DERET FOURIER, KONSEP DAN TERAPANNYA PADA PERSAMAAN GELOMBANG SATU DIMENSI

Skripsi

Disajikan sebagai salah satu syarat

Untuk mencapai gelar sarjana

Disusun Oleh:

Nama	: Irpan Susanto
NIM	: 4150406547
Prodi	: Matematika S1
Jurusan	: Matematika

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2011

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Deret Fourier, Konsep dan Terapannya Pada Persamaan Gelombang Satu Dimensi

Disusun oleh

Nama : Irpan Susanto

NIM : 4150406547

Telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES pada tanggal 18 Februari 2011.

Panitia:

Ketua	Sekretaris
Dr. Kasmadi Imam Supardi, M.S	**Drs. Edy Soedjoko, M.Pd**
NIP.195111151979031001	NIP. 195604191987031001

Ketua Penguji

Dr. Rochmad, M.Si.
NIP. 195711161987011001

Anggota Penguji/ Pembimbing Utama	Anggota Penguji/ Pembimbing Pendamping
Dr. Masrukan, M.Si.	**Dr. Kartono, M.Si.**
NIP. 196604191991021001	NIP. 195602221980031002

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa yang tertulis di dalam skripsi ini benar-benar hasil karya sendiri bukan jiplakan dari karya orang lain, baik sebagian ataupun seluruhnya. Pendapat atau karya orang lain yang terdapat dalam skripsi ini dikutip atau dirujuk berdasarkan kode etik ilmiah.

Semarang, Februari 2011

Irpan Susanto

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

Motto

- " …Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah suatu kaum sebelum mereka mengubah keadaan diri mereka sendiri… "(Q. S Ar Ra'd: 11)
- Pahlawan bukanlah orang yang berani menetakkan pedangnya ke pundak lawan, tetapi pahlawan sebenarnya ialah orang yang sanggup menguasai dirinya dikala ia marah (Nabi Muhammad Saw).
- Dan barang siapa menempuh jalan untuk mencari ilmu niscaya Allah akan memudahkan baginya jalan masuk surga" (Al Hadits).
- Niat yang baik adalah kehendak atau kemauan baik untuk diri sendiri dan orang lain.

Karya kecil ini untuk:

- Ayah dan Ibu yang slalu mengiringiku dengan doa, cinta dan pengorbanan
- Keluarga besarku yang selalu memotivasiku
- Adikku, kakak sepupu, keponakanku dan semua keluargaku yang telah mendukungku.
- Teman-teman seperjuanganku di kos rumah prestasi kholid bin walid Pesantren Basmala Indonesia.
- Teman-teman math '06 yang akan selalu kurindukan
- Teman-teman satu perjuangan organisasi TPAI

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat allah SWT yang Maha Esa yang telah melimpahkan rakhmat dan Hidayahnya sehingga skripsi dengan judul **"Deret Fourier, Konsep dan Terapannya Pada Persamaan Gelombang Satu Dimensi"**, ini dapat terselesaikan.

Dalam penulisan skripsi ini penulis banyak mendapat bantuan dari berbagai pihak, untuk itu perkenankanlah penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Sudijono Sastroatmodjo, M.Si, Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Dr. Kasmadi Imam Supardi, M.S, Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam UNNES.
3. Drs. Edy Soedjoko, M.Pd, Ketua Jurusan Matematika dan Ketua Program Studi S1 Matematika Jurusan Matematika FMIPA UNNES.
4. Dr. Masrukan, M.Si, dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan bimbingan, arahan dan motivasi dalam penyusunan skripsi.
5. Dr. Kartono, M.Si, dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan bimbingan, arahan dan motivasi dalam penyusunan skripsi.
6. Semua sahabatku yang berada di Pesantren Basmala Indonesia yang memberikan contoh kebaikan dalam segala aktifitas.
7. Teman-temanku di kost Kholid bin Walid dan Tutorial Pendidikan Agama Islam.
8. Semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini masih banyak kekurangan. Untuk itu itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menyempurnakan skripsi. Semoga dengan selesainya skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amin

Semarang, Pebruari 2011

Penulis

ABSTRAK

Irpan Susanto. 4150406547. *Deret Fourier, Konsep dan Terapannya Pada Persamaan Gelombang Satu Dimensi*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Pembimbing I: Dr. Masrukan, M.Si, Pembimbing II: Dr. H. Kartono, M.Si.

Deret Fourier adalah suatu deret yang mengandung suku-suku sinus dan cosinus yang digunakan untuk merepresentasikan fungsi-fungsi periodik secara umum. Selain itu, deret ini sering dijadikan sebagai alat bantu dalam menyelesaikan persamaan diferensial, baik persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial. Salah satu permasalahn yang memerlukan bantuan deret Fourier adalah solusi dari persamaan gelombang satu dimensi. Persamaan gelombang merupakan salah satu dari bentuk persamaan diferensial parsial yang memiliki tiga kondisi batas yaitu Dirichlet, Neuman, dan Robin. permasalahan yang akan diteliti adalah (a) Bagaimana konversi deret Fourier dalam solusi umum persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang dimensi satu untuk kondisi Dirichlet, Neuman, dan campuran (Dirichlet dan Neuman) dengan menggunakan pemisahan variabel; (b) Bagaimana visualisai deret Fourier dalam penerapan solusi persamaan gelombang dimensi satu.

Tujuan dari penelitian ini adalah (a) untuk mengetahui konversi deret Fourier dalam solusi umum persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang dimensi satu dalam kondisi Dirichlet, kondisi Neuman, dan kondisi campuran; dan (b) untuk mengetahui visualisasi deret Fourier dalam penerapan solusi persamaan gelombang dimensi satu. Metode penulisan skripsi ini yaitu kajian pustaka dengan langkah-langkah: (a) menentukan masalah; (b) perumusan masalah; (c) studi pustaka; (d) analisis dan pemecahan masalah; dan (e) penarikan kesimpulan.

Diperoleh hasil (1) solusi persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang satu dimensi untuk kondisi Dirichlet, Neuman, dan campuran yang masing-masing memiliki penyelesaian berbeda; dan (2) penerapan deret Fourier dalam penyelesaian persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang satu dimensi dapat di visualisaikan dalam bentuk grafik pergerakan gelombang yang membentuk solusi periodik dengan periode 2π, hal ini disebabkan karena karakteristik dari gelombang adalah bersifat periodik. Disarankan adanya penelitian lebih lanjut tentang penerapan deret Fourier untuk permasalahan daya kekuatan gelombang pada persamaan gelombang satu dimensi dalam kehidupan sehari-hari.

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL. i
PENGESAHAN ii
PERNYATAAN. iii
MOTTO DAN PERSEMBAHAN. iv
KATA PENGANTAR v
ABSTRAK. vi
DAFTAR ISI. vii
DAFTAR GAMBAR ix
DAFTAR LAMPIRAN. x
BAB I PENDAHULUAN. 1

1.1 Latar Belakang. 1
1.2 Permasalahan. 4
1.3 Tujuan Penelitian. 4
1.4 Manfaat Penelitian 4
1.5 Sistematika Penulisan Skripsi 5

BAB II LANDASAN TEORI. 7

2.1 Fungsi. 7
2.2 Persamaan Diferensial Biasa. 14
2.3 Persamaan Diferensial Parsial. 20
2.4 Program Maple. 24
2.5 Deret Fourier. 25
2.6 Masalah Nilai Awal dan Syarat Batas. 31

BAB III METODE PENELITIAN. 33
3.1 Menentukan Masalah. 33
3.2 Perumusan Masalah. 33

3.3 Studi Pustaka. 33
3.4 Analisis dan Pemecahan Masalah. 34
3.5 Penarikan Kesimpulan. 34

BAB IV PEMBAHASAN. 35

4.1 Solusi Umum Persamaan Diferensial Parsial Pada Persamaan Gelombang Dimensi Satu dengan Pemisahan Variabel. 35
4.2 Visualisasi Deret Fourier Dalam Penerapan Solusi Persamaan Gelombang Dimensi Satu 51

BAB V PENUTUP. 71

5.1 Kesimpulan. 71
5.2 Saran. 73

DAFTAR PUSTAKA. 74

LAMPIRAN 75

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

1. Gambar 1. Langkah-langkah mencari solusi masalah 2
2. Gambar 2. Fungsi $f : A \to B$ 7
3. Gambar 3. Fungsi $f : A \to B$ sebagai suatu pemetaan. 8
4. Gambar 4. Plot persamaan gelombang Contoh 1 dengan kondisi Dirichlet pada berbagai waktu $t = 0$ hingga $t = 0{,}0009$ 55
5. Gambar 5. Plot persamaan gelombang Contoh 1 dengan kondisi Dirichlet pada berbagai waktu $t = 0$ hingga $t = 0{,}09$ 56
6. Gambar 6. Plot persamaan gelombang Contoh 2 dengan kondisi Neuman pada berbagai waktu $t = 0$ hingga $t = 0{,}0009$ 62
7. Gambar 7. Plot persamaan gelombang Contoh 2 dengan kondisi Neuman pada berbagai waktu $t = 0$ hingga $t = 0{,}09$ 63
8. Gambar 8. Plot persamaan gelombang Contoh 3 dengan kondisi Campuran pada berbagai waktu $t = 0$ hingga $t = 0{,}0009$ 68
9. Gambar 9. Plot persamaan gelombang Contoh 3 dengan kondisi Campuran pada berbagai waktu $t = 0$ hingga $t = 0{,}009$ 69

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran **Halaman**

Lampiran 1. Plot gambar solusi Contoh 4.1 dengan program Maple 75

Lampiran 2. Plot gambar solusi Contoh 4.2 dengan program Maple 78

Lampiran 3. Plot gambar solusi Contoh 4.3 dengan program Maple 81

BAB I

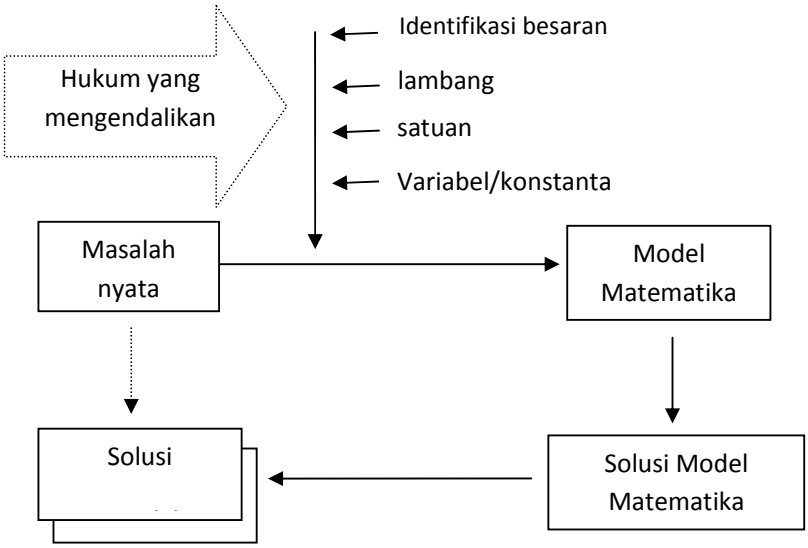
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika bersifat universal yang sangat erat kaitannya dengan kehidupan nyata. Metode-metode matematika sangat dibutuhkan dalam menyelesaikan masalah-masalah kehidupan nyata yang bersifat kuantitatif. Matematika dikatakan sebagai ilmu yang tumbuh dan berkembang dalam setiap bidang ilmu pengetahuan. Matematika adalah salah satu cabang ilmu pengetahuan yang konsep dasarnya untuk pengembangan ilmu-ilmu yang lain. Matematika senantiasa dikaji dan dikembangkan agar dapat dimanfaatkan dalam aspek penerapannya.

Di dalam dunia nyata kadang terdapat masalah-masalah yang sukar diselesaikan dalam sistemnya. Untuk menyelesaikan masalah tersebut perlu disusun suatu pemodelan matematika yang mirip dengan keadaan sistemnya. Masalah nyata harus dikenali terlebih dahulu melalui beberapa tahapan. Pertama, mengidentifikasi semua besaran yang terlibat. Kedua, memberi lambang pada setiap besaran yang teridentifikasi. Ketiga, menentukan satuan setiap lambang yang ada dengan menganut suatu sistem satuan. Keempat, memilah-milah dari setiap lambang tersebut, mana yang konstanta dan mana yang variabel. Dan kelima, menentukan hukum yang mengendalikan pada masalah nyata tersebut. Dengan hukum yang mengendalikan masalah nyata tersebut menentukan hubungan antara variabel dan konstanta, yang disebut dengan model matematika.

Model matematika dapat berupa persamaan, pertidaksamaan, persamaan diferensial, dan sebagainya. Kemudian dengan memanfaatkan teori-teori dalam matematika diperoleh solusi model. Dengan menginterpretasikan solusi model ditentukan solusi masalah. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada bagan di Gambar 1.



Gambar 1. Langkah-langkah mencari solusi masalah (Chotim, 2008:236**)**

Setelah suatu model matematika diubah dalam bentuk persamaan, langkah selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan tersebut dengan menentukan solusinya. Solusi persamaan adalah suatu nilai yang memenuhi persamaan tersebut. Artinya, jika nilai itu disubstitusikan ke dalam persamaan tersebut, diperoleh suatu pernyataan yang benar.

Materi dalam kalkulus yang diantaranya mempelajari teorema dasar kalkulus, integral tak wajar, konsep deret Fourier dan lain-lain. Konsep deret Fourier banyak digunakan untuk mengembangkan matematika seperti

penyelasaian persamaan diferensial. Deret Fourier adalah deret tak berhingga untuk menggambarkan fungsi periodik yang dinyatakan dalam suku-suku yang sederhana. Deret Fourier banyak digunakan dalam mencari solusi pendekatan dari persamaan differensial biasa dan parsial. Deret Fourier lebih universal dibandingkan deret Taylor, karena diskontinuitas pada fungsi periodik bisa didekati dengan deret Fourier dan tidak bisa dilakukan oleh deret Taylor. Hal ini disebabkan karena dalam banyak permasalahan praktis yang terkait dengan fungsi periodik dapat diselesaikan dengan menggunakan deret ini dan tidak ditemukan pada deret Taylor. Oleh karena itu, deret Fourier diterapkan lebih luas pada beberapa analisis numerik.

Dari uraian di atas, maka dapat dilakukan pembahasan lebih lanjut tentang deret Fourier dengan bekerja melalui sifat-sifat analisisnya. Dari latar belakang diatas maka judul skripsi yang akan diajukan adalah deret Fourier, konsep dan terapannya pada persamaan gelombang satu dimensi. Selain itu penelitian ini diharapkan dapat mempermudah mahasiswa yang ingin mempelajari mengenai deret Fourier dan terapan pada bidang lainnya. Penulis juga ingin meningkatkan cara berfikir dan bernalar, sehingga dapat digunakan untuk mengembangkan kemampuan dalam belajar matematika yang lebih lanjut.

1.2 Permasalahan

Berdasarkan uraian pada latar belakang di atas, dapat dikemukakan rumusan permasalahan yang akan diteliti adalah sebagai berikut.

Bagaimana konversi deret Fourier dalam solusi umum persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang dimensi satu untuk kondisi Dirichlet, Neuman, dan Campuran dengan menggunakan pemisahan variabel?

1. Bagaimana visualisai deret Fourier dalam penerapan solusi persamaan gelombang dimensi satu ?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengetahui tentang konversi deret Fourier dalam solusi umum persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang dimensi satu untuk kondisi Dirichlet, Neuman, dan Campuran.
2. Mengetahui visualisasi deret Fourier dalam penerapan solusi persamaan gelombang satu dimensi.

1.4 Manfaat Penelitian

Sehubungan dengan masih minimnya pengetahuan yang dimiliki penulis, penelitian ini menjadi pendorong bagi penulis untuk meningkatkan pengetahuan lebih banyak lagi khususnya pada bidang deret fourier. Penelitian ini dapat menjadi manfaat sebagai tambahan materi untuk bahan perkuliahan bagi mahasiswa dan dapat menambah wawasan bagi pembaca tentang penerapannya dalam menyelesaikan persamaan gelombang satu dimensi.

1.5 Sistematika Penulisan Skripsi

Secara garis besar sistematika penulisan skripsi ini dibagi menjadi 3 bagian, yaitu: bagian awal, bagian isi, dan bagian akhir skripsi. Untuk memberikan gambaran yang jelas tentang skripsi ini dan memudahkan pembaca

dalam menelaah isi skripsi ini maka skripsi ini disusun secara sistematis yaitu sebagai berikut:

1. Bagian Awal skripsi

   Berisi halaman judul, halaman pengesahan, halaman motto dan persembahan, kata pengantar, daftar isi, daftar tabel, daftar lampiran dan abstrak.

2. Bagian inti yang terdiri atas lima bab. Kelima bab tersebut adalah sebagai berikut:

   a. Bab I : Pendahuluan

      Pada bab pendahuluan ini dikemukakan latar belakang masalah, permasalahan, penegasan istilah, tujuan dan manfaat penelitian dan sistematika penulisan skripsi.

   b. Bab II: Landasan Teori

      Landasan teori merupakan teori-teori yang mendasari pemecahan dari permasalahan yang disajikan. Landasan Teori ini terdiri dari: Fungsi, Persamaan Diferensial Biasa, Persamaan Diferensial Parsial, Program Maple, Deret Fourier, Masalah Nilai Awal dan Syarat Batas.

   c. Bab III : Metode Penelitian.

      Memaparkan tentang prosedur dan langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi menemukan masalah, perumusan masalah, studi pustaka, analisis dan pemecahan masalah, dan penarikan kesimpulan.

   d. Bab IV : Hasil Penelitian dan Pembahasan

      Dalam bab ini berisikan pembahasan dan analisis dari penelitian.

e. Bab V : Penutup

Berisi tentang kesimpulan dari hasil pembahasan dan saran yang ditujukan untuk pembaca umumnya dan bagi penulis sendiri khususnya.

3. Bagian Akhir Skripsi

Bagian akhir berisikan daftar pustaka sebagai acuan penulis dan lampiran-lampiran yang mendukung kelengkapan skripsi.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Fungsi

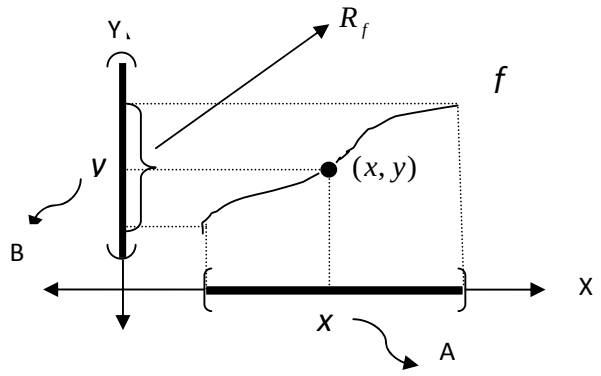
Pengertian fungsi merupakan suatu hal yang mendasar dalam kalkulus. Berikut ini disajikan definisi fungsi.

2.1.1 Definisi 1

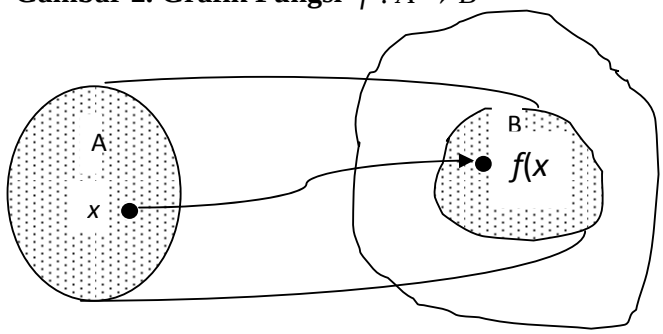
Dipunyai himpunan A dan B. Suatu fungsi f dari himpunan A ke B merupakan pasangan terurut $f \subset A$ x B sehingga :

1. $\forall x \in A$, $\exists y \in B$, $(x, y) \in f$
2. $(x, y) \in f$ dan $(x, z) \in f$, maka $y = z$

Suatu fungsi dari A ke B digambarkan sebagai suatu grafik (Gambar 2), dan sebagai suatu pemetaan (Gambar 3).



Gambar 2. Grafik Fungsi $f : A \to B$



Gambar 3. Fungsi $f : A \to B$ **sebagai suatu pemetaan.**

Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) fungsi f diberi lambang D_f, dan $\{y \in B | (x, y) \in f\}$ disebut daerah hasil (*range*) fungsi f dan diberi lambang R_f.

Contoh 1:

Periksalah apakah berikut ini merupakan fungsi atau bukan :

a. $f : R \to R, f(x) = x + 2$,

b. $g : R \to R, g(x) = x^3$

Penyelesaian :

a. Ambil sembarang $x \in R$ (domain).

   Akan ditunjukkan $f(x) = x + 2$ adalah fungsi.

   Pilih $y = x + 2$

   Diperoleh $y = f(x)$.

   Jadi $\forall x \in R, \exists y \in R, \ni y = f(x)$.

   Ambil sembarang $a, b \in R$ (domain), $a = b$.

   Diperoleh $f(a) = a + 2 = b + 2 = f(b)$, sebab $a = b$.

   Jadi $\forall a, b \in R, a = b, f(a) = f(b)$.

   Jadi f merupakan fungsi.

b. Ambil sembarang $x \in R.$(domain)

   Akan ditunjukkan $g(x) = x^3$ adalah fungsi.

   Pilih $y = x^3$.

   Diperoleh $y = g(x)$.

   Jadi $\forall x \in R, \exists y \in R, \ni y = g(x)$.

   Ambil sembarang $a, b \in R, a = b$.

Diperoleh $g(a) = a^3 = b^3 = g(b)$.

Jadi $\forall a, b \in R, a = b, g(a) = g(b)$.

Jadi g merupakan fungsi.

2.1.2 Definisi 2

Dipunyai fungsi $f : A \to B$. Fungsi f dikatakan satu-satu (*injective*) jika untuk setiap dua unsur di A mempunyai peta yang beda. Definisi ini dapat disajikan secara formal sebagai berikut.

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \ni f(x_1) \neq f(x_2).$$ **(**Chotim, 2008:28**)**

Contoh 2:

Periksa fungsi-fungsi berikut merupakan fungsi injektif atau bukan.

a. $f : R \to R, f(x) = x^3 + 1$

b. $g : R \to R, g(x) = x^2 + 2$

Penyelesaian:

a. Ambil sembarang $x_1, x_2 \in R, x_1 \neq x_2$.

   Diperoleh $(x_1 - x_2) \neq 0$ dan $(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \neq 0$.

   Sehingga $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \neq 0$

   Berakibat $f(x_1) - f(x_2) \neq 0 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

   Jadi f merupakan fungsi injektif.

b. Pilih $x_1 = -1$ dan $x_2 = 1$.

   Diperoleh $g(x_1) = g(-1) = (-1)^2 + 2 = 3 = 1^2 + 2 = g(1) = g(x_2)$.

   Jadi $\exists x_1, x_2 \in R, x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2)$.

   Jadi g bukan fungsi injektif.

2.1.3 Definisi 3

Dipunyai fungsi $f : A \to B$. Fungsi f dikatakan fungsi pada (*surjective*) jika $R_f = B$. Definisi ini dapat disajikan secara formal sebagai berikut:

$\forall x \in B, \exists y \in A, \ni f(y) = x$. (Chotim, 2008:29)

Contoh 3:

Buktikan : $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x + 4$ merupakan fungsi surjektif atau bukan.

Penyelesaian:

Ambil sembarang $y \in [0,\infty)$ (domain).

Akan ditunjukkan $\exists x \in [0,\infty)$ (codomain) sehingga $f(x) = y$.

Berdasarkan aturan fungsi $x + 4 = y \Leftrightarrow x = y - 4 \in [0,\infty)$.

Jadi $\forall y \in [0,\infty)$, $\exists x = y - 4 \in [0,\infty)$ sehingga $f(x) = f(y-4) = y - 4 + 4 = y$;

Diperoleh kesimpulan f surjektif.

2.1.4 Definisi 4

Misalkan f dan g adalah fungsi-fungsi dan c suatu konstanta. Fungsi-fungsi $f + g$, $f - g$, cf, $f.g$ dan $\frac{f}{g}$ didefinisikan sebagai berikut:

(i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,

(ii) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$,

(iii) $(c.f)(x) = c.f(x)$,

(iv) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$

Untuk semua x yang terletak pada daerah definisinya. **(**Chotim, 2008:32**)**

2.1.5 Definisi 5

Dipunyai fungsi $f : R \to R$. Jika terdapat bilangan positif T sehingga $f(x+T) = f(x)$ untuk setiap $x \in R$, fungsi f dikatakan periodik. Selanjutnya nilai T terkecil disebut periode f. (Chotim, 2008:63)

Contoh 4:

Periksa apakah fungsi f: $R \to R$ dengan f (x) = sin x, merupakan fungsi periodik.

Penyelesaian :

Ambil sembarang x $\in R$.

Pilih $T = 2\pi$.

Diperoleh $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi)$

$$= \sin x$$
$$= f(x)$$

Jadi $f(x+2\pi) = f(x), \forall x \in R$.

Jadi f periodik dengan periode 2π.

2.1.6 Definisi 6

Misalkan f suatu fungsi, jika $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap $x \in D_f$, maka f dinamakan fungsi ganjil.(Chotim, 2001)

Teorema 1:

Sifat dari fungsi ganjil adalah $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$, untuk suatu $L > 0$.

Bukti:

Diperoleh $\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx$

$$= \int_{-L}^{0} - f(-x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx$$
$$= -\int_{-L}^{0} f(-x)dx + \int_{o}^{L} f(x)dx$$
$$= -\int_{0}^{L} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx$$
$$= 0$$

2.1.7 Definisi 7

Misalkan f suatu fungsi, jika $f(-x) = f(x)$ untuk setiap $x \in D_f$, maka f dinamakan fungsi genap.(Chotim, 2001)

Teorema 2:

Sifat dari fungsi genap adalah $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$, untuk suatu $L > 0$.

Bukti:

Diperoleh $\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx$

$$= \int_{-L}^{0} - f(-x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx$$
$$= -\int_{-L}^{0} f(x) + \int_{0}^{L} f(x)dx$$
$$= \int_{0}^{L} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx$$
$$= 2\int_{0}^{L} f(x)dx$$

Teorema 3:

Hasil kali dua fungsi ganjil adalah fungsi genap, sedangkan hasil kali dua fungsi genap adalah fungsi ganjil, dan hasil kali fungsi genap dengan fungsi ganjil adalah fungsi ganjil.

Bukti:

Misal F(x) dan G(x) : fungsi genap serta P(x) dan Q(x) : fungsi ganjil.

Tulis H(x) = P(x)Q(x).

Diperoleh H(-x) = P(-x)Q(-x) = [-P(x)][-Q(x)] = P(x)Q(x) = H(x).

Jadi hasil kali dua fungsi ganjil adalah fungsi genap.

Tulis K(x) = F(x)G(x).

Diperoleh K(-x) = F(-x)g(-x) = [F(x)][G(x)] = F(x)Gx) = K(x).

Jadi hasil kali dua fungsi genap adalah fungsi genap.

Tulis J(x) = F(x)P(x).

Diperoleh J(-x) = F(-x)P(-x) = [-F(x)][P(x)] = - F(x)P(x) = -J(x).

Jadi hasil kali fungsi ganjil dengan fungsi genap adalah fungsi ganjil.

2.2 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial di mana fungsi yang tidak diketahui (variabel terikat) adalah fungsi dari variabel bebas tunggal. Dalam bentuk paling sederhana fungsi yang tidak diketahui ini adalah fungsi real atau fungsi kompleks, namun secara umum bisa juga berupa fungsi vektor atau matriks. Lebih jauh lagi, persamaan diferensial biasa digolongkan berdasarkan orde tertinggi dari turunan terhadap variabel terikat yang muncul dalam persamaan tersebut. Sebagai contoh, jika laju pertumbuhan suatu populasi (manusia, hewan, bakteri dan sebagainya) $y' = \frac{dy}{dx}$ (x=waktu) sama dengan populasi y(x), maka model populasi tersebut adalah $y' = y$, berbentuk persamaan diferensial.

Persamaan diferensial bisa diartikan sebagai suatu persamaan yang melibatkan turunan pertama atau lebih dari fungsi sembarang y terhadap peubah (variabel) *x*, persamaan ini dapat pula melibatkan *y* itu sendiri, fungsi *x* yang diberikan, dan konstanta. Contoh persamaan diferensial biasa sebagai berikut :

(1) $\frac{dy}{dx} = 4x + 16$.

(2) $xdy + ydx = 6dx$.

Persamaan diferensial biasa dibagi menjadi dua, yakni persamaan diferensial linier orde satu dan persamaan linier orde dua.

2.2.1 Definisi 8

Persamaan diferensial orde satu secara umum dinyatakan sebagai $F(x, y, y') = 0$. Jika $y' = \frac{dy}{dx}$, maka $F(x, y, y') = 0$ dapat ditulis

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 . \qquad (2.1)$$

Persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial yang dinyatakan secara implisit. Persamaan (2.1) dapat dinyatakan secara eksplisit sebagai

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) . \qquad (2.2)$$

(Waluya 2006)

Contoh persamaan diferensial orde satu sebagai berikut.

Contoh 5:

1. $y + \frac{1}{2}y' - 2e^x = 0$
2. $y + y' - 2e^x - x = 0$

2.2.2 Solusi Persamaan Diferensial Linier Orde Satu

Suatu fungsi $y = y(x)$ dinyatakan solusi persamaan diferensial $F(x, y, y') = 0$ apabila $y = y(x)$ atau turunannya yakni y' memenuhi persamaan diferensial tersebut.

Contoh 6:

$y = x^2 + 1$ adalah solusi persamaan diferensial $y' = 2x$.

Demikian pula $y = x^2 + c$ untuk c adalah konstanta, merupakan solusi persamaan diferensial $y' = 2x$. Solusi $y = x^2 + 1$ disebut solusi khusus dan $y = x^2 + c$ disebut solusi umum.

2.2.3 Persamaan Diferensial Linier Orde Dua

Persamaan diferensial berbentuk $f(x, y, y', y'') = 0$ disebut persamaan orde dua, dimana $y' = \frac{dy}{dx}$ dan $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ (Hutahean, 1993).

Contoh 7:

1. $(x+1)^2 y'' + y' \tan x - y \sin x = 0$ merupakan persamaan diferensial orde dua.
2. $xy''' + xy'' - xy' + y \sin x + 2 = 0$ bukan merupakan persamaan diferensial orde dua.

2.2.4 Definisi 9

Bila $f(x, y, y', y'') = 0$ linier dalam *y*, *y'*, dan *y''* maka persamaan diferensial $f(x, y, y', y'') = 0$ disebut persamaan diferensial linier orde dua. Secara umum persamaan diferensial orde dua berbentuk :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x); \qquad (2.3)$$

dimana *a(x), b(x), c(x)* dan *g(x)* merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang I dengan $a(x) \neq 0$, dan $y' = \frac{dy}{dx}$. (Waluya, 2006).

2.2.5 Definisi 10

Persamaan diferensial linier orde dua (2.3) disebut homogen apabila $g(x) = 0$ dan disebut tidak homogen apabila $g(x) \neq 0$ (Waluya, 2006).

Contoh 8:

1. Persamaan diferensial $xy'' + y' \sin x + 3y = 0$ adalah persamaan diferensial linier orde dua homogen karena *g(x)* = 0.
2. Persamaan diferensial $xy'' + x^2 y' + 5y = \sin x$ adalah persamaan diferensial linier orde dua tidak homogen karena $g(x) \neq 0$.

2.2.6 Solusi Persamaan Diferensial Linier Orde Dua

Fungsi $\phi(x)$ dikatakan solusi persamaan diferensial (2.3) pada selang I, apabila $\phi(x)$ mempunyai turunan kedua dan memenuhi hubungan (2.3) pada selang I, yakni $a(x)\phi''(x) + b(x)\phi'(x) + c(x)\phi(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in I$.

2.2.7 Persamaan Diferensial Linier Orde Dua Homogen dengan Koefisien Konstanta

Perhatikan persamaan diferensial yang terbentuk $y'' + py' + qy = 0$ (2.4)

dimana *p* dan *q* konstanta-konstanta. Intuisi $y = e^{mx}$ merupakan solusi persamaan diferensial (2.4) dengan *m* memenuhi persamaan tersebut. Untuk itu akan dicari *m* agar $y = e^{mx}$ merupakan solusi persamaan diferensial (2.4). Dari $y = e^{mx}$ diperoleh $y' = me^{mx}$ dan $y'' = m^2 e^{mx}$ sehingga *y, y'*, dan *y"* disubstitusikan ke persamaan (2.4) didapat persamaaan $m^2 e^{mx} + mpe^{mx} + qe^{mx} = 0 \Leftrightarrow (m^2 + pm + q)e^{mx} = 0$. Dan karena $e^{mx} \neq 0$, untuk setiap *m* dan *x*, maka $m^2 + pm + q = 0$. (Dengan demikian $y = e^{mx}$ dikatakan solusi dari persamaan diferensial (2.4), jika *m* merupakan penyelesaian dari persamaan kuadrat $m^2 + pm + q = 0$)

Persamaan $m^2 + pm + q = 0$ disebut persamaan karakteristik dari persamaan (2.4) dan akar-akarnya disebut akar-akar karakteristik. Akar-akarnya adalah $m_1 = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 - 4q})$ dan $m_2 = \frac{1}{2}(-p - \sqrt{p^2 - 4q})$. Dari perhitungan di atas diperoleh $y_1 = e^{m_1 x}$ dan $y_2 = e^{m_2 x}$ merupakan solusi dari persamaan diferensial $y'' + py' + qy = 0$.

Untuk p dan q merupakan bilangan real, akar-akar dari persamaan karakteristik $m^2 + pm + q = 0$ dapat dibagi dalam tiga kasus, yaitu: dua akar berbeda, dua akar sama, dan dua akar kompleks.

1. Akar real berlainan berbeda

   Bilangan m_1 dan m_2 dua akar real berbeda maka $e^{m_1 x}$ dan $e^{m_{21} x}$ adalah solusi yang bebas linier sehingga $y = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x}$ merupakan solusi umum persamaan diferensial (2.4).

2. Kedua akar sama.

   Misalkan kedua akar persamaan $m^2 + pm + q = 0$ adalah sama, maka $m_1 = m_2 = a$, maka $\phi_1(x) = e^{ax}$ adalah salah satu solusi persamaan diferensial (2.4). Bila $\phi_2(x) = W(x)\phi_1(x)$ solusi lainnya, maka

$$W(x) = \int \left[\left(\frac{1}{e^{ax}} \right)^2 e^{-\int pxdx} \right] dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{e^{2ax}} e^{-px} \right) dx$$

Karena $m_1 = m_2 = a$ adalah akar-akar persamaan $m^2 + pm + q = 0$, maka $m_1 + m_2 = 2a = -p$. Jadi $W(x) = \int \left(\frac{1}{e^{2ax}} e^{2ax} \right) dx = \int dx = x$.

Hal tersebut $\phi_2(x) = x\phi_1(x) \Rightarrow \phi_2(x) = xe^{ax}$ dimana ϕ_1 dan ϕ_2 bebas linier. Jadi solusi umum persamaan diferensial $y'' + py' + qy = 0$ adalah $y = Ae^{ax} + Bxe^{ax} = (A + Bx)e^{ax}$.

3. Akar Kompleks

Misalkan salah satu akar persamaan $m^2 + pm + q = 0$ adalah $m_1 = a + \beta i$, maka akar yang lain $m_2 = a - \beta i$, sehingga $\phi_1(x) = e^{m_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x}$ dan $\phi_2(x) = e^{m_2 x} = e^{(\alpha - \beta i)x}$ adalah solusi basis untuk persamaan diferensial $y'' + py' + qy = 0$. Jadi solusi umum persamaan diferensial tersebut adalah:

$$
\begin{aligned}
y &= C_1 e^{(\alpha+\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta)x} \\
&= C_1 e^{\alpha} e^{\beta x i} + C_2 e^{\alpha} e^{-\beta x i} \\
&= C_1 e^{\alpha x}\left(\cos \beta x + i \sin \beta x\right) + C_2 e^{\alpha x}\left(\cos \beta x - i \sin \beta x\right) \\
&= e^{\alpha x}\left\{\left(C_1 + C_2\right)\cos \beta x + \left(C_1 - C_2\right) i \sin \beta x\right\}
\end{aligned}
$$

Dengan demikian mengambil $C_1 + C_2 = A$ dan $i(C_1 - C_2) = B$ maka solusi umum persamaan diferensial tersebut adalah $y = e^{\alpha x}\left\{A \cos \beta x + B \sin \beta x\right\}$.

2.3 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan yang di dalamnya terdapat suku-suku diferensial parsial, yang dalam matematika diartikan sebagai suatu hubungan yang mengaitkan suatu fungsi yang tidak diketahui, yang

merupakan fungsi dari beberapa variabel bebas. Persamaan diferensial banyak dijumpai dalam kaitan dengan berbagai masalah fisik dan geometris bila fungsi yang terlibat tergantung pada dua atau lebih peubah bebas. Hal ini akan ditujukan untuk beberapa persamaan diferesial yang dijumpai dalam penerapan rekayasa. Persamaan tersebut akan diturunkan sebagai model dari sistem fisik dan mengupas cara-cara untuk memecahkan masalah nilai awal dan masalah nilai batas, dengan kata lain metode untuk memperoleh solusi bagi persamaan yang berkaitan dengan masalah fisik yang dihadapi.

Tingkat (*order*) persamaan diferensial parsial adalah pangkat tertinggi dari turunan yang termuat dalam persamaan diferensial parsial. sedangkan derajat (*degree*) persamaan diferensial parsial adalah pangkat tertinggi dari turunan tingkat tertinggi yang termuat dalam persamaan parsial.

Persamaan diferensial parsial linier adalah suatu bentuk persamaan diferensial parsial yang berderajat satu dalam peubah tak bebasnya dan turunan parsialnya (Hutahean, 1993). Seperti pada persamaan diferensial parsial biasa, dapat katakan bahwa suatu persamaan diferensial parsial linier jika persamaan itu berderejat satu dalam peubah biasanya dan turunan parsialnya. Jika setiap suku persamaan demikian ini mengandung peubah tak bebasnya atau salah satu dari turunannya, persamaan itu dikatakan homogen; bila tidak, persamaan itu dikatakan tak homogen.

Beberapa bentuk persamaan diferensial parsial linier orde dua:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ persamaan gelombang dimensi-satu,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ persamaan panas dimensi-satu,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$ persamaan poisson dimensi-dua.

Dalam hal ini c adalah konstanta, t adalah waktu x,y adalah koordinat kartesius, persamaan diatas semuanya merupakan persamaan homogen. Yang dimaksud dengan solusi suatu persamaan diferensial pada suatu daerah R di dalam ruang peubah (peubah) bebasnya ialah fungsi yang dimiliki turunan parsial yang muncul di dalam persamaan itu dimana-mana di dalam R. Untuk memudahkan notasi maka digunakan indeks untuk menotasikan turunan parsial, seperti $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dan sebagainya. Adapun bentuk umum persamaan diferensial parsial linier orde-2 diberikan dengan

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \qquad (2.6)$$

dimana A, B, C, D, E, F dan G adalah fungsi-fungsi yang bergantung pada *x* dan *y*.

2.3.1 Jenis-jenis Persamaan diferensial Parsial

Terdapat 3 jenis persamaan diferensial parsial linier yang penting, yaitu parabolic, hiperbolik, dan eliptik. Persamaan diferensial parsial orde dua dalam persamaan (2.6) :

1) Persamaan Parabolik

Jika persamaan (2.6) nilai $B^2 - 4AC = 0$, disebut persamaan *parabolik*. Biasanya merupakan persamaan yang tergantung pada waktu (tidak permanen) dan penyelesainnya memerlukan kondisi awal dan batas. Persamaan parabolik paling sederhana adalah perambatan panas.

2) Persamaan Eliptik

Jika persamaan (2.6) nilai $B^2 - 4AC < 0$, disebut persamaan eliptik. Biasanya berhubungan dengan masalah kesetimbangan atau kondisi permanen (tidak tergantung waktu) dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas di sekeliling daerah tinjauan. Seperti aliran air tanah di bawah bendungan dan karena adanya pemompaan, defleksi plat akibat pembebanan, dan sebagainya.

3) Persamaan Hiperbolik

Jika persamaan (2.6) nilai $B^2 - 4AC > 0$, disebut persamaan parabolik. Biasanya berhubungan dengan getaran atau permasalahan dimana terjadi diskontinu dalam waktu, seperti gelombang satu dimensi yang terjadi discontinu dalam kecepatan, tekanan dan rapat massa.

Contoh 9:

1. $u_{tt} = 400u_{xx}$ (persamaan gelombang satu dimensi).
2. $u_t - 36u_{xx} = 0$. (persamaan perambatan panas).

2.4 Program Maple

Maple merupakan salah satu perangkat lunak yang dikembangkan oleh Waterloo Inc. Kanada untuk keperluan *Computer Algebraic System* (CAS). Maple sering digunakan untuk keperluan penyelesaian permasalahan persamaan diferensial dan visualisasinya, karena mudah untuk digunakan. Maple memiliki kemampuan menyederhanakan persamaan, hingga suatu solusi persamaan diferensial dapat dipahami dengan baik. Keunggulan dari Maple untuk aplikasi persamaan diferensial adalah kemampuan melakukan gerakan/animasi grafik dari

suatu fenomena yang dimodelkan ke dalam persamaan diferensial yang memiliki nilai awal dan syarat batas (Kartono, 2001).

Untuk memulai Maple pada Windows, cukup dengan klik pada icon Maple yang akan langsung memberikan respon dengan menampilkan worksheet “>”. Menu-menu yang terdapat pada tampilan Maple terdiri dari *File*, *Edit*, *View*, *Insert*, *Format*, *Spreadsheet*, *Option*, *Windows*, dan *Help*. Sebagian besar menu di atas merupakan menu standar yang dikembangkan untuk program aplikasi pada sistem operasi *Windows*. Bahasa yang digunakan pada Maple merupakan bahasa pemrograman yang sekaligus sebagai bahasa aplikasi, sebab pernyataan atau statement yang merupakan input (masukan) pada Maple berupa deklarasi pada bahasa program dan command (perintah) yang sering digunakan pada aplikasi. Simbol “>” ini otomatis dan sebagai tanda bahwa Maple telah siap untuk dioperasikan. Perintah ke komputer diberikan dengan mengetikkan pada papan ketik setelah simbol “>”. Perintah ini dicetak dalam warna merah, sedangkan hasilnya dicetak dalam warna biru. Setiap perintah Maple jika ingin ditampilkan harus diakhiri dengan simbol titik koma (;) dan simbol titik dua (:) jika respon tidak ingin ditampilkan.

2.5 Deret Fourier

Deret Fourier adalah suatu deret yang mengandung suku-suku sinus dan cosinus yang digunakan untuk merepresentasikan fungsi-fungsi periodik secara umum. Selain itu, deret ini sering dijadikan sebagai alat bantu dalam menyelesaikan persamaan diferensial, baik persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial.

2.5.1 Definisi 11

Misalkan f fungsi kontinu pada interval $-L < x < L$ dengan periode 2π. Maka deret Fourier dari *f(x)* didefinisikan

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (2.7)$$

dengan koefisien

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

(Edwards, 1989, 538).

Contoh 10:

Tentukan deret Fourier dari fungsi $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x < 0 \\ 1, 0 < x < \rho \end{cases}$, pada interval $-\pi < x < \pi$.

Penyelesaian :

Dipunyai

$f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x < 0 \\ 1, 0 < x < \rho \end{cases}$, pada interval $-\pi < x < \pi$.

Diperoleh $2L = 2\pi \Leftrightarrow L = \pi$.

Selanjutnya menghitung nilai $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$

Untuk $L = \pi$,

Diperoleh $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1.dx$$
$$= 0 + \frac{1}{\pi}[x]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}[\pi - 0]$$
$$= 1$$

Jadi $a_0 = 1$.

Selanjutnya menghitung nilai $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx$.

Untuk $L = \pi$, didapat

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0.\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1.\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx$$
$$= 0 + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx dx$$
$$= \frac{1}{n\pi}[\sin nx]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{n\pi}[\sin n\pi - 0]$$
$$= \frac{1}{n\pi}[0 - 0]$$
$$= 0$$

Jadi $a_n = 0$.

Selanjutnya menghitung nilai $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx$.

Diperoleh $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0.\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1.\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[-\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[-\cos n\pi + 1\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}[1-\cos n\pi]$$

Jadi $b_n = \frac{1}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$

Jadi deret Fourier dari f pada selang $(-\pi,\pi)$ adalah

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L})$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[0.\cos nx + \frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin nx]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-\cos n\pi)\sin nx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}[2\sin x + 0 + \frac{2}{3}\sin 3x + 0 + \frac{2}{5}\sin 5x + 0 + \frac{2}{7}\sin 7x + ...]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}[2\sin x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{2}{5}\sin 5x + \frac{2}{7}\sin 7x + ...]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$$

2.5.2 Definisi 12

Jika fungsi f terdefinisi pada (-L, L) dan f merupakan fungsi genap maka deret Fourier dari f pada (-L,L) disebut deret Fourier cosinus dari f pada (-L,L) dan deret Forier tersebut berbentuk :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

dengan koefisien

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

disebut deret Fourier cosinus (Edwards, 1989: 555).

2.5.3 Definisi 13

Jika fungsi f terdefinisi pada (-L, L) dan f merupakan fungsi ganjil maka deret Fourier dari f pada (-L,L) disebut deret Fourier sinus dari f pada (-L,L) dan deret Forier tersebut berbentuk :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

dengan koefisien

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

disebut deret fourier sinus (Edwards, 1989: 555).

Contoh 11:

Dipunyai $f : R \to R$, dengan $f(x) = 1,\ 0 < x < \pi$, tentukan:

a. Deret Fourier cosinus dari f pada selang $(0, \pi)$,

b. Deret Fourier sinus dari f pada selang $(0, \pi)$.

Penyelesaian:

a. Deret Fourier cosinus dari f pada selang $(0, \pi)$ adalah $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$

.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1dx = \frac{2}{\pi}\left[x\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(\pi - 0) = 2\,.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} = 0\,.$$

Jadi deret Fourier cosinus dari f pada selang $(0,\pi)$ adalah

$$f(x) = \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 0\cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$\Leftrightarrow\ f(x) = 1\,.$$

b. Deret Fourier sinus dari f pada selang $(0,\pi)$ adalah

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\,.$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[-(-1)^n + 1\right] = \frac{2}{n\pi}\left[(-1)^{n+1} + 1\right].$$

Jadi deret Fourier sinus dari f pada selang $(0,\pi)$ adalah

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[(-1)^{n+1} + 1\right]\sin nx\,.$$

2.6. Masalah Nilai Awal dan Syarat Batas

Suatu persamaan memiliki lebih dari satu solusi. Agar dapat diperoleh solusi tunggal dari persamaan diferensial tersebut, maka ditentukan suatu kondisi. Kondisi itu

sendiri terdiri dari dua bagian yaitu kondisi awal dan kondisi batas. Suatu kondisi awal biasanya berhubungan dengan waktu awal t_0 (strauss 1995,19).

Terdapat tiga jenis kondisi batas yang penting yaitu :

1. Kondisi Dirichlet, jika *u* telah ditentukan,
2. Kondisi Neuman, jika turunan normalnya $\frac{\partial u}{\partial n} = u_n$ telah ditentukan,
3. Kondisi Robin, jika $\frac{\partial u}{\partial n} + au$ telah ditentukan, dengan *a* adalah sebuah fungsi yang bergantung pada variabel yang sama dengan *u*

Contoh kondisi batas pada domain $0 \le x \le l$:

1. Kondisi Dirichlet, $u(0,t) = f(t)$ dan $u(l,t) = g(t)$,
2. Kondisi Neuman, $\frac{\partial}{\partial n}u(0,t) = h(t)$ dan $\frac{\partial}{\partial n}u(l,t) = i(t)$,
3. Kondisi Robin, $\frac{\partial}{\partial n}u(0,t) + au(0,t) = j(t)$ dan $\frac{\partial}{\partial n}u(l,t) + a.u(l,t) = k(t)$.

Selanjutnya masalah mencari solusi dari suatu persamaan diferensial yang memenuhi kondisi batas disebut masaah nilai batas (MNB).

Dalam penelitian ini yang akan digunakan dalam membahas persamaan gelombang satu dimensi adalah:

1. Kondisi Dirichlet , yaitu $u(0,t) = 0 = u(l,t)$,
2. Kondisi Neuman, yaitu $u_x(0,t) = 0 = u_x(l,t)$,
3. Kondisi Campuran (Dirichlet & Neuman) yaitu $u_x(0,t) = 0 = u(l,t)$ dan $u(0,t) = 0 = u_x(l,t)$.

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini metode yang digunakan penulis adalah studi pustaka. Langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut :

3.1 Menentukan Masalah

Dalam tahap ini dilakukan pencarian sumber pustaka dan memilih bagian dalam sumber pustaka tersebut yang dapat dijadikan sebagai permasalahan.

3.2 Perumusan Masalah

Tahap ini dimaksudkan untuk memperjelas permasalahan yang telah ditemukan yaitu:

1. Bagaimana konversi deret Fourier dalam solusi umum persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang dimensi satu untuk kondisi Dirichlet, Neuman, dan Campuran dengan menggunakan pemisahan variabel?
2. Bagaimana visualisasi deret Fourier dalam penerapan solusi persamaan gelombang satu dimensi?

3.3 Studi Pustaka

Dalam tahap ini dilakukan kajian sumber-sumber pustaka dengan cara mencari teori atau informasi yang berkaitan dengan permasalahan, mengumpulkan konsep pendukung seperti definisi dan teorema serta membuktikan teorema-teorema yang diperlukan untuk menyelesaikan

permasalahan. Sehingga didapat suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah.

3.4 Analisis dan Pemecahan Masalah

Dari perumusan masalah diatas, maka langkah selanjutnya yang diakukan oleh penulis adalah mencari literatur-literatur yang terkait dengan permasalahan untuk dijadikan sebagai landasan bagi penulis dalam memecahkan masalah yaitu yang berkait dengan definisi dan teorema yang mendukung pemecahan masalah. Analisis dan pemecahan masalah dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- Menjelaskan tentang konsep dari deret Fourier.
- Menjelaskan solusi umum persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang dimensi satu dengan kondisi Dirichlet ($u(0,t) = 0 = u(l,t)$).
- Menjelaskan solusi umum persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang dimensi satu dengan kondisi Neuman ($u_x(0,t) = 0 = u_x(l,t)$).
- Menjelaskan solusi umum persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang dimensi satu dengan kondisi Campuran ($u_x(0,t) = 0 = u(l,t)$) dan ($u(0,t) = 0 = u_x(l,t)$).

3.5 Penarikan Kesimpulan

Langkah terakhir yang dilakukan oleh penulis adalah menarik suatu kesimpulan dari hasil-hasil yang diperoleh pada langkah di atas. Selanjutnya dari hasil kajian yang diperoleh, diharapkan dapat bermanfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, khususnya Matematika serta mampu membuka wacana baru bagi kajian berikutnya.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Solusi Umum Persamaan Persamaan Diferensial Parsial Pada Persamaan Gelombang Dimensi Satu Dengan Pemisahan Variabel.

4.1.1 Solusi Persamaan Diferensial Parsial Pada Persamaan Gelombang Dimensi Satu dengan kondisi Dirichlet.

Dipunyai persamaan gelombang $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.

Dalam kondisi Dirichlet $u(0,t) = 0 = u(l,t)$, dengan kondisi awal

$u(x,0) = \phi(x)$ dan $u_t(x,0) = \psi(x)$, $0 < x < L$.

Penyelesaian:

Misalkan solusi persamaan gelombang di atas adalah

u(x,t)=X(x).T(t).

Diperoleh $\begin{matrix} u_x = X'(x)T(t) \\ u_{xx} = X''(x).T(t) \end{matrix}$ dan $\begin{matrix} u_t = X(x)T'(t) \\ u_{tt} = X(x).T''(t) \end{matrix}$.

Diperoleh $u_{tt} = c^2 u_{xx} \Leftrightarrow X(x).T''(t) = c^2 X''(x).T(t) \Leftrightarrow \dfrac{X''}{X} = \dfrac{T''}{c^2 T}$. (4.1)

Tulis $\dfrac{T''}{c^2 T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$ (dengan $\lambda = \beta^2, \beta > 0$). (4.2)

Dari persamaan $\dfrac{T''}{c^2 T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$ ada dua persamaan diferensial biasa $X(x)$ dan $T(t)$ yaitu :

1. $-\dfrac{X''}{X} = \lambda \Leftrightarrow X'' + \lambda X = 0$

2. $-\dfrac{T''}{c^2 T} = \lambda \Leftrightarrow T'' + c^2 \lambda T = 0$.

Berdasarkan landasan teori 2.2.7 diperoleh solusi persamaan diferensial biasa homogen yaitu:

1. $X(x) = C\cos\beta x + D\sin\beta x$

2. $T(t) = A\cos c\beta t + B\sin c\beta t$ (A, B, C, D konstan).

Dari kondisi Dirichlet $u(0,t) = 0 = u(l,t)$.

Diperoleh $u(0,t) = 0$

$$\Leftrightarrow X(0) = 0$$
$$\Leftrightarrow C\cos 0 + DSin0 = 0$$
$$\Leftrightarrow C + 0 = 0$$
$$\Leftrightarrow C = 0.$$

dan $u(l,t) = 0$

$$\Leftrightarrow X(l) = 0$$
$$\Leftrightarrow C\cos\beta l + D\sin\beta l = 0$$
$$\Leftrightarrow 0 + D\sin\beta l = 0$$
$$\Leftrightarrow D\sin\beta l = 0$$

Dari persamaan di atas $D \neq 0$, sehingga $\sin\beta l = 0$

$$\Leftrightarrow \beta l = n\pi$$
$$\Leftrightarrow \beta = \frac{n\pi}{l}$$

Dari persamaan (4.2) diperoleh $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$.

Sehingga $X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x$, ($n$=1,2,3,.....) karena $\beta > 0$.

Jadi $u_n(x,t) = \left(A_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + B_n\sin\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$. n=1,2,3,..

Jadi solusi umum dari persamaan gelombang dalam kondisi Dirichlet adalah

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi c}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad .$$

(4.3)

Dari kondisi awal $u(x,0)=\phi(x)$ diperoleh

$$u(x,0)=\phi(x)\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos 0+B_n\sin 0\right)\sin\frac{n\pi}{l}x=\phi(x)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\phi(x)\,.$$

Dengan konversi deret Fourier Sinus untuk $\phi(x)$ diperoleh

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad .$$

(4.4)

Dari persamaan (4.3) diturunkan terhadap *t* diperoleh

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi c}{l}t+B_n\frac{n\pi c}{l}\cos\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\,.$$

Dari kondisi awal $u_t(x,0)=\psi(x)$ diperoleh

$$u_t(x,0)=\psi(x)\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{n\pi c}{l}\sin 0+B_n\frac{n\pi c}{l}\cos 0\right)\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{n\pi c}{l}.0+B_n\frac{n\pi c}{l}.1\right)\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x)\,.$$

Dengan konversi deret Fourier Sinus untuk $\psi(x)$ diperoleh.

$$B_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,.$$

(4.5)

Jadi solusi persamaan gelombang dimensi satu dengan kondisi Dirichlet adalah

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi c}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

Dengan konversi deret Fourier

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n = 1, 2,...$$

$$B_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n = 1, 2,..$$

4.1.2 Solusi Persamaan Diferensial Parsial Pada Persamaan Gelombang Dimensi Satu dengan kondisi Neuman.

Dipunyai persamaan gelombang $u_{tt}=c^2u_{xx}$.

Dalam kondisi Neuman $u_x(0,t)=0=u_x(l,t)$, dengan kondisi awal $u(x,0)=\phi(x)$ dan $u_t(x,0)=\psi(x)$, $0<x<L$.

Penyelesaian:

Misalkan solusi persamaan gelombang di atas adalah

u(x,t)=X(x).T(t).

Diperoleh $\begin{matrix} u_x=X'(x)T(t) \\ u_{xx}=X''(x).T(t)\end{matrix}$ dan $\begin{matrix} u_t=X(x)T'(t) \\ u_{tt}=X(x).T''(t)\end{matrix}$.

Diperoleh $u_{tt}=c^2u_{xx}\Leftrightarrow X(x).T''(t)=c^2X''(x).T(t)\Leftrightarrow\frac{X''}{X}=\frac{T''}{c^2T}$.

(4.6)

Tulis $\frac{T''}{c^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$ (dengan $\lambda=\beta^2,\beta>0$). (4.7)

Dari persamaan $\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$ ada dua persamaan diferensial biasa $X(x)$ dan $T(t)$ yaitu:

1. $-\frac{X''}{X} = \lambda \Leftrightarrow X'' + \lambda X = 0$

2. $-\frac{T''}{c^2 T} = \lambda \Leftrightarrow T'' + c^2 \lambda T = 0$.

Berdasarkan landasan teori 2.2.7 diperoleh solusi persamaan diferensial biasa homogen yaitu :

1. $X(x) = C\cos\beta x + D\sin\beta x$

2. $T(t) = A\cos c\beta t + B\sin c\beta t$ (A, B, C, D konstan).

Dari kondisi Neuman $u_x(0,t) = 0 = u_x(l,t)$.

Diperoleh $u_x(0,t) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow X'(0) = 0 \\
&\Leftrightarrow -C.\beta.0 + D.\beta.1 = 0 \\
&\Leftrightarrow 0 + D = 0 \\
&\Leftrightarrow D = 0.
\end{aligned}$$

dan $u_x(l,t) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow X_x'(l) = 0 \\
&\Leftrightarrow -C.\beta\sin\beta l + 0.\beta\cos\beta l = 0 \\
&\Leftrightarrow -C.\beta\sin\beta l + 0 = 0 \\
&\Leftrightarrow -C.\beta\sin\beta l = 0
\end{aligned}$$

Dari persamaan di atas $C \neq 0$, sehingga $\sin\beta l = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \beta l = n\pi \\
&\Leftrightarrow \beta = \frac{n\pi}{l}
\end{aligned}$$

Dari persamaan (4.7) diperoleh $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, untuk n = 0,1,2,.....

Sehingga $X_n = C\cos\frac{n\pi}{l}x$, ambil C = 1.

Diperoleh $X_n = \cos\frac{n\pi}{l}x$.

Jadi $u_n(x,t) = \left(A_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + B_n\sin\frac{n\pi c}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x$.

Jadi solusi umum dari persamaan gelombang dalam kondisi Neuman adalah

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + B_n\sin\frac{n\pi c}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x . \qquad (4.8)$$

Dari kondisi awal $u(x,0) = \phi(x)$ diperoleh

$$u(x,0) = \phi(x) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos 0 + B_n\sin 0\right)\cos\frac{n\pi}{l}x = \phi(x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\frac{n\pi}{l}x = \phi(x) .$$

Dengan konversi deret Fourier Cosinus untuk $\phi(x)$ diperoleh

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\cos\frac{n\pi}{l}x . \qquad (4.9)$$

Dari persamaan (4.8) diturunkan terhadap t diperoleh

$$u_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-A_n\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi c}{l}t + B_n\frac{n\pi c}{l}\cos\frac{n\pi c}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x .$$

Dari kondisi awal $u_t(x,0) = \psi(x)$ diperoleh

$$u_t(x,0) = \psi(x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{n\pi c}{l}\sin 0 + B_n\frac{n\pi c}{l}\cos 0\right)\cos\frac{n\pi}{l}x = \psi(x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{n\pi c}{l}.0 + B_n\frac{n\pi c}{l}.1\right)\cos\frac{n\pi}{l}x = \psi(x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{l} \cos \frac{n\pi}{l} x = \psi(x) .$$

Dengan konversi deret Fourier Cosinus untuk $\psi(x)$ diperoleh

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l \psi(x) \cos \frac{n\pi}{l} x . \qquad (4.10)$$

Jadi solusi persamaan gelombang dimensi satu dengan kondisi Neuman adalah

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi c}{l} t \right) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

Dengan konversi deret Fourier

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \qquad n = 1, 2,...$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l \psi(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \qquad n = 1, 2,...$$

4.1.3 Solusi Persamaan Diferensial Parsial Pada Persamaan Gelombang Dimensi Satu dengan Kondisi Campuran (Dirichlet dan Neuman).

Kasus $u(0,t) = 0 = u_x(l,t)$ **:**

Dipunyai persamaan gelombang $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.

Dalam kondisi Campuran $u(0,t) = 0 = u_x(l,t)$, dengan kondisi awal $u(x,0) = \phi(x)$ dan $u_t(x,0) = \psi(x)$, $0 < x < L$.

Penyelesaian :

Misalkan solusi persamaan gelombang di atas adalah *u(x,t)=X(x).T(t).*

Diperoleh $\begin{array}{l} u_x = X'(x)T(t) \\ u_{xx} = X''(x).T(t) \end{array}$ dan $\begin{array}{l} u_t = X(x)T'(t) \\ u_{tt} = X(x).T''(t) \end{array}$

Diperoleh $u_{tt} = c^2 u_{xx} \Leftrightarrow X(x).T''(t) = c^2 X''(x).T(t) \Leftrightarrow \dfrac{X''}{X} = \dfrac{T''}{c^2 T}$.

(4.11)

Tulis $-\dfrac{T''}{c^2 T} = -\dfrac{X''}{X} = \lambda$ (dengan $\lambda = \beta^2, \beta > 0$). (4.12)

Dari persamaan $-\dfrac{T''}{c^2 T} = -\dfrac{X''}{X} = \lambda$ ada dua persamaan diferensial biasa $X(x)$ dan $T(t)$ yaitu :

1. $-\dfrac{X''}{X} = \lambda \Leftrightarrow X'' + \lambda X = 0$

2. $-\dfrac{T''}{c^2 T} = \lambda \Leftrightarrow T'' + c^2 \lambda T = 0$.

Berdasarkan landasan teori 2.2.7 diperoleh solusi persamaan diferensial biasa homogen yaitu :

1. $X(x) = C\cos\beta x + D\sin\beta x$

2. $T(t) = A\cos c\beta t + B\sin c\beta t$ (A, B, C, D konstan).

Dari kondisi Campuran $u(0,t) = 0 = u_x(l,t)$.

Diperoleh $u(0,t) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow X(0) = 0 \\
&\Leftrightarrow C\cos 0 + DSin0 = 0 \\
&\Leftrightarrow C + 0 = 0 \\
&\Leftrightarrow C = 0.
\end{aligned}$$

dan $u_x(l,t) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow X'(l) = 0 \\
&\Leftrightarrow -\beta C\sin\beta l + D\beta\cos\beta l = 0 \\
&\Leftrightarrow 0 + D\beta\cos\beta l = 0 \\
&\Leftrightarrow D\beta\cos\beta l = 0
\end{aligned}$$

Dari persamaan di atas $D \neq 0$ dan $\beta \neq 0$, sehingga $\cos\beta l = 0$

$$\Leftrightarrow \beta l = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{l}$$

Dari persamaan (4.12) diperoleh $\lambda_n = \left(\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{l}\right)^2$, untuk n = 1,2,3,.....

Sehingga $X_n = D \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{l} x$, ambil D = 1.

Diperoleh $X_n = \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{l} x$.

Jadi $u_n(x,t) = \left(A_n \cos \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi c}{l} t + B_n \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi c}{l} t\right) \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{l} x$.

Jadi solusi umum dari persamaan gelombang dalam kasus $u(0,t) = 0 = u_x(l,t)$ adalah

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l} t + B_n \sin \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l} t\right) \sin \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l} x \quad (4.13)$$

Dari kondisi awal $u(x,0) = \phi(x)$ diperoleh

$$u(x,0) = \phi(x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos 0 + B_n \sin 0\right) \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{l} x = \phi(x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{l} x = \phi(x).$$

Dengan konversi deret Fourier Sinus untuk $\phi(x)$ diperoleh

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x\,.$$

(4.14)

Dari persamaan (4.13) diturunkan terhadap *t* diperoleh

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}t + B_n\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}t\right)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x.$$

Dari kondisi awal $u_t(x,0) = \psi(x)$ diperoleh

$$u_t(x,0) = \psi(x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}\sin 0 + B_n\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}\cos 0\right)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x = \psi(x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}.0 + B_n\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}.1\right)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x = \psi(x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x = \psi(x)\,.$$

Dengan konversi deret Fourier Sinus untuk $\psi(x)$ diperoleh

$$B_n = \frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x\,.$$

(4.15)

Jadi solusi persamaan gelombang dimensi satu dengan kondisi Campuran kasus $u(0,t) = 0 = u_x(l,t)$ adalah

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l} t + B_n \sin \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l} t \right) \sin \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l} x$$

Dengan konversi deret Fourier

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l} x \qquad n = 1, 2,...$$

$$B_n = \frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l} x \qquad n = 1, 2,...$$

Kasus $u_x(0,t) = 0 = u(l,t)$ **:**

Dipunyai persamaan gelombang $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.

Dalam kondisi Campuran $u_x(0,t) = 0 = u(l,t)$, dengan kondisi awal $u(x,0) = \phi(x)$ dan $u_t(x,0) = \psi(x)$, $0 < x < L$.

Penyelesaian :

Misalkan solusi persamaan gelombang di atas adalah *u(x,t)=X(x).T(t)*

Diperoleh $\begin{matrix} u_x = X'(x)T(t) \\ u_{xx} = X''(x).T(t) \end{matrix}$ dan $\begin{matrix} u_t = X(x)T'(t) \\ u_{tt} = X(x).T''(t) \end{matrix}$

Diperoleh $u_{tt} = c^2 u_{xx} \Leftrightarrow X(x).T''(t) = c^2 X''(x).T(t) \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T}$.

(4.16)

Tulis $-\frac{T''}{c^2 T} = -\frac{X''}{X} = \lambda$ (dengan $\lambda = \beta^2, \beta > 0$).

(4.17)

Dari persamaan $-\frac{T''}{c^2 T} = -\frac{X''}{X} = \lambda$ ada dua persamaan diferensial biasa $X(x)$ dan $T(t)$ yaitu :

1. $-\frac{X''}{X} = \lambda \Leftrightarrow X'' + \lambda X = 0$

2. $-\frac{T''}{c^2 T} = \lambda \Leftrightarrow T'' + c^2 \lambda T = 0$.

Berdasarkan landasan teori 2.2.7 diperoleh solusi persamaan diferensial biasa homogen yaitu :

1. $X(x) = C\cos\beta x + D\sin\beta x$

2. $T(t) = A\cos c\beta t + B\sin c\beta t$ (A, B, C, D konstan).

Dari kondisi Campuran $u_x(0,t) = 0 = u(l,t)$.

Diperoleh $u_x(0,t) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow X'(0) = 0 \\
&\Leftrightarrow -C\beta\sin 0 + D\beta\cos 0 = 0 \\
&\Leftrightarrow 0 + D\beta = 0 \\
&\Leftrightarrow D = 0.
\end{aligned}$$

dan $u(l,t) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow X(l) = 0 \\
&\Leftrightarrow C\cos\beta l + 0.\sin\beta l = 0 \\
&\Leftrightarrow C\beta\cos\beta l + 0 = 0 \\
&\Leftrightarrow C\beta\cos\beta l = 0
\end{aligned}$$

Dari persamaan di atas $C \neq 0$ dan $\beta \neq 0$, sehingga $\cos\beta l = 0$

$$\Leftrightarrow \beta l = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}$$

Dari persamaan (4.17) diperoleh $\lambda_n = \left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}\right)^2$, untuk n = 1,2,3,.....

Sehingga $X_n = C\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x$, ambil C = 1.

Diperoleh $X_n = \cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x$.

Jadi $u_n(x,t) = \left(A_n\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}t + B_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}t\right)\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x$.

Jadi solusi umum dari persamaan gelombang dalam kasus $u_x(0,t) = 0 = u(l,t)$ adalah

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}t + B_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}t\right)\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x. \quad (4.18)$$

Dari kondisi awal $u(x,0) = \phi(x)$.

Diperoleh $u(x,0) = \phi(x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos 0 + B_n\sin 0\right)\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x = \phi(x)$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x = \phi(x).$$

Dengan konversi deret Fourier Cosinus untuk $\phi(x)$ diperoleh

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x. \qquad (4.19)$$

Dari persamaan (4.18) diturunkan terhadap t diperoleh

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}t+B_n\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}t\right)\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x$$

Dari kondisi awal $u_t(x,0)=\psi(x)$ diperoleh

$$u_t(x,0)=\psi(x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}\sin 0+B_n\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}\cos 0\right)\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x=\psi(x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}.0+B_n\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}.1\right)\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x=\psi(x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x=\psi(x).$$

Dengan konversi deret Fourier Cosinus untuk $\psi(x)$ diperoleh

$$B_n = \frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}\int_0^l \psi(x)\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x.$$

(4.20)

Jadi solusi persamaan gelombang dimensi satu dengan kondisi Campuran kasus $u_x(0,t)=0=u(l,t)$ adalah

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}t+B_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}t\right)\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x$$

Dengan konversi deret Fourier

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x \qquad n = 1, 2,...$$

$$B_n=\frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}\int_0^l\psi(x)\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x\,. \qquad n = 1, 2,...$$

4.2 Visualisasi Deret Fourier Dalam Penerapan Solusi Persamaan Gelombang Satu Dimensi.

4.2.1 Kasus persamaan gelombang dengan kondisi Dirichlet.

Contoh 4.1:

Sebuah gelombang $u_{tt}=144u_{xx}$ dengan kondisi awal *x +2* dan kecepatan awal 0.

Gelombang tersebut digetarkan pada $0<x<4$ dan $t>0$ dalam kondisi Dirichlet $u(0,t)=0=u(l,t)$.

Penyelesaian:

Dipunyai $u_{tt}=144u_{xx}$ untuk $0<x<1$, $u(0,t)=0=u(l,t)$,

$u(x,0)=\phi(x)=x+2$, dan $u_t(x,0)=\psi(x)=0$

Misalkan solusi persamaan gelombang di atas adalah *u(x,t)=X(x).T(t)*.

Diperoleh $\begin{matrix} u_x=X'(x)T(t) \\ u_{xx}=X''(x).T(t)\end{matrix}$ dan $\begin{matrix} u_t=X(x)T'(t) \\ u_{tt}=X(x).T''(t)\end{matrix}$.

Diperoleh $u_{tt} = 144u_{xx} \Leftrightarrow X.T'' = 144X''.T \Leftrightarrow \dfrac{X''}{X} = \dfrac{T''}{144T}$.

(4.21)

Tulis $\dfrac{T''}{144T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$ dengan $\lambda = \beta^2$ dan $\beta > 0$ konstan.

(4.22)

Dari persamaan $\dfrac{T''}{144T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$ ada dua persamaan diferensial biasa $X(x)$ dan $T(t)$ yaitu :

1. $-\dfrac{X''}{X} = \lambda \Leftrightarrow X'' + \lambda X = 0$

2. $-\dfrac{T''}{144T} = \lambda \Leftrightarrow T'' + 144\lambda T = 0$.

Berdasarkan landasan teori 2.2.7 diperoleh solusi persamaan diferensial biasa homogen yaitu :

1. $X(x) = C\cos\beta x + D\sin\beta x$

2. $T(t) = A\cos 12\beta t + B\sin 12\beta t$. (A, B, C, D konstan).

Dari kondisi Dirichlet $u(0,t) = 0 = u(l,t)$

Diperoleh $u(0,t) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow X(0) = 0 \\
&\Leftrightarrow C\cos 0 + DSin0 = 0 \\
&\Leftrightarrow C + 0 = 0 \\
&\Leftrightarrow C = 0.
\end{aligned}$$

dan $u(l,t) = 0$

$$\Leftrightarrow X(l) = 0$$
$$\Leftrightarrow C\cos\beta l + D\sin\beta l = 0$$
$$\Leftrightarrow 0 + D\sin\beta l = 0$$
$$\Leftrightarrow D\sin\beta l = 0.$$

Dari persamaan di atas $D \neq 0$, sehingga $\sin\beta l = 0$

$$\Leftrightarrow \beta l = n\pi$$
$$\Leftrightarrow \beta = \frac{n\pi}{l}.$$

Dari persamaan (4.22) diperoleh $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$.

sehingga $X_n(x) = D\sin\frac{n\pi}{l}x$, ambil D = 1.

Diperoleh $X_n(x) = D\sin\frac{n\pi}{l}x$.

Jadi $u_n(x,t) = \left(A_n\cos\frac{12n\pi}{l}t + B_n\sin\frac{12n\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$ n=1,2,3,..

Jadi solusi umum dari persamaan gelombang dalam kondisi Dirichlet adalah

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{12n\pi}{l}t + B_n\sin\frac{12n\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

(4.23)

Dari kondisi awal $u(x,0) = x + 2$.

Diperoleh $u(x,0) = x + 2 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos 0 + B_n\sin 0\right)\sin\frac{n\pi}{l}x = x + 2$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi}{l}x = x + 2$$

Dengan konversi deret Fourier Sinus diperoleh

$$A_n = 2\int_0^1 (x+2)\sin(n\pi x)dx$$

$$= 2\int_0^1 (x+2)d(\cos n\pi x)\left(-\frac{1}{n\pi}\right)$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[(x+2)\cos n\pi x - \int \cos n\pi x d(x+2)\right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[(x+2)\cos n\pi x - \frac{1}{n\pi}\int \cos n\pi x d(n\pi x)\right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[(x+2)\cos n\pi x - \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_0^1$$

$$= -\frac{2(-2n\pi - \sin n\pi + 3n\pi\cos n\pi)}{n^2\pi^2}$$

Dari persamaan (4.23) diturunkan terhadap *t* diperoleh

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{12n\pi}{l}\sin\frac{12n\pi}{l}t + B_n\frac{n\pi 12}{l}\cos\frac{n\pi 12}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

Dari kondisi awal $u_t(x,0) = 0$.

Diperoleh $u_t(x,0) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{12n\pi}{l}\sin 0 + B_n\frac{12n\pi}{l}\cos 0\right)\sin\frac{n\pi}{l}x = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{12n\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x = 0.$$

Dengan konversi deret Fourier Sinus diperoleh $B_n = 0$

Jadi solusi persamaan diferensial parsial dari persamaan gelombang dimensi satu dengan kondisi Dirichlet adalah

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2(-2n\pi - \sin(n\pi) + 3n\pi\cos(n\pi))}{n^2\pi^2}\right)\cos(12n\pi t)\sin(n\pi x).$$

Akan ditunjukan $u(x,t)$ merupakan fungsi periodik.

Ambil sembarang $x,t \in R$.

Pilih $T = 2\pi$.

Diperoleh

$$u((x,t)+2\pi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2(-2n\pi - \sin(n\pi) + 3n\pi\cos(n\pi))}{n^2\pi^2}\right)\cos(12n\pi t + 2\pi)\sin(n\pi x + 2\pi)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2\left(-2n\pi - \sin(n\pi) + 3n\pi\cos(n\pi)\right)}{n^2\pi^2}\right)\cos(12n\pi t + 2\pi)\sin(n\pi x + 2\pi)$$

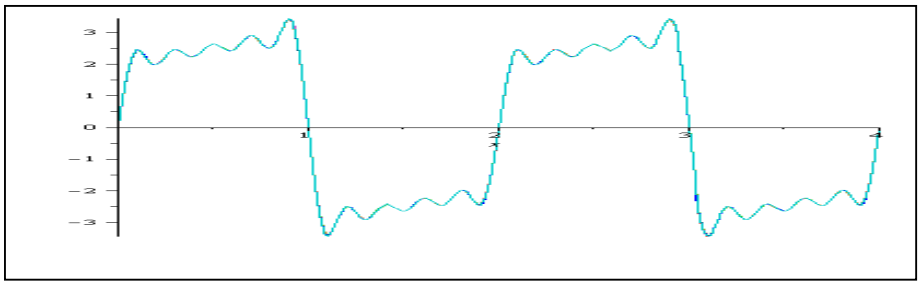
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2\left(-2n\pi - \sin(n\pi) + 3n\pi\cos(n\pi)\right)}{n^2\pi^2}\right)\left(\cos(12n\pi t).1 - 0\right)\left(\sin(n\pi x).1 + \cos(n\pi x).0\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2\left(-2n\pi - \sin(n\pi) + 3n\pi\cos(n\pi)\right)}{n^2\pi^2}\right)\cos(12n\pi t)\sin(n\pi x)$$

$$= u(x,t).$$

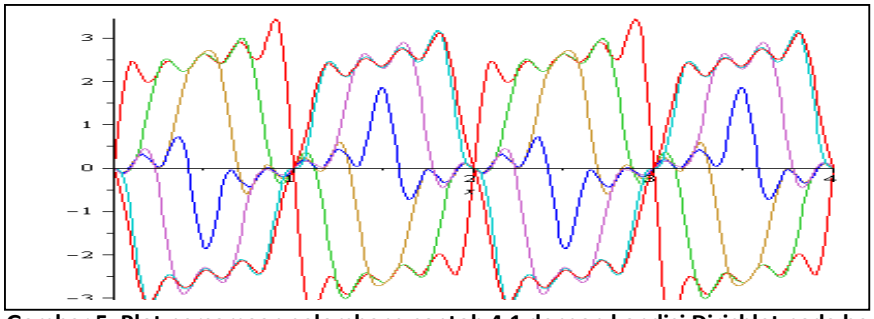
jadi $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2\left(-2n\pi - \sin(n\pi) + 3n\pi\cos(n\pi)\right)}{n^2\pi^2}\right)\cos(12n\pi t)\sin(n\pi x)$ periodik dengan periode 2π .

Berikut pergerakan $u(x,t)$ pada saat $t = 0$ hingga $t = 0{,}0009$



Gambar 4. Plot persamaan gelombang Contoh 4.1 di dengan kondisi Dirichlet pada berbagai waktu $t = 0$ hingga $t = 0{,}0009$

Pada Gambar 3 pergerakan gelombang dengan kondisi Dirichlet, *x* merupakan panjang gelombang. Untuk waktu yang berbeda terlihat satu bentuk, hal ini disebabkan selang waktu yang sangat pendek sehingga hanya tampak satu bentuk pergerakan gelombang. Untuk waktu yang lebih panjang, misal pada selang $t = 0$ hingga $t = 0{,}09$, maka pergerakan $u(x,t)$ digambarkan sebagai berikut.



Gambar 5. Plot persamaan gelombang contoh 4.1 dengan kondisi Dirichlet pada berbagai waktu $t = 0$ hingga $t = 0{,}09$.

Deskripsi Gambar 4 sebagai berikut:

1) Warna merah yang pertama menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ untuk $t = 0$.
2) Warna hijau menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ untuk $t = 0{,}015$.
3) Warna kuning menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ untuk $t = 0{,}030$.
4) Warna biru menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ untuk $t = 0{,}045$
5) Warna ungu menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ untuk $t = 0{,}060$.
6) Warna biru muda menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ untuk $t = 0{,}075$.
7) Warna merah yang kedua menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ untuk $t = 0{,}09$.

Gambar 3 dan 4 memperlihatkan bahwa gelombang untuk *t* yang semakin besar, solusinya akan membentuk solusi yang periodik, hal ini disebabkan karena karakteristik dari gelombang adalah bersifat periodik.

4.2.2 Kasus Persamaan Gelombang dengan kondisi Neuman.

Contoh 4.2 :

Sebuah gelombang $u_{tt} = 400u_{xx}$ dengan kondisi awal x^2 dan kecepatan awal 0. Gelombang tersebut digetarkan pada $0 < x < 4$ dan $t > 0$ dalam kondisi kondisi Neuman $u_x(0,t) = 0 = u_x(l,t)$.

Penyelesaian:

Dipunyai $u_{tt} = 400u_{xx}$ untuk $0 < x < 1$

$$u_x(0,t) = 0 = u_x(l,t)$$

$$u(x,0) = \phi(x) = x^2$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = 0$$

Misalkan solusi persamaan gelombang di atas adalah *u(x,t)=X(x).T(t)*

Diperoleh $\begin{matrix} u_x = X'(x)T(t) \\ u_{xx} = X''(x).T(t) \end{matrix}$ dan $\begin{matrix} u_t = X(x)T'(t) \\ u_{tt} = X(x).T''(t) \end{matrix}$.

Diperoleh $u_{tt} = 400u_{xx} \Leftrightarrow X.T'' = 400X''.T \Leftrightarrow \dfrac{X''}{X} = \dfrac{T''}{400T}$.

(4.24)

Tulis $\dfrac{T''}{400T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$ dengan $\lambda = \beta^2$ dan $\beta > 0$ konstan.

(4.25)

Dari persamaan $\dfrac{T''}{400T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$ ada dua persamaan diferensial biasa $X(x)$ dan $T(t)$ yaitu:

1. $-\dfrac{X''}{X} = \lambda \Leftrightarrow X'' + \lambda X = 0,$

2. $-\dfrac{T''}{144T} = \lambda \Leftrightarrow T'' + 200\lambda T = 0$

\

Berdasarkan landasan teori 2.2.7 diperoleh solusi persamaan diferensial biasa homogen yaitu:

1. $X(x) = C\cos\beta x + D\sin\beta x$

2. $T(t) = A\cos 20\beta t + B\sin 20\beta t$ (A, B, C, D konstan).

Dari kondisi Neuman $u_x(0,t) = 0 = u_x(l,t)$

Diperoleh $u_x(0,t) = 0$

$$\Leftrightarrow X'(0) = 0$$
$$\Leftrightarrow -C\sin 0 + D\cos 0 = 0$$
$$\Leftrightarrow D = 0$$

dan $u_x(l,t) = 0$

$$\Leftrightarrow X'(l) = 0$$
$$\Leftrightarrow -C\sin\beta l + D\cos\beta l = 0$$
$$\Leftrightarrow -C\sin\beta l + 0 = 0$$
$$\Leftrightarrow -C\sin\beta l = 0$$

Dari persamaan di atas $C \neq 0$, sehingga $\sin\beta l = 0$

$$\Leftrightarrow \beta l = n\pi$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{n\pi}{l}$$

Dari persamaan (4.25) diperoleh $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$.

Sehingga $X_n(x) = C\cos\frac{n\pi}{l}x$, ambil C=1.

Diperoleh $X_n(x) = \cos\frac{n\pi}{l}x$.

Jadi $u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{20n\pi}{l}t + B_n \sin\frac{20n\pi}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x$ n=1,2,3,..

Jadi solusi umum dari persamaan gelombang dalam kondisi Neuman adalah

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{20n\pi}{l}t + B_n \sin\frac{20n\pi}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x \qquad (4.26)$$

Dari kondisi awal $u(x,0) = x^2$.

Diperoleh $u(x,0) = x^2 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos 0 + B_n \sin 0\right)\cos\frac{n\pi}{l}x = x^2$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{l}x = x^2 \qquad \backslash$$

Dengan konversi deret Fourier Sinus diperoleh

$$A_n = 2\int_0^1 x^2 \cos(n\pi x)dx$$

$$= 2\int_0^1 x^2 d(\sin(n\pi x))\left(\frac{1}{n\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[x^2\sin(n\pi x) - \int \sin n\pi x d(x^2)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[x^2\sin(n\pi x) + \frac{2}{n\pi}\int x d\left(\cos(n\pi x)\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[x^2\sin(n\pi x) + \frac{2}{n\pi}\left(x\cos(n\pi x) - \frac{1}{n\pi}\int \cos(n\pi x) d(n\pi x)\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[x^2\sin(n\pi x) + \frac{2}{n\pi}x\cos(n\pi x) - \frac{2}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)\right]_0^1$$

$$= \frac{2\left(-4\sin(n\pi) + n^2\pi^2\sin(n\pi) + 2n\pi\cos(n\pi)\right)}{n^3\pi^3}$$

Dari persamaan (4.26) diturunkan terhadap t diperoleh

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{20n\pi}{l}\sin\frac{20n\pi}{l}t + B_n\frac{20n\pi}{l}\cos\frac{20n\pi}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

Dari kondisi awal $u_t(x,0) = 0$.

Diperoleh $u_t(x,0) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{20n\pi}{l}\sin 0 + B_n\frac{20n\pi}{l}\cos 0\right)\cos\frac{n\pi}{l}x = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{20n\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x = 0.$$

Dengan konversi deret Fourier Sinus diperoleh $B_n = 0$

Jadi solusi PDP dari persamaan gelombang dimensi satu dengan kondisi Neuman adalah

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left(-4\sin(n\pi)\right) + n^2\pi^2\sin(n\pi) + 2n\pi\cos(n\pi)}{n^3\pi^3}\right)\cos(20n\pi t)\cos(n\pi x)$$

Akan ditunjukan $u(x,t)$ merupakan fungsi periodik.

Ambil sembarang $x,t \in R$.

Pilih $T = 2\pi$.

Diperoleh

$$u((x,t)+2\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left(-4\sin(n\pi)+n^2\pi^2\sin(n\pi)+2n\pi\cos(n\pi)\right)}{n^3\pi^3}\right)\cos(20n\pi t+2\pi)\cos(n\pi x+2\pi)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left(-4\sin(n\pi)-n^2\pi^2\sin(n\pi)+2n\pi\cos(n\pi)\right)}{n^3\pi^3}\right)\cos(20n\pi t+2\pi)\cos(n\pi x+2\pi)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left(-4\sin(n\pi)-n^2\pi^2\sin(n\pi)+2n\pi\cos(n\pi)\right)}{n^3\pi^3}\right)\left(\cos(20n\pi t).1-0\right)\left(\cos(n\pi x).1-0\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left(-4\sin(n\pi)-n^2\pi^2\sin(n\pi)+2n\pi\cos(n\pi)\right)}{n^3\pi^3}\right)\cos(20n\pi t)\cos(n\pi x)$$

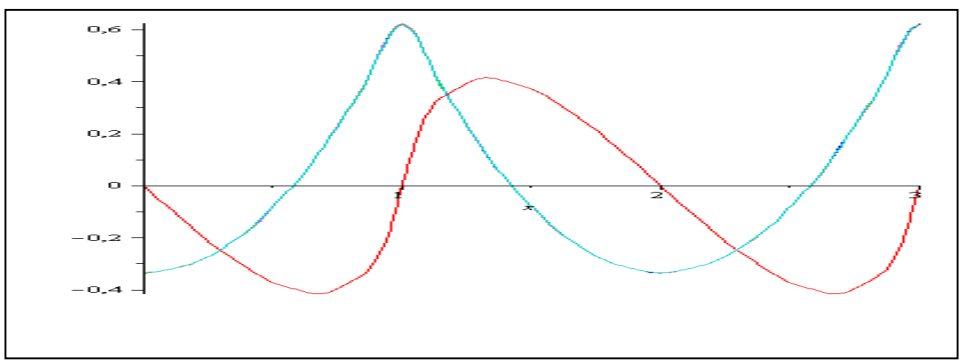
$$=u(x,t).$$

Jadi

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left(-4\sin(n\pi)+n^2\pi^2\sin(n\pi)+2n\pi\cos(n\pi)\right)}{n^3\pi^3}\right)\cos(20n\pi t)\cos(n\pi x)$$

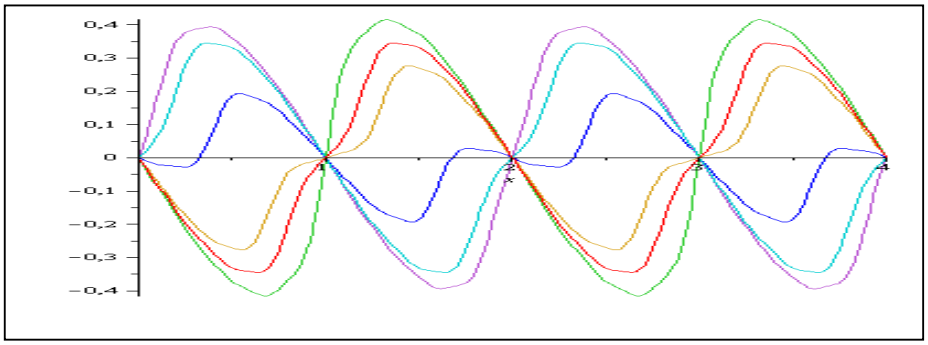
peridodik dengan periode 2π .

Berikut pergerakan $u(x,t)$ pada saat $t=0$ hingga $t=0{,}0009$



Gambar 6. Plot persamaan gelombang Contoh 4.2 dengan kondisi Neuman pada berbagai waktu $t=0$ hingga $t=0{,}0009$

Pada Gambar 5 pergerakan gelombang dengan kondisi Neuman, *x* merupakan panjang gelombang. Untuk waktu yang berbeda terlihat hanya dua bentuk, hal ini disebabkan selang waktu yang sangat pendek sehingga hanya tampak dua bentuk pergerakan gelombang. Untuk waktu yang lebih panjang, misal pada selang $t=0$ hingga $t=0{,}09$, maka pergerakan $u(x,t)$ digambarkan sebagai berikut:



Gambar 7. Plot persamaan gelombang Contoh 4.2 dengan kondisi Neuman pada berbagai waktu $t = 0$ hingga $t = 0{,}09$

Deskripsi Gambar 6 sebagai berikut:

1) Warna merah yang pertama menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ untuk $t = 0{,}015$.
2) Warna biru muda menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ untuk $t = 0{,}030$.
3) Warna ungu menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ untuk $t = 0{,}045$.
4) Warna biru tua y menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ untuk $t = 0{,}060$
5) Warna kuning menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ untuk $t = 0{,}075$.
6) Warna hijau menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ untuk $t = 0{,}090$.

Gambar 5 dan 6 memperlihatkan bahwa gelombang untuk t yang semakin besar, solusinya akan membentuk solusi periodik dengan periode 2π , hal ini disebabkan karena karakteristik dari gelombang adalah bersifat periodik.

4.2.3 Kasus Persamaan Gelombang dengan Kondisi Campuran.

Contoh 4.3:

Sebuah gelombang $u_{tt} = 256u_{xx}$ dengan kondisi awal $x + 6$ dan kecepatan awal 0.

Gelombang tersebut digetarkan pada $0 < x < 4$ dan $t > 0$ dalam kondisi kondisi campuran $u(0,t) = 0 = u_x(l,t)$.

Penyelesaian:

Dipunyai $u_{tt} = 256u_{xx}$ untuk $0 < x < 1$

$$u(0,t) = 0 = u_x(l,t)$$

$$u(x,0) = \phi(x) = x + 6$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = 0$$

Misalkan solusi persamaan gelombang di atas adalah *u(x,t)=X(x).T(t)*

Diperoleh $\begin{matrix} u_x = X'(x)T(t) \\ u_{xx} = X''(x).T(t) \end{matrix}$ dan $\begin{matrix} u_t = X(x)T'(t) \\ u_{tt} = X(x).T''(t) \end{matrix}$.

Diperoleh $u_{tt} = 256u_{xx} \Leftrightarrow X.T'' = 256X''.T \Leftrightarrow \dfrac{X''}{X} = \dfrac{T''}{256T}$. (4.27)

Tulis $\dfrac{T''}{256T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$ dengan $\lambda = \beta^2$ dan $\beta > 0$ konstan.

(4.28)

Dari persamaan $\dfrac{T''}{256T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$ ada dua persamaan diferensial biasa $X(x)$ dan $T(t)$ yaitu:

1. $-\dfrac{X''}{X} = \lambda \Leftrightarrow X'' + \lambda X = 0,$
2. $-\dfrac{T''}{256T} = \lambda \Leftrightarrow T'' + 256\lambda T = 0$.

Berdasarkan landasan teori 2.2.7 diperoleh solusi persamaan diferensial biasa homogen yaitu:

1. $X(x) = C\cos\beta x + D\sin\beta x$
2. $T(t) = A\cos 16\beta t + B\sin 16\beta t$ (A, B, C, D konstan).

Dari kondisi campuran $u(0,t) = 0 = u_x(l,t)$.

Diperoleh $u(0,t) = 0$

$$\Leftrightarrow X(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow C\cos 0 + DSin0 = 0$$

$$\Leftrightarrow C + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow C = 0.$$

dan $u_x(l,t) = 0$

$$\Leftrightarrow X'(l) = 0$$
$$\Leftrightarrow -\beta C \sin \beta l + \beta D \cos \beta l = 0$$
$$\Leftrightarrow 0 + \beta D \cos \beta l = 0$$
$$\Leftrightarrow \beta D \cos \beta l = 0$$

Dari persamaan di atas $D \neq 0$, dan $\beta \neq 0$ sehingga $\cos \beta l = 0$

$$\Leftrightarrow \beta l = (n + \frac{1}{2})\pi$$
$$\Leftrightarrow \beta = \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{l}$$

Dari persamaan (4.28) diperoleh $\lambda_n = \left(\frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{l} \right)^2$.

Sehingga $X_n(x) = D \sin \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{l} x$, ambil D = 1.

Diperoleh $X_n(x) = \sin \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{l} x$.

Jadi $$u_n(x,t) = \left(A_n \cos \frac{16(n + \frac{1}{2})\pi}{l} t + B_n \sin \frac{16(n + \frac{1}{2})\pi}{l} t \right) \sin \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{l} x$$

n=1,2,3,..

Jadi solusi umum dari persamaan gelombang dalam kondisi campuran $u(0,t) = 0 = u_x(l,t)$ adalah

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{16(n + \frac{1}{2})\pi}{l} t + B_n \sin \frac{16(n + \frac{1}{2})\pi}{l} t \right) \sin \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{l} x.$$

(4.29)

Dari kondisi awal $u(x,0) = x + 6$.

Jelas $u(x,0) = x+6 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos 0 + B_n \sin 0\right)\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}x = x+6$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}x = x+6$$

Dengan konversi deret Fourier Sinus diperoleh

$$A_n = 2\int_0^1 (x+6)\sin\left((n+\frac{1}{2})\pi x\right)dx$$

$$= \frac{4\left(12n\pi + 14n\pi\sin(n\pi) + 2\cos(n\pi) + 6\pi + 7\pi\sin(n\pi)\right)}{\pi^2(4n^2+4n+1)}$$

Dari persamaan (4.29) diturunkan terhadap t diperoleh

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{16(n+\frac{1}{2})\pi}{l}\sin\frac{16(n+\frac{1}{2})\pi}{l}t + B_n\frac{16(n+\frac{1}{2})\pi}{l}\cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}t\right)\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}x$$

Dari kondisi awal $u_t(x,0) = 0$ diperoleh

$$u_t(x,0) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\frac{16(n+\frac{1}{2})\pi}{l}\right)\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{16(n+\frac{1}{2})\pi}{l}\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}x = 0.$$

Dengan konversi deret Fourier Sinus diperoleh $B_n = 0$

Jadi solusi persamaan diferensial parsial dari persamaan gelombang dimensi satu dengan kondisi Dirichlet adalah

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\left(12n\pi+14n\pi\sin(n\pi)+2\cos(n\pi)+6\pi+7\pi\sin(n\pi)\right)}{\pi^2(4n^2+4n+1)}\right)\cos\left(16(n+\frac{1}{2})\pi\right)\sin\left((n+\frac{1}{2})\pi\right)$$

Akan ditunjukan $u(x,t)$ merupakan fungsi periodik.

Ambil sembarang $x,t \in R$.

Pilih $T = 2\pi$.

Diperoleh

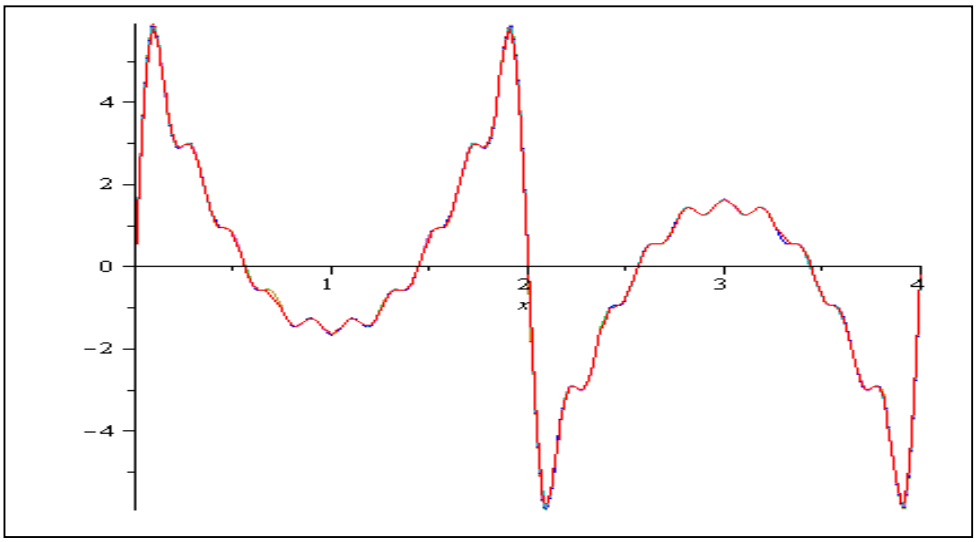
$$
\begin{aligned}
&u((x,t)+2\pi)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(12n\pi+14n\pi\sin(n\pi)+2\cos(n\pi)+6\pi+7\pi\sin(n\pi))}{\pi^2(4n^2+4n+1)}\right)\cos\left(16(n+\frac{1}{2})\pi+2\pi\right)\sin\left((n+\frac{1}{2})\pi+2\pi\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(12n\pi+14n\pi\sin(n\pi)+2\cos(n\pi)+6\pi)}{\pi^2(4n^2+4n+1)}\right)\cos\left(16(n+\frac{1}{2})\pi+2\pi\right)\sin\left((n+\frac{1}{2})\pi+2\pi\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(12n\pi+14n\pi\sin(n\pi)+2\cos(n\pi)+6\pi)}{\pi^2(4n^2+4n+1)}\right)\left(\cos\left(16(n+\frac{1}{2})\pi\right).1-0\right)\left(\sin\left((n+\frac{1}{2})\pi\right).1+0\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(12n\pi+14n\pi\sin(n\pi)+2\cos(n\pi)+6\pi)}{\pi^2(4n^2+4n+1)}\right)\cos\left(16\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\\
&=u(x,t).
\end{aligned}
$$

Jadi

$$
u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(12n\pi+14n\pi\sin(n\pi)+2\cos(n\pi)+6\pi+7\pi\sin(n\pi))}{\pi^2(4n^2+4n+1)}\right)\cos\left(16(n+\frac{1}{2})\pi\right)\sin\left((n+\frac{1}{2})\pi\right)
$$

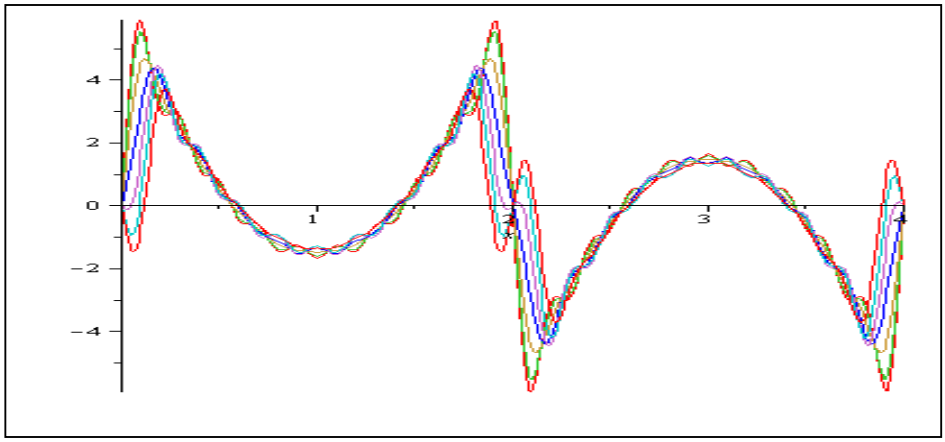
periodik dengan periode 2π .

Berikut pergerakan $u(x,t)$ pada saat $t=0$ hingga $t=0{,}0009$



Gambar 8. Plot persamaan gelombang Contoh 4.3 dengan kondisi Campuran pada berbagai waktu $t = 0$ hingga $t = 0{,}0009$.

Pada Gambar 7 pergerakan gelombang dengan kondisi Campuran, *x* merupakan panjang gelombang. Untuk waktu yang berbeda terlihat hanya satu bentuk, hal ini disebabkan selang waktu yang sangat pendek sehingga hanya tampak satu bentuk pergerakan gelombang. Untuk waktu yang lebih panjang, misal pada selang $t = 0$ hingga $t = 0{,}009$, pergerakan $u(x,t)$ digambarkan sebagai berikut:



Gambar 9. Plot persamaan gelombang Contoh 4.3 dengan kondisi Campuran pada berbagai waktu $t = 0$ hingga $t = 0{,}009$

Deskripsi Gambar 8 sebagai berikut:

1) Warna merah yang pertama menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ pada saat $t = 0$
2) Warna hijau menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ pada saat $t = 0{,}0015$.
3) Warna kuning menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ pada saat $t = 0{,}0030$.
4) Warna biru menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ pada saat $t = 0{,}0045$
5) Warna ungu menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ pada saat $t = 0{,}0060$.
6) Warna biru muda menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ pada saat $t = 0{,}0075$.
7) Warna merah yang kedua menunjukkan pergerakan $u(x,t)$ pada saat $t = 0{,}009$.

Gambar 7 dan 8 memperlihatkan bahwa gelombang untuk t yang semakin besar, solusinya akan membentuk solusi periodic dengan periode 2π, hal ini disebabkan karena karakteristik dari gelombang adalah bersifat periodik.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Dari pembahasan diatas dapat disimpulan sebagai berikut:

1. Solusi persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0 < x < l$ dalam kondisi Dirichlet $u(0,t) = 0 = u(l,t)$ dan syarat batas $u(x,0) = \phi(x)$ dan $u_t(x,0) = \psi(x)$ adalah

   $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi c}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x .$$

   Dengan konversi deret Fourier diperoleh koefisien

   $$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{dan} \quad B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x .$$

2. Solusi persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0 < x < l$ dalam kondisi Neuman $u_x(0,t) = 0 = u_x(l,t)$ dan syarat batas $u(x,0) = \phi(x)$ dan $u_t(x,0) = \psi(x)$ adalah

   $$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi c}{l} t \right) \cos \frac{n\pi}{l} x .$$

   Dengan konversi deret Fourier diperoleh koefisien

   $$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \quad \text{dan} \quad B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(x) \cos \frac{n\pi}{l} x .$$

3. Solusi persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0 < x < l$ dalam kondisi Campuran $u(0,t) = 0 = u_x(l,t)$ dan syarat batas $u(x,0) = \phi(x)$ dan $u_t(x,0) = \psi(x)$ adalah

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}t+B_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}t\right)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x\,.$$

Dengan konversi deret Fourier diperoleh koefisien

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x \quad \text{dan} \quad B_n=\frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x\,.$$

4. Solusi persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang $u_{tt}=c^2u_{xx}$, $0<x<l$ dalam kondisi Campuran $u_x(0,t)=0=u(l,t)$ dan syarat batas $u(x,0)=\phi(x)$ dan $u_t(x,0)=\psi(x)$ adalah

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}t+B_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}{l}t\right)\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x\,.$$

Dengan konversi deret Fourier diperoleh koefisien

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x \quad \text{dan} \quad B_n=\frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi c}\int_0^l\psi(x)\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x$$

.

5. Penerapan deret Fourier dalam penyelesaian persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang satu dimensi dapat di visualisaikan dalam bentuk grafik pergerakan gelombang yang membentuk solusi periodik dengan periode 2π, hal ini disebabkan karena karakteristik dari gelombang adalah bersifat periodik.

5.2 Saran

Perlunya dilaksanakan penelitian lebih lanjut tentang penerapan Deret Fourier untuk permasalahan daya kekuatan gelombang pada persamaan gelombang satu dimensi dalam kehidupan sehari-hari.

DAFTAR PUSTAKA

Chotim, Moch., 2001, Kalkulus 1. Semarang: UNNES Semarang.

Chotim, Moch., 2008, Kalkulus 1. Semarang: UNNES Semarang.

Dwijayono, Kiki., 2008. Aplikasi Persamaan Diferensial Parsial Pada Alat Musik: Skripsi. UNNES Semarang.

Edwards, C.H dan Penney, D.E. 1989, *Elementary Differential Equations With Boundary Value Problems*, University of Georgia.

Golberg, R., 1976, *Methods Of Real Analysis*, New York : John Wiley & Sons, Inc.

Hewitt, E., 1969, *Real And Abstract Analysis*, New York : Springer Verlag.

Kartono. 2001. Maple untuk Persamaan Diferensial. Yogyakarta: J & J Learning.

Romadiastri, Yulia., 2004. Solusi Persamaan Difusi pada Pipa Berhingga Dengan Kasus Kondisi Robin: Skripsi.UNNES Semarang.

Strauss, W.A., 1992, *Partial Differential Equation An Introduction*, New York : John Wiley & Sons, Inc.

Waluya, S.B.,2006, *Persamaan Diferensial*, Yogyakarta : Graha Ilmu.

Lampiran 1. Plot gambar solusi contoh 4.1 dengan Program Maple

```
>restart:with(PDEtools):with(DEtools):with(plots):with(inttrans):
 > phi:=(x)->x+2;
   psi:=(x)->0;
   l:=1;
```

$$\phi := x \rightarrow x + 2$$

$$\psi := x \rightarrow 0$$

$$l := 1$$

```
> An:=2/l*int(phi(x)*sin(n*Pi*x/l),x=0..l);
  Bn:=2/(n*Pi*c)*int(psi(x)*sin(n*Pi*x/l),x=0..l);
```

$$An := -\frac{2\left(-2\,n\,\pi - \sin(n\,\pi) + 3\cos(n\,\pi)\,n\,\pi\right)}{n^2\,\pi^2}$$

$$Bn := 0$$

```
> u:=(x,t)->sum((An*cos(c*n*Pi*t/l)+Bn*sin(c*n*Pi*t/l))*sin(n*Pi*x/l),n=1..9);
```

$$u := (x, t) \rightarrow \sum_{n=1}^{9} \left(An \cos\left(\frac{c\,n\,\pi\,t}{l}\right) + Bn \sin\left(\frac{c\,n\,\pi\,t}{l}\right)\right) \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{l}\right)$$

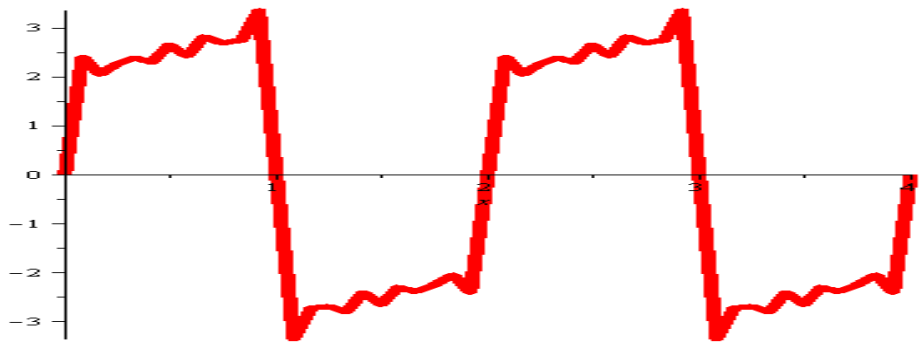
```
> u(x,t):=sum((An*cos(c*n*Pi*t/l)+Bn*sin(c*n*Pi*t/l))*sin(n*Pi*x/l),n=1..9);
```

$$\begin{aligned} u(x,t) := {} & \frac{10\cos(c\,\pi\,t)\sin(\pi\,x)}{\pi} - \frac{\cos(2\,c\,\pi\,t)\sin(2\,\pi\,x)}{\pi} \\ & + \frac{10}{3}\,\frac{\cos(3\,c\,\pi\,t)\sin(3\,\pi\,x)}{\pi} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos(4\,c\,\pi\,t)\sin(4\,\pi\,x)}{\pi} \\ & + \frac{2\cos(5\,c\,\pi\,t)\sin(5\,\pi\,x)}{\pi} - \frac{1}{3}\,\frac{\cos(6\,c\,\pi\,t)\sin(6\,\pi\,x)}{\pi} \\ & + \frac{10}{7}\,\frac{\cos(7\,c\,\pi\,t)\sin(7\,\pi\,x)}{\pi} - \frac{1}{4}\,\frac{\cos(8\,c\,\pi\,t)\sin(8\,\pi\,x)}{\pi} \\ & + \frac{10}{9}\,\frac{\cos(9\,c\,\pi\,t)\sin(9\,\pi\,x)}{\pi} \end{aligned}$$

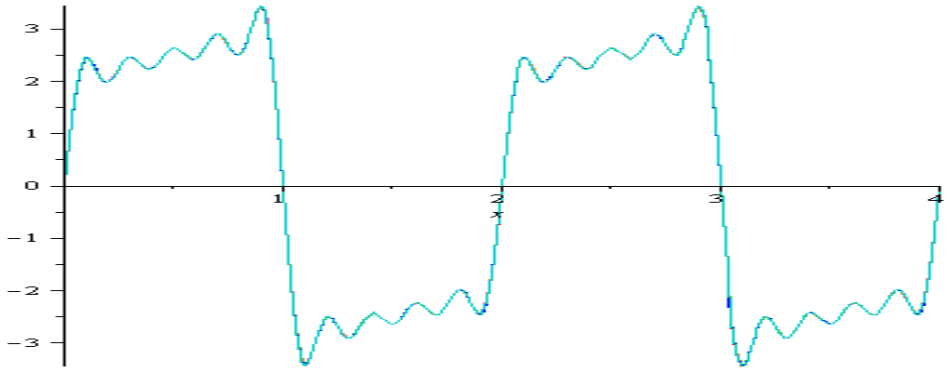
```
> c:=12;
```

$$c := 12$$

```
> animate(u(x,t),x=0..4,t=0..0.20,color=red,thickness=6);
```




```
> u(x,0):=subs(t=0,u(x,t)):
  u(x,1):=subs(t=0.00015,u(x,t)):
  u(x,2):=subs(t=0.0003,u(x,t)):
  u(x,3):=subs(t=0.00045,u(x,t)):
  u(x,4):=subs(t=0.0006,u(x,t)):
  u(x,5):=subs(t=0.00075,u(x,t)):
  u(x,6):=subs(t=0.0009,u(x,t)):
  plot({u(x,0),u(x,1),u(x,2),u(x,3),u(x,4),u(x,5),u(x,6)},x=0..4,thickness=1);
```




```
> u(x,0):=subs(t=0,u(x,t)):
  u(x,1):=subs(t=0.015,u(x,t)):
  u(x,2):=subs(t=0.03,u(x,t)):
```

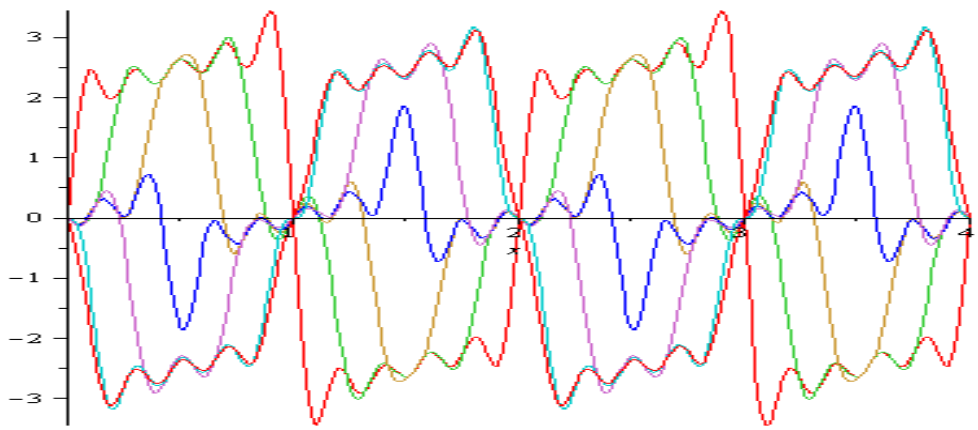
```
u(x,3):=subs(t=0.045,u(x,t)):

u(x,4):=subs(t=0.06,u(x,t)):

u(x,5):=subs(t=0.075,u(x,t)):

u(x,6):=subs(t=0.09,u(x,t)):

plot({u(x,0),u(x,1),u(x,2),u(x,3),u(x,4),u(x,5),u(x,6)},x=0..4,thickness=1);
```



Lampiran 2. Plot gambar solusi contoh 4.2 dengan Program Maple

```
> restart:with(plots):with(inttrans):
> phi:=(x)->x^2;
  psi:=(x)->0;
  l:=1;
```

$$\phi := x \rightarrow x^2$$

$$\psi := x \rightarrow 0$$

$$l := 1$$

```
> An:=2/l*int(phi(x)*cos(n*Pi*x/l),x=0..l);
  Bn:=2/(n*Pi*c)*int(psi(x)*cos(n*Pi*x/l),x=0..l);
```

$$An := \frac{2\left(-2\sin(n\pi) + n^2\pi^2\sin(n\pi) + 2n\pi\cos(n\pi)\right)}{n^3\pi^3}$$

$$Bn := 0$$

```
> u:=(x,t)->sum((An*cos(c*n*Pi*t/l)+Bn*sin(c*n*Pi*t/l))*cos(n*Pi*x/l),n=1..9);
```

$$u := (x,t) \rightarrow \sum_{n=1}^{9}\left(An\cos\left(\frac{c\,n\,\pi\,t}{l}\right) + Bn\sin\left(\frac{c\,n\,\pi\,t}{l}\right)\right)\cos\left(\frac{n\,\pi\,x}{l}\right)$$

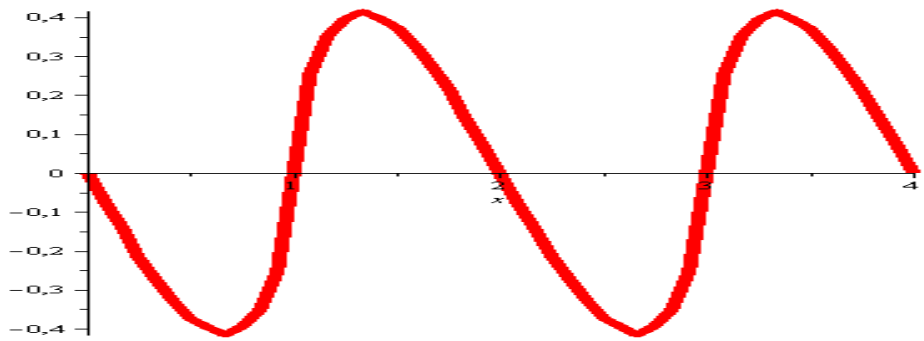
```
> u(x,t):=sum((An*cos(c*n*Pi*t/l)+Bn*sin(c*n*Pi*t/l))*sin(n*Pi*x/l),n=1..9);
```

$$\begin{aligned} u(x,t) := &-\frac{4\cos(c\,\pi\,t)\sin(\pi\,x)}{\pi^2} + \frac{\cos(2\,c\,\pi\,t)\sin(2\,\pi\,x)}{\pi^2} \\ &- \frac{4}{9}\frac{\cos(3\,c\,\pi\,t)\sin(3\,\pi\,x)}{\pi^2} + \frac{1}{4}\frac{\cos(4\,c\,\pi\,t)\sin(4\,\pi\,x)}{\pi^2} \\ &- \frac{4}{25}\frac{\cos(5\,c\,\pi\,t)\sin(5\,\pi\,x)}{\pi^2} + \frac{1}{9}\frac{\cos(6\,c\,\pi\,t)\sin(6\,\pi\,x)}{\pi^2} \\ &- \frac{4}{49}\frac{\cos(7\,c\,\pi\,t)\sin(7\,\pi\,x)}{\pi^2} + \frac{1}{16}\frac{\cos(8\,c\,\pi\,t)\sin(8\,\pi\,x)}{\pi^2} \\ &- \frac{4}{81}\frac{\cos(9\,c\,\pi\,t)\sin(9\,\pi\,x)}{\pi^2} \end{aligned}$$

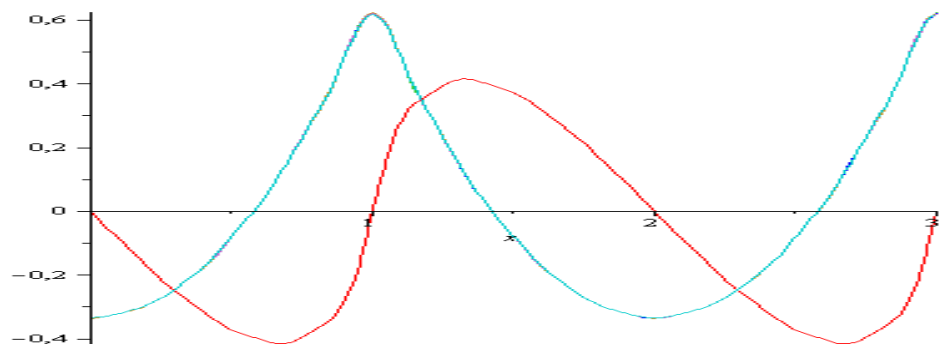
```
> c:=20;
```

$$c := 20$$

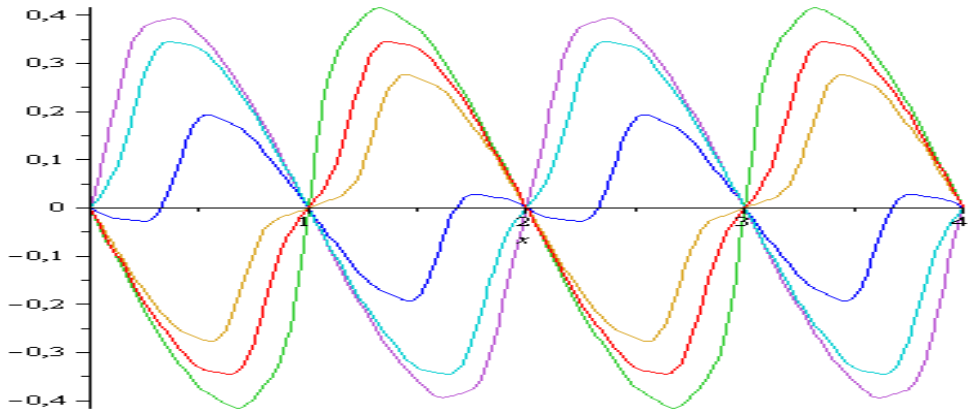
```
> animate(u(x,t),x=0..4,t=0..0.8,color=red,thickness=6);
```




```
> u(x,0):=subs(t=0,u(x,t)):
  u(x,1):=subs(t=0.00015,u(x,t)):
  u(x,2):=subs(t=0.0003,u(x,t)):
 u(x,3):=subs(t=0.0006,u(x,t)):
 u(x,4):=subs(t=0.00075,u(x,t)):
 u(x,5):=subs(t=0.0009,u(x,t)):
plot({u(x,0),u(x,1),u(x,2),u(x,3),u(x,4),u(x,5),},x=0..3,thickness=1);
```




```
> u(x,0):=subs(t=0,u(x,t)):
  u(x,1):=subs(t=0.015,u(x,t)):
  u(x,2):=subs(t=0.03,u(x,t)):
  u(x,3):=subs(t=0.045,u(x,t)):
  u(x,4):=subs(t=0.06,u(x,t)):
  u(x,5):=subs(t=0.075,u(x,t)):
  u(x,5):=subs(t=0.09,u(x,t)):
  plot({u(x,0),u(x,1),u(x,2),u(x,3),u(x,4),u(x,5),u(x,6)},x=0..4,thickness=1);u(x,0):=subs(t
  =0,u(x,t)):
```


0,4
0,3
0,2
0,1
0
−0,1
−0,2
−0,3
−0,4
1
2
3
4
x

Lampiran 3. Plot gambar solusi contoh 4.3 dengan Program Maple

```
> restart:with(plots):with(inttrans):

> phi:=(x)->x+6;

  psi:=(x)->0;

  l:=1;
```

$$\phi := x \rightarrow x + 6$$

$$\psi := x \rightarrow 0$$

$$l := 1$$

```
> An:=2/l*int(phi(x)*sin((n+1/2)*Pi*x/l),x=0..l);

  Bn:=2/((n+1/2)*Pi*c)*int(psi(x)*sin((n+1/2)*Pi*x/l),x=0..l);
```

$$An := \frac{1}{\pi^2 \left(4 n^2 + 4 n + 1\right)} \left(4 \left(12 \pi n + 14 \pi n \sin(\pi n) + 2 \cos(\pi n) + 6 \pi + 7 \pi \sin(\pi n)\right)\right)$$

$$Bn := 0$$

```
➢ u:=(x,t)->sum((An*cos(c*(n+1/2)*Pi*t/l)+Bn*sin(c*(n+1/2)*Pi*t/l))*sin((n+
  1/2)*Pi*x/l),n=1..9);
```

$$u := (x, t) \rightarrow \sum_{n=1}^{9} \left(An \cos\left(\frac{c \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi t}{l}\right) + Bn \sin\left(\frac{c \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi t}{l}\right)\right) \sin\left(\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi x}{l}\right)$$

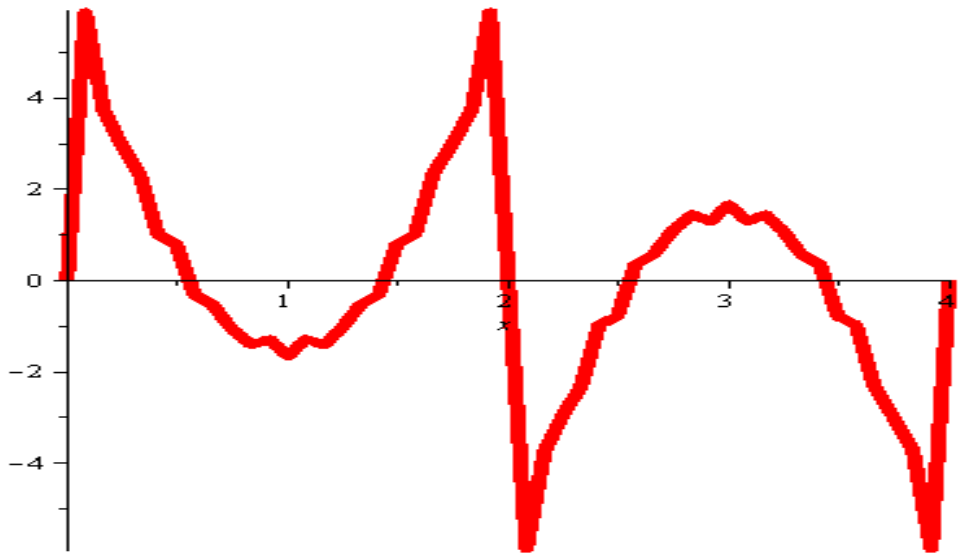
```
>u(x,t):=sum((An*cos(c*(n+1/2)*Pi*t/l)+Bn*sin(c*(n+1/2)*Pi*t/l))*sin((n+1/2)*Pi*x/l),
n=1..9);
```

$$u(x,t) := \frac{4}{9}\,\frac{(18\pi-2)\cos\left(\frac{3}{2}c\pi t\right)\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)}{\pi^2} + \frac{4}{25}\,\frac{(30\pi+2)\cos\left(\frac{5}{2}c\pi t\right)\sin\left(\frac{5}{2}\pi x\right)}{\pi^2} + \frac{4}{49}\,\frac{(42\pi-2)\cos\left(\frac{7}{2}c\pi t\right)\sin\left(\frac{7}{2}\pi x\right)}{\pi^2} + \frac{4}{81}\,\frac{(54\pi+2)\cos\left(\frac{9}{2}c\pi t\right)\sin\left(\frac{9}{2}\pi x\right)}{\pi^2} + \frac{4}{121}\,\frac{(66\pi-2)\cos\left(\frac{11}{2}c\pi t\right)\sin\left(\frac{11}{2}\pi x\right)}{\pi^2} + \frac{4}{169}\,\frac{(78\pi+2)\cos\left(\frac{13}{2}c\pi t\right)\sin\left(\frac{13}{2}\pi x\right)}{\pi^2} + \frac{4}{225}\,\frac{(90\pi-2)\cos\left(\frac{15}{2}c\pi t\right)\sin\left(\frac{15}{2}\pi x\right)}{\pi^2} + \frac{4}{289}\,\frac{(102\pi+2)\cos\left(\frac{17}{2}c\pi t\right)\sin\left(\frac{17}{2}\pi x\right)}{\pi^2} + \frac{4}{361}\,\frac{(114\pi-2)\cos\left(\frac{19}{2}c\pi t\right)\sin\left(\frac{19}{2}\pi x\right)}{\pi^2}$$

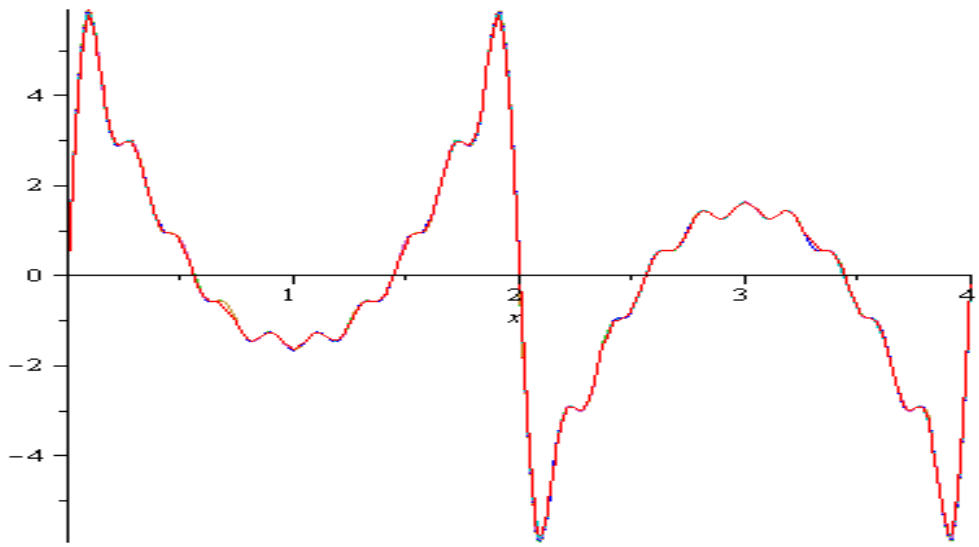
```
> c:=16;
```

$$c := 16$$

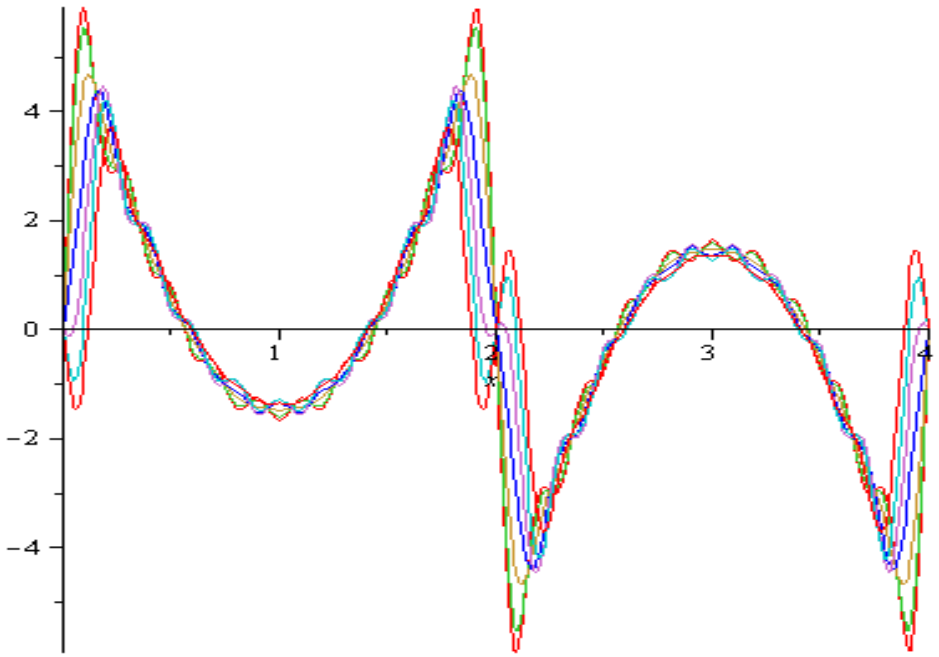
```
> animate(u(x,t),x=0..4,t=0..0.8,color=red,thickness=6);
```




```
> u(x,0):=subs(t=0,u(x,t)):
  u(x,1):=subs(t=0.00015,u(x,t)):
  u(x,2):=subs(t=0.0003,u(x,t)):
  u(x,3):=subs(t=0.00045,u(x,t)):
  u(x,4):=subs(t=0.0006,u(x,t)):
  u(x,5):=subs(t=0.00075,u(x,t)):
  u(x,6):=subs(t=0.0009,u(x,t)):
  plot({u(x,0),u(x,1),u(x,2),u(x,3),u(x,4),u(x,5),u(x,6)},x=0..4,thickness=1);
```




```
> u(x,0):=subs(t=0,u(x,t)):
  u(x,1):=subs(t=0.0015,u(x,t)):
  u(x,2):=subs(t=0.0030,u(x,t)):
  u(x,3):=subs(t=0.0045,u(x,t)):
  u(x,4):=subs(t=0.0060,u(x,t)):
  u(x,5):=subs(t=0.0075,u(x,t)):
  u(x,6):=subs(t=0.0090,u(x,t)):
  plot({u(x,0),u(x,1),u(x,2),u(x,3),u(x,4),u(x,5),u(x,6)},x=0..4,thickness=1);
```


4
2
0
-2
-4
1
2
3
4
x

Contoh penggunaannya sebagai berikut :

Pandang persamaan diferensial suatu osilasi dengan gaya luar berkala sebagai berikut :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0{,}02\frac{dy}{dt} + 25y = f(t)\text{, dengan } f(t) = \begin{cases} 1{,}0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1{,}\frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases} .a$$

dan f (t+1) = f (t) untuk setiap $t \in R$.

Kita ingin menentukan penyelesaian khusus dari persamaan diferensial tersebut.

Untuk itu kita nyatakan f (t) sebagai deret Fourier.

$$f(t) = \frac{2}{\pi}(\sin 2\pi t + \frac{1}{3}\sin 6\pi t + \frac{1}{5}\sin 10\pi t + \ldots)$$

Maka persamaan diatas dapat dinyatakan sebagai :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0{,}02\frac{dy}{dt} + 25y = \frac{2}{\pi n}\sin 2n\pi t \text{ , dengan n=1,3,5,...}$$

Penyelesaian khusus persamaan diferensial diatas adalah :

$$y_n(t) = \frac{-0{,}08}{D}\cos 2n\pi t + \frac{50 - 8\pi^2 n^2}{\pi n D}\sin 2n\pi t$$

Dengan D = $(25 - 4\pi^2 n^2)^2 + (0{,}04\pi n)^2$

Dengan alasan kekonvergenan seragam deret, kita dapat menyimpulkan bahwa

$y = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots$ merupakan penyelesaian khusus persamaan diferensial tersebut diatas.

6. Langkah-langkah pemrograman Maple untuk menyelesaikan persamaan gelombang sebagai berikut:
   - Menentukan nilai A_n .
   - Menentukan nilai B_n .
   - Menentukan $U(x,t)$ dengan rumus yang telah diketahui.
   - Animasi pergerakan persamaan gelombang dapat diperoleh dengan menggunakan perintah animate dari fungsi $U(x,t)$ dengan mensubstitusikan nilai-nilai x dan t untuk rentang tertentu.
   - Persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu Persamaan Diferensial Biasa (ordinary differential equation) dan Persamaan Diferensial Parsial (partial differential equation). Persamaan Diferensial Biasa didefinisikan sebagai suatu persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan biasa suatu fungsi yang tidak diketahui dengan dua atau lebih peubah bebas. Sedangkan Persamaan Diferensial Parsial didefinisikan sebagai suatu persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan parsial suatu fungsi yang tidak diketahui dengan dua atau lebih peubah bebas.