i,j)-elemen dari λa_{ij}. Dengan menetapkan $-A$ menjadi bentuk matriks $m \times n$ dengan elemen (i,j) adalah $-a_{ij}$. Jadi $-A = (-1)A$. Perhatikan bahwa jumlah $A + B$ didefinisikan hanya ketika A dan B memiliki ordo yang sama. Dalam hal ini $A + B$ diperoleh dengan menambahkan elemen-elemen yang sesuai.

Contoh 3:

S = himpunan matrik ordo $m\ x\ n$

Operasi biner pada S adalah penjumlahan matriks.

Penjumlahan dua buah matriks menghasilkan matriks dengan ordo yang sama. Jadi operasi biner tersebut tertutup pada operasi perkalian.

Perkalian matriks memenuhi aturan berikut.

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Berarti dua buah matriks dengan ordo $m \times n$ tidak dapat dikalikan, jika $m \neq n$.

Definisi 1.2.3:

Matriks nol ukuran $m \times n$ adalah matriks $m \times n$ unik yang elemennya semua 0. Ini dilambangkan dengan $0_{m\times n}$, atau elemennya hanya 0 saja.

Definisi 1.2.4:

Misalkan $A = {a_{ij}}_{m\times n}$ dan $B = {b_{ij}}_{n\times p}$. Kami mendefinisikan produk AB menjadi matriks $C = {c_{ij}}_{m\times p}$ sedemikian rupa sehingga $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$.

Berdasarkan Definisi 1.2.3 dan Definisi 1.2.4 di atas, maka beberapa yang harus diperhatikan dalam perkalian matrik sebagai berikut:

- Jika produk AB yang akan ditentukan, maka jumlah kolom A harus sama dengan jumlah baris B.
- Elemen ke-AB dari AB diperoleh dengan mengambil titik produk dari baris ke-i dari A dengan kolom ke-j dari B.

<u>Contoh 4:</u>

$M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0\right\}$

Penjumlahan matriks anggota M tidak tertutup pada operasi penjumlahan.

Perhatikan penyelesaian sebagai berikut:

Ambil $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ dengan $1.3 - 2.0 \neq 0$

$q = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dengan $3.0 - 4.2 \neq 0$

sehingga $p + q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ dengan $4.3 - 6.2 = 0$.

Jadi M terbukti tidak tertutup karen dari hasil operasi $+q$, elemen-elemennya diperoleh $4.3 - 6.2 = 0$.

<u>Contoh 5:</u>

$S =$ Himpunan matriks ordo $n\ x\ n$

Operasi biner pada himpunan S adalah perkalian matriks.

Perkalian dua buah matriks ordo $n\ x\ n$ menghasilkan matriks ordo $n\ x\ n$. Jadi perkalian pada matriks merupakan operasi yang memenuhi sifat operasi tertutup.

Contoh 6:

$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$

Buktikan bahwa perkalian dua buah matriks dengan determinan $=$ 1 merupakan operasi biner yang memenuhi sifat tertutup.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa, hasil operasi memenuhi sifat tertutup.

Ambil sebarang elemen M, misalnya $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ dengan

$a, b, c, d, p, q, r, s \in R, ad - bc = 1$ dan $ps - qr = 1$.

Sehingga $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$, dengan

$(ap + br)$,

$(aq + bs)$, $(cp + dr)$, $(cq + ds) \in R$ dan $[(ap + br)(cq + ds) - (aq + bs)$

$(cp + dr)]$= 1

Jadi dengan demikian terbukti bahwa $AB \in M$. Jadi M memenuhi sifat tertutup pada operasi perkalian

1.2.5 Struktur Operasi pada Pemetaan

Struktur operasi pada pemetaan mempunyai kaidah atau aturan yang berlaku pada pemetaan yang menjadi dasar pemahaman dan penggunaan dalam pemecahan masalah operasi biner pada pemetaan. Seperti yang dijelaskan pada definisi di bawah ini memiliki konsep yang harus diperhatikan dari masing-masing komponen penyusunnya.

Definisi 1.2.6:

Jika S suatu himpunan yang tidak kosong dan $T = S\,x\,S$ Operasi biner pada S adalah pemetaan, $\varphi: T \rightarrow S$.

a. Jika $T \neq S\,x\,S$, maka operasi biner ini tidak tertutup, sebab ada pasangan berurutan anggota dari S yang tidak dipasangkan dengan anggota dari S. Jadi operasi biner φ pada himpunan S dikatakan **tidak tertutup** jika ada $(a, b) \in S\,x\,S$ dengan $\varphi(a, b) = c \notin S$. Dengan perkataan lain operasi biner $*$ tidak tertutup jika $\exists\, a, b \in S$ dengan $a * b = c \notin S$.

b. Jika $T = S\,x\,S$ maka operasi biner adalah tertutup, sebab setiap pasangan berurutan anggota dari S dipasangkan dengan anggota dari S. Jadi operasi biner φ pada himpunan S dikatakan ***tertutup*** jika untuk setiap $(a, b) \in S\,x\,S$ berlaku $\varphi(a, b) = c \in S$. Dengan perkataan lain $\forall\, a, b \in S$ berlaku $\varphi(a * b) = c \in S$. Karena $T = S\,x\,S$ berarti pemetaan itu adalah $\varphi: S\,x\,S \rightarrow S$.

Definisi di atas akan ditunjukkan dengan contoh berikut:

<u>Contoh 7:</u>

Misalkan S = himpunan semua bilangan asli

Operasi $*$ pada himpunan S didefinisikan sebagai pengurangan pada bilangan, artinya $a * b = a - b$. Operasi pengurangan adalah operasi biner yang tidak tertutup

Untuk jelasnya perhatikan uraian berikut.

$S = \{1, 2, 3, \dots\}$

$S \, x \, S = \{(a, b) | \, a \in S$ dan $b \in S\}$ dan $T \subset S \, x \, S$ dengan $T = \{(a, b) | a, b \in S$ dan $a > b\}$

$\varphi : T \to S$, dengan $\varphi(a, b) = a - b$

Ambil beberapa anggota S

$2 \in S, 1 \in S$ dan $(2, 1) \in T$ dengan $(2, 1) \to \varphi(2, 1) = 1 \in S$

$3 \in S, 1 \in S$ dan $(3, 1) \in T$ dengan $(3, 1) \to \varphi(3, 1) = 2 \in S$

$6 \in S, 2 \in S$ dan $(6, 2) \in T$ dengan $(6, 2) \to \varphi(6, 2) = 4 \in S$

∀ a, b ∈ S, dengan $a \, . \, b$ memenuhi $\varphi(a, b) = a - b \in S$

Ambil $2 \in S, 4 \in S$ dan $(2, 4) \in SxS$ tetapi $(2,4) \notin T$.

$(2, 4)$ tidak dapat dipasangkan dengan anggota S.

Jika $a \leq b$ dan $(a, b) \in SxS$ maka $(a, b) \notin T$.

Jadi $\forall \, a, b \in T$ dengan $T \neq SxS$, (a, b) dipasangkan dengan $\varphi(a, b) = a - b$ satu anggota S

$\varphi : T \to S$ merupakan pemetaan. Jadi operasi pengurangan tidak tertutup.

<u>Contoh 8:</u>

S = Himpunan semua bilangan asli

Operasi $*$ pada himpunan S didefinisikan sebagai sejumlah pada bilangan, artinya $a * b = a + b$ Operasi penjumlahan adalah operasi biner yang tertutup

Perhatikan uraian berikut:

$S = \{1, 2, 3, ...\}$

$SxS = \{(a, b) \mid a \in S$ dan $b \in S\}$ dan $T = S\,x\,S$

$\varphi: T \to S$ atau $\varphi: S\,x\,S \to S$ dengan $\varphi(a, b) = a + b$

Ambil beberapa anggota S sebagai berikut.

$2 \in S, 1 \in S$ dan $(2, 1) \in T = SxS$ dengan $(2, 1) \to \varphi(2, 1) = 3 \in S$

$3 \in S, 2 \in S$ dan $(3, 2) \in T = SxS$ dengan $(3, 2) \to \varphi(3, 2) = 5 \in S$

$1 \in S, 5 \in S$ dan $(1, 5) \in T = SxS$ dengan $(1, 5) \to \varphi(1, 5) = 6 \in S$

$\forall\, a, b \in T = S\,x\,S, (a, b)$ dipasangkan dengan $\varphi(a, b) = a + b$ satu anggota S.

Jadi $\varphi: T \to S$ dengan $T = S\,x\,S$ atau $\varphi: S\,x\,S \to S$ pemetaan

Dalam contoh selanjutnya, operasi tertutup dan tidak tertutup ditunjukkan langsung menggunakan sifat-sifat operasi yang telah dipelajari dalam himpunan.

Contoh 9:

S = Himpunan bilangan real

Penjumlahan dan perkalian pada himpunan bilangan real merupakan operasi tertutup.

Suatu operasi biner yang tertutup disebut juga komposisi biner. Jadi suatu komposisi biner adalah operasi biner yang tertutup.

1.2.6 Soal Latihan

1) $G = \{a, b, c\}$ dengan operasi $*$ didefinisikan dalam Table 2 di bawah ini. Tentukan hasil operasi $*$ antar elemen dalam himpunan G pada Tabel 2 berikut !

Tabel 2

$*$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

2) A = Himpunan bilangan asli dengan operasi $*$ didefinisikan sebagai berikut.

$$x * y = |x - y| \text{ jika } x \neq y$$

$$x * y = 1 \qquad \text{jika } x = y$$

Tunjukkan kapan suatu elemen di A terhadap operasi $*$ tidak memenuhi definisi pada operasi $*$!

3) $B = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ dengan operasi perkalian matriks. Tujukkan hasil operasi perkalian matriuks dari setiap elemen himpunan = $\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in B\}$!

4) Misalkan $f: \mathbb{Z} \to 5\mathbb{Z}$ dengan $f(x) = 5x, \forall x \in \mathbb{Z}$ dan $g: \mathbb{Z} \to 5\mathbb{Z}$ dengan $g(x) = \frac{x}{5}$ $\forall x \in \mathbb{Z}$. Diketahui $F = \{f(x), g(x)\}$ tunjukkan bahwa $f(x) \circ g(x)$ apakah hasilnya termuat di F?

5) Diketahui himpunan-himpunan tak kosong sebagai berikut: $A = \{m, h, d\}, B = \{r, s, a, u, h\}, C = \{w, a, s\}$.

Tentukan:

a. $A + B$!

b. $B \times C$!

c. $A - C$!

d. $A \times B + C$!

6) Diketahui himpunan-himpunan yang didefinisikan sebagai berikut

$A = \{x \mid 0 \leq x \leq 20, x \in$ bilangan Asli yang habis dibagi 3$\}$,

$B = \{x \mid 9 \leq x \leq 20, x \in$ Bilangan Prima $\}$, $C = \{x \mid -10 \leq x \leq 10,\ x \in$ bilangan bulat $\}$. Tentukan hasil dari:

a. $x + y, \forall x, y \in A$,

b. $xy, \forall x, y \in B$

c. $x : y, \forall x, y \in A$

d. $x - y, \forall x, y \in C$

e. $2xy, \forall x, y \in B$

1.2.7 Petunjuk Pengerjaan

1) $a * a = a, a * b = \ldots, a * c = a, b * b = \cdots, b * c = b, c * c = \cdots, c * b = \ldots, c * a = \cdots$

2) Tidak ada yang tidak memenuhi definisi operasi $*$ pada himpunan A

3) Ambil sebarang $A, B \in M$ dengan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$, dengan $a, b, c, d, x, y, u, v \in B$ diperoleh:

$A \times B = \begin{pmatrix} ax + bu & ay + bv \\ cx + du & cy + dv \end{pmatrix}$ dengan $ax + bu, ay + bv, cx + du, cy + dv \in B$ maka $\begin{pmatrix} ax + bu & ay + bv \\ cx + du & cy + dv \end{pmatrix}$ termuat di M

4) $f(x) \circ g(x) = x$

5) a. $A + B = \{m + r, m + s, m + a, m + u, m + h, h + r, h + s, h + a, h + u, 2h, \dots, d + h\}$

b. $B \times C = \{rw, ra, rs, ss, sa, \dots., hs\}$

c. $A - C = \{m - w, m - a, m - s, h - w, h - a, h - s, \dots, d - s\}$

d. $A \times B + C = \{mr + w, ms - w, \dots, dh - s\}$

$A = \{x \mid 0 \leq x \leq 20, x \in$ bilangan Asli yang habis dibagi $3\}$, $B = \{x \mid 9 \leq x \leq 20, x \in$ Bilangan Prima $\}$, $C = \{x \mid -10 \leq x \leq 10, x \in B\}$.

6) Hasil dari operasi diperoleh sebagai berikut:

a. $x + y = z, \forall x, y, z \in A$,

b. $xy = z, \forall x, y \in B, z \in B$

c. $x : y, \forall x, y \in A$

d. $x - y, \forall x, y \in C$

e. $2xy, \forall x, y \in B$

1.2.8 Rangkuman

1. **Pengertian Operasi Biner**
   Operasi hitung pada bilangan adalah operasi biner. Operasi biner dapat dipandang sebagai aturan yang mengaitkan dua elemen, dapat pula dipandang sebagai suatu pemetaan, yang kedua-duanya mempunyai pengertian sama.
2. Struktur Operasi pada Vektor
   Didefinisikan Euclidean berdimensi-n sebagai bentuk
   $$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$
   Jadi $\mathbb{R}^2$ adalah himpunan vektor dalam bidang, dan $\mathbb{R}^3$ adalah himpunan vektor dalam 3-dimensi. Penjumlahan adalah operasi biner pada $\mathbb{R}^n$, dan begitu juga pengurangan. Bagaimana dengan perkalian dengan skalar? Jika λ adalah skalar (mis. $\lambda \in \mathbb{R}$) dan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ adalah sebuah vektor, kita definisikan
   $$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$
3. Struktur Operasi pada Polinomial
   Kita akan menulis $R\,[x]$ untuk himpunan polinomial dalam x dengan koefisien yang nyata, $C\,[x]$ untuk bentuk ini ke f polinomial Sin x dengan koefisien yang kompleks,$\mathbb{Q}\,[x]$ untuk himpunan polinomial dalam x dengan koefisien rasional, dan $\mathbb{Z}\,[x]$ untuk set polinomial dalam x dengan koefisien bilangan bulat. Semua ini tertutup pada operasi penjumlahan, perkalian dan pengurangan, tetapi tidak pembagian; misalnya $\frac{x}{(x+1)}$ bukan polinomial.
4. Struktur Operasi pada Fungsi (Komposisi pada Fungsi)
   Komposisi fungsi misalkan himpunan S_1, S_2 dan S_3 dan f, g merupakan fungsi
   $$f : S_1 \to S_2,\ g : S_2 \to S_3.$$
   Maka dapat mendefinisikan komposisi $g \circ f : S_1 \to S_3$ menurut aturan:

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Yaitu $g \circ f$ adalah fungsi yang diperoleh dengan mensubstitusi f kepada g.

Jika A, B, dan C himpunan dan $f: A \to B, g: B \to C$ fungsi, maka $g \circ f: A \to C$ adalah fungsi yang didefinisikan dengan $(g \circ f)(a) = g(f(a)) \forall a \in A$. Fungsi gof ini disebut komposisi dari f dan g, $\forall a \in A$.

5. Struktur Operasi pada Matrik
   Matriks yang diberikan $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ dengan ordo $m \times n$, kami mendefinisikan jumlah dari bentuk $A + B$ menjadi matriks berordo $m \times n$ dengan (i, j)-jumlah elemennya adalah a_{ij}+ b_{ij}. Didefinisikan pengurangan dari bentuk $A - B$ menjadi matriks $m \times n$ dengan (i, j)-elemen sehingga menjadi a_{ij}- b_{ij}. Misalkan λ menjadi skalar. Didefinisikan λA sebagai matriks $m \times n$ dengan (i, j)-elemen dari λa_{ij}. Dengan menetapkan $-A$ menjadi bentuk matriks $m \times n$ dengan elemen (i, j) adalah $-a_{ij}$. Jadi $-A = (-1)A$. Perhatikan bahwa jumlah $A + B$ didefinisikan hanya ketika A dan B memiliki ordo yang sama. Dalam hal ini $A + B$ diperoleh dengan menambahkan elemen-elemen yang sesuai.
6. Matriks nol ukuran $m \times n$ adalah matriks mx n unik yang elemennya semua 0. Ini dilambangkan dengan $0_{m \times n}$, atau elemennya hanya 0 saja.
7. Misalkan $A = {a_{ij}}_{m \times n}$ dan $B = {b_{ij}}_{n \times p}$. Kami mendefinisikan produk AB menjadi matriks $C = {c_{ij}}_{m \times p}$ sedemikian rupa sehingga $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$.
   Perhatikan hal-hal berikut:
   - Jika produk AB yang akan ditentukan, maka jumlah kolom A harus sama dengan jumlah baris B.
   - Elemen ke-AB dari AB diperoleh dengan mengambil titik produk dari baris ke-i dari A dengan kolom ke-j dari B.
8. Struktur Operasi pada Pemetaan

Jika S suatu himpunan yang tidak kosong dan $T = S\,x\,S$ Operasi biner pada S adalah pemetaan, $\varphi: T \rightarrow S$.

a. Jika $T \neq S\,x\,S$, maka operasi biner ini tidak tertutup, sebab ada pasangan berurutan anggota dari S yang tidak dipasangkan dengan anggota dari S. Jadi operasi biner φ pada himpunan S dikatakan tidak tertutup jika ada $(a, b) \in S\,x\,S$ dengan $\varphi(a, b) = c \notin S$. Dengan perkataan lain operasi biner $*$ tidak tertutup jika $\exists\, a, b \in S$ dengan $a * b = c \notin S$.

b. Jika $T = S\,x\,S$ maka operasi biner adalah tertutup, sebab setiap pasangan berurutan anggota dari S dipasangkan dengan anggota dari S. Jadi operasi biner φ pada himpunan S dikatakan tertutup jika untuk setiap $(a, b) \in S\,x\,S$ berlaku $\varphi(a, b) = c \in S$. Dengan perkataan lain $\forall\, a, b \in S$ berlaku $\varphi(a * b) = c \in S$. Karena $T = S\,x\,S$ berarti pemetaan itu adalah $\varphi: S\,x\,S \rightarrow S$

1.2.9 Tes Formatif 2

Kerjakan soal di bawah ini dengan benar!

1) Diketahui himpunan $G = \{a, b, c, d\}$ dengan operasi $*$ yang didefinisikan dalam Tabel 3 di bawah ini.

   Tentukan hasil operasi dari $a * a, a * b, a * c, a * d, b * b, b * a, b * c, b * d, c * c, c * b, c * a, c * d, d * d, d * b, d * c$!

Tabel 3

$*$	a	b	c	d
a	d	c	a	b
b	c	d	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

A. $d, c, a, b, d, c, b, a, c, b, a, d, c, a, d$

B. $d, c, a, b, d, c, b, a, c, b, a, d, c, a, b$

C. $d, c, a, b, d, c, d, a, c, b, a, d, c, a, d$

D. $d, c, a, b, d, c, b, a, c, b, a, b, c, a, d$

2) Diketahui $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$ dengan operasi perkalian matriks. Hasil operasi perkalian matriks dari matriks A dan B, jika $A, B \in M$ dengan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, maka:

A. $A \times B = \begin{pmatrix} ax & 0 \\ 0 & ay \end{pmatrix}$ dengan $ax, ay \in \mathbb{R}$ maka $\begin{pmatrix} ax & 0 \\ 0 & ay \end{pmatrix} \in M.$

B. $A \times B = \begin{pmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dengan $ax, ay \in \mathbb{R}$ maka $\begin{pmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$

C. $A \times B = \begin{pmatrix} ax & 0 \\ ay & 0 \end{pmatrix}$ dengan $ax, ay \in \mathbb{R}$ maka $\begin{pmatrix} ax & 0 \\ ay & 0 \end{pmatrix} \in M$

D. $A \times B = \begin{pmatrix} ay & 0 \\ 0 & ax \end{pmatrix}$ dengan $ax, ay \in \mathbb{R}$ maka $\begin{pmatrix} ay & 0 \\ 0 & ax \end{pmatrix} \in M$

3) Diketahui himpunan bilangan bulat dengan operasi biner "$*$" yang didefinisikan $* \ y = 2x + y^3$. Hasil dari $3(a * b)$, dengan a, b, p, q elemen himpunan bilangan bulat adalah…..

A. $3(2a + b^3) = 3a + 3b^3$

B. $3(2a + b^3) = 2a + 3b^3$

C. $3(2a + b^3) = 6a + 6b^3$

D. $3(2a + b^3) = 6a + 3b^3$

4) Diketahui himpunan bilangan bulat dengan operasi biner "$*$" yang didefinisikan $x * y = 2x + y^3$. Hasil dari $p * (8(q * p))$, dengan a, b, p, q elemen himpunan bilangan bulat adalah…..

A. $33824p^3 + 55296\,p^6q + 110592\,p^3q^2 + 27648\,q^4p^3 + 110592q^3 + 55296q^5$

B. $313824p^3 + 55296\,p^6q + 110592\,p^3q^2 + 27648\,q^4p^3 + 110592q^3 + 55296q^5$

C. $1313824p^3 + 55296\,p^6q + 110592\,p^3q^2 + 27648\,q^4p^3 + 110592q^3 + 55296q^5$

C. $13824p^3 + 55296\,p^6q + 110592\,p^3q^2 + 27648\,q^4p^3 + 110592q^3 + 55296q^5$

5) Diketahui $(x) = x^2 + 2, j(x) = x^2 + 3x - 4$, hasil dari operasi biner dari: $k(x) + j(x)$ adalah….

A. $2x^2 + 3x - 2$

B. $2x^2 + 3x - 4$

C. $4x^2 + 3x - 2$

D. $3x^2 + 2x - 2$

6) Pada soal nomor 4), hasil dari $k(x) - j(x)$ adalah….

A. $2x + 6$

B. $6x + 3$

C. $3x + 6$

D. $3x - 6$

7) Pada soal nomor 4), hasil dari $6k(x) \times j(x)$ adalah….

A. $6x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$

B. $6x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 8$

C. $6x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 8$

D. $6x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 6x - 8$

8) Pada soal nomor 4), hasil dari $j(x): k(x)$ adalah …..

A. $\frac{3x-6}{x^2+3}$

B. $\frac{6x-6}{x^2+2}$

C. $\frac{3x-6}{x^2+2}$

D. $\frac{3x-8}{x^2+2}$

9) Pada soal nomor 4), hasil dari $k(x)\ o\ j(x)$ adalah

A. $x^4 + 3x^2 + 6$

B. $x^4 + 7x^2 + 6$

C. $x^4 + 7x^2 + 3$

D. $x^4 + 7x2 + 6$

10) Diketahui vektor $\vec{a} = i + 2j - xk, \vec{b} = 3i - 2j + k$ dan $\vec{c} = 2i + j + 2k$. Vector $\vec{a}$ tegak lurus $\vec{c}$. Hasil operasi biner dari $(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{c})$ adalah…

A. Jika $\vec{a}$ tegak lurus $\vec{c}$ maka $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$, jadi $(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{c}) \neq 0$

B. Jika $\vec{a}$ tegak lurus $\vec{c}$ maka $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, jadi $(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{c}) \neq 0$

C. Jika $\vec{a}$ tegak lurus $\vec{c}$ maka $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$, jadi $(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{c}) = 0$

D. Jika $\vec{a}$ tegak lurus $\vec{c}$ maka $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, jadi $(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{c}) = 0$

1.2.10 Penilaian

Tingkat Penguasaan = $\frac{\text{Jumlah jawaban benar}}{10} \times 100\%$

Kategori Penilaian yang dicapai:

$90\% - 100\% =$ baik sekali

$80\% - 89\% \quad =$ baik

$70\% - 79\% \quad =$ cukup

$< 70\% \quad =$ kurang

Jika Anda mencapai tingkat penguasaan sebesar 80% ke atas, maka Anda dapat melanjutkan kegiatan belajar 3 pada bab berikutnya dan Anda mendapat penilaian yang bagus. Namun jika Anda belum mencapai tingkat penguasaan sebesar 80%, maka Anda disarankan mengulangi pada kegiatan belajar 2 dengan penekanan pada materi yang belum Anda pahami dengan baik.

1.2.11 Kunci Jawaban Tes Formatif 2

1) A
2) B
3) D
4) D
5) A
6) C
7) A
8) C
9) B
10) D

1.2.12 Daftar Pustaka

Ilwaru, V.Y.I, Lesnussa, Y.A., Sahetapy, E.M., & Leleury, Z.A. 2016. Aplikasi Operasi Himpunan dan Matematika Morfologi Pada Pengolahan Citra Digital. *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*.10(2): 83 – 96.

Nugraha, A. & Dwiyana, A.S.D. *Himpunan*. PAUD4305/MODUL 1.

Pinter, C.C. 2014. *Set Theory*. New York: Dover Publications. Inc.

Ronald C. FreiwaldSt. Louis, Missouri. 2014. *An Introduction to Set Theory and Topology*. Washington University in St. Louis Saint. Louis, Missouridoi: 10.7936/K7D798QH.

Wiidodo, S. *Teori dan Operasi Pada Himpunan*. http://file.upi.edu/Direktori/KD-PURWAKARTA/198012182005011001-Suprih_Widodo/Pemecahan% 20Masalah %20Matematika/Teori%20Himpunan.pdf.

Siksek, S. 2015. *Introduction to Abstract Algebra*. London: Mathematics Institute University of Warwick.

Kegiatan Belajar 3: Struktur Sifat-sifat Pada Operasi Biner dan Hubungannya

Tujuan Pembelajaran:

1. Mengenal struktur sifat komutatif pada suatu himpunan dengan suatu operasi biner yang familiar dan non familiar
2. Mengenal struktur sifat asosiatif pada suatu himpunan dengan suatu operasi biner yang familiar dan non familiar
3. Mengenal struktur sifat identitas pada suatu himpunan dengan suatu operasi biner yang familiar dan non familiar
4. Mengenal struktur sifat invers pada suatu himpunan dengan suatu operasi biner yang familiar dan non familiar
5. Mengenal persamaan dan perbedaan definisi operasi biner melalui rumus ataupun tabel

Aplikasi Fungsi Invers dalam Bidang lain

Dalam Bidang Ekonomi : digunakan untuk menghitung & memperkirakan sesuatu seperti fungsi permintaan & penawaran.
Dalam Bidang Kimia : digunakan untuk menentukan waktu peluruhan sebuah unsur.
Dalam Bidang Geografi & Sosiologi : digunakan untuk optimasi dalam industry & kepadatan penduduk.
Dalam Ilmu Fisika : digunakan persamaan fungsi kuadrat untuk menjelaskan sebuah fenomena gerak.

1.3.1 Sifat-sifat Pada Operasi Biner

Sifat-sifat pada sebarang operasi biner yang diterapkan pada suatu himpunan dalam kegiatan belajar 3 ini meliputi empat sifat yakni tertutup, komutatif, asosiatif, identitas, dan invers.

Secara lengkap sifat-sifat tersebut dijelaskan pada definisi sebagai berikut.

Definisi 1.3.1:

a. Operasi biner $*$ pada himpunan S disebut memenuhi sifat tertutup jika $\forall\, a, b \in S, \exists\, c \in S$ sehingga $a * b = c \in S$.
b. Operasi biner $*$ pada himpunan S disebut memenuhi sifat komutatif, jika dan hanya jika $\forall\, a, b \in S$, berlaku $a * b = b * a$
   c. Operasi biner $*$ pada himpunan S disebut memenuhi sifat asosiatif, jika dan hanya jika jika $\forall\, a, b, c \in S$, berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$
   d. Operasi biner $*$ pada himpunan S disebut memenuhi sifat identitas, jika dan hanya jika $\exists i \in$ S, i= elemen identitas sedemikian sehingga berlaku $a * i = i * a = a, \forall a \in S$
   e. Operasi biner $*$ pada himpunan S disebut memenuhi sifat invers, jika dan hanya jika $\forall a \in S\ \exists a^{-1} \in S \ni a * a^{-1} = a^{-1} * a = i$

<u>Contoh 1:</u>

Perhatikan himpunan $A = \{1, 2, 3, \dots\}$, apakah himpunan A terhadap operasi pengurangan, penjumlahan, perkalian dan operasi $*$ memenuhi sifat tertutup, komutatif, asosiatif, elemen identitas, dan invers?

Pembahasan:

a. Operasi pengurangan pada himpunan A:

   Tidak tertutup, $1 \in A, 3 \in A, 1 - 3 = -2 \notin A$

   Tidak komutatif, $7 - 3 \neq 3 - 7$

Tidak asosiatif, $(7 - 3) - 1 \neq 7 - (3 - 1)$

Tidak mempunyai elemen Identitas, $1 - 0 = 1,\ 0 - 1 = -1$, ternyata hasil $1 - 0 \neq 0 - 1$, $0 \notin A$

Tidak mempunyai invers untuk setiap elemennya karena setiap elemen di A tidak mempunyai elemen negative.

b. Operasi penjumlahan pada himpunan A mempunyai sifat:

Tertutup, $3 + 2 = 5 \in A$

Komutatif, $3 + 2 = 2 + 3$

Asosiatif, $(3 + 2) + 4 = 3 + (2 + 4)$

Tidak mempunyai elemen identitas karena $0 \notin A$ walaupun $3 + 0 = 0 + 3 = 3$

Tidak mempunyai elemen invers, karena kebalikan (invers) dari 2 adalah $-2 \notin A$

c. Operasi perkalian pada himpunan A mempunyai sifat:

Tertutup, $3 \times 2 = 6 \in A$

Komutatif, $3 \times 2 = 2 \times 3$

Asosiatif, $(3 \times 2) \times 4 = 3 \times (2 \times 4)$

Mempunyai elemen identitas yaitu $1 \in A$ karena semua elemen di A jika dapat diitunjukkan seperti: $6 \times 1 = 1 \times 6 = 6$

Tidak mempunyai elemen invers, karena kebalikan (invers) dari 2 adalah $-2 \notin A$

d. Operasi pada himpunan A dengan $a * b = a + 2b$ mempunyai sifat:

Tertutup, karena $\forall$ kita mengambil unsur $a, b \in A$ berlaku $a * b = a + 2b \in A$

Tidak Komutatif, sebaba $a + 2b \neq b + 2a$

Tidak asosiatif, sebab:

$(a * b) * c = (a * b) + 2c = a + 2b + 2c$

$a * (b * c) = a + 2(b * c) = a + 2(b + 2c)$

$= a + 2b + 4c$

Jadi $(a * b) * c \neq a * (b * c)$

Tidak mempunyai elemen identitas, karena misalkan i = elemen identitas, maka $a * i = a + 2i = a$ maka $i = \frac{0}{2} = 0$ tetapi $i * a = i + 2a = a$ maka $i = -a$. Jadi ternyata hasil $a * i \neq i * a$.

Karena tidak memiliki elemen identitas, maka juga tidak setiap elemen di A juga tidak mempunyai invers sehingga tidak mempunyai elemen invers.

Contoh 2:

Misalnya himpunan $S = \{a, b, c\}$ dengan operasi $*$ didefinisikan dengan Tabel 4 berikut. Apakah pada himpunan S dengan operasi $*$ memenuhi sifat tertutup, komutatif dan asosiatif? Tunjukkan!

Tabel 4

$*$	a	b	c
a	a	c	b
b	a	c	b
c	c	b	a

Perhatikan Tabel 4 di atas bahwa:

a. memenuhi sifat tertutup jika $a * a = a$; $a * b = c$; $a * c = b$; $b * a = a$; $b * b = c$; $b * c = b$; $c * a = c$; $c * b =$

b; $c * c = a$. Karena semua hasil operasi $*$ menghasilkan elemen yang termuat pada himpunan S, maka pada himpunan S dengan opersi $*$ memenuhi sifat tertutup.

b. Karena $a * b = c \, dan \, b * a = a$ menunjukkan bahwa $c \neq a$ berarti $a * b \neq b * a$, maka pada himpunan S dengan operasi $*$ tidak memenuhi sifat komutatif.

c. Karena $(a * b) * c = c * c = a$ dan $a * (b * c) = a * b = c$, hal ini menunjukkan bahwa $(a * b) * c \neq a * (b * c)$ dengan demikian himpunan S dengan operasi $*$ tidak memenuhi sifat asosiatif.

d. Tidak mempunyai elemen identitas, karena ada $a * b = c$ tetapi $b * a = a$, misalkan b sebagai elemen identitas

1.3.2 Struktur Sifat-sifat pada Operasi pada Fungsi (Komposisi pada Fungsi)

a. Struktur Komutatif dan Asosiatif

Misalkan S himpunan yang memuat fungsi-fungsi. Mari kita perhatikan sifat-sifat pada operasi di himpunan S. Untuk memastikan bahwa operasi biner berlaku sifat komutatif pada S jika $a \circ b = b \circ a$ untuk semua $a, b \in S$. begitu pula operasi biner adalah asosiatif pada S jika $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ untuk semua $a, b, c \in S$.

Contoh 3:

Komposisi fungsi dari himpunan A ke dirinya sendiri bersifat asosiatif tetapi tidak komutatif. Telah kita ketahui bahwa komposisi fungsi tidak berlaku sifat komutatif. Ketika operasi biner adalah menggunakan kurung sebagai bentuk untuk menunjukkan asosiatif tidak mempunyai masalah. Maka misalnya $(a \circ b) \circ ((c \circ d) \circ e) = (a \circ (b \circ c)) \circ (d \circ e)$. Selama kita menyimpan a, b, c, d, e dalam urutan yang sama dari kiri ke kanan, maka urutan komposisi kita tidak menjadi masalah. Dengan demikian tidak akan ada ambiguitas dalam tulisan

$$(a \circ b) \circ ((c \circ d) \circ e) = a \circ b \circ c \circ d \circ e.$$

Contoh 4:

Apakah ada operasi biner yang komutatif tetapi tidak asosiatif? Bagaimana menurut Anda? Jika ada tapi itu tidak mudah untuk menghasilkan 'alami' melalui contoh. Namun mudah untuk menciptakan himpunan terbatas dan tabel komposisi yang komutatif tetapi tidak asosiatif. Misalkan $S = \{a, b, c\}$. Mari kita operasi biner pada S dengan tabel komposisi berikut:

Tabel 5

$\circ$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	c	a
c	a	a	c

Perhatikan bahwa $\circ$ bersifat komutatif; Anda dapat melihat sifat komutatif ini dengan memperhatika bahwa hasil operasi biner $\circ$ pada Tabel 5 hasil operasinya elemennya simetris dengan diagonal utama, dari sudut kiri atas ke sudut kanan bawah tampak simetri. Tapi hasil tersebut itu tidak asosiatif. Misalnya:

$$(b \circ c) \circ a = a \circ a = b, b \circ (c \circ a) = b \circ a = c.$$

Tampak bahwa: hasil $(b \circ c) \circ a \neq b \circ (c \circ a)$

b. Sifat Identitas dan Invers

Sifat identitas dan invers pada fungsi mempunyai konsep yang sama dengan himpunan sebelumnya. Secara lengkap dijelaskan pada definisi pada sifat identitas dan invers pada fungsi sebagai berikut.

Definisi 1.3.2:

Misalkan $F: A \rightarrow B$ suatu fungsi , terdapat $i_A \in A$ sedemikian sehingga

1) $\exists i_A \in F \ni f \circ i_A = i_A \circ f = f, \forall f \in F$
2) $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i_A , \forall F$

   Unsur identitas pada fungsi f ditulis i_A.

Fungsi invers juga mempunyai sifat balikan kiri (invers kiri) dan balikan kanan (invers kanan), seperti yang dijelaskan pada definisi di bawah ini.

Definisi 1.3.3:

Misalkan $f: A \rightarrow B$ suatu fungsi. Fungsi $g: B \rightarrow A$ disebut:

a. Balikan kiri dari f jika $g \circ f = i_A$
b. Balikan kanan dari f jika $f \circ g = i_A$
c. Balikan dari f jika g balikan kiri sekaligus balikan kanan dari f, yaitu $g \circ f = i_A$ dan $f \circ g = i_A$. Bila $A = B$ maka dapat disingkat $g \circ f = f \circ g = i_A$

Sebagai penggunaan definisi yang berkaitan dengan sifat identitas dan invers suatu fungsi beserta sifat komutatif pada sifat identitas dan invers dijabarkan secara lengkap pada contoh berikut.

Contoh 5:

Misalkan $f: Z \rightarrow 5Z$ dengan $f(x) = 5x, \forall\, x \in Z$ dan $g: Z \rightarrow 5Z$ dengan $(x) = \frac{x}{5}$, ∀x ∈Z. Tunjukkan bahwa g balikan kiri dan juga balikan kanan dari f!

Penyelesaian:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x) = x = i_A, \forall\, x \in Z$ (menunjukkan bahwa g balikan kiri dari f)

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{x}{5}) = x = iA, \forall\, x \in 5Z$

(menunjukkan bahwa g balikan kanan dari f)

Karena $g \circ f = f \circ g = i_A$, maka g saling berbalikan dengan f.

Contoh lain pada sifat operasi biner pada matriks juga bisa diberlakukan, misalnya pada matriks berordo $2\ x\ 2$ seperti pada contoh 6 berikut.

Contoh 6:

$S =$ Himpunan matriks ordo $2\ x\ 2$ dengan operasi penjumlahan matriks mempunyai sifat:

a. Tertutup
b. Komutatif

c. Asosiatif

d. Identitas

e. invers

Bukti:

a. Misalkan ambil sebarang $A, B \in S$ dengan misalnya $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dan

$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ dengan $, b, c, d, x, y, z, w \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ = himpunan bilangan bulat.

Maka pada operasi penjumlahan diperoleh:

$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + x & b + y \\ c + z & d + w \end{pmatrix}$, $(a + x), (b + y), (c + z)$,

$(d + w) \in \mathbb{Z}$. Sehingga $A + B = \begin{pmatrix} a + x & b + y \\ c + z & d + w \end{pmatrix} \in S$. Jadi terbukti S terhadap operasi penjumlahan memenuhi sifat tertutup

b. Untuk sifat komutatif diperuntukkan sebagai latihan mahasiswa.

c. Misalkan ambil sebarang $A, B \in S$ dengan misalnya $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ dengan $, b, c, d, x, y, z, w , p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ = himpunan bilangan bulat.

Maka diperoleh hasil pengelompokkan sebagai berikut:

$A + (B + C) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}]$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+p & y+q \\ z+r & w+s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+x+p & b+y+q \\ c+z+r & d+w+s \end{pmatrix}$$

$$(A+B)+C = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+x+p & b+y+q \\ c+z+r & d+w+s \end{pmatrix}$$

Dari kedua hasil operasi penjumlahan diperoleh hasil yang sama antara $A+(B+C)$ dan $(A+B)+C$. Jadi terbukti pada S memenuhi sifat asosiatif.

c. Untuk sifat identitas dan invers diperuntukkan untuk latihan mahasiswa.

Pada contoh 7 berikut ini diberikan aplikasi dari sifat operasi biner pada kegiatan photografer dalam kaitan proses editing dan sampai menjadi hasil akhir.

<u>Contoh 7:</u>

Seorang photografer dapat menghasilkan gambar yang bagus melalui dua tahap, yaitu; tahap pemotretan dan tahap editing. Biaya yang diperlukan pada tahap pemotretan (B_1) adalah Rp500,-per gambar, mengikuti fungsi: $B_1(g) = 500g + 2500$ dan biaya pada tahap editing (B_2) adalah Rp100,-per gambar, mengikuti fungsi: $B_2(g) = 100g + 500$, dengan g adalah banyak gambar yang dihasilkan.

a) Berapakah total biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 10 gambar dengan kualitas yang bagus?

b) Tentukanlah selisih antara biaya pada tahap pemotretan dengan biaya pada tahap editing untuk 5 gambar!

Alternatif Penyelesaian:

a) Fungsi biaya pemotretan: $B_1(g) = 500g + 2.500$

Fungsi biaya editing: $B_2(g) = 100g + 500a)$

Untuk menghasilkan gambar yang bagus, harus dilalui 2 tahap proses yaitu pemotretan dan editing, sehingga fungsi biaya yang dihasilkan adalah: $B_1(g) + B_2(g) = (500g + 2.500) + (100g + 500) = 600g + 3.000$

Total biaya untuk menghasilkan 10 gambar $(g = 10)$ adalah:

$B_1(g) + B_2(g) = 600g + 3.000\, B_1(10) + B_2(10)$

$= (600 \times 10) + 3.000 = 9.000$

Jadi total biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 10 gambar dengan kualitas yang bagus adalah Rp 9.000, $-$

b) Selisih biaya tahap pemotretan dengan tahap editing adalah: $B_1 \quad (g) - B_2 \quad (g) = (500g + 2.500) - (100g + 500) = 400g + 2.000$

Selisih biaya pemotretan dengan biaya editing untuk 5 gambar $(g = 5)$ adalah: $B_1 \ (g) - B_2 \ (g) = 400g + 2.000 B_1\,(5) - B_2\,(5) = (400 \times 5) + 2.000 = 4.000$

Jadi selisih biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 5 gambar dengan kualitas yang bagus adalah Rp $4000, -$

1.3.3 Hubungan antara sifat komutatif, asosiatif, identitas dan invers

Sifat komutatif mempunyai hubungan dengan sifat identitas dan juga sifat invers ketika pada saat menunjukkan " misalnya $i =$ elemen identitas sedemikian berlaku pada operasi $*$ berlaku $a * i = i * a = a$, untuk setiap a di dalam himpunan S". Begitu pula untuk menunjukkan sifat invers, harus mampu menunjukkan bahwa misalnya "untuk setiap a elemen dalam himpunan S terdapat a^{-1} elemen dalam himpunan S, sedemikian sehingga berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = i$. Dalam menunjukkan sifat identitas dan sifat invers diperlukan harus berlaku sifat komutatif.

Demikian pula sifat asosiatif mempunyai hubungan dengan sifat identitas dan sifat invers ketika dalam proses pengerjaan untuk menentukan nilai elemen identitas dan nilai elemen invers dalam sebuah persamaan sampai bisa memperoleh nilai elemen identitas dan elemen invers yang akan ditentukan

<u>Contoh 8:</u>

Diketahui $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real, didefinisikan operasi biner $\otimes$ bahwa $\otimes\, b = 2ab + 5b$. Tentukanlah elemen identitas dan inversnya!

Penyelesaian:

a. Misalkan i elemen identitas dari $\mathbb{R}$ dan ambil sebarang $a \in \mathbb{R}$ sehingga

$$a \otimes i = a \qquad \text{atau} \qquad i \otimes a = a$$

$$2ai + 5i = a \qquad\qquad 2ia + 5a = a$$

$$(2a + 5)i = a \qquad\qquad 2ia = a - 5a$$

$$i = \frac{a}{(2a+5)} \qquad\qquad i = \frac{-4a}{2a} = -2$$

Padahal nilai hasil $a \otimes i = a$ harus sama dengan hasil $i \otimes a = a$, tetapi hasil sebenarnya tidak sama yang satu nilai $i = \frac{a}{(2a+5)}$ dan yang satunya hasilnya $= -2$. Jadi $\mathbb{R}$ pada operasi biner $\otimes$ tidak memiliki elemen identitas.

b. Akan ditunjukkan bahwa memiliki elemen invers untuk setiap elemen di $\mathbb{R}$: ambil sebarang $x \in \mathbb{R}$, ada $x^{-1} \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $x \otimes x^{-1} = i$

$$2xx^{-1} + 5x^{-1} = i$$

$$x^{-1}(2x + 5) = i$$

$$x^{-1} = \frac{i}{(2x+5)}$$

Sedangkan secara komutatifnya diperoleh; $x^{-1} \otimes x = i$

$$2x^{-1}x + 5x = i$$

$$x^{-1}(2x) = i - 5x$$

$$x^{-1} = \frac{i-5x}{2x}$$

Ternyata hasilnya berbeda yang satu hasilnya $x^{-1} = \frac{i}{(2x+5)}$ dan yang satunya hasilnya $x^{-1} = \frac{i-5x}{2x}$. Jadi untuk setiap elemen di $\mathbb{R}$ pada operasi biner $\otimes$ tidak memiliki elemen invers.

1.3.4 Soal Latihan

a. Berikut ini, apakah "operasi biner $\circ$" pada himpunan A berlaku sifat komutatif, asosiatif? Dalam setiap kasus, benarkan jawaban Anda?

(a) $A = \mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real dan $a \circ b = a / b$.

(b) $A = \{1,2,3,4,\dots\}$ adalah himpunan bilangan bulat positif dan $a \circ b = ab$.

(c) $A = \{\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$ adalah himpunan kelipatan 2 dan $a \circ b = ab$

(d) $A = C$ adalah himpunan bilangan kompleks dan $a \circ b = |a - b|$

b. $S = \{a, b, c\}$ dengan operasi biner $*$ dinyatakan dengan Tabel 6 berikut. Tunjukkan apakah operasi $*$ pada himpunan S memenuhi sifat tertutup, komutatif, dan asosiatif?

Tabel 6

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	c	b	a

c. $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$ dengan operasi perkalian matriks. Tunjukkan sifat-sifat yang dimi*liki oleh* $(M, \times)$*!*

d. *Pada suatu semes*ter diketahui beberapa mahasiswa yang merencanakan studi dengan mengontrak matakuliah sebagai berikut: Ade, Asih, Dewi akan mengontrak matakuliah Matematika 2 sedangkan Risa, Fadli, Fajar, Iqbal, dan Dewi akan mengontrak matakuliah Kimia Dasar dan Tedi, Arief, Fahri, Risa dan Fajar akan mengontrak matakuliah Biologi Umum I. Jika semua mahasiswa yang mengontrak matakuliah Matematika 2 adalah himpunan A, mahasiswa yang mengontrak matakuliah Kimia Dasar adalah himpunan B dan mahasiswa yang mengontrak matakuliah Biologi umum dan ketiga matakuliah tersebut memiliki jadwal pada hari dan waktu yang sama tentukan:

a) Kalimat matematika yang menyatakan mahasiswa yang harus mengontrak ulang mata kuliahnya agar tidak terjadi bentrok jadwal kuliahnya pada semestertersebut?
b) Siapa sajakah yang tidak harus mengontrak ulang matakuliahnya pada semester tersebut?
c) Apakah berlaku sifat komutatif dan asosiatif pada operasi yang berlaku pada soal ini?

e. Beberapa *himpunan* didefinisikan sebagai berikut:

i. $P = \{x \mid -1 < x < 8, x \in B\}$ pada operasi perkalian berlaku sifat komutatif dan asosiatif?

ii. $\mathbb{Q} = \{x \mid -6 \leq x < 6, x \in B, x$ habis dibagi 2$\}$, apakah pada operasi penjumlahan mempunyai elemen invers?

iii. $\mathbb{R} = \{x \mid 0 < x \leq 10, x \in B\}$pada operasi penjumlahan elemen identitas?

1.3.5 Petunjuk Pengerjaan

1) Berikut ini, apakah “operasi biner $\circ$” pada himpunan A berlaku sifat komutatif, asosiatif? Dalam setiap kasus, benarkan jawaban Anda?
   a) Tidak tidak berlaku sifat komutatif, tetapi berlaku sifat asosiatif
   b) Berlaku sifat komutatif dan sifat asosiatif
   c) Berlaku sifat komutatif dan sifat asosiatif
   d) Berlaku sifat komutatif dan sifat asosiatif
2) Pada himpunan $S = \{a, b\ , c\}$ dengan operasi biner $*$ berlaku sifat tertutup.
   Tetapi tidak berlaku sifat komutatif dan tidak asosiatif.
3) Himpunan M pada operasi perkalian matriks tidak memenuhi sifat komutatif, tetapi memenuhi sifat asosiatif, tidak memiliki elemen identitas kanan, dan tidak memiliki elemen invers.
4) Petunjuk: gunakan definisi operasi penjumlahan
   a) { Ade, Arief, Asih, Fahri, Iqbal, Fadli, Tedi}
   b) A dan B $=$ { Ade, Asih, Risa, Fadli, Fajar, Iqbal }
      Dan ditambah himpunan C menjadi $=$ { Ade, Arief, Asih, Fahri, Iqbal, Fadli, Tedi}
   c) berlaku sifat komutatif dan asosiatif,
5) sifat-sifat yang berlaku pada masing-masing himpunan sebagai berikut:
   a) pada operasi perkalian dalam himpunan P berlaku sifat komutatif dan asosiatif

b) pada oeprasi penjumlahan dalam himpunan $\mathbb{Q}$ mempunyai elemen invers untuk setiap elemennya

c) mempunyai elemen identitas pada himpunan $\mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan

1.3.6 Rangkuman

1. Sifat-sifat Pada Operasi Biner

a. Operasi biner $*$ pada himpunan S disebut memenuhi sifat tertutup jika $\forall\ a, b\ \in\ S, \exists\ c\ \in\ S$ sehingga $a\ *\ b\ =\ c\ \in\ S$

b. Operasi biner $*$ pada himpunan S disebut memenuhi sifat komutatif, jika dan hanya jika $\forall\ a, b\ \in\ S$, berlaku $a\ *\ b\ =\ b\ *\ a$

c. Operasi biner $*$ pada himpunan S disebut memenuhi sifat asosiatif, jika dan hanya jika jika $\forall\ a, b, c\ \in\ S$, berlaku $(\ a\ *\ b)\ *\ c\ =\ a\ *\ (b\ *\ c)$

d. Operasi biner $*$ pada himpunan S disebut memenuhi sifat identitas, jika dan hanya jika $\exists i \in S$S, i= elemen identitas sedemikian sehingga berlaku $a * i = i * a = a, \forall a \in S$

2. Operasi biner $*$ pada himpunan S disebut memenuhi sifat invers, jika dan hanya jika $\forall a \in S\ \exists a^{-1} \in S \ni a * a^{-1} = a^{-1} * a = i$

3. Struktur Sifat-sifat pada Operasi pada Fungsi (Komposisi pada Fungsi)

   a. Struktur Komutatif dan Asosiatif

   Misalkan S himpunan yang memuat fungsi-fungsi. Mari kita perhatikan sifat-sifat pada operasi di himpunan S.

   Untuk memastikan bahwa operasi biner berlaku sifat komutatif pada S jika $a \circ b\ =\ b \circ a$ untuk semua $a, b \in S$. begitu pula operasi biner adalah asosiatif pada S jika $(a \circ b)\ \circ c\ =\ a \circ\ (b \circ c)$ untuk semua $a, b, c \in S$.

b. Sifat Identitas dan Invers

Sifat identitas dan invers pada fungsi mempunyai konsep yang sama dengan himpunan sebelumnya. Secara lengkap dijelaskan pada definisi berikut ini.

4. Misalkan $F: A \rightarrow B$ suatu fungsi , terdapat $i_A \in A$ sedemikian sehingga
   a. $\exists i_A \in F \ni f \circ i_A = i_A \circ f = f, \forall f \in F$
   b. $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i_A$, $\forall F$

   Unsur identitas pada fungsi f ditulis i_A.
5. Misalkan $f: A \rightarrow B$ suatu fungsi. Fungsi $g: B \rightarrow A$ disebut:
   a. Balikan kiri dari f jika $g \circ f = i_A$
   b. Balikan kanan dari f jika $f \circ g = i_A$
   c. Balikan dari f jika g balikan kiri sekaligus balikan kanan dari f, yaitu $g \circ f = i_A$ dan $f \circ g = i_A$. Bila $A = B$ maka dapat disingkat $g \circ f = f \circ g = i_A$

6. Hubungan antara sifat komutatif, asosiatif, identitas dan invers

   Sifat identitas dan sifat invers membutuhkan hubungan dengan sifat komutatif dan sifat asosiatif pada saat proses dalam menunjukkan " misalnya $i =$ elemen identitas sedemikian pada operasi $*$ berlaku $a * i = i * a = a$, untuk setiap a di dalam himpunan S" dan sifat invers jika "untuk setiap a elemen dalam himpunan S terdapat a^{-1}elemen dalam himpunan S, sedemikian sehingga berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = i$.

1.3.7 Tes Formatif 3

Kerjakanlah soal di bawah ini dengan benar dan teliti!

1) $S = \{a, b, c\}$ dengan operasi biner $*$ dinyatakan dengan tabel 7 berikut.

Tabel 7

$*$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	a	b
c	c	c	a

Pada himpunan S pada operasi biner * pada tabel 7 berlaku sifat ……

A. Berlaku sifat komutatif, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan tidak mempunyai elemen invers.
B. Berlaku sifat komutatif, asosiatif, tidak memiliki elemen identitas, dan tidak mempunyai elemen invers.
C. berlaku sifat komutatif, tidak asosiatif, tidak memiliki elemen identitas, dan tidak mempunyai elemen invers.
D. Tidak berlaku sifat komutatif, tidak asosiatif, tidak memiliki elemen identitas, dan tidak mempunyai elemen invers.

2) $P = \{a, b, c, d\}$ dengan operasi biner $*$ dinyatakan dengan tabel 8 berikut.

Tabel 8

$*$	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

Pada himpunan P pada operasi biner $*$ pada Tabel 8 berlaku sifat …….!

A. Tidak memenuhi sifat komutatif dan asosiatif, mempunyai elemen identitas yakni b, dan mempunyai elemen invers untuk masing-masing elemen di P.

B. Memenuhi sifat komutatif dan asosiatif, mempunyai elemen identitas yakni b, dan mempunyai elemen invers untuk masing-masing elemen di P.

C. Memenuhi sifat komutatif dan asosiatif, tidak mempunyai elemen identitas yakni b, dan mempunyai elemen invers untuk masing-masing elemen di P.

D. Memenuhi sifat komutatif dan asosiatif, mempunyai elemen identitas yakni b, dan tidak mempunyai elemen invers untuk masing-masing elemen di P.

3) $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ dengan operasi komposisi fungsi dan $f_1(x) = x$; $f_2(x) = \frac{1}{x}$; $f_3(x) = -x$; $f_4(x) = -\frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Tunjukkan apakah G pada operasi komposisi fungsi memenuhi sifat komutatif, asosiatif, identitas, dan invers!

A. Tidak memenuhi sifat komutatif dan asosiatif, mempunyai elemen identitas dan invers.

B. Memenuhi sifat komutatif dan asosiatif, tidak mempunyai elemen identitas dan invers.

C. Memenuhi sifat komutatif dan asosiatif, mempunyai elemen identitas dan invers.

D. Memenuhi sifat komutatif dan asosiatif, mempunyai elemen identitas dan tidak memiliki elemen invers.

4) Pada suatu hari keluarga Pak Yoga melakukan rekreasi ke Dunia Fantasi, dua anak Pak Yoga, Andi dan Astri dan naik kicir-kicir sedangkan Pak Yoga Bu Yoga dan seorang

keponakan laki-laki pak Yoga Heri naik Roller Coaster. Seorang keponakan perempuan Pak Yoga Reni dan dua anak Pak Yoga naik Roller Coaster pada antrian berikutnya setelah Pak Yoga. Buatlah suatu kalimat matematika yang menyatakan himpunan anggota keluarga Pak Yoga yang hanya naik kicir-kicir. Hasil operasinya apakah berlaku berifat komutatif dan asosiatif?

A. tidak berlaku sifat komutatif dan tidak asosiatif
B. tidak berlaku sifat komutatif dan berlaku sifat asosiatif
C. berlaku sifat komutatif dan tidak berlaku sifat asosiati
D. berlaku sifat komutatif dan berlaku asosiatif

5) Diketahui Himpunan $P = \{ x \mid 1 < x < 12, x \in B \}$ pada operasi penjumlahan dan perkalian memenuhi sifat-sifat…………

A. Pada operasi penjumlahan: tertutup, tetapi berlaku sifat komutatif, asosiatif, tidak ada elemen identitas, dan mempunyai invers; pada operasi perkalian berifat tidak tertutup, tetapi komutatif, asosiatif, memiliki elemen identitas, tetapi tidak memiliki elemen invers.
B. Pada operasi penjumlahan: tidak tertutup, tetapi berlaku sifat komutatif, asosiatif, tidak ada elemen identitas, dan mempunyai invers; pada operasi perkalian berifat tidak tertutup, tetapi komutatif, asosiatif, memiliki elemen identitas, tetapi tidak memiliki elemen invers
C. Pada operasi penjumlahan: tidak tertutup, tidak berlaku sifat komutatif, asosiatif, tidak ada elemen identitas, dan

mempunyai invers; pada operasi perkalian berifat tidak tertutup, tetapi komutatif, asosiatif, memiliki elemen identitas, tetapi tidak memiliki elemen invers.

D. Pada operasi penjumlahan: tertutup, tidak berlaku sifat komutatif, asosiatif, tidak ada elemen identitas, dan mempunyai invers; pada operasi perkalian berifat tidak tertutup, tetapi komutatif, asosiatif, memiliki elemen identitas, tetapi tidak memiliki elemen invers.

6) Pada himpunan $Q = \{ x \mid -4 \leq x < 4, x \in B, x$ habis dibagi $2 \}$, terhadap operasi penjumlahan dan perkalian memenuhi sifat-sifat……..

A. Pada operasi penjumlahan: tertutup, tetapi berlaku sifat komutatif, asosiatif, ada elemen identitas, dan mempunyai invers; pada operasi perkalian: tidak tertutup, tetapi berlaku komutatif, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan tetapi tidak memeliki elemen invers.

B. Pada operasi penjumlahan: tidak tertutup, tetapi berlaku sifat komutatif, asosiatif, ada elemen identitas, dan mempunyai invers. Pada operasi perkalian: tidak tertutup, tetapi berlaku komutatif, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan tetapi tidak memeliki elemen invers.

C. Pada operasi penjumlahan: tertutup, tetapi berlaku sifat komutatif, asosiatif, tidak ada elemen identitas, dan mempunyai invers. Pada operasi perkalian: tidak tertutup, tetapi berlaku komutatif, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan tetapi tidak memeliki elemen invers.

D. Pada operasi penjumlahan: tidak tertutup, tetapi berlaku sifat komutatif, asosiatif, tidak ada elemen identitas, dan mempunyai invers. Pada operasi perkalian: tidak tertutup, tetapi berlaku komutatif, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan tetapi tidak memeliki elemen invers.

7) Terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, himpunan $R = \{x \mid 0 < x \leq 12, x \in$ Bilangan prima$\}$ memenuhi sifat-sifat……

A. Pada operasi penjumlahan: tertutup, tetapi berlaku sifat komutatif, asosiatif, ada elemen identitas, dan tidak mempunyai invers; pada operasi perkalian: tidak tertutup, tetapi berlaku komutatif, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan tetapi tidak memeliki elemen invers.

B. Pada operasi penjumlahan: tertutup, tetapi berlaku sifat komutatif, asosiatif, tidak ada elemen identitas, dan tidak mempunyai invers; pada operasi perkalian: tidak tertutup, tetapi berlaku komutatif, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan tetapi tidak memeliki elemen invers.

C. Pada operasi penjumlahan: tidak tertutup, tetapi berlaku sifat komutatif, asosiatif, ada elemen identitas, dan tidak mempunyai invers; pada operasi perkalian: tidak tertutup, tetapi berlaku komutatif, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan tetapi tidak memeliki elemen invers.

D. Pada operasi penjumlahan: tidak tertutup, tetapi berlaku sifat komutatif, asosiatif, tidak ada elemen identitas, dan tidak mempunyai invers; pada operasi perkalian: tidak tertutup, tetapi berlaku komutatif, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan tetapi tidak memeliki elemen invers.

8) Suatu perusahaan membutuhkan karyawan untuk ditempatkan dalam beberapa bidang dengan kualifikasi tertentu, diantaranya 50 orang untuk staf administrasi yang minimal merupakan lulusan S1, 10 orang manager minimal lulusan S1, 20 orang untuk bagian quality control berasal mimimal lulusan S1, 25 orang office boy minimal lulusan SMA, 30 orang cleaning service minimal lulusan dari SMP, 3 orang humas minimal lulusan dari S1, 2 orang HRD minimal lulusan dari S2, 15 orang satpam minimal lulusan SMA, 10 orang untuk ditempatkan sebagai laboranyang minimal lulusan S2, serta karyawan pabrik yang berjumlah 500 orang yang minimal berijazah SMA. Berdasakan hal tersebut buatlah: himpunan A yang merupakan himpunan pekerjaan yang syaratnya minimal berijazah S1.

   A. Himpunan calon pegawai yang minimal berijazah S1 $= A =$ { Admnistrasi, Manager, Quality Control, HRD, Humas, Laboran}
   B. Himpunan calon pegawai yang minimal berijazah S1 $= A =$ { Admnistrasi, Manager, Quality Control, HRD, Humas }
   C. Himpunan calon pegawai yang minimal berijazah S1 $= A =$ { Admnistrasi, Manager, Quality Control, HRD, Laboran}

D. Himpunan calon pegawai yang minimal berijazah S1 = A = { Admnistrasi, Manager, Quality Control, Humas, Laboran}

9) Dari soal nomor 8), tentukan Himpunan B yang merupakan himpunan pekerjaan yang ditempatkan sebagai pekerja lapangan
   A. Himpunan calon pegawai yang akan menjadi pekerja lapangan, B = { Quality Control, Office Boy, Cleaning Service, Satpam, karyawan pabrik}
   B. Himpunan calon pegawai yang akan menjadi pekerja lapangan, B = {Office Boy, Cleaning Service, Satpam, Laboran, karyawan pabrik}.
   C. Himpunan calon pegawai yang akan menjadi pekerja lapangan, B = { Quality Control, Office Boy, Cleaning Service, Satpam, Laboran}
   D. Himpunan calon pegawai yang akan menjadi pekerja lapangan, B = { Quality Control, Office Boy, Cleaning Service, Satpam, Laboran, karyawan pabrik}

10) Dari soal nomor 8), tentukan Himpunan C yang merupakan himpunan pekerjaan yang memiliki kapasitas lowongan pekerjaan lebih dari atau sama dengan 15 orang pekerja
   A. Himpunan lowongan kerja yang memiliki kapasitas lowongan lebih dari atau sama dengan 15 orang, C = {Administrasi, Quality Control, Office Boy, Cleaning Service, Sapam, Karyawan Pabrik}

B. Himpunan lowongan kerja yang memiliki kapasitas lowongan lebih dari atau sama dengan 15 orang, $C =$ {Quality Control, Office Boy, Cleaning Service, Sapam, Karyawan Pabrik}

C. Himpunan lowongan kerja yang memiliki kapasitas lowongan lebih dari atau sama dengan 15 orang, $C =$ {Administrasi, Office Boy, Cleaning Service, Sapam, Karyawan Pabrik}

D. Himpunan lowongan kerja yang memiliki kapasitas lowongan lebih dari atau sama dengan 15 orang, $C =$ {Administrasi, Quality Control, Office Boy, Cleaning Service, Sapam}

11) Dari soal nomor 8), tentukan Himpunan D yaitu himpunan yang merupakan himpunan pekerjaan yang calon pekerjanya tidak disyaratkan memiliki ijazah sarjana.

A. Himpunan yang merupakan himpunan pekerjaan yang calon pekerjanya tidak disyarakan memiliki ijazah sarjana, $D =$ {Office Boy, Cleaning Serivice, Satpam}

B. Himpunan yang merupakan himpunan pekerjaan yang calon pekerjanya tidak disyarakan memiliki ijazah sarjana, $D =$ {Office Boy, Cleaning Serivice, Satpam, Karyawan Pabrik}

C. Himpunan yang merupakan himpunan pekerjaan yang calon pekerjanya tidak disyarakan memiliki ijazah sarjana, $D =$ {Office Boy, Cleaning Serivice, Karyawan Pabrik}

D. Himpunan yang merupakan himpunan pekerjaan yang calon pekerjanya tidak disyarakan memiliki ijazah sarjana, $D = \{$Office Boy, Satpam, Karyawan Pabrik$\}$

12) Dari soal nomor 8), jumlah anggota himpunan calon pekerja yang tidak bekerja di lapangan adalah…….

A. $30 + 10 + 2 = 42$ orang

B. $40 + 10 + 2 = 52$ orang

C. $50 + 10 + 2 = 62$ orang

D. $60 + 10 + 2 = 72$ orang

13. Dari soal nomor 8), jumlah anggota himpunan yang merupakan himpunan calon pekerja yang memiliki kapasitas lowongan pekerjaan kurang dari 15 orang pekerja adalah ……….

A. himpunan calon pekerja yang memiliki kapasitas lowongan pekerjaan kurang dari 15 orang pekerja adalah $10 + 3$.

B. himpunan calon pekerja yang memiliki kapasitas lowongan pekerjaan kurang dari 15 orang pekerja adalah $10 + 2$.

C. himpunan calon pekerja yang memiliki kapasitas lowongan pekerjaan kurang dari 15 orang pekerja adalah $10 + 1$

D. himpunan calon pekerja yang memiliki kapasitas lowongan pekerjaan kurang dari 15 orang pekerja adalah $10 + 0$

1.3.8 Penilaian

Tingkat Penguasaan = $\frac{\text{Jumlah jawaban benar}}{10} \times 100\%$

Kategori Penilaian yang dicapai:

$90\% - 100\% =$ baik sekali

$80\% - 89\% \quad =$ baik

$70\% - 79\% \quad =$ cukup

$< 70\% \quad =$ kurang

Jika Anda mencapai tingkat penguasaan sebesar 80% ke atas, maka Anda dapat melanjutkan kegiatan belajar 1 Modul 2 pada bab berikutnya dan Anda mendapat penilaian yang bagus. Namun jika Anda belum mencapai tingkat penguasaan sebesar 80%, maka Anda disarankan mengulangi pada kegiatan belajar 3 dengan penekanan pada materi yang belum Anda pahami dengan baik.

1.3.9 Kunci Jawaban Tes Formatif 3

1) D
2) B
3) C
4) A
5) B
6) D
7) C
8) D
9) A
10) B

11) B
12) C
13) A

1.3.10 Daftar Pustaka

Aisah, I. (2017). *Modul Struktur Aljabar 1*. Program Studi S-1Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Padjadjaran. http://math.fmipa.unpad.ac.id/wp-content/uploads/ 2018/ 02/BAHAN-AJAR-STRUKTUR-ALJABAR-1.pdf.

Judson, T.W. (2013). *Abstract Algebra Theory and Applications*. Stephen F. Austin State University: Free Software Foundation.

Lolang, E. (2013). *Aljabar Abstrak*. Toraja: UKI Toraja Press.

Prihandoko, A.C. (2016). *Pengantar Pada Teori Grup dan Ring*. Jember: UNEJ.

Sadrakh, R. (2013). Introduction to Grups. Math is Fun. https://www. mathsisfun. com/algebra/index.html.

Setiawan, A. (2014). *Dasar-Dasar Aljabar Modern: Teori Grup & Teori Ring*. Salatiga: Tisara..

Siksek, S. (2015). *Introduction to Abstract Algebra*. London: Mathematics Institute University of Warwick.

Widodo, S. *Teori dan Operasi Pada Himpunan*. http://file.upi.edu/Direktori /KD-PURWAKARTA/ 198012182005011001- Suprih_Widodo/ Pemecahan %20Masalah%20 Matematika/Teori%20Himpunan.pdf.

MODUL 2: STRUKTUR PADA GRUP, SIFAT-SIFAT GRUP, DAN GRUP PERMUTASI

Gambaran Umum:

Uraian materi pada bab ini membahas tentang struktur Grup, sifat-sifat Grup, dan Grup Permutasi. Struktur Grup yang dibahas meliputi struktur operasi biner baik dalam operasi dasar (misalnya penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian) maupun operasi yang tidak familiar (misalnya operasi biner yang didefinisikan seperti "$*$" pada $a * b = (a + b) - 2ab$ dengan $a, b \in$ himpunan bilangan bulat) yang memenuhi aksioma grup. Struktur pada ifat-sifat grup dan hubungan antar sifat-sifat grup, serta mengenal persamaan dan perbedaan operasi biner dalam bentuk rumus dan tabel. Kemudian pembahasan Grup permutasi dikaitkan dengan grup simetri.

Motivasi dalam belajar:

1. Bacalah secara baik sejarah dan beberapa contoh aplikasinya.
2. Setiap membaca materi maupun contoh-contoh soalnya kenali strukturnya dari masing-masing komponen penyusunnya.

Sejarah Grup

Meski definisi grup abstrak belum ditetapkan secara jelas hingga akhir tahun 1800-an, metode-metode dalam teori grup telah digunakan jauh sebelum tahun ini yakni dalam pengembangan berbagai bidang matematika, termasuk geometri dan konsep persamaan aljabar. Tahun 1770-1771 Joseph-Louis Lagrange menggunakan teori grup untuk mempelajari metode penyelesaian persamaan polinomial. Kemudian pada 1811-1832 Évariste Galois berhasil menemukan cara menentukan apakah suatu persamaan polinomial dapat diselesaikan ataukah tidak dengan melihat koefisien-koefisien persamaan tersebut. Konsep yang dikemukakan oleh Galois inilah yang pada akhirnya menjadi dasar teori grup.

Kunci penting agar mudah belajar aljabar abstrak:

1. Kenali dan rasakan secara intuisi tentang struktur himpunan yang meliputi ciri-ciri atau karakteristik elemen himpunan.
2. Kenali dan rasakan secara intuisi tentang struktur operasi biner yang meliputi ciri-ciri atau karakteristik operasi biner baku (seperti operasi penjumlahan, operasi pengurangan, operasi pekalian, dan operasi pembagian).
3. Kenali dan rasakan secara intuisi tentang karakteristik operasi biner tidak baku (seperti operasi “$*$” atau “$\oplus$" atau "$\otimes$" atau "$\odot$" atau operasi yang dituliskan dalam bentuk tabel Cayley, disesuaikan dengan didefinisikan.
4. Kenali persamaan dan perbedaan struktur operasi biner hingga mampu memanipulasi.
5. Kenali dan rasakan secara intuisi tentang struktur sifat asosiatif
6. Kenali dan rasakan secara intuisi tentang struktur adanya elemen identitas
7. Kenali dan rasakan secara intuisi tentang struktur adanya elemen invers

Kegiatan Belajar 1: Struktur Pada Grup

Tujuan Pembelajaran:

Di akhir kegiatan belajar, mahasiswa diharapkan dapat:

1. mendeskripsikan pengertian grup;
2. mendeskripsikan sifat asosiatif dari suatu contoh grup;
3. mendeskripsikan sifat pada elemen identitas dari suatu contoh grup;
4. mendeskripsikan sifat pada elemen invers dari suatu contoh grup;
5. membedakan struktur dari contoh grup dan bukan grup;
6. menggunakan rumus dari suatu definisi operasi biner pada himpunan tertentu untuk mengklasifikasikan grup atau bukan grup;
7. menggunakan tabel Cayley sebagai definisi operasi biner pada suatu himpunan untuk menentukan suatu grup atau bukan grup;
8. mengkaitkan antar aksioma grup dalam membuktikan suatu himpunan pada operasi tertentu dengan urutan yang benar;
9. mengkaitkan operasi biner pada fungsi ke konsep grup;
10. mengkaitkan operasi biner pada matriks ke konsep grup.

2.1.1 Definisi Grup dan Contoh-contoh Grup

Salah satu struktur aljabar yang paling sederhana dan paling mendasar adalah grup. Grup merupakan suatu struktur aljabar yang terdiri dari sebuah himpunan dan sebuah operasi yang menggabungkan sebarang dua elemen himpunan untuk membentuk elemen baru yang termuat dalam himpunan dan memenuhi aksioma grup. Grup didefinisikan sebagai himpunan dengan operasi biner (sebut saja misalnya "$*$" atau "$\circ$") yang asosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemen memiliki invers. Perhatikan aksioma grup yang disajikan pada Definisi 2.1 berikut ini.

Definisi 2.1:

Grup adalah pasangan $(G, \circ)$ di mana G adalah himpunan dan $\circ$ adalah operasi biner pada G, sehingga empat sifat berikut ini berlaku

(i) (tertutup) untuk semua $a, b \in G, a \circ b \in G$;

(ii) (asosiatif) untuk semua $a, b, c \in G$,

$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$;

(iii) (keberadaan elemen identitas) ada elemen $e \in G$ tersebut bahwa untuk semua anggota $G, a \circ e = e \circ a = a$;

(iv) (adanya invers) untuk setiap $a \in G$, ada elemen $b \in G$ (disebut kebalikan dari a) sedemikian rupa sehingga $a \circ b = b \circ a = e$ (Siksek, 2015: 29).

Elemen e dalam definisi ini menunjukkan elemen identitas, sedangkan a^{-1} merupakan elemen invers dari a.

Definisi 2.2:

Operasi biner $\circ$ pada himpunan G adalah aturan yang menetapkan untuk setiap pasangan elemen berurutan (a, b) dari himpunan beberapa elemen himpunan yang dituliskan sebagai: $a * b$ (Kar, 2017: 6).

Contoh 1:

1) Penjumlahan dalam himpunan bilangan bulat: $(x, y) \rightarrow x + y$ untuk semua $x, y \in \mathbb{Z}$
2) Perkalian dalam himpunan semua bilangan real $(x, y) \rightarrow xy$ untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$

Jika himpunan G terhadap operasi biner o membentuk suatu grup, maka grup G ini dinyatakan dengan notasi "(G, o)". Tidak setiap grup memiliki sifat komutatif terhadap operasi binernya. Jika grup (G, o) masih memenuhi sifat bahwa: operasi biner o pada G bersifat komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a \, o \, b = b \, o \, a$, maka grup $(G; o)$ disebut grup abelian (grup komutatif).

Contoh 2:

Contoh suatu himpunan yang tidak kosong dengan operasi biner tertentu yang merupakan grup yakni sebagai berikut:

1) $(\mathbb{Z}, +)$, $\mathbb{Z} =$ himpunan bilangan bulat, terhadap operasi penjumlahan merupakan grup, karena memenuhi:
   a) sifat tertutup, yang dapat ditunjukkan dengan $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga berlaku $x + y = z$ dan $z \in \mathbb{Z}$
   b) sifat asosiatif, yang dapat ditunjukkan dengan $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga berlaku $(x + y) + z = x + (y + z)$

c) mempunyai elemen identitas, yang dapat ditunjukkan dengan misalkan elemen identitasnya e, $\exists e \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga berlaku $x + e = e + x, \forall\, x \in \mathbb{Z}$

d) mempunyai elemen invers untuk semua elemen himpunan $\mathbb{Z}$, yang dapat ditunjukkan dengan: $\forall x \in \mathbb{Z}$ dapat ditemukan ada elemen identitas $-x \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga berlaku $x + (-x) = (-x) + x = e$

2) $(\mathbb{N}, \times), \mathbb{N} =$ himpunan bilangan asli, terhadap operasi perkalian merupakan grup, karena memenuhi:

a) sifat tertutup, yang dapat ditunjukkan dengan $\forall a, b \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $a \times b = c$ dan $c \in \mathbb{N}$

b) sifat asosiatif, yang dapat ditunjukkan dengan $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

c) mempunyai elemen identitas, yang dapat ditunjukkan dengan misalkan elemen identitasnya $e,$ $\exists e \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $a \times e = e \times a, \forall\, a \in \mathbb{N}$

d) mempunyai elemen invers untuk semua elemen himpunan $\mathbb{N}$, yang dapat ditunjukkan dengan: $\forall a \in \mathbb{N}$, dapat ditemukan ada elemen identitas $-a \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $a \times (-a) = (-a) \times a = e$

Dari kedua contoh di atas merupakan contoh grup, sedangkan jika tidak memenuhi satu sifat pada aksipma grup, maka bukan merupakan grup. Contoh yang bukan merupakan grup yakni sebagai berikut:

Contoh 3:

1) $(\mathbb{N}, \times), \mathbb{N} =$ himpunan bilangan asli, terhadap operasi penjumlahan bukan merupakan grup, karena tidak memenuhi pada aksioma yang ke tiga bahwa tidak mempunyai elemen identitas, karena 0 bukan elemen himpunan bilangan asli (atau $0 \notin \mathbb{N}$)
2) $(\mathbb{Z}^+, +)$, $\mathbb{Z}^+ =$ himpunan bilangan bulat positif, terhadap operasi penjumlahan bukan merupakan grup, karena tidak memenuhi pada aksioma ke empat bahwa untuk semua elemen pada himpunan $\mathbb{Z}^+$ tidak mempunyai elemen invers, yang dapat ditunjukkan bahwa untuk elemen invers dari $x \in \mathbb{Z}^+$ adalah $-x$, akan tetapi $-x \notin \mathbb{Z}^+$.

2.12 Grup pada Himpunan dengan Operasi Penjumlahan

Grup pada himpunan dengan operasi penjumlahan yang dimaksud disini yakni memberikan contoh-contoh grup pada himpunan yang tidak kosong dengan khusus pada operasi penjumlahan. Agar mudah dalam memahami konsep Grup diberikan pada himpunan bilangan bulat yang sudah digunakan pada Contoh 2 pada butir 2) di atas terhadap operasi penjumlahan disajikan bentuk pembuktian grup komutatif sebagai berikut ini.

Contoh 4:

Himpunan bilangan bulat $B = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ terhadap operasi biner penjumlahan $(+)$.

a) Sifat tertutup dipenuhi yaitu penjumlahan bilangan bulat menghasilkan bilangan bulat.
b) Sifat asosiatif dipenuhi yaitu penjumlahan bilangan-bilangan bulat bersifat asosiatif.
c) B terhadap operasi $+$ mempunyai elemen identitas yaitu 0, sebab untuk setiap $a \in B$ maka berlaku $a + 0 = 0 + a = a$.
d) Setiap anggota B mempunyai invers terhadap operasi $+$, yaitu setiap $a \in B$ ada $a^{-1} = -a \in B$ sehingga berlaku $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
e) Jadi B dengan operasi $+$ merupakan suatu grup dan ditulis $(B;\ +)$ terbukti suatu grup.
f) Sifat komutatif dipenuhi pula, yaitu untuk setiap $a, b \in B$ maka $a + b = b + a$.
g) Simpulan: Jadi $(B, +)$ merupakan grup komutatif.

Contoh lain pada himpunan bilangan real, terhadap operasi penjumlahan juga merupakan grup seperti yang pada contoh berikut ini.

<u>Contoh 5:</u>

Diketahui $\mathbb{R} = \{x \mid x$ bilangan real$\}$ terhadap operasi penjumlahan memenuhi sifat:

a) Tertutup, sebab penjumlahan bilangan real menghasilkan bilangan real.

b) Sifat asosiatif dipenuhi karena untuk setiap a, b, c elemen dalam $\mathbb{R}$ memenuhi $a + (b + c) = (a + b) + c$
c) R mempunyai elemen identitas 0 yang disebut pula elemen netral, karena $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{R}$
d) Setiap bilangan real mempunyai invers penjumlahan, karena $\forall a \in \mathbb{R}\, \exists (-a) \ni a + (-a) = (-a) + a = 0$
e) Sifat komutatif dipenuhi.
f) Simpulan: Jadi $(\mathbb{R}, +)$ merupakan grup komutatif, karena memenuhi $\forall a, b \in \mathbb{R} \ni a + b = b + a$.

Contoh lain pada himpunan bilangan bulat modul p juga memenuhi aksioma grup, perhatikan contoh berikut ini.

<u>Contoh 6:</u>

$G = \{0, 1, 3\}$ adalah himpunan bilangan bulat modulo 3 dengan operasi penjumlahan pada bilangan bulat modulo tiga. Hasil penjumlahan modulo 3 pada G disajikan dalam Tabel 1 berikut:

Tabel 1

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

a) Jika dalam kotak hanya terdiri dari anggota-anggota G maka sifat tertutup dipenuhi, karena $0 +_3 1 = 1;\ 1 +_3 2 = 0;\ 2 +_3 2 = 1$; dan seterusnya. Karena untuk setiap elemen di G hasil operasi biner $+_3$ memenuhi atau termuat di G pula, maka G memenuhi sifat tertutup.

b) Himpunan bilangan modulo 3 memenuhi sifat asosiatif terhadap penjumlahan bilangan modulo, karena untuk setiap mengambil tiga elemen sebarang di G misalnya $0, 1, 2$ maka:

$0 +_3 (1 +_3 2) = 0 +_3 0 = 0$ dan

$(0 +_3 1) +_3 2 = 1 +_3 2 = 0$

Jadi $0 +_3 (1 +_3 2) = (0 +_3 1) +_3 2$

c) G mempunyai elemen identitas 0, karena setiap elemen di G dioperasikan dengan 0 hasilnya dirinya sendiri begitu juga sebaliknya.

d) Setiap anggota G mempunyai invers, karena

Invers 0 adalah 0

Invers 1 adalah 2

Invers 2 adalah 1

e) Letak setiap elemen G dalam tabel simetris terhadap diagonal utama, sehingga dapat ditelusuri bahwa $1 + 2 = 2 + 1$; $0 + 1 = 1 + 0$; $0 + 2 = 2 + 0$.

f) Simpulan: Jadi $(G, +_3)$ merupakan grup komutatif.

<u>Contoh 7:</u>

$H = \{0, 1, 2, 3\}$ yaitu himpunan modulo 4. Operasi penjumlahan modulo 4 adalah operasi biner penjumlahan pada H. Semua hasil operasi penjumlahan modulo 4 pada H dapat dipaparkan pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Telusurilah, dengan memeriksa sifat asosiatifnya, adanya elemen identitas dan setiap elemen H mempunyai invers terhadap penjumlahan modulo 4, maka $(H; +)$ apakah memenuhi aksioma grup? Telusuri pula bahwa $(H; +)$ suatu grup komutatif!

2.1.3 Grup pada suatu Himpunan dengan Operasi Perkalian

Grup pada suatu himpunan tertentu dengan operasi perkalian bisa merupakan gurp jika memenuhi aksioma grup. Sebagai contoh akan dijelaskan pada suatu himpunan terhadap operasi perkalian termasuk operasi biner yang biasa dijumpai atau digunakan sebagai operasi dasar dalam matematika.

<u>Contoh 8:</u>

Misalkan $B = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ dengan operasi perkalian, maka dapat ditelusuri memenuhi sifat tertutup, jika terhadap perkalian pada himpunan bilangan bulat menghasilkan bilangan bulat. Memenuhi aksioma grup, jika dapat ditunjukkan:

a) Pada operasi perkalian bilangan bulat memenuhi sifat asosiatif.

b) Pada himpunan B dengan operasi perkalian mempunyai elemen identitas i, karena untuk setiap bilangan bulat a berlaku: $a\,.\,1 = 1\,.\,a = a$

c) Pada himpunan bilangan bulat terhadap operasi perkalian tidak mempunyai invers perkalian karena $2 \times \frac{1}{2} = 1$ dan $\frac{1}{2} \notin B$.

Jadi $(B, \times)$ bukan merupakan grup.

<u>Contoh 9:</u>

Misalkan $\mathbb{R} = \{x \mid x$ bilangan real$\}$ dengan operasi perkalian. Himpunan bilangan real terhadap perkalian memenuhi sifat tertutup, asosiatif dan mempunyai elemen identitas yaitu 1. Pada $(\mathbb{R}, \times)$ semua anggota yang bukan 0 (nol) mempunyai invers. Misalnya invers 2 adalah $\frac{1}{2}$, invers $-\frac{1}{3}$ adalah -3, dan seterusnya. Tetapi $0 \in \mathbb{R}$ tidak mempunyai invers, sebab tidak ada bilangan real yang memenuhi $0 \times a = 1$. Jadi $(\mathbb{R}, \times)$ bukan suatu grup.

<u>Contoh 10:</u>

Diketahui $M = \{0, 1, 2\}$ adalah himpunan semua bilangan bulat modulo 3. Semua hasil perkalian bilangan modulo 3 sudah disajikan pada Tabel 3 berikut.

Tabel 3

$\times_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	0
2	0	2	1

Seperti halnya $(\mathbb{R}, \times)$ pada soal nomor (2), maka $(M, \times_3)$ bukan suatu grup sebab 0 tidak mempunyai invers. Dapat diperhatikan baris pertama dan kolom pertama semua 0. Jadi $(M, \times_3)$ bukan suatu grup. Demikian pula untuk himpunan bilangan moduler lainnya bukan grup terhadap perkalian.

2.1.4 Grup pada Himpunan Bilangan Tanpa 0 (nol) dengan Operasi Perkalian.

Beberapa contoh grup dari suatu himpunan bilangan tanpa nol terhadap operasi perkalian dapat disajikan pada Contoh 11, 12, dan 13.

<u>Contoh 11:</u>

Diketahui $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} - \{0\}$ dengan $\mathbb{R} = \{x \mid x$ bilangan real$\}$, $(\mathbb{R}, \times)$ bukan merupakan grup sebab 0 tidak mempunyai invers. Karena $\mathbb{R}^+$ merupakan himpunan semua bilangan real yang bukan nol, maka terhadap operasi perkalian memenuhi tiga aksioma grup dan memenuhi sifat komutatif. Jadi $(\mathbb{R}^+, \times)$ merupakan grup komutatif. Sebagai latihan, dipersilahkan mahasiswa untuk membuktikannya.

Contoh 12:

Misalkan himpunan $D = \{1, -1\}$ terhadap operasi perkalian $\times$, maka telusurilah:

a) ketertutupannya (mengapa? Silahkan dijawab untuk latihan mahasiswa)
b) memenuhi sifat asosiatif (mengapa? Silahkan dijawab untuk latihan mahasiswa)
c) D terhadap operasi perkalian mempunyai elemen identitas, yaitu 1 (mengapa? Silahkan dijawab untuk latihan mahasiswa)
d) setiap elemen D terhadap operasi perkalian mempunyai invers, yaitu $1^{-1} = 1$ dan $(-1)^{-1} = -1$ (mengapa? Silahkan dijawab untuk latihan mahasiswa)

Jika memenuhi aksioma grup, maka $(D;\times)$ merupakan grup. Selanjutnya telusurilah bahwa $(D;\times)$ suatu grup abelian (komutatif).

Bagaimana dengan himpunan $M^* = \{1, 2\}$ yaitu himpunan bilangan bulat modulo 3 yang bukan 0 dengan operasi perkalian. Hasil kali bilangan bulat modulo 3 tersebut disajikan pada Tabel 4 berikut.

Tabel 4

$\times_3$	1	2
1	1	2
2	2	1

$M^* = M - \{0\}$ sedangkan $M = \{0, 1, 2\}$, $(M,\times_3)$ bukan grup sebab 0 tidak mempunyai invers. Karena M^* merupakan himpunan semua bilangan bulat yang bukan nol pada operasi perkalian modulo 3 maka $(M^*, \times_3)$ merupakan grup komutatif. Apakah hal ini berlaku pula untuk himpunan bilangan moduler lainnya tanpa nol? (silahkan Anda telusuri sebagai latihan!)

Contoh 12:

Himpunan $G = \{2, 4, 8\}$ dengan operasi perkalian modulo 14 merupakan suatu grup karena memenuhi aksioma grup.

Perhatikan relasi kongruensi dalam teori bilangan seperti penjabaran ini: $8 \, x \, 4 = 32 = 4$ (mod 14) sebab $(32 - 4)$ adalah kelipatan dari 14. Secara lengkap silahkan perhatikan Tabel 5 berikut ini yang menuliskan semua hasil operasi perkalian modulo 14 pada G.

Tabel 5

$\times_4$	2	4	8
2	4	8	2
4	8	2	4
8	2	4	8

a) Tampak pada tabel operasi perkalian modulo 14 pada G merupakan operasi biner (mengapa?)

b) Sifat asosiatif dipenuhi (Tunjukkan!)

c) G terhadap operasi perkalian modulo 14 mempunyai elemen identitas, yaitu 8 (mengapa?)

d) Setiap elemen G mempunyai invers terhadap operasi perkalian modulo 14, yaitu: $2^{-1} = 4; 4^{-1} = 2$ dan $8^{-1} = 8$ (mengapa?)

   Karena memenuhi aksioma grup, maka $(G; x)$ merupakan suatu grup. Selanjutnya tunjukkan bahwa $(G; x)$ suatu grup komutatif.

2.1.5 Grup pada Himpunan Matriks dengan Operasi Penjumlahan

Grup pada himpunan matriks dengan operasi penjumlahan merupakan grup yang berlaku pada himpunan yang elemen-elemennya terdiri dari matriks terhadap operasi penjumlahan matriks yang memenuhi aksioma grup yakni sifat asosiatif, elemen identitas, dan elemen invers. Untuk lebih jelasnya perhatikan pada Contoh 13 berikut.

Contoh 13:

$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b \text{ dan } d \text{ bilangan} - \text{bilangan real dengan } ad \neq 0 \right\}$

terhadap operasi penjumlahan matriks merupakan suatu grup.

Buktikan!

Pembuktian:

Akan ditunjukkan G memenuhi aksioma grup sebagai berikut:

Ambil sebarang matriks $A, B \in G$ dengan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix}$, $a, b, d, p, q, s \in \mathbb{R}, ad \neq 0, ps \neq 0.$

Maka $A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ 0 & d+s \end{pmatrix}, a + p \in \mathbb{R}, b + q \in \mathbb{R}, d + s \in \mathbb{R}$ dan $(a + p)(d + s) \neq 0. \neq 0.$

Jadi menunjukkan bahwa $A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ 0 & d+s \end{pmatrix} \in G$ hal ini memenuhi sifat tertutup.

a) Ambil sebarang $A, B, C \in G$ dengan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & w \end{pmatrix}$, $a, b, d, p, q, s, x, y, w \in \mathbb{R}, ad \neq 0, ps \neq 0, xw \neq 0$.

Maka $A + (B + C) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & w \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p + x & q + y \\ 0 & s + w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + p + x & b + q + y \\ 0 & d + s + w \end{pmatrix}$, $a + p + x \in \mathbb{R}, b + q + y \in R, d + s + w \in \mathbb{R}$ dan $(a + p + x)(d + s + w) \neq 0$.

Kemudian hasil penjumlahan dari $(A + B) + C = [\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix}] + \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + p & b + q \\ 0 & d + s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + p + x & b + q + y \\ 0 & d + s + w \end{pmatrix}$, $a + p + x \in \mathbb{R}, b + q + y \in \mathbb{R}, d + s + w \in \mathbb{R}$ dan $(a + p + x)(d + s + w) \neq 0$

Jadi terbukti bahwa $A + (B + C) = \begin{pmatrix} a + p + x & b + q + y \\ 0 & d + s + w \end{pmatrix} = (A + B) + C$ dengan $(a + p + x)(d + s + w) \neq 0$. Hal ini menunjukkan memenuhi sifat asosiatif

b) Akan ditunjukkan G menpunyai elemen identitas sebagai berikut:

Misalkan I = elemen identitas pada matriks yakni $I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G, 1 \in \mathbb{R}, (0).(0) = 0$ padahal seharusnya elemen $\neq 0$ maka $A + I = I + A = A$

sehingga $+I = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & b+0 \\ 0 & d+0 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = A$. Jadi tidak mempunyai elemen identitas.

c) Karena tidak mempunyai elemen identitas, maka tidak mempunyai pula elemen inversnya.

Jadi karena tidak mempunyai elemen identitas dan invers maka G bukan merupakan grup.

2.1.6 Grup pada Himpunan Matriks dengan Operasi Perkalian

Grup pada himpunan matriks dengan operasi perkalian dapat ditunjukkan pada operasi perkalian matriks memenuhi aksioma grup: asosiatif, identitas, dan invers. Agar paham diberikan contoh sebagai berikut.

<u>Contoh 12:</u>

Jika $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \text{ bilangan real} \right\}$, Buktikanlah bahwa N merupakan grup.

Pembuktian:

Agar memenuhi grup dapat ditunjukkan memenuhi sifat-sifat tertutup, asosiatif, identitas, dan invers sebagai berikut:

a) Akan ditunjukkan memenuhi sifat tertutup. Ambil sebarang $X, Y \in N$, dengan $X = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka $XY = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N, a+b \in \mathbb{R}$. Jadi hal ini dapat menunjukkan N terhadap operasi perkalian memenuhi sifat tertutup.

b) Akan ditunjukkan memenuhi sifat asosiatif . Ambil sebarang $X, Y, Z \in N,$ dengan $X = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka

$X(YZ) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$ $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & b+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & a+b+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N, a+b+c \in \mathbb{R}.$

Kemudian $(XY)Z = [\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}] \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N, a+b+c \in \mathbb{R}.$

Ternyata hasil dari $X(YZ) = (XY)Z$

Karena hasilnya sama, jadi hal ini dapat menunjukkan N terhadap operasi perkalian memenuhi sifat asosiatif.

c) Akan ditunjukkan mempunyai elemen identitas. Misalkan ada elemen identitas $I \in N,$ dengan $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka $XI =$ $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = X, a \in \mathbb{R}$ dan $IX =$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = X, a \in R$ Jadi sehingga $\exists I \in N \ni XI = IX = X, \forall X \in N$ ini dapat menunjukkan N terhadap operasi perkalian mempunyai elemen identitas.

d) Akan ditunjukkan mempunyai elemen invers untuk setiap elemen di N.

Ambil sebarang elemen $X \in N$, misalkan $X = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\exists X^{-1} \in N$ yang memenuhi $XX^{-1} = I$ dan $X^{-1}X = I$.

Maka $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X^{-1} = \frac{1}{1-0}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -a \in \mathbb{R}$$

dan $X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X^{-1} = \frac{1}{1-0}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -a \in \mathbb{R}$$

Jadi karena $\forall X \in N \ \exists X^{-1} \in N \ni XX^{-1} = X^{-1}X = I$ maka hal ini dapat menunjukkan setiap elemen N terhadap operasi perkalian mempunyai elemen invers.

Karena ke-empat syarat dari grup dipenuhi, maka matriks N terhadap operasi perkalian matriks merupakan Grup.

2.1.7 Grup pada Himpunan Fungsi dengan Operasi Komposisi Fungsi

Grup pada himpunan fungsi dengan operasi komposisi fungsi merupakan grup yang berlaku pada himpunan yang elemennya terdiri atas fungsi-fungsi dengan operasi binernya komposisi fungsi dan memenuhi aksioma grup yakni asosiatif, identitas, dan invers. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh sebagai berikut.

<u>Contoh 13:</u>

$G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ dengan operasi komposisi fungsi dan

$f_1(x) = x$; $f_2(x) = \frac{1}{x}$; $f_3(x) = 1 - x$; $f_4(x) = \frac{1}{1-x}$; $f_5(x) = \frac{x}{x-1}$; $f_6(x) = \frac{x-1}{x}$.

Buktikanlah bahwa (G, o) Grup

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa himpunan G terhadap operasi komposisi fungsi merupakan grup artinya memenuhi yakni tertutup, asosiatif, identitas, dan invers. Karena himpunan G elemennya terbatas maka sebaiknya pengerjaannya agar lebih mudah dengan menggunakan tabel Cayley pada Tabel 6 diperoleh hasil sebagai berikut.

Tabel 6

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_6	f_1	f_5	f_4	f_2
f_4	f_4	f_5	f_2	f_6	f_1	f_3
f_5	f_5	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1
f_6	f_6	f_3	f_5	f_1	f_2	f_4

a. Sifat tertutup dipenuhi, karena hasil operasi komposisi fungsi yang ada pada badan tabel semua elemennya termuat di himpunan G. Jadi G tertutup terhadap operasi komposisi fungsi

b. Sifat asosiatif dipenuhi, karena hasil operasi komposisi fungsi dari tiga elemen dari G jika digrupkan pengoreasiannya hasilnya sama dengan hasil pengelempokan yang lain, karena juga operasi komposisi fungsi memenuhi sifat asosiatif.

c. Kalau diperhatikan tabel di atas, maka ada sebuah elemen yang urutannya sama dengan baris paling atas, maka G mempunyai elemen identitas kanan, jika ada kolom yang elemen urutannya sama, maka ada elemen identitas yang disebut identitas kiri. Karena elemen identitasnya sama, maka elemen identitas pada soal ini adalah dipenuhi, karena hasil operasi komposisi fungsi yang ada pada badan tabel semua elemennya termuat di himpunan G. jadi G memiliki elemen identitas terhadap operasi komposisi fungsi yakni elemennya identitasnya adalah f_1.

d. Karena elemen identitasnya f_1 sudah diketemukan, maka elemen inversnya juga mudah ditemukan sebagai berikut.

f_1 inversnya f_1	f_4 inversnya f_4
f_2 inversnya f_2	f_5 inversnya f_5
f_3 inversnya f_3	f_6 inversnya f_6

Karena syarat aksioma grup dipenuhi, maka G merupakan grup terhadap operasi komposisi fungsi.

Sebagai motivasi dan pengembangan pentingnya konsep grup diberikan beberapa aplikasi ke dalam kehidupan sehari-hari seperti yang disajikan pada bagan berikut ini tentang menentukan hari lahir yang tidak diketahuinya pada sekian tahun yang lalu. Perhatikan penjelasan pada bagan berikut secara baik-baik.

Aplikasi aksioma Grup

Penjumlahan Modulo 7 dalam menentukan hari:

Seseorang mungkin ingin mengetahui hari dari suatu tanggal tertentu. Keingintahuan ini dapat saja terjawab jika ia memiliki kalender untuk tanggal itu. Akan tetapi, jika ia tidak memiliki kalender tersebut, dan tanggal yang ingin diketahui harinya itu mempunyai rentang waktu yang sangat jauh dari tanggal sekarang, tentu tidak mudah untuk diketahui. Misalnya, seseorang mungkin tidak mengetahui hari apa tepatnya ia lahir, karena kelalaian orangtua yang hanya mencatat tanggal kelahirannya saja. Dalam tulisan ini, akan dipaparkan bagaimana menyelesaikan permasalahan menentukan hari dengan memanfaatkan sifat-sifat grup penjumlahan modulo 7.

Contoh Aplikasi bilangan bulat modulo 7 dan aksioma grup pada kehidupan sehari-hari

Ada seseorang akan mengelilingi Indonesia, dia berangkat dari Bandung pada hari Minggu 11 April 2004 pukul 06.00. Setelah melakukan perjalanan (termasuk istirahat) selama 70 jam 12 menit ia memasuki kota Semarang. Pada pukul berapa dan hari apa ia memasuki kota Semarang ?

Penyelesaian :

Hasil bagi bilangan bulat $70 : 12 = 5$ (ganjil)

$06.00 + 70.12 = 76.12 \equiv 16.12$

untuk melihat banyaknya hari yang dilalui kita cari hasil bagi bilangan bulat dari $5 : 2$ yaitu 2. Jadi 2 hari kemudian tiba di Semarang.

Jadi Pengeliling tiba di Semarang pada hari Selasa 13 April 2004 pukul 16.12.

Contoh Aplikasi bilangan bulat modulo 7 dan aksioma grup dalam kehidupan sehari-hari

Pada saat Sweet Seventeen Tanggal 21 April 1999, Kartini ‘genap’ berumur 17 tahun. Hari apa Kartini lahir?

Jawab:

Telah diketahui Kartini lahir pada tgl 21 April 1982. Maka dapat ditentukan $N = 21, M = 2, C = 19, Y = 82,$ dan $L = 0$

(1982 bukan tahun kabisat) dengan demikian diperoleha;

$d \equiv N + [2,6M - 0,2] + Y + \left[\frac{Y}{4}\right] + \left[\frac{C}{4}\right] - 2C - (L + 1)\left[\frac{M}{11}\right] (\text{mod } 7)$

$$d \equiv 21 + [2,6(2) - 0,2] + 82 + \left[\frac{82}{4}\right] + \left[\frac{19}{4}\right] - 2(19) - (0 + 1)\left[\frac{2}{11}\right] (\text{mod } 7)$$

$d \equiv 21 + 5 + 82 + 20 + 4 - 2(19) - (0 + 1)0 (\text{mod } 7)$

$d \equiv 0 + 5 + 5 + 6 + 4 - 2(5) - (0 + 1)0\ (\text{mod } 7)$

$d \equiv 10 (\text{mod } 7)$

$d \equiv 3 (\text{mod } 7)$

Jadi Kartini lahir pada hari rabu, 21 April 982.

Dapat diperiksa 21 April 1999 juga hari rabu. Hasil ini menarik sebab, bulan yang sama akan jatuh pada hari yang sama. Hal inilah yang mungkin menyebabkan ulang tahun ke 17 diistimewakan. Hal yang serupa akan terjadi setiap 28 tahun kembali.

2.1.8 Soal Latihan

1) $G = \{1, 2, 3\}$ yaitu himpunan bilangan bulat modulo 4 dengan operasi perkalian. Telusurilah bahwa $(G, \times_4)$ suatu grup!
2) B = Himpunan bilangan bulat dengan operasi biner $*$ didefinisikan sebagai $a * b = a + b - ab$. Telusurilah sifat-sifat grup yang dipenuhi oleh $(B,*)$!
3) $N = \{i, a\}$ merupakan himpunan matriks dengan $i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Diskkripsikan bahwa N merupakan grup terhadap operasi perkalian matriks.

4) Diketahui $(G,*)$ suatu grup dan $x, y \in G$, diketahui $x * y = y * x^{-1}$ dan $* y * x = x * y^{-1}$, tentukan elemen identitas dari G

2.1.9 Petunjuk Pengerjaan

1) $G = \{1, 2, 3\}$ yaitu himpunan bilangan bulat modulo 4 dengan operasi perkalian. Untuk menunjukkan bahwa $(G, \times_4)$ suatu grup gunakan table Caley dengan menggunakan operasi perkalian modulo 4 (ingat bahwa bukan perkalian biasa dan ingat G tanpa nol)
2) Untuk menunjukkan $B =$ Himpunan bilangan bulat dengan operasi biner $*$ didefinisikan sebagai $a * b = a + b - ab$ memenuhi sifat komutatif, asosiatif, identitas, dan invers gunakan dengan mengambil sebarang elemen himpunan di B dan B adalah himpunan bilangan tidak boleh pembuktiannnya dengan menggunakan angka (bilangan) tertentu.
3) Karena $N = \{i, a\}$ merupakan himpunan matriks dengan $i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dengan elemen N yang terbatas hanya dua elemen, maka untuk menunjukkan bahwa N merupakan grup terhadap operasi perkalian matriks cukup menggunakan table caley lebih cepat dan mudah (karena himpunannya terbatas)
4) Karena diketahui G grup maka setiap elemen x di G mempunyai invers, maka $x * x^{-1} = x^{-1} * x^{-1}$. Dengan

hokum kanselasi kanan, maka diperoleh bahwa $x = x^{-1}$ artinya inversnya dirinya sendiri. Jadi $x * x^{-1} = e$ maka $x * x = e$, maka elemen identitasnya adalah x^2.

2.1.10 Rangkuman

Grup adalah pasangan $(G,\circ)$ di mana G adalah himpunan dan $\circ$ adalah operasi biner pada G, sehingga empat sifat berikut ini berlaku

(i) (tertutup) untuk semua $a, b \in G, a \circ b \in G$;

(ii) (asosiatif) untuk semua $a, b, c \in G$,

$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$;

(iii) (keberadaan elemen identitas) ada elemen $e \in G$ tersebut bahwa untuk semua $\in G, a \circ e = e \circ a = a$;

(iv) (adanya invers) untuk setiap $a \in G$, ada elemen $b \in G$ (disebut kebalikan dari a) sedemikian rupa sehingga $a \circ b = b \circ a = e$ (Siksek, 2015: 29).

Jika himpunan G terhadap operasi biner $\circ$ membentuk suatu grup, maka grup G ini dinyatakan dengan notasi "$(G;\circ)$". Tidak setiap grup memiliki sifat komutatif terhadap operasi binernya. Jika grup $(G;\circ)$ masih memenuhi sifat bahwa: Operasi biner $\circ$ pada G bersifat komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $\circ b = b \circ a$, maka grup $(G;\circ)$ disebut grup abelian (grup komutatif).

Operasi biner yang tidak familiar dinyatakan dalam bentuk rumus seperti $a * b = ab - 2(a + b)$ atau operasi biner

yang dinyatakan pada tabel Cayley (artinya semua aturan operasi biner mengikuti aturan yang didefinisikan pada tabel Cayley)

2.1.11 Tes Formatif 1

1) Misalkan $G = \{i, a, b, c\}$ dengan operasi perkalian matriks, dan

   $i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   karena $(G, \times)$ merupakan grup dari G karena:

   A. $(G, \times)$ memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas yaitu i, dan elemen invers.

   B. $(G, \times)$ memenuhi sifat tertutup, tidak asosiatif, memiliki elemen identitas yaitu i, dan elemen invers.

   C. $(G, \times)$ memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas yaitu i, dan tidak memiliki elemen invers.

   D. $(G, \times)$ tidak memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas yaitu i, dan elemen invers.

2) Diketahui $G = \{$ Bilangan rasional positif$\}$ dan . Dengan operasi $*$ yakni $x * y = \frac{xy}{4}, \forall x, y \in G$ merupakan grup, karena:

   A. $(G, *)$ memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas yaitu $i = \frac{1}{4}$, dan elemen invers.

B. $(G,*)$ memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas yaitu $i = -\frac{1}{4}$, dan elemen invers.

C. $(G,*)$ memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas yaitu $i = 4$, dan elemen invers.

D. $(G,*)$ memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas yaitu $I = -4$, dan elemen invers.

3) Untuk semua bilangan bulat $n \geq 2$ didefinisikan $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_n$ didefinisikan $a \times_n b = (a \times b) \text{mod } n$ untuk $n = 8$ terhadap operasi perkalian merupakan grup karena:

A. Memenuhi sifat tertutup, asosiatif, mempunyai elemen identitas yaitu 0, dan memiliki elemen invers

B. Memenuhi sifat tertutup, asosiatif, mempunyai elemen identitas yaitu 1, dan memiliki elemen invers

C. Memenuhi sifat tertutup, asosiatif, mempunyai elemen identitas yaitu 2, dan memiliki elemen invers

D. Memenuhi sifat tertutup, asosiatif, mempunyai elemen identitas yaitu 8, dan memiliki elemen invers

4) Diketahui Q merupakan himpunan bilangan bulat kelipatan 3 terhadap operasi penjumlahan merupakan grup komutatif karena:

A. Karena $P = \{6a \mid a \in$ bilangan bulat$\}$, ambil sebarang $a, b, c \in P$, dengan $a = 6x, b = 6y$, dan $c = 6z$, dengan $x, y, z \in$ bilangan bulat. Maka dapat ditunjukkan sifat tertutup, komutatif, asosiatif, identitas, dan invers.

B. Karena $P = \{3a \mid a \in$ bilangan bulat$\}$, ambil sebarang $a, b, c \in P$, dengan $a = 3x, b = 3y$, dan $c = 3z$, dengan $x, y, z \in$ bilangan bulat. Maka dapat ditunjukkan sifat tertutup, tidak komutatif asosiatif, identitas, dan invers.

C. Karena $P = \{3a \mid a \in$ bilangan bulat$\}$, ambil sebarang $a, b, c \in P$, dengan $a = 3x, b = 3y$, dan $c = 3z$, dengan $x, y, z \in$ bilangan bulat. Maka dapat ditunjukkan sifat tertutup, asosiatif, tidak ada elemen identitas, dan invers, dan ditunjukkan sifat komutatif

D. Karena $P = \{3a \mid a \in$ bilangan bulat$\}$, ambil sebarang $a, b, c \in P$, dengan $a = 3x, b = 3y$, dan $c = 3z$, dengan $x, y, z \in$ bilangan bulat. Maka dapat ditunjukkan sifat tertutup, komutatif, asosiatif, identitas, dan invers.

5) Jika G grup dan $x^2 = e, \forall x \in G$, maka G merupakan grup komutatif karena:

A. G grup dan $x^2 = e, x * x = e$, jika $x, y \in G$, maka $x * y \in G$, sehingga dengan melalui$(x * y)^2 \neq e$ bahwa G bukan grup komutatif

B. G grup dan $x^2 = e, x * x = e$, jika $x, y \in G$, maka $x * y \in G$, sehingga dengan melalui $(x * y)^2 = e$ dapat ditunjukkan bahwa G grup komutatif

C. G grup dan $x^2 = e, x * x = e$, jika $x, y \in G$, maka $x * y \in G$, sehingga dengan melalui $(x * y)^2 \neq e$ dapat ditunjukkan bahwa G grup komutatif

D. G grup dan $x^2 = e$, $x * x = e$, jika $x, y \in G$, maka $x * y \notin G$, sehingga dengan melalui $(x * y)^2 = e$ dapat ditunjukkan bahwa G grup komutatif

2.1.12 Penilaian

Tingkat Penguasaan = $\frac{\text{Jumlah jawaban benar}}{5} \times 100\%$

Kategori Penilaian yang dicapai:

$90\% - 100\%$ = baik sekali

$80\% - 89\%$ = baik

$70\% - 79\%$ = cukup

$< 70\%$ = kurang

Jika Anda mencapai tingkat penguasaan $\geq 80\%$, maka Anda dapat melanjutkan kegiatan belajar 2 pada bab berikutnya dan Anda mendapat penilaian yang baik. Namun jika Anda belum mencapai tingkat penguasaan $\geq 80\%$, maka Anda disarankan mengulangi pada kegiatan belajar 1 kembali dengan penekanan pada materi yang belum Anda pahami dengan baik.

2.1.13 Kunci Jawaban Tes Formatif 1

1) A
2) C
3) B
4) D
5) B

2.1.14 Daftar Pustaka

Ayres, F. & Jaisingh, L.R. 2004. *Theory And Problems of Abstract Algebra*. Second Edition. New York: Schaum's Outline Series.

Baumslag. B. & Chandler, B. 1968. *Theory and Problems of Group Theory*. New York: Schaum's Outline Series.

Judson, T.W. 2009. *Abstract Algebra Theory and Applications*. Stephen F. Austin State University. file:///C:/Users/acer/Downloads/aata-20120811.pdf.

Milne, J.S. 2017. *Group Theory*. Series 3.14 : Group Explorer.

Pinter, C.C. 2010. *A Book Of Abstract Algebra*. Second Edition. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.

Reeder, M. 2019. *Notes on Group Theory*. https://www2.bc.edu/mark-reeder/Groups.pdf.

Siksek, S. 2015. *Introduction to Abstract Algebra*. London: Mathematics Institute University of Warwick.

Sinambela, P.N.J.M. Aplikasi Sifat-Sifat Grup Jumlahan Modulo 7 Dalam Menentukan Hari. https://docplayer.info/53763336-Aplikasi-sifat-sifat-grup-jumlahan-modulo-7-dalam-menentukan-hari-pardomuan-n-j-m-sinambela-abstrak.html.

Kegiatan Belajar 2: Struktur pada Sifat-sifat Grup

Tujuan Pembelajaran:

Diakhir kegiatan belajar 2 ini, mahasiswa diharapkan dapat:

1. Mendeskripsikan pembuktian sifat kanselasi.
2. Menerapkan sifat kanselasi pada pembuktian grup.
3. Mendeskripsikan pembuktian persamaan sebagai suatu penyelesaian tunggal.
4. Menerapkan sifat pada persamaan sebagai suatu penyelesaian tunggal.
5. Mendeskripsikan sifat yang berlaku bahwa elemen identitas sebagai elemen tunggal dalam suatu grup.
6. Menerapkan sifat yang berlaku bahwa elemen identitas sebagai elemen tunggal dalam suatu grup.
7. Mendeskripsikan sifat yang berlaku bahwa setiap elemen mempunyai invers yang tunggal dari suatu grup.
8. Menerapakan sifat yang berlaku bahwa setiap elemen mempunyai invers yang tunggal dari suatu grup.
9. Membedakan struktur pada Tabel Cayley sebagai bujursangkar Latin yang merupakan grup abstrak dan bukan grup.
10. Mengkaitkan aturan teorema tentang persamaan $a\,x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal dengan aturan bahwa setiap baris dalam kotak semua anggota berlainan sebagai sifat grup.

11. Mengkaitkan aturan teorema tentang persamaan $y\,a = b$ mempunyai penyelesaian tunggal dengan aturan bahwa setiap kolom dalam kotak semua anggota berlainan sebagai sifat grup.
12. Mengkaitkan aturan letak anggota dalam kolom dan baris pada tabel, sehingga elemen-elemennya simetris terhadap diagonal utama sebagai bentuk penelusuran sifat komutatif pada grup komutatif.
13. Mengkaitkan aksioma grup ke dalam grup abstrak yang dimisalkan himpunan $G = \{i, a, b, c, \dots\}$ dengan elemen $i, a, b, \dots$. sebagai elemen yang tidak didefinisikan pada objek tertentu dan dilengkapi satu operasi biner $*$.
14. Membuat Tabel Cayley dengan mengkaitkan elemen-elemen suatu himpunan tertentu yang berlaku pada operasi biner tertentu dan memenuhi aksioma grup.

Sejarah Teori Grup

Meskipun definisi aksiomatis pertama yang jelas dari suatu grup tidak diberikan sampai tahun 1800-an, metode-teori grup telah digunakan sebelum waktu ini dalam pengembangan banyak bidang matematika, termasuk geometri dan teori persamaan aljabar. Joseph-Louis Lagrange menggunakan teori-grup sebagai metode dalam kurun waktu tahun 1770-1771 sebagai metode dalam memecahkan persamaan polinomial. Kemudian, Evariste Galois (1811–1832) berhasil mengembangkan matematika yang diperlukan untuk menentukan dengan tepat persamaan polinomial mana yang dapat diselesaikan dalam hal koefisien polinomial sebagai alat utama Galois' adalah teori grup.. Studi geometri direvolusi pada tahun 1872 ketika Felix Klein diusulkan bahwa ruang geometris harus dipelajari dengan

memeriksa sifat-sifat yang berbeda di bawah transformasi ruang. Sophus Lie, seorang kontemporer dari Klein, menggunakan teori grup untuk mempelajari solusi persamaan diferensial parsial. Salah satu perawatan modern pertama dari teori grup muncul dalam Theory of Groups of Finite Order karya William Burnside (Burnsid dalam Judson, 2009, hal.46), pertama kali diterbitkan pada tahun 1897.
(Judson, 2009)

2.2.1 Sifat-sifat Sederhana dari Grup dan Contoh-contohnya

Sifat-sifat dari grup meliputi sifat-sifat pelenyapan, sifat-sifat persamaan dijelaskan pada materi berikut ini.

Teorema 1.2.1:

(Sifat Kanselasi, pelenyapan, atau penghapusan)

Jika $(G;\circ)$ suatu grup, maka untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku:

(1) Jika $a \circ b = a \circ c$ maka $b = c$

(2) Jika $b \circ a = c \circ a$ maka $b = c$ (Judson, 2009).

Bukti:

Misalkan $(G;\circ)$ suatu grup, dan $a \in G$, maka ada $a^{-1} \in G$ sehingga $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = i$, dengan i adalah elemen identitas dari $(G;\circ)$.

Menurut ketentuan $a \circ b = b \circ c$. Maka $a^{-1} \circ (a \circ b) = a^{-1} \circ (a \circ c)$

Menurut sifat asosiatif $(a^{-1} \circ a) \circ b = (a^{-1} \circ a) \circ c$, maka $i \circ b = i \circ c \rightarrow b = c$.

Dengan cara yang sama dengan (1), maka sifat (2) mudah untuk dibuktikan. Coba, buktikanlah! (sebagai tugas mahasiswa)

Sifat grup selanjutnya bahwa setiap persamaan mempunyai penyelesaian tunggal. Dalam teorema berikut ini menunjukkan ketunggalan penyelesaian tunggal dari persamaan beserta pembuktiannya.

Teorema 2.2.2:

Jika $(G; \circ)$ suatu grup, dan $a, b \in G$, maka persamaan-persamaan $a \circ x = b$ dan $y \circ a = b$ mempunyai penyelesaian tunggal (Judson, 2009).

Bukti:

Pertama dibuktikan bahwa persamaan $a \circ x = b$ mempunyai penyelesaian

Karena $(G; \circ)$ adalah grup, dan $a \in G$. Maka ada $a^{-1} \in$ G

Dari ketentuan $a \circ x = b$

$a^{-1} \circ (a \circ x) = a^{-1} \circ b$

$(a^{-1} \circ a) \circ x = a^{-1} \circ b$

$1 \circ x = a^{-1} \circ b$

$x = a^{-1} \circ b$

$a^{-1} \in G$ dan $b \in G$

Berdasarkan sifat tertutup, maka $a^{-1} \circ b \in G$

Karena $a^{-1} \circ b$ adalah penyelesaian dari persamaan $a \circ x = b$, maka selanjutnya dibuktikan tunggalnya penyelesaian $a \circ x = b$.

Misalkan persamaan $a \circ x = b$ mempunyai penyelesaian x_1 dan x_2 berarti $a \circ x_1 = b$ dan $a \circ x_2 = b$.

Sehingga $a \circ x_1 = a \circ x_2$. Dengan sifat pelenyapan diperoleh $x_1 = x_2$.

Jadi persamaan $a \circ x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal.

Sebagai latihan, buktikan bahwa persamaan $y \circ a = b$ mempunyai penyelesaian tunggal! (sebagai tugas mahasiswa)

Dalam penyelesaian tunggal pada persamaan mengakibatkan munculnya ketunggalan pada sifat identitas dan sifat invers yang dijelaskan pada teorema berikut ini.

Teorema 2.2.3 Akibat dari teorema 2.2.2 adalah sebagai berikut.

(1) Elemen identitas dalam suatu grup adalah tunggal (Judson, 2009).

Bukti:

elemen identitas i merupakan penyelesaian dari persamaan $a\,x = a$

Jadi ruas kiri dan kanan dikalikan dengan a^{-1} dari kiri diperoleh:

$$a\,x = a$$
$$a^{-1}\,(a\,x) = a^{-1}\,a$$
$$(a^{-1}\,a)\,x = i$$
$$i\ \ x = i$$
$$x = i$$

Jadi penyelesaian tunggal dari $a\,x = a$

(2) Invers dari setiap a anggota suatu grup adalah tunggal (Judson, 2009).

Bukti:

Invers dari a, yaitu a^{-1}, merupakan penyelesaian dari persamaan $a\,x = i$

Jadi kedua ruas dikalikan dengan a^{-1} dari kiri diperoleh:

$$a\,x = i$$
$$a^{-1}\,(a\,x) = a^{-1}\,i$$
$$(a^{-1}\,a)\,x = a^{-1}$$
$$i\;\; x = a^{-1}$$
$$x = a^{-1}$$

Jadi a^{-1} penyelesaian tunggal dari a^{-1}

(3) Dalam suatu grup, untuk setiap $a \in G$, invers dari invers a, ditulis $(a^{-1})^{-1} = a$ (Judson, 2009).

Bukti:

$(a^{-1})^{-1}$ merupakan penyelesaian persamaan $a^{-1}\,x = i$.

Jika kedua ruas dikalikan dengan a dari kiri diperoleh:

$$a^{-1}\,x = i$$
$$a\;(a^{-1}\,x\;) = a\;\,i$$
$$(a\,a^{-1})\,x = a$$
$$i\;x = a$$
$$x = a$$

Jadi a penyelesaian tunggal dari $a^{-1}\,x = i$. Menurut (2), a^{-1} penyelesaian tunggal dari $a\,x = i$ dan a^{-1}adalah invers a.

Menurut (3), a penyelesaian tunggal dari $a^{-1}\,x = i$. Jadi a invers dari a^{-1}atau $a = ((a^{-1})^{-1}$

Di dalam grup juga berlaku invers suatu hasil operasi dua elemen mempunyai nilai kesamaan hasil operasi pada invers dari masing-masing elemennya, hal ini dijelaskan pada Teorema 2.2.4 berikut ini.

Teorema 2.2.4:

Jika $(G; \circ)$ adalah suatu grup, maka untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ (Judson, 2009).

Bukti:

Jika $a, b \in G$ maka $(a \circ b) \in G$ sehingga $(a \circ b)^{-1} \in G$ dan $(a \circ b) \circ (a \circ b)^{-1} = i$.

Perhatikan bahwa:

$(a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1}) = i$

$(a \circ (b \circ b^{-1})) \circ a^{-1} = i$; sifat asosiatif

$(a \circ i) \circ a^{-1} = i$; sifat invers

$a \circ a^{-1} = i$; sifat identitas

Jadi $(a \circ b) \circ (a \circ b)^{-1} =$ i ……………………..(2)

$(a \circ b) \circ (a \circ b)^{-1} = (a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1})$

Dengan sifat pelenyapan $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$. Suatu Grup dengan operasi biner perkalian disebut grup multiplikatif dan jika operasinya penjumlahan disebut grup aditif.

Banyaknya anggota suatu grup G ditulis dengan notasi "$n(G)$" dan disebut order atau ordo dari grup G. Duatu grup yang banyaknya anggota tak berhingga (infinite) disebut grup tak berhingga (grup infinite. Sedangkan suatu grup yang banyaknya anggota berhingga disebut grup berhingga (grup finite). Jika G

suatu grup yang ordernya kecil (banyaknya anggota G sedikit) maka untuk melihat sifat-sifatnya akan mudah apabila disusun tabel hasil operasi biner dari setiap pasang elemen G.

Jika dimisalkan himpunan $G = \{i, a, b, c, \dots\}$ dengan $i, a, b, \dots$. sebagai elemen yang tidak didefinisikan pada objek tertentu, dan dilengkapi satu operasi biner $*$, yang memenuhi semua sifat grup, maka $(G,*)$ disebut grup abstrak.

Grup ini merupakan pola pada grup lainnya dari grup yang sudah dijelaskan di atas, dan merupakan abstraksi dari elemen-elemen untuk operasi tertentu. Misalkan elemen identitas dalam grup abstrak di atas dinyatakan dengan i. Operasi biner pada grup abstrak didefinisikan dengan Tabel Cayley.

Misalkan himpunan $G = \{i, a\}$, maka $(G,*)$ disebut grup abstrak ordo 2. Sedangkan jika $G = \{i, a, 1\}$, maka $(G,*)$ grup abstrak ordo 3. Untuk himpunan $G = \{i, a, b, c\}$, maka $(G,*)$ grup abstrak ordo 4.

Contoh-contoh grup abstrak dengan operasi binernya yang disajikan dengan menggunakan tabel Cayley disampaikan sebagai berikut.

<u>Contoh 1:</u>

Misalkan $G = \{i, a, b\}$ dengan operasi biner $*$ dalam Tabel 7 berikut.

Tabel 7

$*$	i	a	b
i	i	a	b
a	a	b	i
b	b	i	a

$(G,*)$ suatu grup abstrak ordo 3.

Pada tabel 7 di atas setiap anggota hanya muncul satu kali pada tiap baris dan tiap kolom sehingga memenuhi aksioma grup yakni:

1) Ketertutupan operasi biner $*$ dipenuhi, karena semua hasil operasi $*$ yang terdapat pada tabel semua elemennya termuat pada tabel.
2) Memenuhi sifat asosiatif, karena $i * (a * b) = (i * a) * b = i$; $a * (b * b) = (a * b) * b = b$; $b * (a * i) = (b * a) * i = i$; $b * (a * b) = (b * a) * b = b$ dan seterusnya.
3) mempunyai elemen identitas yaitu i yang berlaku $i * a = a * i = a$; $i * b = b * i = b$
4) mempunyai elemen invers untuk setiap elemen di G, yang dapat ditunjukkan melalui: i inversnya i karena $i * i = i$; a inversnya b karena $a * b = b * a = i$; b inversnya a karena $b * a = a * b = i$

<u>Contoh 2:</u>

Misalkan $G = \{i, a, b, c\}$ dengan operasi biner $*$ dalam tabel 8 berikut.

Tabel 8

$*$	i	a	b	c
i	i	a	b	c
a	a	i	c	b
b	b	c	a	i
c	c	b	i	a

$(G,*)$ suatu grup abstrak ordo 4.

Pada Tabel 8 ini setiap anggota hanya muncul satu kali pada tiap baris dan tiap kolom dan memenuhi sifat grup.

Aksioma grup dapat ditunjukkan dengan memperhatikan pada Tabel 8 di atas dengan cara sebagai berikut:

1) Jika dalam kotak semua elemennya termuat pada anggota G maka $(G,*)$ memenuhi sifat tertutup.
2) Sifat asosiatif dapat dicoba satu persatu dengan menunjukkan bahwa $a * (b * c) = (a * b) * c$; $a * (i * b) = (a * i) * b$; $c * (b * i) = (c * b) * i$; dan seterusnya.
3) Karena baris dan kolom yang urutan anggotanya sama dengan urutan baris dan kolom paling luar, maka elemen paling kiri pada tabel menunjukkan elemen identitas yaitu i.
4) Jika i muncul pada baris dan kolom yang sama berarti anggota tersebut mempunyai invers dirinya sendiri. Jadi invers i adalah i dan invers a adalah a. Jika i muncul pada baris ke-2 kolom ke-3 dan muncul pula pada baris ke-3 dan kolom ke-2 maka kedua anggota tersebut saling invers. Jadi $b^{-1} = c$ dan $c^{-1} = b$. Jika tidak demikian berarti anggota tersebut tidak mempunyai invers.

5) Persamaan $a\,x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal , jika ***setiap baris*** dalam kotak semua anggota berlainan.

   Persamaan $y\,a = b$ mempunyai penyelesaian tunggal , jika ***setiap kolom*** dalam kotak semua anggota berlainan.
6) Jika letak anggota dalam kotak simetris terhadap diagonal utama maka sifat komutatif dipenuhi.

Bujursangkar Latin

Tabel Cayley berbentuk bujursangkar. Jika anggota dalam tabel muncul tepat satu kali pada setiap baris dan tepat satu kali pada setiap kolom maka tabel Cayley itu disebut bujursangkar Latin.

Semua Tabel Cayley dari grup merupakan bujursangkar Latin. Tetapi jika Tabel Cayley dari suatu struktur merupakan bujursangkar Latin, belum tentu struktur tersebut merupakan grup.

<u>Contoh 3:</u>

Perhatikan Tabel Cayley pada Tabel 9 dan Tabel 10 berikut

Tabel 9

$*$	i	a	b	c	d
i	i	a	b	c	d
a	a	b	c	d	i
b	b	c	d	i	a
c	c	d	i	a	b
d	d	i	a	b	c

Tabel 10

$\circ$	i	a	b	c	d
i	i	a	b	c	d
a	a	b	c	d	i
b	b	i	d	a	a
c	c	d	a	i	b
d	d	c	i	b	a

Perhatikan Tabel 9 dan Tabel 10 di atas menunjukkan:

a) Tabel 9 adalah bujursangkar Latin dan $(G,*)$ merupakan grup

b) Tabel 10 adalah bujursangkar Latin dan $(G,\circ)$ bukan merupakan grup,

karena : $a \circ d = i$ tetapi $d \circ a = c$

$b \circ a = i$ tetapi $a \circ b = c$

Dengan demikian a, b, dan d tidak mempunyai invers.

Contoh 4:

Buatlah tabel Cayley dari $G = \{i, a, b, c\}$ dengan empat cara yang berlainan dengan operasi biner $*$ dan $(G,*)$ merupakan grup. Contoh membuat tabel Cayley ini dapat dipergunakan sebagai latihan mahasiswa.

Beberapa aplikasi teori grup pada ilmu lain seperti aplikasi dalam bidang ilmu teknik misalnya pada computer dan sistem jaringan. Namun aplikasi ini tidak bisa dijelaskan panjang lebar karena terkait dengan penjelasan ilmu lain di luar materi pendidikan matematika. Penyajian aplikasi ini sebagai wacana tambahan pengetahuan mahasiswa dalam mengembangkan ilmu pengetahuan. Penjelasan singkat aplikasi dapat dibaca pada bagan berikut ini.

Aplikasi Teori Grup pada Kriptografi

Kriptografi adalah studi tentang mengirim dan menerima pesan rahasia. Tujuan kriptografi adalah untuk mengirim pesan melalui saluran sehingga hanya penerima pesan yang dimaksud yang dapat membacanya. Selain itu, ketika pesan diterima, penerima biasanya memerlukan jaminan bahwa pesan tersebut asli, yaitu, bahwa itu belum dikirim oleh seseorang yang mencoba menipu penerima. Kriptografi modern sangat tergantung pada teori angka aljabar dan abstrak.

Pesan yang akan dikirim disebut pesan teks. Pesan disamarkan disebut teks sandi. *Plaintext* dan *ciphertext* ditulis dalam analfabet, terdiri dari karakter karakter atau karakter filter. Karakter tidak dapat menyertakan tidak hanya karakter alfabet A yang dikenal, ..., Z dan $a, \dots, z$ tetapi juga digit, tanda baca, dan kosong. Sebuah *cryptosystem*, *orcipher*, memiliki dua bagian: enkripsi, proses mengubah pesan teks biasa menjadi pesan teks sandi, dan enkripsi, transformasi kebalikan dari mengubah pesan teks sandi menjadi pesan teks teks.

Ada banyak keluarga kriptografi yang berbeda, masing-masing dibedakan oleh algoritma enkripsi tertentu. *Cryptosystems* dalam keluarga *Cryptographic* tertentu dibedakan dari satu sama lain oleh parameter ke fungsi enkripsi yang disebut akey. Sebuah *Cryptosystem* klasik memiliki satu kunci, yang harus dirahasiakan, hanya diketahui oleh pengirim dan penerima pesan. Jika orang A ingin mengirim pesan rahasia ke dua orang yang berbeda B dan C, dan tidak ingin agar B memahami pesan C atau sebaliknya, A harus menggunakan dua kunci terpisah, sehingga satu *Cryptosystem* digunakan untuk bertukar pesan dengan B, dan yang lain digunakan untuk bertukar pesan dengan C.

Sistem yang menggunakan dua kunci terpisah, satu untuk encoding dan satu lagi untuk decoding, disebut *cryptosystem* kunci publik. Karena pengetahuan tentang kunci pengodean tidak memungkinkan siapa pun untuk menebak kunci pengodean kode, kunci pengodean dapat dipublikasikan. *Cryptosystem* kunci publik memungkinkan A dan B untuk mengirim pesan ke yang menggunakan kunci penyandian yang sama. Siapa pun dapat menyandikan pesan untuk dikirim ke C, tetapi hanya C yang tahu cara mendekodekannya. (Judson, 2009)

2.2.2 Soal Latihan

Selidikah apakah himpunan G dengan operasi biner pada nomor 1 sampai dengan nomor 5 di bawah ini merupakan grup!

1) G $=$ himpunan bilangan modulo 5 yang bukan nol, dengan operasi perkalian bilangan modulo $5(x_5)$.
2) G $=$ himpunan bilangan modulo 4 yang bukan nol, dengan operasi perkalian bilangan modulo $4(x_4)$.
3) $\{0\}$ dengan operasi penjumlahan bilangan bulat dan $\{1\}$ dengan operasi perkalian bilangan asli.
4) G $=$ himpunan bilangan bulat genap, dengan operasi penjumlahan.
5) $G = \{x \mid x = a\sqrt{b}, a$ bilangan bulat dan b bilangan asli$\}$ dengan operasi penjumlahan. Buktikan G merupakan grup.

2.2.3 Petunjuk Pengerjaan

1) Merupakan Grup komutatif
2) Bukan grup karena tidak memenuhi sifat tertutup

3) Keduanya merupakan grup komutatif
4) Merupakan Grup komutatif
5) Merupakan Grup Komutatif

2.2.4 Rangkuman

1. Sifat Kanselasi, pelenyapan, atau penghapusan:
   Jika $(G;\circ)$ suatu grup, maka untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku:
   i) Jika $a \circ b = a \circ c$ maka $b = c$
   ii) Jika $b \circ a = c \circ a$ maka $b = c$
2. Jika $(G;\circ)$ suatu grup, dan $a, b \in G$, maka persamaan-persamaan $a \circ x = b$ dan $y \circ a = b$ mempunyai penyelesaian tunggal.
3. Dalam setiap grup suatu himpunan pada operasi biner berlaku:
   i) Elemen identitas dalam suatu grup adalah tunggal
   ii) Invers dari setiap a anggota suatu grup adalah tunggal
4. Jika $(G;\circ)$ adalah suatu grup, maka untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

2.2.5 **Tes Formatif 2**

1) Diketahui G grup sedemikian sehingga $(xy)^2 = x^2y^2$, $\forall x, y \in G$, maka G merupakan grup komutatif karena
   A. Gunakan sifat asosiatif dan hukum kanselasi (hukum pencoretan kanan dan kiri) sehingga diperoleh $xy \neq yx$, karena tidak komutatif, maka bukan merupakan grup komutatif.
   B. Gunakan sifat asosiatif dan hukum kanselasi (hukum pencoretan kanan dan kiri) sehingga diperoleh $xy = yx$, maka terbukti G grup

C. Gunakan sifat asosiatif dan hukum kanselasi (hukum pencoretan kanan dan kiri) sehingga diperoleh $= x^2y^2$, maka terbukti G grup komutatif.

D. Gunakan sifat asosiatif dan hukum kanselasi (hukum pencoretan kanan dan kiri) sehingga diperoleh $xy = yx$, karena sudah diketahui G grup, maka terbukti G grup komutatif

2) Jika $a \in G, G$ grup dan $a \circ a = a$ maka $a = i$ pernyataan manakah yang benar!

A. Gunakan sifat-sifat grup dan yang diketahui $a \circ a = a$ maka $a \neq i$

B. Gunakan sifat-sifat grup dan yang diketahui $a \circ a = a$ maka $a = i$

C. Gunakan sifat-sifat grup dan yang diketahui $a \circ a = a$ maka $a \circ a \neq i$

D. Gunakan sifat-sifat grup dan yang diketahui $a \circ a = a$ maka $a \neq i$ dan $a \circ a \neq i$.

3) Jika untuk setiap $a \in G$ berlaku $a \circ a = i$ maka $(G,\circ)$ grup komutatif. Pernyataan yang benar adalah….

A. Gunakan $a \circ a \neq i$ dan kombinasikan dengan variabel yang lain untuk menunjukkan G grup komutatif

B. Gunakan $a \neq i$ dan kombinasikan dengan variabel yang lain untuk menunjukkan G grup komutatif

C. Gunakan $a^2 \neq i$ dan kombinasikan dengan variabel yang lain untuk menunjukkan G grup komutatif

D. Gunakan $a \circ a = i$ dan kombinasikan dengan variabel yang lain untuk menunjukkan G grup komutatif

4) Bujursangkar Latin dari $G = \{i, a, b, c\}$ dengan empat cara dengan operasi $*$ yang berlainan sehingga $(G,*)$ merupakan grup, karena …

A. Semua hasil operasi elemennya termuat di G, memenuhi asosiatif, memiliki elemen identitas yaitu i, memiliki elemen invers untuk setiap elemen di G.

B. Semua hasil operasi elemennya termuat di G, tidak memenuhi asosiatif, memiliki elemen identitas yaitu i, memeiliki elemen invers untuk setiap elemen di G.

C. Semua hasil operasi elemennya termuat di G, memenuhi asosiatif, tidak memiliki memiliki elemen identitas, memeiliki elemen invers untuk setiap elemen di G.

D. Semua hasil operasi elemennya termuat di G, memenuhi asosiatif, memiliki elemen identitas yaitu i, ada elemen yang tidak mempunyai invers di G.

5) $\mathbb{Q} = \left\{\frac{x}{y} | x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0\right\}$ terhadap operasi perkalian apakah merupakan grup?

A. $(\mathbb{Q}, +)$ merupakan grup dengan elemen identitas 0

B. $(\mathbb{Q}, +)$ merupakan grup dengan elemen invers dari $\frac{x}{y}$ adalah $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}$

C. $(\mathbb{Q}, +)$ merupakan grup dengan elemen identitas 1

D. $(\mathbb{Q}, +)$ merupakan grup dengan elemen invers dari $\frac{x}{y}$ adalah $\frac{x}{y}$

1.2.6 Penilaian

Tingkat Penguasaan = $\frac{\text{Jumlah jawaban benar}}{5} \times 100\%$

Kategori Penilaian yang dicapai:

$90\% - 100\%$ = baik sekali

$80\% - 89\%$ = baik

$70\% - 79\%$ = cukup

$< 70\%$ = kurang

Jika Anda mencapai tingkat penguasaan $\geq 80\%$, maka Anda dapat melanjutkan kegiatan belajar 3 pada bab berikutnya dan Anda mendapat penilaian yang bagus. Namun jika Anda belum mencapai tingkat penguasaan $\geq 80\%$, maka Anda disarankan mengulangi pada kegiatan belajar 2 dengan penekanan pada materi yang belum Anda pahami dengan baik.

2.2.6 Kunci Jawaban Tes Formatif 2

1. **D**
2. **B**
3. **D**
4. **A**
5. **C**

2.2.7 Daftar Pustaka

Aisah, I. 2017. *Struktur Aljabar 1*. Program Studi S-1Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Padjadjaran Januari. http://math.fmipa.unpad.ac.id/wp-content/uploads/2018/02/BAHAN-AJAR-STRUKTUR-ALJABAR-1.pdf. (Diunduh 14 Juni 2019).

Cagman, N. Citak, F. & Aktas, H. 2012. *Soft int-group and its applications to group theory*. Neural Comput & Applic. 21 (Suppl 1). page:151–S158. DOI 10.1007/s00521-011-0752-x. (Diunduh 13 Juni 2019).

Judson, T.W. 2009. *Abstract Algebra Theory and Applications*. Stephen F. Austin State University. file:///C:/Users/acer/Downloads/aata-20120811.pdf. (diunduh 22 Mei 2019).

Misri, Muhamad Ali. 2014. *Pengantar Aljabar Abstrak: Grup*. Cirebon: Syariah Nurjati Press. (Diunduh 14 Juni 2019).

Sinambela, P N. J. M. Aplikasi Sifat-Sifat Grup Jumlahan Modulo 7 Dalam Menentukan Hari. Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan. https://docplayer.info/53763336-Aplikasi-sifat-sifat-grup-jumlahan-modulo-7-dalam-menentukan-hari-pardomuan-n-j-m-sinambela-abstrak.html. (diunduh 20 Mei 2019).

Sukirman. 2014. *Struktur Aljabar*. In: Teori Himpunan. Universitas Terbuka, Jakarta. ISBN 9796898063. (Diunduh 14 Juni 2019).

Kegiatan Belajar 3: Grup Simetri

Tujuan Pembelajaran:

Diakhir kegiatan belajar 1, mahasiswa diharapkan dapat:

1. mengubah permutasi dengan notasi dua baris ke notasi satu baris atau sebaliknya;
2. menentukan hasil operasi perkalian dua permutasi atau lebih;
3. menentukan invers dari suatu permutasi;
4. menentukan himpunan permutasi dengan perkalian permutasi merupakan grup atau bukan grup;
5. menentukan himpunan transformasi dari bangun geometri merupakan grup atau bukan grup;
6. mengkaitkan pemetaan dari suatu fungsi ke dirinya sebagai fungsi satu-satu yang merupakan elemen-elemen hasil permutasi dari suatu himpunan permutasi;
7. mengkaitkan komposisi fungsi sebagai operasi perkalian permutasi untuk menentukan elemen himpunan permutasi;
8. mengkaitkan operasi perkalian permutasi pada himpunan permutasi dengan aksioma grup;
9. menerapkan konsep permutasi ke dalam grup;
10. mengkaitkan transformasi (refleksi, rotasi, translasi) pada bangun bidang geometri (segitiga sama sisi, persegi, persegipanjang, segi-5, segi-6) sebagai aturan untuk menentukan elemen himpunan pemutasi;

11. mengkaitkan hasil transformasi sebagai suatu elemen himpunan permutasi terhadap operasi perkalian permutasi dengan aksioma grup;
12. membedakan grup simetri dan grup permutasi.

Catatan Sejarah Permutasi

Lagrange pertama kali memikirkan permutasi sebagai fungsi dari himpunan ke dirinya sendiri, tetapi Cauchy yang mengembangkan teorema dasar dan notasi untuk permutasi. Dia lebih dulu menggunakan notasi siklus. Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) dilahirkan di Paris pada puncak Revolusi Prancis. Keluarganya segera meninggalkan Paris ke desa Arcueil untuk melarikan diri dari Pemerintahan Teror. Salah satu tetangga keluarga ada Pierre-Simon Laplace (1749–1827), yang mendorongnya untuk mencari karir di bidang matematika. Cauchy memulai karirnya sebagai ahli matematika dengan memecahkan geometri problemin yang diberikan kepadanya oleh Lagrange. Lebih dari 800 makalah ditulis oleh Cauchyon topik beragam seperti persamaan diferensial, kelompok terbatas, matematika terapan, dan analisis kompleks. Dia adalah salah satu ahli matematika yang bertanggung jawab untuk membuat kalkulus ketat. Mungkin lebih banyak teorema dan konsep dalam matematika memiliki nama Cauchy yang melekat padanya daripada matematika lainnya. (Judson, 2009)

Dalam bab ini akan mempelajari permutasi pada himpunan terbatas A. Untuk memahami materi grup simetri harus menguasai konsep grup, transformasi bangun geometri yang meliputi rotasi, refleksi, komposisi transformasi, matriks dan sifat-sifatnya

1.3.1 Pengertian Permutasi

Permutasi biasanya dipelajari sebagai objek kombinatorial, akan tetapi permutasi pada bab ini merupakan pemetaan satu-satu dari daerah asal dan daerah kodomain. Dengan permutasi dari himpunan A dimaksudkan fungsi bijektif dari A ke A, yaitu korespondensi satu-ke-satu antara A dan A itu sendiri.

Dalam aljabar dasar yang merupakan permutasi yaitu sebagai penataan ulang elemen-elemen suatu himpunan. Jadi, untuk himpunan {1,2,3,4,5}, dapat mempertimbangkan penataan ulang yang berubah dari (1,2,3,4,5) menjadi (3,2,1,5,4); penataan ulang ini dapat diidentifikasi dengan fungsi yang jelas merupakan korespondensi satu-ke-satu antara himpunan {1,2,3,4,5} dan dirinya sendiri. Oleh karena itu, jelas bahwa tidak ada perbedaan nyata antara definisi permutasi baru dan definisi lama. Namun definisi baru ini lebih umum dengan cara yang sangat berguna karena memungkinkan untuk berbicara tentang permutasi himpunan A bahkan ketika A memiliki banyak elemen.

Definisi 3.1.1

Permutasi dari himpunan A adalah fungsi dari A ke A yang keduanya satu-ke-satu dan onto. Grup permutasi dari himpunan A adalah himpunan permutasi dari A yang membentuk grup dengan komposisi fungsi (Gallian, 2015)

Ilustrasi pengertian permutasi dapat dijabarkan sebagai berikut:

Jika $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ maka suatu fungsi berikut merupakan permutasi

$1 \longrightarrow f(1) = j_1$
$2 \longrightarrow f(2) = j_2$
$3 \longrightarrow f(3) = j_3$
.
.
.
$n \longrightarrow f(n) = j_n$ jika f bijektif dan $j_i \in A$ untuk $i = 1, 2, 3, 4$

Permutasi tersebut jika disajikan dengan notasi 2 baris ditulis seperti berikut ini $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \dots . n \\ j_1 & j_2 & j_3 \dots . j_n \end{pmatrix}$

<u>Contoh 1:</u>

a) Diketahi himpunan $A = \{1, 2\}$, dan terdapat dua kemungkinan fungsi f dan g yang dapat disusun sebagai berikut:

$f: 1 \longrightarrow f(1) = 1$, $2 \longrightarrow f(2) = 2$ ditulis $f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$g: 1 \longrightarrow g(1) = 2$, $2 \longrightarrow g(2) = 1$ ditulis $g = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Jadi terdapat dua kemungkinan permutasi pada A.

b) Misalkan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$, maka bentuk permutasi yang dapat disusun antara lain:

$$f: 1 \longrightarrow f(1) = 3$$
$$2 \longrightarrow f(2) = 1 \quad \text{ditulis}$$
$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$3 \longrightarrow f(3) = 2$$

Perhatikan hasil pemetaan di bawah ini yang mempunyai nilai yang sama yakni

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Urutan baris pertama diubah, asalkan bayangan masing-masing anggotanya tetap sama, sehingga akan menghasilkan permutasi yang sama. Apabila bayangan ada yang berubah, maka akan menghasilkan permutasi lain.

Banyaknya permutasi pada $A = \{1, 2, 3]$ ada 6 jenis yang berbeda yaitu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Himpunan A disebut himpunan yang elemen-elemennya dipermutasikan. Apabila elemen-elemen yang dipermutasikan diketahui, permutasi dengan notasi 2 baris dapat dinyatakan dalam notasi siklis atau dalam bentuk sikel. Permutasi dapat diuraikan menjadi bagian-bagian yang elemen terakhirnya mempunyai bayangan elemen yang pertama. Setiap bagian disebut sikel. Suatu sikel yang terdiri atas satu anggota boleh tidak ditulis asalkan tidak mengubah permutasi. Sikel yang terdiri atas 2 anggota disebut transposisi. Transposisi Permutasi paling sederhana adalah siklus panjang 2. Siklus seperti ini juga disebut transposisi (Judson, 2009).

Contoh 2:

Ubahlah permutasi berikut menjadi sikel-sikel

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Jawaban:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ adalah $1 \longrightarrow 2$ (bayangan 1 adalah 2)

$2 \longrightarrow 3$ (bayangan 2 adalah 1)

$3 \longrightarrow 1$ (bayangan 3 adalah 1)

Jika ditulis dengan notasi satu baris, maka

$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$

$$\text{Jadi } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3)$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ adalah $1 \longrightarrow 3$ (bayangan 1 adalah 3)

$2 \longrightarrow 1$ (bayangan 2 adalah 1)

$3 \longrightarrow 2$ (bayangan 3 adalah 2)

Jika ditulis dengan notasi satu baris, maka

$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$

Jadi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 3 \quad 2)$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1)\ (2)\ (3)\ (4)$, untuk bentuk permutasi yang seperti ini harus ditulis lengkap.

<u>Contoh 3:</u>

Tuliskan sikel berikut dalam notasi 2 baris

a. $(1 \quad 3 \quad 4 \quad 2)$

b. $(1 \quad 3 \quad 5)$

c. $(1 \quad 5 \quad 4 \quad 3)$

<u>Jawaban:</u>

a. Jadi $(1 \quad 3 \quad 4 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

b. $(1 \quad 3 \quad 5) = (1 \quad 3 \quad 5)\ (2)\ (4)$

Jadi $(1 \quad 3 \quad 5) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

c. $(1 \quad 5 \quad 4 \quad 3) = (1 \quad 5 \quad 4 \quad 3)\ (2)$

Jadi $(1 \quad 5 \quad 4 \quad 3) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

1.3.2 Komposisi Permutasi atau Perkalian Permutasi

Permutasi adalah pemetaan atau fungsi. Maka permutasi dapat dikomposisikan satu dengan yang lain. Komposisi permutasi disebut juga perkalian permutasi, yang sesuai dengan komposisi fungsi dan komposisi transformasi, yang telah dipelajari di SMA.

Pada komposisi fungsi $f \circ g$, pengerjaannya fungsi g terlebih dahulu kemudian dilanjutkan dengan fungsi f. Sedangkan $f \circ g \neq g \circ f$.

<u>Contoh 6:</u>

Jika $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ tentukanlah $f \circ g$ dan $g \circ f$.

<u>Jawaban:</u>

$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

g dikerjakan dahulu dilanjutkan oleh f.

ambil satu anggota misalnya 1, oleh g maka $1 \longrightarrow 2$ dan oleh f, $\longrightarrow$

2 1

jadi oleh $f \circ g$ maka $1 \longrightarrow 1$

Skema pengerjaannya bisa diperhatika pada penyajian berikut ini:

$$\begin{array}{ccccc} & g & & f & \\ 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 1 \\ 2 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 3 \\ 3 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 2 \end{array}$$

Sehingga $f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Untuk hasil dari $g \circ f$ atau $g(f)$, skemanya sebagai berikut

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ 1 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 3 \\ 2 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 2 \end{array}$$

$$3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$$

Sehingga $g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Perhatikan ternyata bahwa $gf \neq fg$

Jadi kesimpulannya bahwa perkalian permutasi pada umumnya tidak komutatif

Contoh 5:

Tentukanlah perkalian permutasi berikut ini.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b. $(1 \ \ 3 \ \ 2 \ \ 4)\ (1 \ \ 4 \ \ 3)$

Jawaban:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b. Sikel harus diubah dahulu menjadi 2 baris dulu

$(1 \ \ 3 \ \ 2 \ \ 4)\ (1 \ \ 4 \ \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1.3.3 Grup Simetri dari Himpunan Permutasi

Perhatikan bahwa dari himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ terdapat 6 buah permutasi. Sehingga menjadi himpunan permutasi $P = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan hasil permutasi menjadi $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Kemudian apakah dengan operasi perkalian permutasi maka himpunan P dapat memenuhi syarat-syarat grup.

Teorema 3.1.2:

Himpunan permutasi merupakan grup dengan operasi perkalian permutasi, dan disebut Grup Simetris (Judson, 2009).

Bukti:

Misalknan $S_n = \{a, b, c, \dots, n\}$, dengan $a, b, c, \dots n$ merupakan permutasi dari n simbol.

Misalkan:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \\ I_1 & I_2 & I_3 & \dots & I_n \end{pmatrix}$$

dengan j_i, k_i, l_i adalah salah satu dari $1, 2, 3, \dots, n$

1) $ba = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{pmatrix}$

$b \in S_n, a \in S_n \implies ba \in S_n$

2) $c\,b = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \\ I_1 & I_2 & I_3 & \dots & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \\ I_1 & I_2 & I_3 & \dots & I_n \end{pmatrix}$

$(cb)\ a\ = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \\ I_1 & I_2 & I_3 & \dots & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ I_1 & I_2 & I_3 & \dots & I_n \end{pmatrix}$

$ba\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{pmatrix}$; lihat butir 1)

$c\ (ba)\ = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \\ I_1 & I_2 & I_3 & \dots & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ I_1 & I_2 & I_3 & \dots & I_n \end{pmatrix}$

Jadi $(cb)\ a\ =\ c\ (ba)$

3) S_n mempunyai elemen identitas $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots n \\ 1 & 2 & 3 & \dots n \end{pmatrix}$

$ai\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots j_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots n \\ 1 & 2 & 3 & \dots n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots j_n \end{pmatrix}\ =\ a$

4) Setiap anggota S_n mempunyai invers

Invers dari $a\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots j_n \end{pmatrix}$ adalah $a^{-1}\ = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \dots j_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots n \end{pmatrix}$

Karena $a^{-1}\,a = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \dots j_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots j_n \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots n \\ 1 & 2 & 3 & \dots n \end{pmatrix}$ = i

Demikian pula invers dari $p = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{pmatrix}$ adalah $p^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \end{pmatrix}$

Jadi terbukti bahwa himpunan permutasi terhadap operasi perkalian permutasi merupakan grup dan disebut grup simetri.

Sedangkan subgrup dari S_n disebut grup permutasi (Judson, 2009). Sebagai ilustrasi perhatikan contoh berikut.

Contoh 6:

Misalkan $G = \{i, a, b, c, d, e\}$ dengan operasi perkalian permutasi dan G subgrup dari S_n, diketahui elemen-elemen dari G sebagai berikut:

$i = (1)\,(2)\,(3)$ $\qquad c = (2\ \ 3)$

$a = (1\ \ 2\ \ 3)$ $\qquad d = (1\ \ 3)$

$b = (1\ \ 3\ \ 2)$ $\qquad e = (1\ \ 2)$

Perkalian permutasi mudah dikerjakan jika dinyatakan dengan notasi dua baris, yaitu

$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Beberapa perkalian permutasi terdapat sebagai berikut.

$$ab = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} = i$$

$$ac = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix} = e$$

$$bb = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix} = a$$

$$bc = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix} = d$$

$$cd = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix} = a$$

$$cb = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix} = d$$

Kerjakan perkalian dengan anggota yang lain. Hasil kalinya disajikan dalam tabel 11 berikut.

Tabel 11

$\circ$	i	a	b	c	d	e
i	i	a	b	c	d	e
a	a	b	i	e	c	d
b	b	i	a	d	e	c
c	c	d	e	i	a	b
d	d	e	c	b	i	a
e	e	c	d	a	b	i

Dalam bab sebelumnya telah dipelajari cara menentukan suatu grup dengan menggunakan tabel. Sifat yang dipenuhi oleh $(G, \circ)$ adalah

1) Tertutup, sebab dalam kotak hanya terdiri dari semua anggota G
2) Perkalian permutasi memenuhi sifat asosiatif, karena $a \circ (b \circ d) = (a \circ b) \circ d$; $e \circ (b \circ a) = (e \circ b) \circ a$; ...; $i \circ (c \circ d) = (i \circ c) \circ d$

3) G mempunyai elemen identitas i karena $a \circ i = i \circ a = a$; $i \circ b = b \circ i = b$; ...; $i \circ e = e \circ i = e$.
4) Elemen invers dapat ditunjukkan sebagai berikut:
$i^{-1} = i$ karena $i^{-1} \circ i = i \circ i^{-1} = i$; $c^{-1} = c$ karena $c^{-1} \circ c = c \circ c^{-1} = i$
$a^{-1} = b$ karena $a^{-1} \circ b = b \circ a^{-1} = i$; $d^{-1} = d$ karena $d^{-1} \circ d = d \circ d^{-1} = i$
$b^{-1} = a$ karena $b^{-1} \circ a = a \circ b^{-1} = i$; $e^{-1} = e$ karena $e^{-1} \circ e = e \circ e^{-1} = i$

Setiap anggota G mempunyai invers.

Karena $(G, \circ)$ memenuhi syarat grup, maka G merupakan Grup permutasi.

Yang digunakan untuk menyatakan anggota G tidak harus seperti di atas. Elemen G tersebut dapat juga dinyatakan dengan $G = \{a, b, c, d, e, f\}$.

1.3.4 Grup Simetri dari Bangun Geometri

Suatu bangun geometri dapat dimasukkan dalam bingkainya dengan transformasi sehingga bangun itu invariant atau berimpit dengan dirinya sendiri. Bangun geometri tersebut antara lain segitiga sama sisi, persegi, persegipanjang, segi-lima, segi-enam, lingkaran, tembereng dan belahketupat. Transformasi tersebut adalah rotasi atau pemutaran, dan refleksi atau pencerminan.

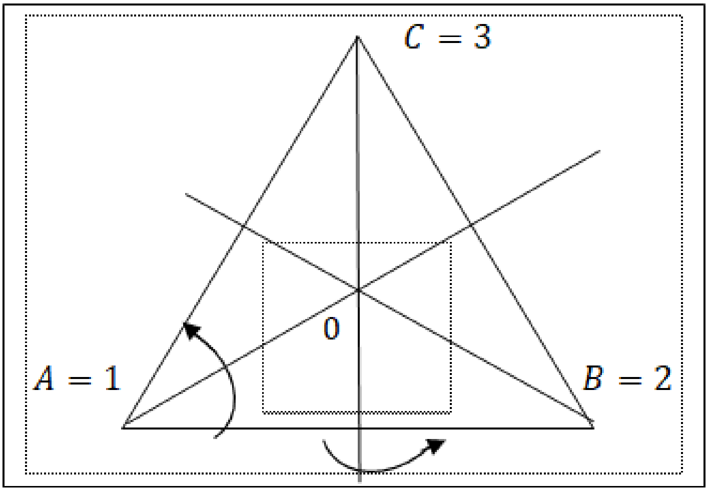
Simetri dari sebuah bangun geometri dapat diartikan sebagai penempatan kembali bangun tersebut sehingga dengan tepat menempati bingkainya semula. Pada hakikatnya, penempatan bangun geometri ke dalam bingkainya semula menyatakan suatu bentuk pemetaan.

Suatu grup yang elemen-elemennya merupakan permutasi dengan operasi komposisi disebut grup permutasi Secara khusus, jika sekumpulan permutasi dari suatu himpunan S yang tidak kosong merupakan sebuah grup dengan operasi komposisi fungsi ($\circ$), maka S disebut grup permutasi atau disebut grup simetri pada S (Ikenaga, 2017). Jika order dari S adalah n, maka grup simetri ini ditulis dengan S_n. Elemen-elemen sebuah grup simetri S_3 diperoleh melalui 6 cara penempatan segi tiga sama sisi pada bingkai semula. Grup semacam ini disebut juga grup dihedral segitiga, dan ditulis dengan notasi D_3 Secara umum, suatu elemen-elemen dari grup dihedral D_n adalah semua simetri dari segi-n beraturan, dan order dari D_n adalah $2n$.

<u>Contoh 7:</u>

Suatu segitiga sama sisi ABC dapat dimasukkan dalam bingkainya dalam 6 cara, sehingga segitiga ABC berimpit dengan dirinya sendiri. Dalam hal ini dapat dikatakan bahwa ada 6 transformasi sehingga segitiga sama sisi ABC invarian.

Keenam transformasi tersebut adalah tiga rotasi dan tiga refleksi.



Gambar 1 Segitiga Sama Sisi $\boldsymbol{ABC}$ dengan Transformasi

1) Ketiga rotasi itu adalah rotasi pada bidang dengan pusat O dan arah perputaran berlawanan dengan arah perputaran jarum jam yaitu:
   I rotasi dengan sudut $360°$
   R rotasi dengan sudut $120°$
   R^2 rotasi dengan sudut $240°$
2) Ketiga refleksi itu adalah:
   A refleksi terhadap sumbu A_x;
   B refleksi terhadap sumbu B_y;
   C refleksi terhadap sumbu C_z.

Himpunan $G = \{I, R, R^2, A, B, C\}$ dengan operasi komposisi transformasi merupakan grup dan disebut Grup Simetri dari segitiga sama sisi.

Transformasi geometri tersebut dapat dikaitkan dengan permutasi dengan 3 simbol. Pada titik sudut A, B, dan C berturut-turut diberi nomor $1, 2$, dan 3.

Setelah diputar dengan R posisi menjadi:

$A \longrightarrow B$; $B \longrightarrow C$; $C \longrightarrow A$ atau

$1 \longrightarrow 2$; $2 \longrightarrow 3$; $3 \longrightarrow 1$

Jadi $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Setelah diputar dengan R^2 posisi menjadi

$1 \longrightarrow 3$, $2 \longrightarrow 1$, $3 \longrightarrow 2$

Jadi $R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)\,(2)\,(3)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3)$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ \ 3)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ \ 2)$$

Komposisi transformasi dapat dilakukan sebagai berikut.

$$RR^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = I$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = R^2$$

Dengan cara yang sama dapat dibuat Tabel 12 komposisi tarnsformasi sebagai berikut

Tabel 12

$\circ$	I	R	R^2	A	B	C
I	I	R	R^2	A	B	C
R	R	R^2	I	C	A	B
R^2	R^2	I	R	B	C	A
A	A	B	C	I	R	R^2
B	B	C	A	R^2	I	R
C	C	A	B	R	R^2	I

$G = \{I, R, R^2, A, B, C\}$ sama saja dengan
$G = \{i, a, b, c, d, e\}$ pada grup simetri dari himpunan permutasi

$G = \{I, R, R^2, A, B, C\}$ dapat pula dinyatakan dengan $G = \{e, \omega, \Theta, \alpha, \beta, \gamma\}$ dengan

$e = (1)\,(2)\,(3)$ $\qquad$ $\alpha = (2 \quad 3)$

$\omega = (1 \quad 2 \quad 3)$ $\qquad$ $\beta = (1 \quad 3)$

$\Theta = (1 \quad 3 \quad 2)$ $\qquad$ $\gamma = (1 \quad 2)$

$\Theta\,\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \quad 2) = \gamma$

$\alpha\,\omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 3) = \beta$

Jika disajikan dalam tabel Cayley hasilnya seperti pada Tabel 13 berikut ini.

Tabel 13

$\circ$	e	ω	Θ	α	β	γ
e	e	ω	Θ	α	β	γ
ω	ω	Θ	e	γ	α	β

ϴ	ϴ	e	ω	β	γ	α
α	α	β	γ	e	ω	ϴ
β	β	γ	α	ϴ	e	ω
γ	γ	α	β	ω	ϴ	e

Contoh 8:

Operasi komposisi transformasi (refleksi dan rotasi) terdapat 8 (delapan) unsur yang menjadi elemen yang akan ditransformasi, yakni : $I, P_1, P_2, P_3, P_4, R_+,\ R_-,$ dan R^2, berturut-turut diwakili oleh matriks ordo 2 x 2 sebagai berikut:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, R_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, R^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dengan operasi komposisi transformasi dapat dilakukan secara aljabar dengan cara perkalian matriks-matriks yang bersesuaian sebagai berikut.

1. Transformasinya melalui : Pencerminan terhadap garis $y = x$ dari $L - 1$ menghasilkan bayangan $L - 2$, kemudian diteruskan dengan memutar $L - 2$ sejauh $90°$ searah dengan arah putaran jarum jam dengan pusat di titik $O(0,0)$ menghasilkan bayangan berupa L-3. Secara simbolik dapat dinyatakan sebagai: $(R_- \circ\ P_3\ )(L-1)\ = R_-\ (L-2) = L - 3 = P_1(L-1)$. Apabila dijabarkan dengan menggunakan matriks-matriks yang mewakilinya, maka simbol tersebut dapat diinterpretasikan menjadi:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}=$ $(L-3)=$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \forall i \in (L-1)$ dan $\forall t \in (L-3)$.

Maka hasilnya diperoleh:

$(R_{-} \circ P_3)(L-1) = P_1(L-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Selanjutnya dilakukan transformasi $L-1$ dicerminkan terhadap sumbu X menghasilkan $L-3$, kemudian diteruskan $L-3$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$, menghasilkan $L-4$, kemudian diteruskan $L-4$ dicerminkan terhadap sumbu Y menghasilkan $L-5$, atau dengan simbol : $(P_2 \circ P_4 \circ P_1)(L-1) = (P_2 \circ P_4)(L-3) = P_2(L-4) = L-5$.

   Dengan menggunakan matriks-matriks yang mewakilinya diperoleh penjabaran sebagai berikut:

   $$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

   $\forall i \in (L-1)$ dan $\forall t \in (L-3)$.

   Maka diperoleh:

   $(P_2 \circ P_4 \circ P_1)(L-1) = P_4(L-1)$

   $$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Transformasi selanjutnya $L-1$ dicerminkan terhadap sumbu X menghasilkan $L-3$, kemudian diteruskan, $L-3$ dicerminkan terhadap sumbu Y menghasilkan $L-6$, atau dinyatakan dalam bentuk notasi: $(P_2 \circ P_1)(L-1) = P_2(L-3)$. Dapat pula $L-1$ diputar dengan pusat $O(0,0)$ sejauh 180°, menghasilkan $L-6$, atau dinyatakan dalam bentuk simbol : $R^2(L-1)$. Jika dijabarkan menggunakan bentuk matriks menjadi:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_i\\ y_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_t\\ y_t\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_i\\ y_i\end{pmatrix}, \quad \forall i \in (L-1)$$

dan $\forall t \in (L-3)$

Sehingga diperoleh hasil dari: $(P_2 \circ P_1)(L-1) = R^2(L-1)$

yaitu $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

Berdasarkan hasil tiga contoh 1), 2), dan 3) di atas, analognya ditampilkan pada tabel Cayley komposisi transformasi melalui 8 (delapan) elemen yang disajikan pada Tabel 14 berikut ini.

Tabel 14

$\circ$	I	P_1	P_2	P_3	P_4	R_+	R_-	R^2
I	I	P_1	P_2	P_3	P_4	R_+	R_-	R^2
P_1	P_1	I	R^2	R_-	R_+	P_4	P_3	P_2
P_2	P_2	R^2	I	R_+	R_-	P_3	P_4	P_1
P_3	P_3	R_+	R_-	I	R^2	P_1	P_2	P_4

P_4	P_4	R_-	R_+	R^2	I	P_2	P_1	P_3
R_+	R_+	P_3	P_4	P_2	P_1	R^2	I	R_-
R_-	R_-	P_4	P_3	P_1	P_2	I	R^2	R_+
R^2	R^2	P_2	P_1	P_4	P_3	R_-	R_+	I

Dari operasi biner dalam komposisi transformasi pada Tabel 14 di atas, disajikan untuk himpunan $G = \{I, P_1, P_2, P_3, P_4, R_+, R_-, R^2\}$ ternyata memenuhi sifat tertutup, asosiatif, terdapat elemen identitas yaitu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dan setiap elemen di G mempunyai elemen invers, oleh karena itu memenuhi aksioma grup, jadi G terhadap operasi komposisi transformasi merupakan grup.

Masing-masing elemen di G mempunyai invers sebagai berikut:

Invers dari I adalah I

Invers dari P_1 adalah P_1

Invers dari P_2 adalah P_2

Invers dari P_3 adalah P_3

Invers dari P_4 adalah P_4

Invers dari R_+ adalah R_-

Invers dari R_- adalah R_+

Invers dari R^2 adalah R^2

Definisi 3.1.3

Misalkan σ permutasi dari himpunan A.

i. Untuk $a \in A$ orbit dari a terhadap σ disimbolkan $O_{a,\sigma}$ didefinisikan sebagai

$O_{a,\sigma} = \{\sigma^n(a) | n \in \mathbb{Z}\}$

ii. $O_{a,\sigma}$ untuk semua $a \in A$ dinamakan orbit dari σ (Aisah, 2017)

Contoh 9:

Misalkan $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ permutasi dari himpunan A.

Maka:

(ii) $O_{1,\sigma} = \{\sigma^n(1) | n \in \mathbb{Z}\} = \{1, 2, 4, 5\} = O_{2,\sigma} = O_{4,\sigma} = O_{5,\sigma}$

$O_{3,\sigma} = \{\sigma^n(3) | n \in \mathbb{Z}\} = \{3, 6\} = O_{6,\sigma}$

$O_{7,\sigma} = \{\sigma^n(7) | n \in \mathbb{Z}\} = \{7\}$

(iii) Orbit dari σ adalah $\{1, 2, 4, 5\}, \{3, 6\}, \{7\}$

Di dalam permutasi dikenalkan pula istilah *cycle* dan orbit dari suatu elemen himpunan permutasi. Hal ini dijelaskan pada Definisi 3.1.4 berikut.

Definisi 3.1.4

Suatu permutasi $\sigma \in S_n$ dinamakan *cycle* apabila σ paling banyak mempunyai orbit yang memuat elemen lebih dari satu. Panjang *cycle* didefinisikan sebagai banyaknya elemen dalam orbit terbesar (Aisah, 2017).

Berdasarkan Definisi 3.1.4, suatu permutasi $\sigma \in S_n$ dinamakan *cycle* apabila :

(i) σ tidak mempunyai orbit yang memuat lebih dari satu elemen, atau

(ii) σ hanya mempunyai satu orbit yang memuat lebih dari satu elemen

(Aisah, 2017).

<u>Contoh 10:</u>

1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ di S_6 mempunyai orbit $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{7\}$. σ bukan cycle karena terdapat dua orbit yang memuat lebih dari satu elemen yaitu $\{1, 2, 4, 5\}$ dan $\{3, 6\}$.
2) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ di S_5 mempunyai orbit $\{1, 4, 3\}$, $\{2\}, \{5\}$. σ merupakan cycle karena tepat mempunyai satu orbit yang memuat lebih dari satu elemen yaitu $\{1, 4, 3\}$.
3) $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ di S_4 mempunyai orbit $\{1\}$, $\{2\}, \{3\}, \{4\}$. σ merupakan *cycle* karena tidak mempunyai orbit yang memuat lebih dari satu elemen.

Suatu *cycle* disimbolkan dengan $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ yang berarti $a_1 \to a_2, a_2 \to a_3\ \ldots, a_n \to a_1$. Sedangkan *cycle* pada contoh 3) $\beta \in S_4$ adalah $\beta = (1), \beta = (2), \beta = (3), \beta = (4)$. *Cycle* dalam suatu permutasi terbentuk dari orbit yang dihasilkan dari permutasi tersebut. Di dalam *cycle* harus diperhatikan urutannya, sedangkan pada orbit urutan tidak diperhatikan, jadi pada contoh 2) orbit $\{1, 4, 3\} = \{1, 3, 4\} = \{4, 1, 3\}$, akan tetapi untuk *cycle* $(1, 4, 3)$ sama dengan $(3, 1, 4)$ dan sama pula dengan $(4, 3, 1)$ akan tetapi tidak disimbolkan dengan *cycle* $(1, 3, 4)$. Dua buah *cycle* dinamakan saling asing apabila berasal dari dua orbit yang saling asing.

Definisi 3.1.5

Suatu *cycle* dengan panjang 2 dinamakan transposisi (Aisah, 2017)

<u>Contoh 11:</u>

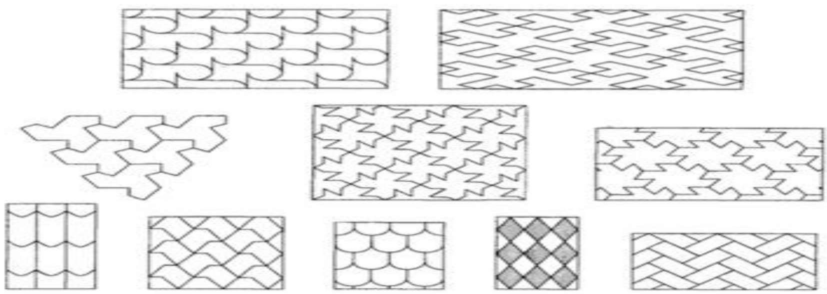
Sikel $\alpha = (3, 5) \in S_6$ merupakan transposisi. Dalam S_6, $\alpha = (3, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Setiap *cycle* dapat dinyatakan sebagai hasil kali transposisi-transposisi dengan aturan $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_n)\,(a_1, a_{n-1}) \dots (a_1, a_2)$

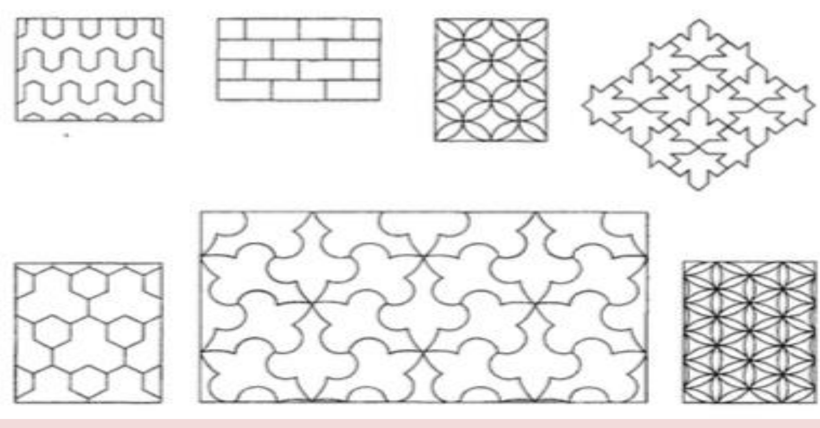
Untuk *cycle* identitas dapat dinyatakan sebagai $i = (1,2)(2,1) = (1,3)(3,1)$dan $(2,5)(5,2)$ sebagainya.

Aplikasi Grup Simetri

Aplikasi grup permutasi (Shen, 2017), misalnya Grup wallpaper atau grup simetri bidang adalah grup isometri yang bekerja pada pola berulang dua dimensi, misalnya Wallpaper, biasanya berisi pola berulang. Terdapat banyak sekali jenis wallpaper (dengan pola berulang), namun ahli matematika Rusia Evgraf Fedorov membuktikan bahwa hanya ada 17 pola yang mungkin, dengan demikian ada 17 grup wallpaper yang berbeda. Karya-karya indah dari seni wallpaper menggambarkan dengan sangat baik pada aspek-aspek teori grup dari grup-grup simetri. Selain itu, mempelajari grup simetri membantu untuk memahami batasan geometris yang harus ditemukan oleh para seniman untuk menciptakan pola. Pada gambar 16 dan 17 di bawah ini contoh Wallpaper (Shen, 2017)



Gambar 2 Contoh Karya Seni Wallpaper



Gambar 3 Contoh Karya seni Wallpaper

1.3.5 Soal Latihan

Kerjakanlah soal di bawah ini sebagai latihan!

1) Ubahlah permutasi berikut menjadi notasi siklis

   a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

2) Ubahlah permutasi berikut menjadi notasi 2 baris

   a. $(1\ \ 3\ \ 4)(5\ \ 2\ \ 6)$ b. $(1\ \ 3\ \ 4\ \ 2\ \ 5)$

3) Tentukan hasilkali permutasi berikut dan tentukan inversnya

   a. $(1\ 3\ \ 4)(1\ \ 2\ \ 4)$ b. $(1\ \ 2\ \ 3\ \ 5)(3\ \ 2\ \ 5\ \ 1\ \ 4)$

4) $G = \{i, p, q, r\}$ dengan $i = (1)(2)(3)(4)$, $p = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$

   $q = (1\ \ 3)\ (2\ \ 4)$ dan $r = (1\ \ 4\ \ 3\ \ 2)$

   Tunjukkan(G, ∘) grup dengan ∘ perkalian permutasi

5) Suatu bujursangkar $PQRS$ dapat dimasukkan dalam bingkai-bingkai dengan 8 cara, sehingga bujursangkar $PQRS$ invarian. Transformasi itu adalah:

   a) Rotasi pada bidang dengan pusat O perpotongan diagonal dan arah perputaran berlawanan arah dengan arah perputaran jarum jam, yaitu:

      I rotasi dengan sudut $360°$

      R rotasi dengan sudut $90°$

      R^2 rotasi dengan sudut $180°$

      R^3 rotasi dengan sudut $270°$

   b) Refleksi atau pencerminan, yaitu:

      X refleksi terhadap sumbu X

Y refleksi terhadap sumbu Y

P refleksi terhadap sumbu PR

Q refleksi terhadap sumbu QS

Buatlah tabel komposisi transformasi pada $G = \{I, R, R^2, R^3, X, Y, P, Q\}$. Jelaskan bahwa $(G, \circ)$ merupakan grup.

1.3.6 Petunjuk Pengerjaan

1) a. $(1\ \ 2)(3)(4\ \ 5)$ b. $(1\ \ 4\ \ 3\ \ 5\ \ 6)\ (2)$
2) a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
3) a. hasil perkalian $= (1\ \ 2)(3\ \ 4)$, hasil inversnya $(1\ \ 2)(3\ \ 4)$

   b. hasil perkalian $= (1\ \ 4\ \ 5\ \ 2)$, hasil inversnya $(1\ \ 2\ \ 5\ \ 4)$
4) setelah dilakukan pembuktian pada himpunan $G = \{i, p, q, r\}$ terhadap operasi biner $\circ$ pada Tabel 15 menunjukkan grup, karena memenuhi sifat: tertutup, asosiatif, mempunyai elemen identitas yaitu i, dan inversnya i adalah i, inversnya p adalah r, inversnya q adalah q, inversnya r adalah p.

Tabel 15

$\circ$	i	p	q	r
i	i	p	q	r
p	p	q	r	i

q	q	r	i	p
r	r	i	p	q

5) Setelah dilakukan dengan operasi biner $\circ$ diperoleh hasil yang disajikan pada Tabel 16 sebagai berikut:

Tabel 16

$\circ$	I	R	R^2	R^3	X	Y	P	Q
I	I	R	R^2	R^3	X	Y	P	Q
R	R	R^2	R^3	I	P	Q	Y	X
R^2	R^2	R^3	I	R	Y	X	Q	P
R^3	R^3	I	R	R^2	Q	P	X	Y
X	X	Q	Y	P	I	R	R^2	R^3
Y	Y	P	X	Q	R^2	R^3	I	R
P	P	X	Q	Y	R	R^2	R^3	I
Q	Q	Y	P	X	R^3	I	R	R^2

Berdasarkan hasil operasi pada Tabel 16 di atas, memenuhi sifat tertutup, asosiatif, mempunyai elemen identitas I, dan setiap elemen mempunyai invers, inversnya I adalah I, inversnya R adalah R^3, inversnya R^2 adalah R^2, inversnya R^3 adalah R, inversnya X adalah X, inversnya Y adalah Y, inversnya P adalah P, dan inversnya Q adalah Q. Jadi kesimpulannya $(G,\circ)$ merupakan grup.

Kedua jenis permutasi tersebut di atas termasuk jenis rotasi dan jenis refleksi membentuk grup dihedral ketiga yang disimbolkan dengan D_3. Rotasi dan refleksi pada segi-beraturan membentuk grup dihedral ke-n dan disimbolkan dengan D_n.

1.3.7 Rangkuman

1. Istilah permutasi dalam grup bukan merupakan permutasi hasil bagian dari materi kombinasi, akan tetapi permutasi merupakan pemetaan satu-satu dari ke dua daerah asal dan daerah kodomain.
2. Suatu permutasi adalah pemetaan satu lawan satu atau fungsi bijektif dari himpunan n simbol ke himpunan itu sendiri.
3. Terdapat dua notasi permutasi yaitu: notasi dua baris dan siklis
   (i) Notasi dua baris, misalnya $\begin{pmatrix} 1 & 2 \dots. & n \\ j_1 & j_2 \dots. & j_n \end{pmatrix}$ dengan j salah satu dari $1, 2, \dots, n$.
   (ii) Notasi siklis, misalnya (1 2 3 ... n)
4. Perkalian permutasi menggunakan pola komposisi fungsi, misalnya $f.g$ maka yang dikerjakan dahulu yang fungsi g nya dulu baru dipetakan ke fungsi f dengan menggunakan notasi dua baris.
5. Permutasi pada bangun geometri digunakan system transformasi yang meliputi: rotasi dan refleksi pada bangun-bangun geometri yang sifatnya simetris, misalnya pada bangun segitiga sama sisi, segitiga samak kaki, bangun datar persegi, persegipanjang, belahketupat, dan jajargenjang.

1.3.8 Tes Formatif 1

1) Misalkan S_5 adalah grup permutasi atas $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Banyaknya unsur berorde 2 di S_5 adalah ….
   A. Banyak unsur berorde 2 di S_5 adalah $20 + 10 = 30$.
   B. Banyak unsur berorde 2 di S_5 adalah $25 + 10 = 35$.
   C. Banyak unsur berorde 2 di S_5 adalah $30 + 10 = 40$.
   D. Banyak unsur berorde 2 di S_5 adalah $35 + 10 = 45$.
2) Diketahui grup permutasi S_4. Order dari $(1, 2, 3, 4) \in S_4$ adalah…. (order dari $a \in G$ adalah bilangan asli terkecil yang memenuhi $a^n = e$ dengan e elemen identitas)

A. order dari S_4 adalah 4

B. order dari S_4 adalah 8

C. order dari S_4 adalah 2

D. order dari S_4 adalah 3

3) Diketahui: fungsi $k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ dan fungsi $j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Hasil dari k^{-1} adalah .....

A. $k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

B. $k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

C. $k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

D. $k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

4) Berdasarkan soal nomor 3), hasil dari j^{-1} adalah.......

A. $j^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

B. $j^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

C. $j^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

D. $j^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

5) Berdasarkan soal nomor 3), hasil dari kj adalah ....

A. $kj = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

B. $kj = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

C. $kj = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

D. $kj = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

6) Berdasarkan soal nomor 3), hasil dari $(kj)^{-1}$ adalah ....

A. $(kj)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

B. $(kj)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

C. $(kj)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

D. $(kj)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

7) Dari soal nomor 3), hasil dari $(k^{-1}j^{-1})$ adalah ....

A. $(k^{-1}j^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

B. $(k^{-1}j^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

C. $(k^{-1}j^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

D. $(k^{-1}j^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

8) Misalkan $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ di S_8.

Tentukan $O_{a,\sigma} = \{\sigma^n(a) | n \in \mathbb{Z}\} = \{a\}$ dan Orbit dari !

A. $O_{1,\sigma} = \{\sigma^n(1) | n \in \mathbb{Z}\} = \{1,3,6\} = O_{3,\sigma} = O_{6,\sigma}$

B. $O_{1,\sigma} = \{\sigma^n(1) | n \in \mathbb{Z}\} = \{1,2,3,6\} = O_{3,\sigma} = O_{6,\sigma}$

C. $O_{1,\sigma} = \{\sigma^n(1) | n \in \mathbb{Z}\} = \{1,2,3,5,6\} = O_{3,\sigma} = O_{6,\sigma}$

D. $O_{1,\sigma} = \{\sigma^n(1) | n \in \mathbb{Z}\} = \{1,2,3,6,8\} = O_{3,\sigma} = O_{6,\sigma}$

9) Hasil kali transposisi dari $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$ adalah .....

A. $(1,2)(2,1)(2,4)(3,6)(4,2)(5,3)(5,6)$

B. $(1,2)(2,1)(2,4)(3,6)(4,2)(3,5)(6,5)$

C. $(1,2)(2,1)(2,4)(3,6)(4,2)(5,3)(6,5)$

D. $(1,2)(2,1)(4,2)(3,6)(4,2)(5,3)(6,5)$

10) Hasil kali transposisi dari

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in S_8$ adalah…..

A. $(1,7)(2,5)(3,1)(4,2)(5,4)(6,8)(7,3)(8,6)$

B. $(1,7)(2,5)(3,1)(4,2)(5,4)(6,8)(7,3)(6,8)$

C. $(1,7)(2,5)(3,1)(4,2)(5,4)(6,8)(3,7)(8,6)$

D. $(1,7)(2,5)(1,3)(4,2)(5,4)(6,8)(7,3)(8,6)$

1.3.9 Penilaian

Tingkat Penguasaan = $\dfrac{\text{Jumlah jawaban benar}}{10} \times 100\%$

Kategori Penilaian yang dicapai:

$90\% - 100\%$ = baik sekali

$80\% - 89\%$ = baik

$70\% - 79\%$ = cukup

$< 70\%$ = kurang

Jika Anda mencapai tingkat penguasaan $\geq 80\%$, maka Anda dapat melanjutkan kegiatan belajar 2 pada modul 2 dan Anda mendapat penilaian yang bagus. Namun jika Anda belum mencapai tingkat penguasaan $\geq 80\%$, maka Anda disarankan mengulangi pada kegiatan belajar 1 modul 2 dengan penekanan pada materi yang belum Anda pahami dengan baik.

1.3.10 Kunci Jawaban

1) C
2) A
3) A
4) C
5) D
6) B
7) D
8) A
9) C
10) A

1.3.11 Daftar Pustaka

Ayres, F. & Jaisingh, L.R. 2004. *Theory And Problems of Abstract Algebra*. Second Edition. New York: Schaum's Outline Series.

Aisah, I. 2017. *Modul Struktur Aljabar 1*. Program Studi S-1Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Padjadjaran. http://math.fmipa.unpad.ac.id/wp-content/uploads/2018/02/BAHAN-AJAR-STRUKTUR-ALJABAR-1.pdf.

Davis, T. 2003. *Permutation Groups*. http://www.geometer.org/mathcircles/ perm.pdf.

Dixon, J. D., & Mortimer, B. 1996. Examples and Applications of Infinite Permutation Groups. *Graduate Texts in Mathematics, 274–301*. doi:10.1007/978-1-4612-0731-3_9.

Gallian, J.A. 2017. *Contemporary Abstract Algebra*. Ninth Edition. Australia, Brazil, Mexico, Singapore, United Kingdom, United States: Copyright 2017 Cengage Learning.

Ikenaga, B. 2017. *Permutation Groups*. http://sites.millersville.edu/bikenaga/ abstract-algebra-1/permutations/permutations.pdf.

Lenstra, H. 2007. *Permutation Groups*. Universiteit Leiden. http://websites. math.leidenuniv.nl/algebra/permutations.pdf.

McKernan, J. 2013. *Permutation Groups*. MIT OCW: 18.703 Modern Algebra. Spring. https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-703-modern-algebra-spring-2013/lecture-notes/MIT18_703S13_pra_l_5.pdf.

McWilliams, B. & Donahue, J. 2006. *Applications of Permutation Groups. Department of Mathematics and Statistics*. Winona State University. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1. 124.1539&rep=rep1&type=pdf.

Milne, J.S. 2017. *Group Theory*. Version 3.14. https://www.jmilne.org/math/ CourseNotes/GT.pdf.

Mujiasih. 2010. Aplikasi Struktur Grup Yang Terkait Dengan Komposisi Transformasi Pada Bangun Geometri. *Jurnal Hasil Riset*. https://www.e-jurnal.com/2014/04/aplikasi-struktur-grup-yang-terkait.html.

Pinter, C.C. 2010. *A Book Of Abstract Algebra*. Second Edition. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.

Riskiyah, Wasiatun. 2016. *Enkripsi dan dekripsi pesan menggunakan grup simetri untuk mengamankan informasi.*

Undergraduate thesis, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim. http://etheses.uin-malang.ac.id/3541/ .

Sadrakh, R. 2013. *Introduction to Grups*. Math is Fun. https://www.mathsisfun. com/algebra/index.html.

Shen, C. 2017. *Two Applications Of Group Theory*. https://www. mathinactionjournal.com/two-applications-of-group-theory.

Siksek, S. 2015. Introduction to Abstract Algebra. London: Mathematics Institute University of Warwick.

Singh, R. 2016. Permutation Group. ResearchGate. Department of Mathematics University of Delhi, India. https://www.researchgate.net/publication/ _Permutation_Groups.

Zakablukov, D.V. 2018. Application of Permutation Group Theory in Reversible Logic Synthesis. https://arxiv.org/abs/1507.04309v5.

Oggier, and Bruckstein. 2013.Groups and Symmetries. Division of Mathematical Sciences, Nanyang Technological University, Singapore http://www1.spms. ntu.edu.sg/~frederique/groupsymmetryws-shrunk.pdf.