ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA PADA DATA TERSENSOR TIPE II MENGGUNAKAN ALGORITMA *FISHER-SCORING*

Skripsi

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar

Sarjana Matematika

oleh

Yustika Rakhma Apriliani

4111414022

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2020

PERNYATAAN

Dengan ini, saya

nama : Yustika Rakhma Apriliani

NIM : 4111414022

program studi : Matematika S1

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul Estimasi Parameter Distribusi Gamma pada Data Tersensor Tipe II menggunakan Algoritma *Fisher-Scoring* ini bebas plagiat, dan apabila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan.

Semarang, 26 Oktober 2020

METERAI TEMPEL

112C7AHF536468259

6000

ENAM RIBU RUPIAH

Yustika Rakhma Apriliani

NIM. 4111414022

PENGESAHAN

Skripsi dengan judul

Estimasi Parameter Distribusi Gama pada Data Tersensor Tipe II menggunakan Algoritma *Fisher-Scoring*.

disusun oleh

Yustika Rakhma Apriliani

4111414022

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES pada tanggal 7 Agustus 2020.

Semarang, 26 Oktober 2020

Panitia,

Ketua,

Dr. Suryanto, M.Si.
NIP. 196510219199303100l

Sekretaris,

Dr. Mulyono, M.Si.
NIP. 197009021997021001

Ketua Penguji,

Dr. Iqbal Kharisudin, M.Sc.
NIP. 197908052005011003

Anggota Penguji/
Pembimbing I,

Dr. Nur Karomah Dwidayati, M.Si.
NIP. 196605041990022001

Anggota Penguji/
Pembimbing II,

Dr. Arief Agoestanto, M.Si.
NIP. 196807221993031005

MOTTO

"*Lakukanlah sekarang. Terkadang 'nanti' bisa jadi 'tak pernah'.*" (Anonim)

"*Orang-orang hebat di bidang apapun bukan baru bekerja karena mereka terinspirasi, namun mereka menjadi terinspirasi karena mereka lebih suka bekerja. Mereka tidak menyia-nyiakan waktu untuk menunggu inspirasi.*" (Ernest Newman)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan kepada :

1. Kedua orang tua saya, dan adikku Aditya Yoga Pramana yang telah memberikan doa, dukungan dan motivasi.
2. Semua pihak yang telah memberikan dukungan dan semangat.
3. Almamaterku tercinta.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan nikmat-Nya yang senantiasa tercurah sehingga penyusunan skripsi yang berjudul "Estimasi Parameter Distribusi Gamma pada Data Tersensor Tipe II menggunakan Algoritma *Fisher-Scoring*" sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang dapat terselesaikan dengan baik.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak berupa saran, bimbingan maupun petunjuk. Oleh karena itu, dengan penuh kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum., Rektor Universitas Negeri Semarang;
2. Dr. Sugianto, M.Si., Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang;
3. Dr. Mulyono, M.Si., Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang;
4. Dr. Nur Karomah D., M.Si., Dosen Pembimbing I yang telah memberikan waktu, bimbingan, arahan, kritik dan saran selama menyelesaikan skripsi;
5. Drs. Arief Agoestanto, M.Si., Dosen Pembimbing II yang memberikan motivasi, bimbingan, saran, dan arahan selama penyusunan skripsi;
6. Dr. Iqbal Kharisudin, M.Sc., Dosen Penguji yang telah memberikan arahan, ide, kritik dan saran selama menyelesaikan skripsi;
7. Seluruh dosen dan staf karyawan di lingkungan Universitas Negeri Semarang terkhusus Jurusan Matematika;
8. Kedua orang tua, Bapak Joko Pramono dan Ibu Siti Aisiah yang selalu memberikan do'a serta dukungan, dan adikku tercinta Aditya Yoga Pramana sebagai motivasi saya untuk segera menyelesaian skripsi ini;
9. Ferry Aziz Dwi Priyambodo selaku tempat berbagi keluh dan kesah penulis dalam menyelesaikan skripsi;
10. Orang-orang terdekat saya yang selalu menemani dan menjadi pelipur hati;

11. Keluarga Matematika 2014 yang telah berbagi banyak suka dan duka serta pengalaman yang tidak bisa diulang;
12. Semua pihak yang telah membantu dan mendukung penulis dalam penelitian dan penyusunan skripsi yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan agar dapat menghasilkan karya yang lebih baik lagi. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan para pembaca.

Semarang,
Penulis

Yustika Rakhma Apriliani

ABSTRAK

Apriliani, Yustika Rakhma. (2020). *Estimasi Parameter Distribusi Gamma pada Data Tersensor Tipe II menggunakan Algoritma Fisher-Scoring*. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang. Pembimbing Utama Dr. Nur Karomah Dwidayati, M.Si. dan Pembimbing Pendamping Drs. Arief Agoestanto, M.Si.

Kata Kunci: Estimasi Parameter, Distribusi Gamma, *Maximum Likelihood Estimation*, Algoritma *Fisher-Scoring*.

Estimasi merupakan metode untuk mengetahui perkiraan nilai suatu populasi dengan menggunakan nilai-nilai sampel. Dalam metode estimasi, parameter yang ditaksir berupa nilai rata-rata yang diberi notasi μ dan nilai simpangan baku dengan notasi σ. Analisis survival merupakan alat untuk mengetahui estimasi lamanya waktu yang dibutuhkan oleh suatu individu atau unit agar dapat bertahan hidup.

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data bangkitan yang diperoleh dengan berbantuan software minitab dan diasumsikan berdistribusi Gamma berjumlah 200 data. Parameter distribusi Gamma yang digunakan adalah α dan β. Cara pengambilan sampelnya menggunakan distribusi tersensor tipe II menggunakan metode *maximum likelihood estimation* dengan menggunakan sampel data berukuran $r = 127$ data yang diperoleh secara acak dalam prosedur perhitungan menggunakan minitab. Variabel yang digunakan dalam simulasi perhitungan estimasinya adalah variabel uji hidup (survival) atau lama waktu hidup dalam hitungan hari (t).

Fungsi kepadatan peluang (fkp) distribusi Gamma digunakan untuk mendapatkan fungsi likelihood. Fungsi likelihood diubah ke dalam bentuk logaritma natural kemudian dihitung nilai turunan pertamanya. Dari perhitungan tersebut, diperoleh hasil estimasi parameter berbentuk implisit, sehingga diperlukan metode lain untuk memperoleh nilai estimatornya. Metode iterasi menggunakan algoritma *Fisher-Scoring* dipilih untuk menghitung nilai estimator menggunakan software Matlab. Perhitungan menggunakan matlab dilakukan dengan menerapkan nilai awal parameter $\alpha = 8$ dan $\beta = 1$ serta menggunakan r data. Setelah dilakukan perhitungan, diperoleh nilai estimator $\hat{\alpha} = 1.3163030$ dan $\hat{\beta} = 2.3264578$ dengan dua kali iterasi.

Berdasarkan nilai yang diperoleh, diketahui apabila estimator parameter tersebut tidak konsisten. Hal tersebut dikarenakan nilai estimator $\hat{\alpha}$ tidak mendekati nilai awalnya α^0. Maka perlu adanya penelitian lebih lanjut mengenai estimasi pada distribusi Gamma dengan memperhatikan sifat-sifat estimator sampel data yang digunakan agar diketahui memenuhi sifat estimator yang baik atau tidak. Hal lain yang perlu diperhatikan pula mengenai pemilihan software yang digunakan agar asumsi pada data sesuai dengan yang telah ditentukan.

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
PERNYATAAN KEASLIAN ii
HALAMAN PENGESAHAN iii
MOTTO DAN PERSEMBAHAN iv
KATA PENGANTAR v
ABSTRAK vii
DAFTAR ISI viii
DAFTAR TABEL x
DAFTAR BAGAN xi
DAFTAR GAMBAR xii
DAFTAR LAMPIRAN xiii
DAFTAR SIMBOL xiv
I. PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Batasan Masalah 4
1.4 Tujuan Penelitian 4
1.5 Manfaat Penelitian 5
II. TINJAUAN PUSTAKA
2.1 Peubah Acak dan Distribusinya 6
2.2 Fungsi dan Distribusi Gamma 7
2.2.1 Fungsi Gamma 7
2.2.2 Distribusi Gamma 8
2.3 Konsep Dasar Uji Survival 10
2.3.1 Fungsi Distribusi Kumulatif 10
2.3.2 Fungsi Survival 11
2.3.3 Fungsi Hazard 11
2.4 Metode Maksimum Likelihood 12

2.5 Data Tersensor 13
2.6 Tipe-Tipe Penyensoran 14
2.7 Ukuran Sampel 16
2.8 Estimasi Parameter 17
2.9 Algoritma *Fisher-Scoring* 20
2.10 Matlab 21
2.11 Kerangka Berpikir 22
III. METODE PENELITIAN
3.1 Fokus Penelitian 25
3.2 Sumber Data 25
3.3 Studi Pustaka 25
3.4 Langkah-langkah Analisis 26
IV. HASIL DAN PEMBAHASAN
4.1 Hasil Penelitian 30
4.1.1 Estimasi Parameter Distribusi Gamma 30
4.1.1.1 Estimasi Parameter menggunakan Metode *Maximum Likelihood Estimation* 30
4.1.1.2 Estimasi Parameter menggunakan Algoritma *Fisher- Scoring* 34
4.1.2 Algoritma dan Program 36
4.1.3 Penerapan pada Data Survival 37
4.2 Pembahasan 43
V. PENUTUP
5.1 Simpulan 44
5.2 Saran 45
DAFTAR PUSTAKA 46
LAMPIRAN 49

DAFTAR TABEL

Tabel **Halaman**

4.1 Data Simulasi Berdistribusi Gamma Tersensor Tipe II 40

DAFTAR BAGAN

Bagan **Halaman**

2.1 Kerangka Berfikir..... 24
3.1 Diagram Alir Penelitian 28
3.2 Diagram Alir Algoritma *Fisher-Scoring*..... 29

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

4.1 Langkah Membangkitkan Data 37
4.2 Penentuan Spesifikasi Data Yang Akan Dibangkitkan 38
4.3 Langkah Menentukan Sampel Data pada Worksheet 39
4.4 Penentuan Asumsi Data yang akan Disensor..... 39
4.5 Syntax Program untuk Membangkitkan Data 43

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran **Halaman**

1. Data Bangkitan 49
2. Langkah Membangkitkan Data Menggunakan Minitab 54
3. Langkah Menentukan Data Tersensor Tipe II 55
4. Syntax Program Matlab 56
5. Output Program Matlab 57
6. Tabel Isaac dan Michael 58

DAFTAR SIMBOL

α : Parameter bentuk

β : Parameter skala

θ : Parameter gabungan antara α dan β

t : Waktu hidup data

x : Individu yang diteliti

n : Banyak data yang diamati

r : Kegagalan data yang diamati

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada bidang matematika khususnya cabang statistika, sebelum mengambil keputusan untuk mengestimasi parameter dari suatu populasi atau menganalisis statistik dari suatu sampel acak dilakukan dengan menggunakan metode statistika. Dalam penggunaan metode statistika, terdapat dua bagian utama yaitu statistika deskriptif, dan statistika inferensial. Statistika deskriptif merupakan cabang statistika yang bertujuan untuk menyajikan informasi dan data sebagai deskripsi dari suatu peristiwa yang disajikan dalam bentuk numerik, tabel, grafik, atau kurva distribusi. Hal ini bertujuan untuk mempermudah pemahaman dalam pengambilan keputusan terhadap suatu peristiwa. Sedangkan statistika inferensial merupakan cabang ilmu statistika yang menggunakan konsep probabilitas untuk membuat perkiraan, prediksi, peramalan atau generalisasi suatu obyek berdasarka yang diperoleh baik berdasarkan populasi maupun sampel.

Pada statistika inferensial pengujian digunakan untuk memperoleh suatu kesimpulan mengenai populasi. Tetapi cara tersebut tidak praktis sehingga tidak mungkin mengamati keseluruhan komponen populasi. Oleh karena itu, perlu digunakan alternatif lain dengan cara mengestimasi parameter dari populasi yang tidak diketahui menggunakan statistik sampel.

Dalam statistik, estimasi merupakan metode untuk mengetahui perkiraan nilai suatu populasi dengan menggunakan nilai-nilai sampel. Nilai populasi lebih dikenal sebagai parameter, sedangkan nilai-nilai sampel sering disebut dengan statistik. Dalam metode estimasi, parameter yang ditaksir berupa nilai rata-rata yang diberi notasi μ dan nilai simpangan baku dengan notasi σ.

Analisis survival merupakan alat untuk mengetahui estimasi lamanya waktu yang dibutuhkan oleh suatu individu atau unit agar dapat bertahan hidup. Cara yang dilakukan dalam pengambilan sampel analisis data survival ada dua yaitu distribusi tersensor dan distribusi tak tersensor (data lengkap). Distribusi tersensor adalah data

yang diambil jika semua individu atau unit yang diteliti dihentikan setelah waktu yang ditentukan, sedangkan distribusi tak tersensor (data lengkap) merupakan data yang diambil jika semua individu atau unit tersebut mati atau gagal. Dalam menganalisis data survival digunakan regresi khusus, untuk mengolah perolehan data yang tidak lengkap dari hasil penyensoran.

Data tersensor dapat dibedakan menjadi data tersensor tipe I, dan data tersensor tipe II. Berbentuk data tersensor tipe I jika data survival dihasilkan setelah percobaan berjalan selama waktu yang ditentukan, serta berbentuk data tersensor tipe II jika observasi diakhiri setelah sejumlah kematian atau kegagalan tertentu telah terjadi. Penjelasan mengenai data tersensor tipe II yakni suatu data waktu kematian atau kegagalan yang hanya terdapat r buah observasi terkecil dalam sampel acak yang berukuran n dengan $1 \leq r \leq n$.

Pada data survival muncul beberapa pembahasan mengenai konsep dasar seperti fungsi hazard, fungsi survival, dan fungsi kepadatan peluang. Pembahasan ini menggunakan pendekatan parametrik yaitu data yang didapat pada suatu sampel diasumsikan mempunyai distribusi-distribusi tertentu untuk proses penganalisaan. Pada metode parametrik akan dilakukan estimasi dari parametrik-parametrik yang termasuk di dalam model distribusi tersensor.

Fungsi distribusi survival yang didasarkan pada pengetahuan atau asumsi tertentu tentang distribusi populasinya termasuk dalam fungsi parametrik. Beberapa distribusi yang dapat digunakan untuk menggambarkan waktu hidup antara lain Distribusi Eksponensial, Distribusi Weibull, Distribusi Gamma, Distribusi Rayleigh, dan lain-lain. Di antara distribusi tersebut, dipilih fungsi survival berdistribusi Gamma, atau data survival diasumsikan berdistribusi Gamma.

Bain menyatakan bahwa distribusi Gamma berperan penting dalam teori antrian dan masalah-masalah keterandalan seperti jarak antara waktu tunggu sampai tiba di fasilitas pelayanan (bank, toilet, kereta api, rambu lalu lintas, dst.) dan lamanya waktu sampai rusaknya suku cadang mesin, lampu, dll. Selain itu, distribusi Gamma mempunyai aplikasi paling luas dibandingkan dengan distribusi lainnya dalam menganalisa data survival, sehingga cocok digunakan untuk mengestimasi waktu hidup suatu benda.

Cara mengetahui apakah distribusi dari data dalam fungsi survival yang diasumsikan telah menggambarkan keadaan sesungguhnya, diperlukan suatu analisis terhadap data survival. Langkah untuk menganalisis terhadap fungsi distribusi dari data survival adalah dengan mengestimasi nilai parameter distribusinya. Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk mengestimasi suatu parameter, di antaranya yaitu *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) menggunakan pendekatan distribusi dengan memaksimumkan fungsi *likelihood* dan *least square method* (metode kuadrat terkecil) menggunakan pendekatan geometris dengan meminimumkan galatnya. Dalam memaksimumkan suatu fungsi apabila nilai parameter diperoleh dalam bentuk implisit dan non-linier maka tidak dapat diselesaikan secara analitik. Maka perlu digunakan metode lain untuk menyelesaikannya, yaitu menggunakan Algoritma *Fisher-Scoring*.

Pada penelitian terdahulu telah dilakukan estimasi parameter untuk beberapa distribusi dengan berbagai model di antaranya yaitu, “Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode Maksimum Likelihood” (Misbahussurur, 2009), dengan data diasumsikan berdistribusi Gamma dan menggunakan metode maksimum likelihood. Penelitian selanjutnya "Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode Bayes” (Rarasati, I.P., 2012), berbeda dengan sebelumnya kali ini digunakan metode Bayesian. Penelitian tersebut memiliki kekurangan yaitu tidak dapat memberikan hasil estimator yang tetap. Dengan kata lain, jika nilai inisialisasi parameter yang diberikan berubah, maka hasil untuk estimasi pun berubah. Dalam penelitian yang berjudul “Estimator Bayes untuk Rata-Rata Tahan Hidup dari Distribusi Rayleigh pada Data Disensor Tipe II” (Nimah, R., 2014) menunjukkan kemudahan dalam pengerjaannya karena data diasumsikan tersensor tipe II sehingga mempersingkat waktu penelitian. Sedangkan hasil penelitian dalam “Estimasi Model Linear Tergeneralisasi Gaussian berdasarkan *Maximum Likelihood Estimator* dengan Menggunakan Algoritma *Fisher-Scoring*” (Ummah, Z., 2012), menjelaskan bahwa metode *Maximum Likelihood Estimation* yang bekerja dengan melakukan pendekatan distribusi dengan memaksimumkan fungsi *likelihood* dan *least square* (metode kuadrat terkecil) pada umumnya maksimum

suatu fungsi tidak bisa diselesaikan sehingga untuk menyelesaikan masalah tersebut perhitungan dapat dilakukan dengan iterasi menggunakan algoritma pemrograman.

Algoritma sendiri merupakan prosedur komputasi dimana mengambil sebuah nilai atau menentukan nilai sebagai *input* dan menghasilkan beberapa nilai sebagai *output*. Algoritma adalah suatu urutan langkah-langkah komputasi yang dapat merubah sebuah *input* menjadi *output*. Dalam penelitian ini dipilih algoritma *Fisher-Scoring* untuk melakukan proses iterasinya. Algoritma *Fisher-Scoring* adalah salah satu bentuk pengembangan dari metode *Newton-Raphson* dengan mengganti matriks hessian $H(\theta)$ dengan matriks inisialisasi $I(\theta)$. Berdasarkan hal tersebut, maka penulis mengambil topik untuk penelitian ini mengenai **"Estimasi Parameter Distribusi Gamma pada Data Tersensor Tipe II Menggunakan Algoritma *Fisher-Scoring*".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan dapat dirumuskan sebagai berikut.

1. Bagaimana estimasi parameter distribusi Gamma pada data tersensor tipe II?
2. Bagaimana hasil estimasi parameter distribusi Gamma pada penerapan data bangkitan menggunakan algoritma *Fisher-Scoring?*

1.3 Batasan Masalah

Batasan ruang lingkup masalah pada penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Data survival diasumsikan berdistribusi Gamma dengan parameter bentuk α dan parameter skala β.
2. Estimasi dilakukan pada data survival tersensor tipe II menggunakan algoritma *Fisher-Scoring*.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui estimator data survival dari distribusi Gamma pada data tersensor tipe II.
2. Mengetahui nilai yang dihasilkan dengan menggunakan algoritma *Fisher-Scoring* pada data bangkitan yang digunakan.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan mempunyai manfaat sebagai berikut.

1. Hasil penelitian ini dapat digunakan oleh civitas akademika baik dosen maupun mahasiswa jurusan Matematika untuk memperdalam pemahaman dan wawasan terhadap ilmu statistika terutama tentang fungsi survival untuk data survival berdistribusi Gamma.
2. Mengetahui tentang proses dan hasil estimasi parameter berdistribusi Gamma menggunakan algoritma *Fisher-Scoring*.
3. Memberikan pengetahuan serta gambaran tentang distribusi tahan hidup (survival).
4. Memberikan informasi mengenai cara mengestimasi model distribusi Gamma menggunakan algoritma *Fisher-Scoring*.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Peubah Acak dan Distribusinya

Definisi 2.1

Peubah acak X adalah suatu fungsi dengan daerah asal S, dimana S adalah suatu ruang sampel dan daerah hasil bilangan riil sedemikian sehingga $X(e) = x$, dengan $e \in S$ dan $e \in R$. (Bain dan Engelhardt, 1991:53)

Dalam statistika, peubah acak dibagi menjadi dua sebagai berikut.

1. Peubah acak diskrit

Definisi 2.2

Jika himpunan semua nilai yang mungkin dari peubah acak X, adalah himpunan yang dapat dihitung $x_1, x_2, \dots, x_n$ atau $x_1, x_2, \dots$ maka X disebut peubah acak diskrit. Fungsinya dijabarkan sebagai berikut

$$f(x) = P[X = x] \tag{2.1}$$

Yang menetapkan probabilitas untuk setiap nilai X yang mungkin, disebut fungsi kepadatan peluang diskrit (f.k.p diskrit).

Definisi 2.3

Fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak X didefinisikan untuk setiap x riil sebagai berikut

$$F(x) = P[X \leq x] \tag{2.2}$$

Definisi 2.4

Jika X peubah acak diskrit dengan fkp $f(x)$, maka nilai ekspektasi dari X didefinisikan dengan

$$E(X) = \sum_x x f(x) \tag{2.3}$$

2. Peubah acak kontinu

Definisi 2.5

Suatu peubah acak X disebut sebagai peubah acak kontinu jika terdapat suatu fungsi $f(x)$ yang disebut sebagai fungsi kepadatan peluang (fkp) dari X, sehingga fungsi distribusi kumulatifnya dapat dijabarkan sebagai

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \tag{2.4}$$

Teorema 2.1

Suatu fungsi $f(x)$ disebut fkp dari peubah acak kontinu X jika dan hanya jika memenuhi sifat

$$f(x) \geq 0$$

Untuk semua bilangan riil, dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

Definisi 2.6

Apabila X suatu peubah acak kontinu dengan fkp $f(x)$, sehingga nilai ekspektasi dari X didefinisikan oleh

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \tag{2.5}$$

Jika integral pada persamaan (2.5) konvergen maka $E(X)$ tidak ada.

2.2. Fungsi dan Distribusi Gamma

2.2.1. Fungsi Gamma

Definisi 2.7

Fungsi Gamma dapat didefinisikan untuk $\alpha > 0$ maka $\Gamma(\alpha)$ didefinisikan dengan integral sebagai berikut.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \tag{2.6}$$

(Degroot, 1989)

2.2.2. Distribusi Gamma

Definisi 2.8

Peubah acak kontinu X dikatakan berdistribusi Gamma jika fungsi kepadatan peluang (fkp) dari X adalah

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0\ \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0, & x\ yang\ lain \end{cases} \tag{2.7}$$

Pada umumnya, Distribusi Gamma memiliki nilai $\beta = 1$, sehingga fkp peubah acak fungsi Gamma standar diberikan oleh

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{(x^{\alpha-1} e^{-x})}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0 \\ 0, & x\ lainnya \end{cases} \tag{2.8}$$

(Devore, 2010: 168).

Berdasarkan fkp distribusi Gamma tersebut dapat diperoleh beberapa nilai di antaranya adalah sebagai berikut.

1. Mean

$$\begin{aligned} E(x) = \mu &= \int_0^\infty x\, f(x)\, dx \\ &= \int_0^\infty x \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx \end{aligned}$$

Misal $y = \frac{x}{\beta}$, maka $x = \beta y$ dan $dx = \beta dy$, sehingga diperoleh persamaan

$$\mu = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (\beta y)^\alpha e^{-y}\, \beta\, dy$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \beta^{\alpha} y^{\alpha} e^{-y}\, \beta\, dy$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha}\beta \int_0^{\infty} y^{\alpha} e^{-y}\ dy$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha} e^{-y}\ dy$$

$$= \frac{\beta\ \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\beta\ \alpha!}{(\alpha-1)!}$$

$$= \frac{\beta\ \alpha(\alpha-1)!}{(\alpha-1)!}$$

$$\mu = \alpha\beta \qquad (2.9)$$

2. Variansi

   Setelah diperoleh nilai $E(x)$ maka akan dicari nilai $E(x^2)$ untuk mendapatkan nilai variansinya

$$E(x^2) = \int_0^{\infty} x^2\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\ dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\beta}}\ dx$$

   Misal $y = \frac{x}{\beta}$, maka $x = \beta y$ dan $dx = \beta dy$, sehingga diperoleh persamaan

$$E(x^2) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} (\beta y)^{\alpha+1} e^{-y}\, \beta\, dy$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \beta^{\alpha+2} y^{\alpha+1} e^{-y}\ dy$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\beta^{\alpha}\beta^{2}\int_{0}^{\infty} y^{\alpha+1}e^{-y}\ dy$$

$$= \frac{\beta^{2}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty} y^{\alpha+1}e^{-y}\ dy$$

$$= \frac{\beta^{2}\ \Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\beta^{2}\ (\alpha+1)!}{(\alpha-1)!}$$

$$= \frac{\beta^{2}\ (\alpha+1)\alpha(\alpha-1)!}{(\alpha-1)!}$$

$$E(x^{2}) = (\alpha+1)\alpha\beta^{2} \qquad (2.10)$$

Setelah diperoleh nilai $E(x)$ dan $E(x^2)$ dapat dihitung nilai variansinya sebagai berikut.

$$\sigma^{2} = E(x^{2}) - [E(x)]^{2}$$

$$= (\alpha+1)\alpha\beta^{2} - [\alpha\beta]^{2}$$

$$= \alpha^{2}\beta^{2} + \alpha\beta^{2} - \alpha^{2}\beta^{2}$$

$$= \alpha\beta^{2} \qquad (2.11)$$

2.3. Konsep Dasar Uji Survival

2.3.1. Fungsi Distribusi Kumulatif

Definisi 2.9

Jika T merupakan peubah acak dari waktu hidup suatu individu dalam interval $[0,\infty)$, maka fungsi distribusi kumulatif $F(t)$ untuk distribusi kontinu dengan kepadatan peluang $f(t)$ dinyatakan sebagai berikut

$$f(t) = P(T \leq t) \qquad (2.12)$$

atau

$$F(t) = \int_{0}^{t} f(x)\,dx, \quad t > 0 \qquad (2.13)$$

(Lawless, 1982).

Sedangkan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Gamma dua parameter adalah sebagai berikut.

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \tag{2.14}$$

(Bain dan Engelhardt, 1992)

2.3.2. Fungsi Survival

Fungsi Survival didefinisikan sebagai peluang suatu individu yang masih dapat bertahan hidup sampai waktu t. Jika T sebagai peubah acak dari waktu tahan hidup dalam interval $[0, \infty)$, maka fungsi survival $S(t)$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} S(t) &= P(T \geq t) \\ &= \int_t^\infty f(x)\, dx \\ &= [f(x)]_t^\infty \\ &= F(\infty) - F(t) \\ &= 1 - F(t) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Dengan demikian maka diperoleh persamaan yang menyatakan hubungan antara fungsi survival dan fungsi distribusi kumulatif adalah sebagai berikut.

$$S(t) = 1 - F(t) \tag{2.16}$$

(Lawless, 1982).

2.3.3. Fungsi *Hazard*

Menurut Lawless (1982) fungsi *hazard* merupakan peluang suatu individu mati dalam interval waktu t sampai $t + \Delta t$, jika diketahui individu tersebut masih dapat bertahan hidup sampai dengan waktu t, dinyatakan sebagai berikut.

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t}{\Delta t} \right] \tag{2.17}$$

Jika $f(t)$ adalah suatu fungsi kepadatan peluang pada waktu t, maka diperoleh

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P((t \leq T) < (t + \Delta t | T \geq t))}{\Delta t} \right] \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{[P\big((t \leq T) < (t + \Delta t)\big) \cap (T \geq t)]}{P(T \geq t)\Delta t} \right] \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(t \leq T < (t + \Delta t))}{P(T \geq t)\Delta t} \right] \end{aligned}$$

Dari persamaan (2.15), (2.16), dan (2.17)

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} \right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{1}{S(t)} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} \right]$$

$$= \frac{F'(t)}{S(t)}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \qquad (2.18)$$

2.4. Metode Maksimum Likelihood

Definisi 2.10

Fungsi Likelihood. Fungsi kepadatan bersama *(join density function)* dari n peubah acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ pada $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ disebut sebagai fungsi likelihood. Untuk $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang tetap, fungsi likelihood adalah fungsi dari θ dan sering dinotasikan sebagai $L(\theta)$. Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ menyatakan sampel acak dengan fungsi kepadatan peluang $f(x; \theta)$ maka

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) \dots f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) \qquad (2.19)$$

(Bain dan Engelhardt, 1991:293)

Definisi 2.11

Maximum Likelihood Estimation (MLE). Misalkan $L(\theta) = f(x_1, \dots, x_n; \theta)$, $\theta \in \Omega$, menjadi pdf bersama dari $X_1, \dots, X_n$. Untuk suatu pengamatan yang diberikan $(x_1, \dots, x_n)$, nilai $\hat{\theta}$ dalam Ω dimana $L(\theta)$ adalah maksimum disebut maximum likelihood estimation (MLE) dari θ. Artinya, $\hat{\theta}$ adalah nilai dari θ yang memenuhi

$$f(x_1, \dots, x_n; \theta) = \max_{\theta \in \Omega} f(x_1, \dots, x_n; \theta)$$

(Bain dan Engelhardt, 1991:294)

Perhatikan bahwa jika setiap pengamatan $(x_1, \dots, x_n)$ sesuai dengan nilai $\hat{\theta}$ yang unik, maka langkah ini mendefinisikan suatu fungsi $\hat{\theta} = f(x_1, \dots, x_n)$. Fungsi tersebut ketika diterapkan pada sampel acak, $\hat{\theta}$, disebut maximum likelihood estimator, juga disebut MLE. Biasanya, notasi yang sama $\hat{\theta}$ digunakan untuk estimasi ML dan estimator ML.

Langkah-langkah untuk menentukan *Maximum Likelihood Estimation* adalah sebagai berikut

1. Menentukan fungsi likelihood

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \dots f(x_n; \theta)$$

2. Membentuk logaritma natural likelihood (ln-likelihood)

$$\ln L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \ln\big(f(x_1; \theta) \dots f(x_n; \theta)\big)$$

3. Menurunkan ln-likelihood terhadap θ dan menyelesaikannya
$$\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0$$
4. Diperoleh *maximum likelihood estimator* θ

2.5. Data Tersensor

Kusumawardhani, dkk (2018) menjelaskan bahwa data tersensor adalah hasil pengamatan dari objek yang diteliti pada kurun waktu tertentu dan tidak mengalami kegagalan hingga penelitian berakhir. Suatu data dikatakan tersensor jika lamanya waktu hidup yang ingin diketahui atau diobservasi hanya terjadi pada periode waktu yang telah ditentukan (interval pengamatan), sedangkan informasi yang ingin diketahui tidak terjadi pada interval tersebut. Dengan demikian kita tidak memperoleh informasi apapun yang diinginkan selama interval pengamatan.

Menurut Collect (1997), data survival tidak memenuhi syarat prosedur standar statistika yang digunakan pada analisis data. Hal ini dikarenakan data survival biasanya berdistribusi tidak simetris. Model histogram waktu survival pada sekelompok individu yang sangat sama akan cenderung *"positive skewed"*, oleh karena itu histogram akan semakin miring ke kanan sesuai dengan interval waktu dengan jumlah pengamatan terbesar, sehingga tidak ada alasan untuk mengasumsikan bahwa data survival berdistribusi normal.

Dalam penyensoran sering terjadi individu diamati tersensor. Masalah penyensoran ini merupakan suatu hal yang membedakan antara uji hidup (survival) dengan bidang ilmu statistik yang lain. Data tersensor adalah data yang diperoleh sebelum hasil yang diinginkan dari pengamatan terjadi, sedangkan waktu pengamatan telah berakhir atau oleh sebab lain. Data yang mengalami penyensoran hanya memuat sebagian informasi mengenai sampel acak yang diperhatikan, namun berpengaruh terhadap pengertian-pengertian dan perhitungan statistik.

Ada empat jenis penyensoran yaitu di antaranya sebagai berikut.

1. Sensor kanan *(right censoring)*, sensor yang terjadi apabila objek yang diamati masih tetap hidup pada saat waktu yang telah ditentukan.
2. Sensor kiri *(left censoring)*, sensor yang terjadi apabila semua informasi yang diinginkan dari objek pengamatan telah diperoleh pada awal studi.

3. Sensor selang *(interval censoring)*, sensor yang terjadi apabila informasi yang dibutuhkan telah diperoleh di dalam selang pengamatan.
4. Sensor acak *(random censoring)*, sensor yang terjadi apabila objek pengamatan mati karena hal lain yang tidak berhubungan dengan tujuan utama pengamatan.

(Klein dan Moeschberger, 2003: 64, 70).

2.6. Tipe-Tipe Penyensoran

Dalam pengumpulan data sering terjadi individu yang diamati tersensor. Masalah pengumpulan data ini merupakan suatu hal yang membedakan antara uji hidup (survival) dengan bidang ilmu statistik lainnya. Data tersensor adalah data yang diperoleh sebelum semua data teramati waktu hidupnya, sementara waktu pengamatan telah berakhir, atau oleh sebab lain. Sementara data tidak tersensor adalah waktu tahan hidup yang dicatat dari individu yang mati selama waktu percobaan, yaitu waktu dari awal hingga mengalami kematian. Data yang mengalami penyensoran hanya memuat sebagian informasi mengenai sampel acak yang diperhatikan, namun berpengaruh terhadap pengertian-pengertian dan perhitungan statistik. Penyensoran dilakukan untuk memperpendek waktu percobaan karena dalam mengukur waktu kegagalan atau kematian individu kadang-kadang diperlukan waktu yang lama dan biaya yang besar. Menurut Lee dan Wang (2003), ada tiga tipe penyensoran yang sering digunakan dalam pengamatan survival yaitu sebagai berikut.

1. Sensor tipe I, merupakan tipe penyensoran dimana percobaan akan dihentikan setelah mencapai waktu T yang telah ditentukan untuk mengakhiri semua n individu yang masuk pada waktu yang sama. Berakhirnya waktu uji T menjelaskan waktu sensor uji. Dengan kata lain, jika terdapat individu yang hilang secara tiba-tiba maka daya tahan *(survival)* pengamatan tersensor sama dengan lama waktu pengamatan.
2. Sensor tipe II, merupakan tipe penyensoran dimana sampel ke-r merupakan observasi terkecil dalam sampel acak berukuran n $(1 \leq r \leq n)$. Dari total sampel berukuran n, pengamatan akan dihentikan ketika diperoleh sebanyak r individu yang mengalami kegagalan, dimana $r < n$. Hal tersebut dapat

menghemat waktu dan biaya. Dalam penyensoran ini, r ditentukan terlebih dahulu sebelum data dikumpulkan.

3. Sensor tipe III, merupakan individu atau unit uji masuk ke dalam percobaan pada waktu yang berlainan selama periode waktu tertentu. Beberapa individu yang diuji mungkin gagal/mati sebelum pengamatan berakhir sehingga waktu tahan hidupnya dapat diketahui dengan pasti. Kemungkinan kedua adalah individu yang diuji keluar sebelum pengamatan berakhir, atau kemungkinan ketiga adalah individu yang diuji tetap hidup sampai batas waktu terakhir pengamatan. Untuk objek yang hilang, waktu tahan hidupnya adalah dari mulai masuk pengamatan sampai waktu pengamatan berakhir.

Menurut Lawless (1982) data tersensor tipe II merupakan data kematian atau kegagalan yang tidak lengkap *(incomplete mortality data)* yaitu data waktu kematian atau kegagalan dari r observasi terkecil dalam sampel acak yang berukuran n dengan $1 \leq r \leq n$. Dalam eksperimen menunjukkan penyensoran tipe II lebih sering digunakan sebagai contoh dalam uji survival dari total observasi sebanyak n, tetapi uji survival akan berhenti pada waktu observasi sampel mempunyai waktu kematian atau kegagalan ke-r. Oleh karena itu uji survival ini dapat menghemat waktu dan biaya, karena memakan waktu yang lama untuk penyensoran terhadap kegagalan dari observasi. Data tersensor tipe II diperoleh dari penyelidikan terhadap n observasi, sehingga penyensoran berhenti sampai observasi sampel yang mempunyai waktu kematian atau kegagalan ke-r. Oleh karena itu dalam penyensoran tipe II umumnya data terdiri dari r waktu hidup terkecil $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_r$ dari sampel acak berukuran n. Bila $t_1, t_2, \dots, t_r$ i.i.d dan berdistribusi kontinu dengan fungsi kepadatan peluang $f(t)$ dan fungsi survival $S(t)$ maka fungsi kepadatan peluang (fkp) bersama dari $t_1, t_2, \dots, t_r$ adalah

$$f(t_1, t_2, \dots, t_r) = \frac{n!}{(n-r)!}\left[\prod_{i=1}^{r} f(t_i)\right][1 - F(t_r)]^{n-r}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} f(t_1) \dots f(t_r) S(t_r)^{n-r} \qquad (2.20)$$

2.7. Ukuran Sampel

Untuk menentukan sampel dari populasi digunakan perhitungan maupun acuan tabel yang dikembangkan para ahli. Secara umum, untuk penelitian korelasional jumlah sampel minimal untuk memperoleh hasil yang baik adalah 30, sedangkan dalam penelitian eksperimen jumlah sampel minimum 15 dari masing-masing kelompok dan untuk penelitian survey jumlah sampel minimum adalah 100.

Roscoe (1975) yang dikutip Uma Sekaran (2006) memberikan acuan umum untuk menentukan ukuran sampel yaitu sebagai berikut.

1. Ukuran sampel lebih dari 30 dan kurang dari 500 adalah tepat untuk kebanyakan penelitian.
2. Jika sampel dipecah ke dalam subsample (pria/wanita, junior/senior, dan sebagainya), ukuran sampel minimum 30 untuk tiap kategori adalah tepat.
3. Dalam penelitian multivariate (termasuk analisis regresi berganda), ukuran sampel sebaiknya 10 kali lebih besar dari jumlah variabel dalam penelitian.
4. Untuk penelitian eksperimental sederhana dengan control eksperimen yang ketat, penelitian yang sukses adalah dengan ukuran sampel kecil anatara 10 sampai dengan 20.

Ukuran sampel sangat tergantung dari besaran tingkat ketelitian atau kesalahan yang diinginkan peneliti. Namun, dalam hal tingkat kesalahan, pada penelitian social maksimal tingkat kesalahannya adalah 5% (0.05). Makin besar tingkat kesalahan maka makin kecil jumlah sampel yang digunakan. Tetapi hal yang perlu diperhatikan pula adalah semakin besar jumlah sampel (semakin mendekati populasi) maka semakin kecil peluang kesalahan generalisasi dan sebaliknya.

Beberapa rumus intik menentukan jumlah sampel di antaranya adalah sebagai berikut.

1. Rumus Slovin (Ridwan, 2005:65)

$$n = \frac{N}{N(d^2) + 1}$$

Keterangan

n = sampel

N = populasi

d = nilai presisi 95% (sig. = 0.05)

2. Formula Jacob Cohen (Suharsimi Arikunto, 2010:179)

$$N = \frac{L}{F^2 + u + 1}$$

Keterangan

N = ukuran sampel

F = Effect Size

u = Banyaknya ubahan yang terkait dalam penelitian

L = Fungsi power dari u, diperoleh dari tabel

3. Rumus berdasarkan Proporsi atau Tabel Isaac dan Michael

Tabel penentuan jumlah sampel dari Isaac dan Michael memberikan kemudahan penentuan jumlah sampel berdasarkan tingkat kesalahan 1%, 5%, dan 10%. Dengan tabel ini, peneliti dapat secara langsung menentukan besaran sampel berdasarkan jumlah populasi dan tingkat kesalahan yang dikehendaki.

2.8. Estimasi Parameter

Parameter didefinisikan sebagai hasil pengukuran yang menggambarkan karakteristik dari suatu populasi. Disisi lain, karakteristik sampel didefinisikan sebagai statistik. Sebagai contoh adalah rata-rata populasi *(population mean)* μ, variansi populasi *(population variance)* σ, dan koefisian korelasi populasi *(population correlation coefficient)* ρ. Parameter biasanya tidak diketahui, dan dengan statistiklah nilai-nilai parameter itu diestimasi. Sebagai contoh adalah rata-rata sampel $\bar{x}$ digunakan untuk mengestimasi rata-rata populasi μ yang tidak diketahui dari pengambilan sampel suatu populasi. Dalam statistika non-parametrik, parameter yang cukup menarik untuk dikaji adalah median populasi. Parameter ini sering digunakan dalam analisis statistika non-parametrik untuk menggantikan rata-rata populasi sebagai ukuran untuk lokasi atau tendensi sentral yang lebih disukai.

Estimasi adalah proses yang menggunakan statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter yang tidak diketahui. Estimasi merupakan suatu

pernyataan mengenai parameter yang diketahui berdasarkan populasi dari sampel, dalam hal ini sampel acak, yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan estimasi ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002: 111).

Menurut Yitnosumarto (1990: 211-212), penduga (estimator) adalah anggota peubah acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan estimator terhadap data dari semua contoh disebut nilai duga *(estimate)*.

Misalkan terdapat sebuah peubah acak X yang mengikuti sebaran tertentu dengan nilai yang diamati $X_1, X_2, X_3, , , , , X_n$. Jika nilai-nilai pengamatan mempunyai peluang yang sama untuk diperoleh, maka nilai tengahnya adalah sebagai berikut.

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad (2.21)$$

Yang merupakan suatu estimator titik *(point estimate)* dari nilai tengah populasi μ. Estimator titik ini seringkali dicacat dengan $\hat{\mu}$ *(miu topi)* karena merupakan estimator dari μ (Yitnosumarto, 1990: 212).

Terdapat beberapa sifat-sifat estimator di antaranya adalah sebagai berikut.

1. Tak bias *(unbias)*

   Sifat tak bias merupakan sifat baik dari estimator yang diperoleh melalui pendekatan klasik. Dalam pembahasan pemilihan estimator terbaik salah satunya harus memenuhi sifat tak bias. Suatu statistik disebut estimator tak bias dari suatu parameter jika *mean* atau ekspektasi dari statistik itu sama dengan parameter yang ditaksir (Spiegel, Schiller, dan Srinivasan, 2004: 166). Apabila $\hat{\theta}$ merupakan estimator tak bias *(unbias estimator)* dari parameter θ, maka $\mu_{\hat{\theta}} = E(\hat{\theta}) = \theta$. Maka dalam distribusi Gamma berlaku untuk statistik $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ merupakan estimator tak bias dari parameter α dan β, maka $\mu_{\hat{\alpha}} = E(\hat{\alpha}) = \alpha$ dan $\mu_{\hat{\beta}} = E(\hat{\beta}) = \beta$.

2. Varians Terendah

   Menurut Gujarati (2006: 96) Suatu estimator dikatakan sebagai estimator dengan varians terendah jika variansnya lebih kecil daripada estimator lainnya.

3. Efisien

   Menurut Yitnosumarto (1990) suatu estimator (misalkan: $\hat{\theta}$) dikatakan efisien bagi parameter (θ) apabila estimator tersebut mempunyai varians yang kecil. Apabila terdapat lebih dari satu estimator, estimator yang efisien adalah estimator yang mempunyai varian terkecil. Dua estimator dapat dibandingkan efisiennya dengan menggunakan efisiensi relatif *(relative efficiency)*. Efisiensi relatif $\hat{\theta}_2$ terhadap $\hat{\theta}_1$ dirumuskan sebagai berikut.

$$R(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1) = \frac{E(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta})^2}{E(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta})^2}$$

$$= \frac{E\left(\hat{\theta}_1 - E(\hat{\theta}_1)\right)^2}{E\left(\hat{\theta}_2 - E\left(\hat{\theta}_2\right)\right)^2}$$

$$= \frac{var\hat{\theta}_1}{var\hat{\theta}_2} \qquad (2.22)$$

   $R = \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2}$, jika $R > 1$ maka $\hat{\theta}_1 > \hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_2$ lebih efisien dari pada $\hat{\theta}_1$, dan jika $R < 1$ maka $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$, artinya secara relatif $\hat{\theta}_1$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_2$.

4. Konsisten

   Suatu estimator dikatakan konsisten jika memenuhi syarat sebagai berikut.

   1) Jika ukuran sampel semakin bertambah maka estimator akan mendekati parameternya. Jika besar sampel menjadi tak terhingga maka estimator konsisten harus dapat memberi suatu estimator titik yang sempurna terhadap parameternya. Jadi, $\left(\hat{\theta}\right)$ merupakan estimator konsisten, jika dan hanya jika $E(\hat{\theta} - E(\theta))^2 \to 0$ jika $n \to \infty$.
   2) Jika ukuran sampel bertambah besar maka distribusi sampling estimator akan mengecil menjadi suatu garis tegak lurus di atas parameter yang sama dengan probabilitas sama dengan satu, (Hasan, 2002: 113-115).

2.9. Algoritma *Fisher-Scoring*

Menurut Cormen, dkk (2001) algoritma adalah prosedur komputasi dimana mengambil sebuah nilai atau menentukan nilai sebagai *input* dan menghasilkan beberapa nilai sebagai *output*. Sebuah algoritma adalah sebuah urutan langkah-langkah komputasi yang dapat merubah sebuah *input* menjadi *output*. Algoritma *Fisher-Scoring* menurut Smyth (2002) adalah salah satu bentuk pengembangan dari metode *Newton-Raphson* dengan mengganti matriks Hessian $H(\beta)$ dengan matriks Informasi $I(\beta)$.

Metode *Newton-Raphson* merupakan metode iterasi untuk menyelesaikan persamaan $f(x) = 0$ dengan mengasumsikan f mempunyai turunan kontinu f'. Menurut Lawless (2003) misalkan terdapat fungsi-fungsi $\frac{\partial t(\beta)}{\partial \beta_j} = 0$ dengan $j = 1,2,\dots,p$, maka nilai-nilai β_j yang memenuhi fungsi implisit tersebut dapat diperoleh melalui iterasi *Newton-Raphson* sebagai berikut.

$$\hat{\beta}^{r+1} = \hat{\beta}^{r} - H\left(\hat{\beta}^{r}\right)^{-1} D\left(\hat{\beta}^{r}\right), r = 0,1,2,\dots \tag{2.23}$$

dengan

$$\beta = \left(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p\right)^T,$$

$$D(\beta) = \left(\frac{\partial t(\beta)}{\partial \beta_j}, \dots, \frac{\partial t(\beta)}{\partial \beta_j}\right)^T$$

$$H(\beta) = \left[\frac{\partial^2 t(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_k}\right]$$

dan $j, k = 0,1,2,\dots,p$.

Langkah-langkah dalam algoritma *Newton-Raphson* adalah sebagai berikut.

1. menentukan nilai awal β^0,
2. menentukan $D(\beta^0)$dan $H(\beta^0)$,
3. menghitung estimator parameter untuk $r = 0,1,2,\dots$ dengan menggunakan persamaan (2.23),
4. mengulangi iterasi sampai diperoleh nilai yang konvergen, yaitu max $\left|\hat{\beta}^{r+1} - \hat{\beta}^{r}\right| \leq \varepsilon$ dengan ε adalah konstanta positif yang ditentukan.

Langkah untuk melakukan iterasi menggunakan algoritma *Fisher-Scoring* yaitu dengan menggunakan matriks *Informasi Fisher* yang diperoleh dengan mengubah mengubah matriks *Hessian* ke dalam bentuk negatif ekspektasinya. Dalam penelitian ini, parameter β diubah menjadi $\theta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, sehingga bentuk persamaan iterasi *Fisher-Scoring* yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$\hat{\theta}^{r+1} = \hat{\theta}^{r} + I\left(\hat{\theta}^{r}\right)^{-1} D\left(\hat{\theta}^{r}\right) \qquad (2.24)$$

dengan $I(\theta) = -E[H(\theta)]$, dan $I(\theta)$ adalah matriks informasi *fisher* berukuran $(r+1) \times (r+1)$, serta $D(\theta)$ merupakan turunan pertama dari fungsi ln-likelihoodnya.

Langkah-langkah untuk menyelesaikan perhitungan estimasi parameter serta menggunakan algoritma *Fisher-Scoring* adalah sebagai berikut.

1. Menentukan nilai awal estimator parameter $\hat{\theta}^{0}$
2. Menghitung $D(\hat{\theta}^{0})$ dan $I(\hat{\theta}^{0})$
3. Menghitung nilai $\hat{\theta}^{r+1} = \hat{\theta}^{r} + I\left(\hat{\theta}^{r}\right)^{-1} + D(\hat{\theta}^{r})$ untuk $r = 0,1,2, \ldots$
4. Jika $\left|\hat{\theta}^{r+1} - \hat{\theta}^{r}\right| \leq \varepsilon$ maka lanjutkan ke langkah 5, tetapi apabila $\left|\hat{\theta}^{r+1} - \hat{\theta}^{r}\right| > \varepsilon$, maka ulangi langkah 3.
5. Mendapatkan estimator $\hat{\theta}$.

2.10. Matlab

Pada saat ini, banyak paket perangkat lunak yang digunakan dalam membantu perhitungan estimasi parameter dan mengolah data sampai mendapatkan nilai estimasi. MATLAB merupakan singkatan dari matrix laboratory dikarenakan setiap data pada matlab menggunakan dasar matriks. Menurut Widiarsono (2005: 1) Matlab merupakan suatu program komputer yang bisa membantu memecahkan berbagai masalah matematis yang kerap kita temui dalam bidang teknis. Matlab dapat digunakan untuk menemukan solusi dari berbagai masalah numerik secara cepat, mulai hal yang paling dasar hingga yang kompleks, seperti mencari akar-akar polynomial, interpolasi dari sejumlah data, perhitungan dengan matriks, pengolahan sinyal, dan metode numerik.

2.11. Kerangka Berpikir

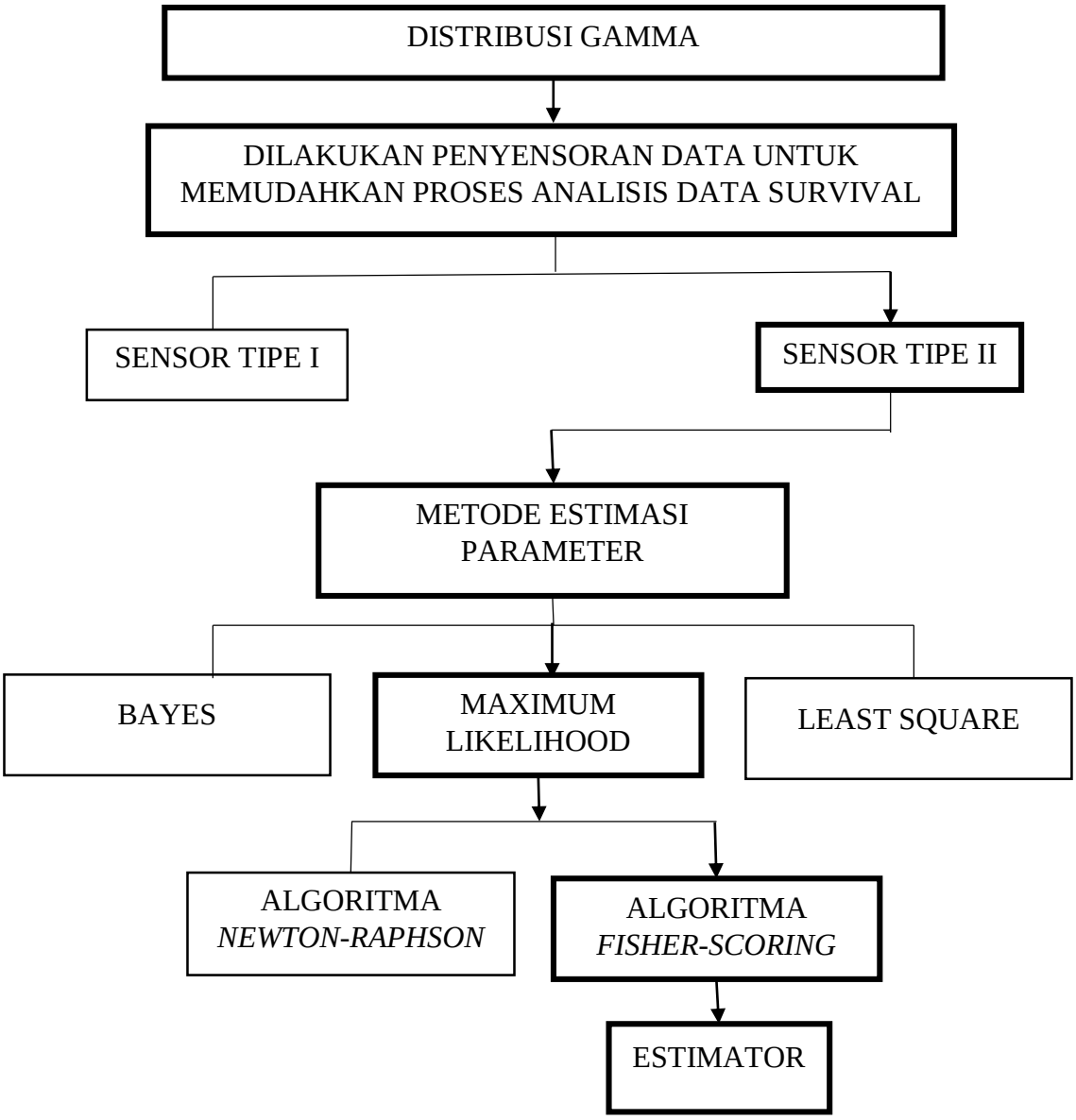
Data tahan hidup *(survival)* adalah data lamanya individu-individu atau unit-unit dari suatu populasi menjalankan fungsinya dengan baik sampai kematian individu-individu tersebut. Ketahanan hidup individu dalam menjalankan fungsinya dengan baik sampai kematiannya dapat diketahui pada waktu tertentu. Banyaknya data survival yang bisa diteliti kemungkinan akan membutuhkan waktu yang lama dan biaya yang cukup banyak. Cara untuk memudahkan dalam proses penelitian dan pengambilan data survival dapat dibatasi dengan metode penyensoran. Metode penyensoran data dapat digunakan untuk membantu mempercepat proses penelitian pada data survival. Penyensoran yang dibatasi oleh waktu dan setiap individu yang diamati masuk secara bersamaan merupakan penyensoran tipe I. sedangkan penyensoran yang dibatasai oleh banyaknya r individu yang gagal dari sebanyak n individu yang diamati adalah penyensoran tipe II. Penyensoran tipe II ini lebih sering digunakan pada data survival karena waktu yang dibutuhkan tidak begitu lama sehingga biaya yang dikeluarkanpun lebih ringan.

Beberapa distribusi yang dapat digunakan untuk meneliti data survival adalah distribusi Gamma, distribusi Weibull, distribusi Binomial, distribusi Log-logistik dan distribusi lain yang termasuk ke dalam distribusi keluarga Eksponensial. Dalam penelitian ini difokuskan untuk meneliti data survival berdistribusi Gamma.

Setelah menentukan distribusi dan metode yang digunakan untuk meneliti data survival, selanjutnya adalah menentukan estimasi parameternya. Metode yang biasa digunakan untuk menentukan estimasi parameter data survival adalah metode *bayes* dan metode *likelihood*. Estimasi dengan menggunakan metode *likelihood* lebih sering digunakan untuk penelitian, sehinggga dalam penelitian ini penulis menggunakan metode *likelihood*. Estimasi dengan *likelihood* merupakan metode yang dilakukan dengan memaksimumkan fungsi likelihoodnya. Namun nilai yang dihasilkan belum berbentuk eksplisit sehingga perlu digunakan pendekatan dengan metode numerik *Newton-Raphson*. Seiring dengan perubahan waktu, metode *Newton-Raphson* telah dikembangkan menjadi lebih baik yang selanjutnya dikenal sebagai Algoritma *Fisher-Scoring*. Dalam penelitian ini, penulis memilih

menggunakan Algoritma *Fisher-Scoring* karena diharapkan hasil pengerjaannya akan lebih akurat.

Skema:



Bagan 2.1 Kerangka Berfikir

BAB III
METODE PENELITIAN

Metode penelitian berperan penting dalam suatu penelitian. Dengan menggunakan metode penelitian diharapkan penelitian yang dilakukan akan berjalan baik, sehingga akan dicapai tujuan sesuai dengan yang telah ditetapkan. Metode penelitian digunakan untuk mendapatkan dan mengumpulkan data sebagai alat pemecah masalah.

Hal yang dilakukan dalam penelitian di antaranya sebagai berikut.

3.1 Fokus Penelitian

Fokus permasalahan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Penelitian menggunakan data yang diasumsikan berdistribusi Gamma.
2. Metode yang digunakan untuk mengestimasi parameter dalam penelitian ini adalah dengan menggunakan algoritma *Fisher-Scoring*.
3. Penelitian dilakukan dengan berbantuan program Matlab.

3.2 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yaitu bangkitan data yang diperoleh melalui software Minitab yang telah diasumsikan berdistribusi Gamma.

3.3 Studi Pustaka

Setelah diperoleh masalah untuk diteliti, maka peneliti akan melakukan studi pustaka atau penelaahan sumber pustaka yang relevan untuk mengumpulkan data informasi yang diperlukan dalam penelitian. Peneliti dapat mengumpulkan sumber pustaka terlebih dahulu berupa buku atau literatur, jurnal, skripsi dan sebagainya. Dengan terkumpulnya sumber pustaka yang diperlukan maka peneliti dapat melakukan pendalaman materi pendukung dalam sumber pustaka tersebut. Dengan kata lain, sumber pustaka digunakan sebagai rujukan serta landasan untuk menganalisis permasalahan dalam penelitian.

3.4 Langkah-Langkah Analisis

Langkah-langkah yang perlu dilakukan dalam pembahasan sesuai dengan tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1) Mengestimasi model distribusi Gamma dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1: Menyiapkan data bangkitan berdistribusi Gamma yang akan digunakan.

Langkah 2: Menentukan fungsi kepadatan peluang untuk model distribusi Gamma. Fungsi kepadatan peluang distribusi Gamma didefinisikan sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0, & x\ lainnya \end{cases}$$

Langkah 3: Menentukan fungsi *likelihood* yang merupakan fungsi kepadatan peluang bersama distribusi Gamma pada data tersensor tipe II.

$$L(\theta) = \frac{n!}{(n-r)!} f(x_i)[S(x_i)]^{n-r}$$

$$L(\theta) = \frac{n!}{(n-r)!}\left(\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{\left(\frac{-\sum_{i=1}^{r} x_i}{\beta}\right)} (x_i)^{\alpha-1}\right)\left(1 - \int_0^t \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx\right)^{n-r}$$

Langkah 4: Jika X ruang parameter yang merupakan interval terbuka dan $L(\theta)$ merupakan fungsi yang dapat diturunkan serta diasumsikan maksimum pada X maka persamaan maksimum *likelihood* adalah sebagai berikut.

Turunan terhadap α

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(\theta) = 0$$

Turunan terhadap β

$$\frac{\partial}{\partial \beta} L(\theta) = 0$$

Jika penyelesaian persamaan tersebut ada, maka maksimum dari $L(\theta)$ terpenuhi.

Langkah 5: Jika persamaan tersebut sulit diselesaikan maka fungsi $L(\theta)$ diubah dalam bentuk logaritma naturalnya.

$$\ln\big(L(\theta)\big) = \ln\left(\frac{n!}{(n-r)!}\left(\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{\left(\frac{-\sum_{i=1}^{r}x_i}{\beta}\right)}(x_i)^{\alpha-1}\right)\left(1-\int_{0}^{t}\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx\right)^{n-r}\right)$$

Langkah 6: Langkah untuk mendapatkan maksimum *likelihood*nya dilakukan dengan mencari nilai differensial dari logaritma natural tersebut disamadengankan nol.

Turunan terhadap α

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\big(L(\theta)\big) = 0$$

Turunan terhadap β

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\big(L(\theta)\big) = 0$$

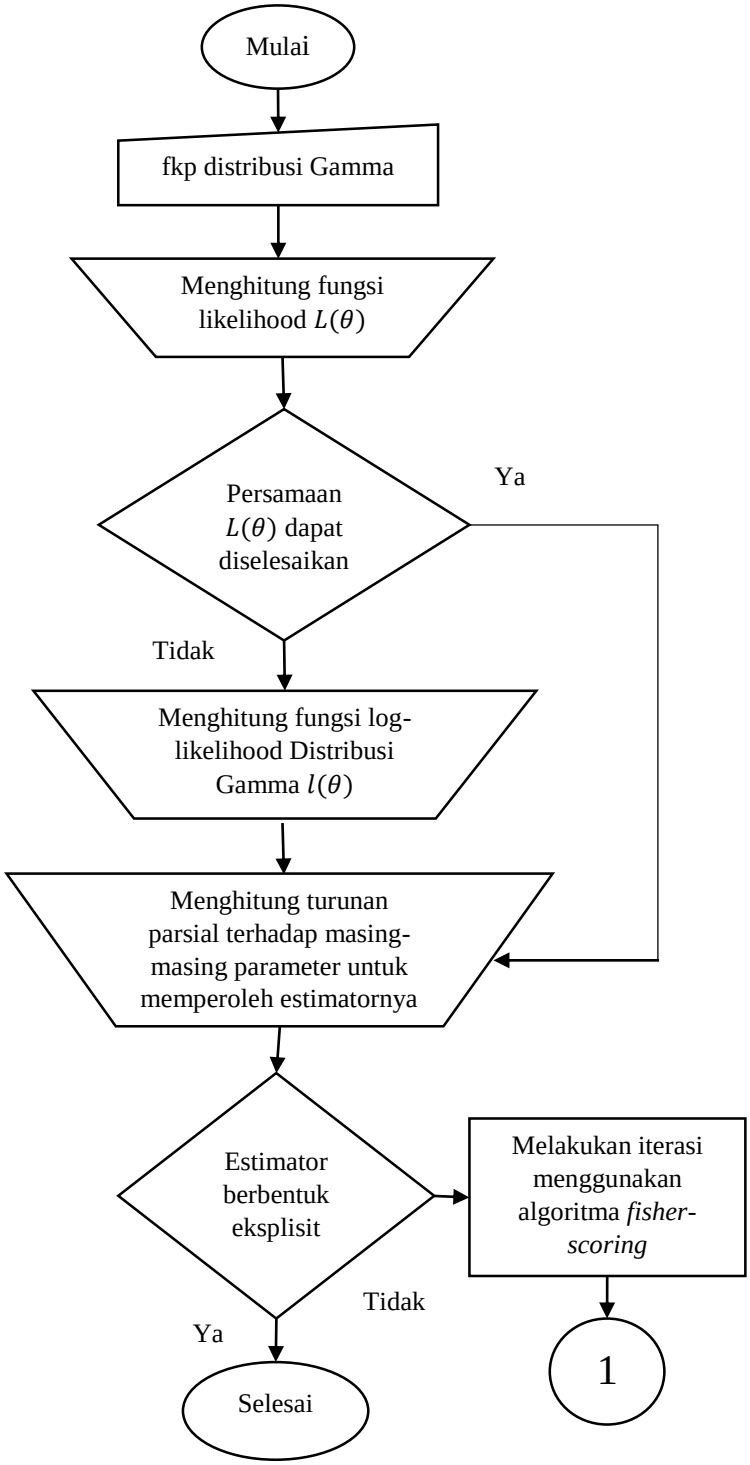
Langkah 7: Diperoleh turunan parsial terhadap θ yang selanjutnya dianggap sebagai nilai $\hat{\theta}$.

Langkah 8: Melakukan iterasi menggunakan algoritma *Fisher-Scoring* pada langkah 7 karena diperoleh persamaan berbentuk implisit.

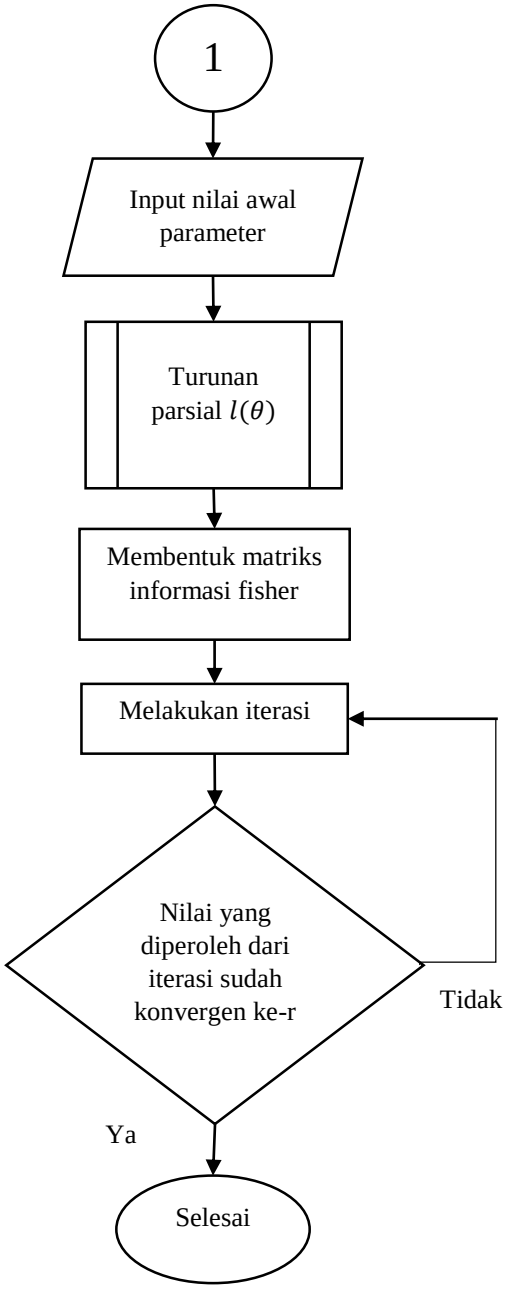
2) Membuat algoritma dan program untuk estimasi parameter berdistribusi Gamma dengan menggunakan Matlab.
3) Menarik Kesimpulan

Langkah terakhir dalam penelitian yaitu menarik kesimpulan dari keseluruhan permasalahan yang telah dirumuskan berdasarkan pada landasan teori dan hasil pemecahan masalah.

Analisis data penulis menggunakan diagram alir metode penelitian seperti tertera pada Gambar 3.1. dan Gambar 3.2.



Bagan 3.1 Diagram Alir Penelitian



Bagan 3.2 Diagram Alir Algoritma *Fisher-Scoring*

BAB IV
HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

4.1 Hasil Penelitian

4.1.1 Estimasi Parameter Distribusi Gamma

4.1.1.1 Estimasi Parameter menggunakan Metode *Maximum Likelihood Estimation*

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel acak dari suatu populasi yang berdistribusi Gamma dengan parameter α dan β, fungsi kepadatan peluang (f.k.p) untuk distribusi Gamma tersebut adalah sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0, & x \; yang \; lain \end{cases}$$

Berdasarkan fkp tersebut akan dihitung fkp bersama peubah acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(x_i) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\frac{x_i}{\beta}} \\ &= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x_i}{\beta}} (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\alpha-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x_1}{\beta}} (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\alpha-1} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x_2}{\beta}} (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\alpha-1} \dots \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x_n}{\beta}} (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\alpha-1}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{\left(\frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta}\right)} (x_i)^{\alpha-1} \tag{4.1}$$

Dalam penelitian ini, tipe data yang digunakan adalah data tersensor tipe II. Hal tersebut mengakibatkan fungsi likelihoodnya berbeda dengan umumnya. Fungsi likelihood yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$L(\theta) = \frac{n!}{(n-r)!}\left[\prod_{i=1}^{r} f(x_i)\right] S(x_r)^{n-r}$$

Sebelum menentukan fungsi likelihoodnya maka akan dicari fungsi survivalnya terlebih dahulu sebagai berikut.

$$S(x) = \int_t^{\infty} f(x)\, dx$$

$$S(x) = \int_t^{\infty} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx$$

$$S(x) = 1 - \int_0^{t} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx \qquad (4.2)$$

Langkah-langkah menentukan estimator parameter dengan metode MLE adalah sebagai berikut.

1. Membuat fungsi likelihood distribusi Gamma pada data tersensor tipe II

$$L(\theta) = \frac{n!}{(n-r)!}\left[\prod_{i=1}^{r} f(x_i)\right] S(x_r)^{n-r}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}\left(\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{\left(\frac{-\sum_{i=1}^{r} x_i}{\beta}\right)} (x_i)^{\alpha-1}\right)\left(1 - \int_0^t \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\frac{x_i}{\beta}}\, dx\right)^{n-r}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}\left(\left[\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\right]^{r} e^{\left(\frac{-\sum_{i=1}^{r} x_i}{\beta}\right)} \prod_{i=1}^{r} (x_i)^{\alpha-1}\right)\left(1 - \int_0^t \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\frac{x_i}{\beta}}\, dx\right)^{n-r} \qquad (4.3)$$

2. Mengubah fungsi likelihood ke dalam bentuk logaritma naturalnya (ln-likelihood)

$$l(\theta) = \ln\left[\frac{n!}{(n-r)!}\left(\left[\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\right]^{r} e^{\left(\frac{-\sum_{i=1}^{r} x_i}{\beta}\right)} \prod_{i=1}^{r} (x_i)^{\alpha-1}\right)\left(1 - \int_0^t \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\frac{x_i}{\beta}}\, dx\right)^{n-r}\right]$$

$$= \ln\frac{n!}{(n-r)!} \ln\left[\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\right]^{r} \ln e^{\left(\frac{-\sum_{i=1}^{r} x_i}{\beta}\right)} \ln\prod_{i=1}^{r} (x_i)^{\alpha-1} \ln\left(1 - \int_0^t \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\frac{x_i}{\beta}}\, dx\right)^{n-r}$$

$$= \ln \frac{n!}{(n-r)!} \ln[\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)]^{-r} \ln e^{\left(\frac{-\sum_{i=1}^{r} x_i}{\beta}\right)} \ln \prod_{i=1}^{r} (x_i)^{\alpha-1} \ln\left(1 - \int_0^t \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\frac{x_i}{\beta}}\, dx\right)^{n-r}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} - r \ln[\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)] \ln e^{\left(\frac{-\sum_{i=1}^{r} x_i}{\beta}\right)} \ln \prod_{i=1}^{r} (x_i)^{\alpha-1} \ln\left(1 - \int_0^t \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\frac{x_i}{\beta}}\, dx\right)^{n-r}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} - r \ln \beta^{\alpha} - r \ln \Gamma(\alpha) - \frac{\sum_{i=1}^{r} x_i}{\beta} + (\alpha - 1) \ln \prod_{i=1}^{r} (x_i) + (n-r) \ln\left(1 - \int_0^t \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\frac{x_i}{\beta}}\, dx\right)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} - r\alpha \ln \beta - r \ln \Gamma(\alpha) - \frac{\sum_{i=1}^{r} x_i}{\beta} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{r} \ln x_i + (n-r) \ln\left(1 - \int_0^t \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\frac{x_i}{\beta}}\, dx\right) \quad (4.4)$$

3. Menentukan turunan parsial terhadap parameter α dan β dan disamadengankan dengan nol.

   1) Diturunkan terhadap α

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} l(\theta) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{n!}{(n-r)!} - r\alpha \ln \beta - r \ln \Gamma(\alpha) - \frac{\sum_{i=1}^{r} x_i}{\beta} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{r} \ln x_i + (n-r) \ln\left(1 - \int_0^t \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\frac{x_i}{\beta}}\, dx\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}(-r\alpha\ln\beta)+\frac{\partial}{\partial\alpha}(-r\ln\Gamma(\alpha))+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-\frac{\sum_{i=1}^{r}x_i}{\beta}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left((\alpha-1)\sum_{i=1}^{r}\ln x_i\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left((n-r)\ln\left(1-\int_0^t\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x_i^{\alpha-1}e^{-\frac{x_i}{\beta}}dx\right)\right)=0$$

$$-r\ln(\hat{\beta})-r\frac{1}{\Gamma(\hat{\alpha})}\Gamma'(\hat{\alpha})+\sum_{i=1}^{r}\ln x_i$$
$$+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left((n-r)\ln\left(1-\int_0^t\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x_i^{\alpha-1}e^{-\frac{x_i}{\beta}}dx\right)\right)=0 \quad (4.5)$$

2) Diturunkan terhadap β

$$\frac{\partial}{\partial\beta}l(\theta)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{n!}{(n-r)!}-r\alpha\ln\beta-r\ln\Gamma(\alpha)-\frac{\sum_{i=1}^{r}x_i}{\beta}+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{r}\ln x_i\right.$$
$$\left.+(n-r)\ln\left(1-\int_0^t\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x_i^{\alpha-1}e^{-\frac{x_i}{\beta}}dx\right)\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}(-r\alpha\ln\beta)+\frac{\partial}{\partial\beta}(-r\ln\Gamma(\alpha))+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{\sum_{i=1}^{r}x_i}{\beta}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial\beta}\left((\alpha-1)\sum_{i=1}^{r}\ln x_i\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial\beta}\left((n-r)\ln\left(1-\int_0^t\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x_i^{\alpha-1}e^{-\frac{x_i}{\beta}}dx\right)\right)=0$$

$$0+(-r\alpha)\frac{1}{\beta}+0+\frac{\sum_{i=1}^{r}x_i}{\beta^2}+0+\frac{\partial}{\partial\beta}\left((n-r)\ln\left(1-\int_0^t\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x_i^{\alpha-1}e^{-\frac{x_i}{\beta}}dx\right)\right)$$
$$=0$$

$$-\frac{r\alpha}{\hat{\beta}}+\frac{\sum_{i=1}^{r}x_i}{\hat{\beta}^2}+\frac{\partial}{\partial\beta}\left((n-r)\ln\left(1-\int_0^t\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x_i^{\alpha-1}e^{-\frac{x_i}{\beta}}dx\right)\right)=0 \quad (4.6)$$

Berdasarkan persamaan (4.5) dan (4.6) dapat disimpulkan bahwa persamaan tersebut berbentuk implisit. Untuk mendapatkan nilai estimatornya dilakukan dengan metode iterasi. Dalam penulisan ini, metode iterasi yang dipilih adalah algoritma *Fisher-Scoring*.

4.1.1.2 Estimasi Parameter menggunakan Algoritma *Fisher-Scoring*

Hal pertama yang perlu dilakukan dalam proses iterasi menggunakan algoritma *Fisher-Scoring* adalah menentukan nilai awal parameter α dan β yang dapat ditulis dengan $\theta^0=\begin{bmatrix}\alpha^0\\ \beta^0\end{bmatrix}$. Pada penentuan estimator metode estimasi maksimum likelihood telah dibahas dan diperoleh sebuah persamaan yang tidak bisa diselesaikan secara langsung terhadap θ. Oleh karena itu digunakan metode algoritma *Fisher-Scoring* untuk menyelesaikannya. Penentuan nilai awal θ dengan menggunakan metode momen. Yang mana nilai awal tersebut diambil dari estimator metode momen.

Pada prinsipnya, metode momen menyamakan antara momen populasi dan momen sampel. Momen pertama dan kedua dari sampel adalah sebagai berikut.

$$m_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}x_i \quad (4.7)$$

$$m_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}x_i^2 \quad (4.8)$$

Kemudian menentukan momen pertama dan kedua dari populasi. Dari $f(x)$ didapatkan momen pertama populasi adalah sebagai berikut.

$$\mu_1=E(x)=\alpha\beta \quad (4.9)$$

Nilai momen pertama populasi berdasarkan perhitungan pada (2.9).

Sedangkan nilai momen kedua populasi dari $f(x)$ adalah sebagai berikut.

$$\mu_2=E(x^2)=(\alpha+1)\alpha\beta^2 \quad (4.10)$$

Perhitungan nilai momen kedua populasi berdasarkan perhitungan pada (2.10).

Setelah momen sampel dan momen populasi didapatkan, langkah selanjutnya yaitu momen sampel disamadengankan momen populasi. Berdasarkan estimasi metode momen maka didapatkan $m_1 = \mu_1$ sehingga diperoleh $\bar{x} = \hat{\alpha}\hat{\beta}$ atau dapat ditulis sebagai berikut.

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}} \tag{4.11}$$

dan $m_2 = \mu_2$ sehingga diperoleh

$$\sigma = (\alpha + 1)\alpha\beta^2 \tag{4.12}$$

Mensubtitusikan persamaan (4.11) ke dalam (4.12) sehingga diperoleh

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i^2 = (\hat{\alpha} + 1)\hat{\alpha}\left(\frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}}\right)^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i^2 = (\hat{\alpha} + 1)\hat{\alpha}\left(\frac{\bar{x}^2}{\hat{\alpha}^2}\right)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i^2 = (\hat{\alpha} + 1)\left(\frac{\bar{x}^2}{\hat{\alpha}}\right)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i^2 = \frac{(\hat{\alpha} + 1)\bar{x}^2}{\hat{\alpha}}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{n\bar{x}^2(\hat{\alpha} + 1)}{\sum_{i=1}^{r} x_i^2}$$

Maka diperoleh nilai $\hat{\alpha}$ dalam fungsi x sebagai berikut.

$$\hat{\alpha} = \frac{n\bar{x}^2(\hat{\alpha} + 1)}{\sum_{i=1}^{r} x_i^2} \tag{4.13}$$

Jika persamaan (4.13) disubtitusikan ke persamaan (4.11) maka diperoleh

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\frac{n\bar{x}^2(\hat{\alpha} + 1)}{\sum_{i=1}^{r} x_i^2}}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}\sum_{i=1}^{r} x_i^2}{n\bar{x}^2(\hat{\alpha} + 1)}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{r} x_i^2}{n\bar{x}(\hat{\alpha} + 1)} \tag{4.14}$$

Setelah mendapatkan estimator menggunakan metode momen selanjutnya adalah menentukan fungsi dalam bentuk matriks, dengan $\theta^k = \begin{bmatrix} \alpha^k \\ \beta^k \end{bmatrix}$; $k = 0,1,2, \dots, r$.

Selain matriks tersebut, komponen lain yang diperlukan dalam iterasi adalah matriks informasi $I(\theta^k)$ yang dijabarkan sebagai berikut.

$$I(\theta^k) = -E[H(\theta^k)]$$

$$= -E\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(t_i)}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 l(t_i)}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 l(t_i)}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 l(t_i)}{\partial \beta^2} \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Apabila matriks informasi telah diperoleh maka dapat dilakukan perhitungan untuk memperoleh nilai estimator untuk $k = 0,1,2, \dots, r$ dengan menggunakan persamaan

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + I\left(\theta^{(k)}\right)^{-1} D(\theta^k) \tag{4.16}$$

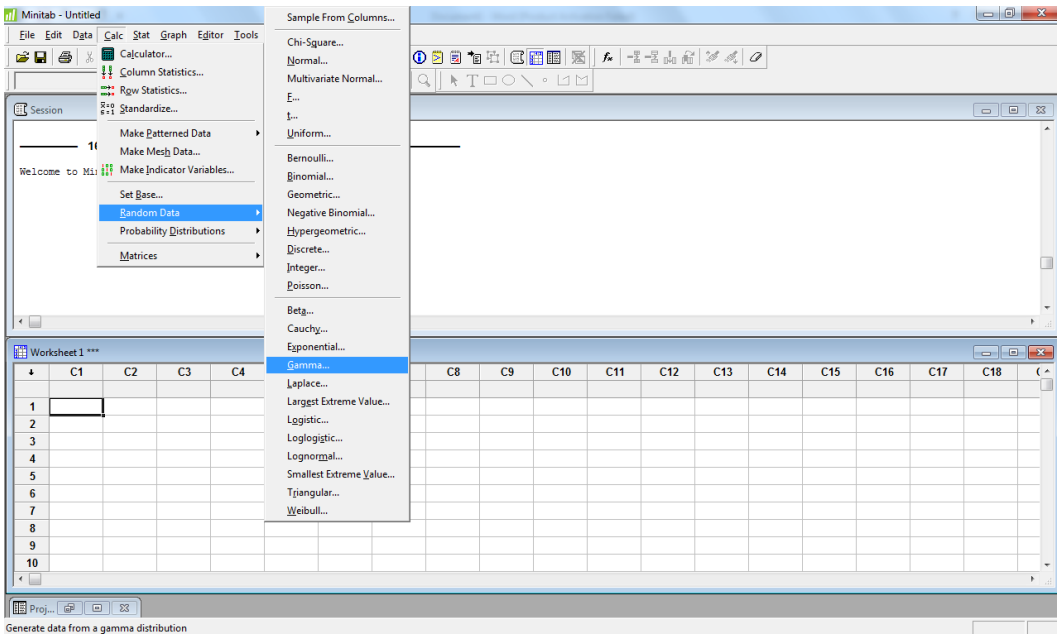
Setelah dilakukan iterasi apabila nilai $|\theta^{k+1} - \theta^k| \leq \varepsilon$, maka dapat dilanjutkan ke langkah selanjutnya. Tetapi jika $|\theta^{k+1} - \theta^k| > \varepsilon$, maka iterasi harus diulangi. Dengan demikian maka akan diperoleh nilai estimator $\hat{\theta}$ menggunakan iterasi algoritma *Fisher-Scoring*.

4.1.2 Algoritma dan Program

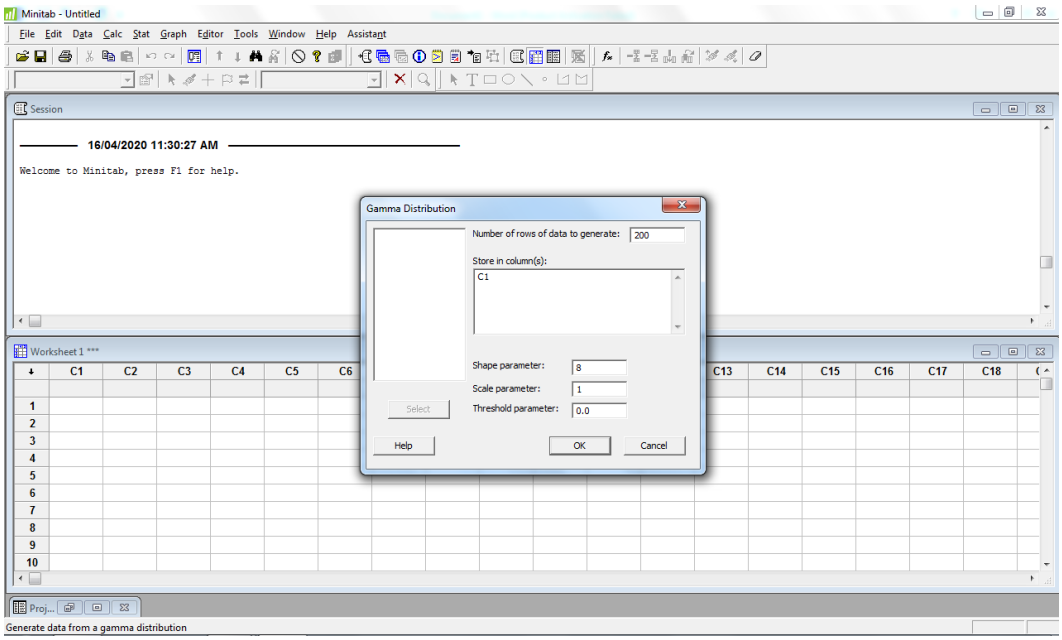
a. Menginput data sekunder.
b. Menentukan nilai awal parameter sesuai dengan persamaan (4.14)
c. Untuk iterasi $r = 0,1,2, \dots$, hitung:
   c.1 $D(\theta^k)$ sesuai dengan persamaan (4.6)
   c.2 $I\left(\theta^{(k)}\right)$ sesuai dengan persamaan (4.15)
   c.3 $\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + I\left(\theta^{(k)}\right)^{-1} D(\theta^k)$
   c.4 apabila $|\theta^{k+1} - \theta^k| \leq \varepsilon$, maka diperoleh nilai estimatornya tetapi jika $|\theta^{k+1} - \theta^k| > \varepsilon$, maka perhitungan di lakukan ulang mulai dari langkah (c.1)

4.1.3 Penerapan pada Data Survival

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data simulasi yang didapatkan dengan berbantuan software minitab. Berikut merupakan langkah untuk membangkitkan data menggunakan software minitab.



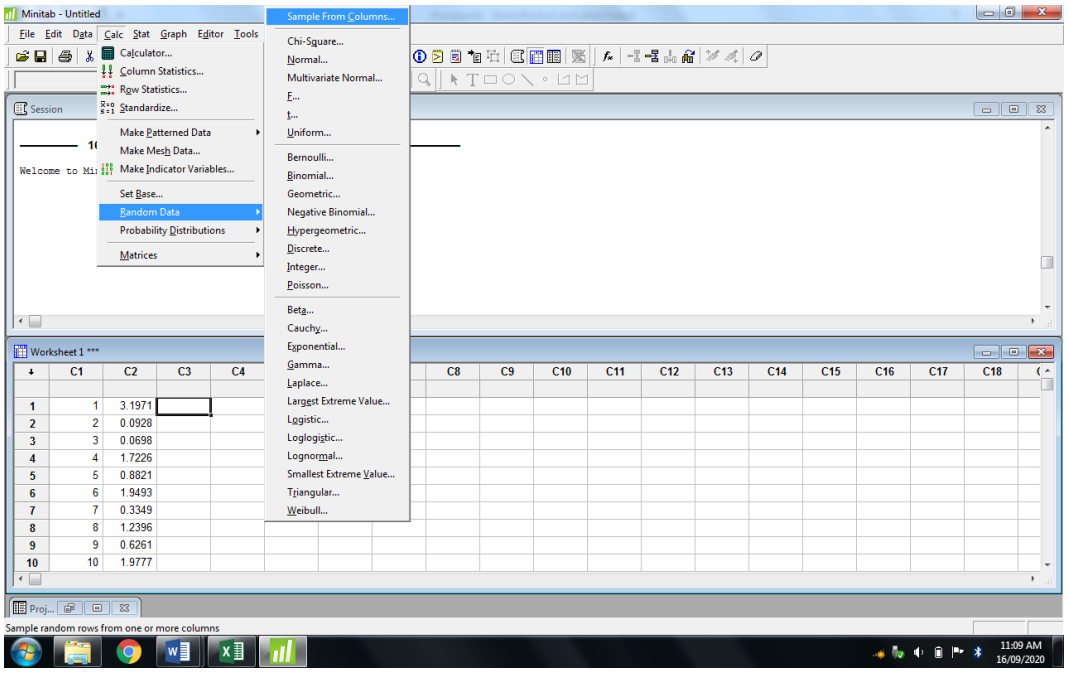
Gambar 4.1 Langkah Membangkitkan Data



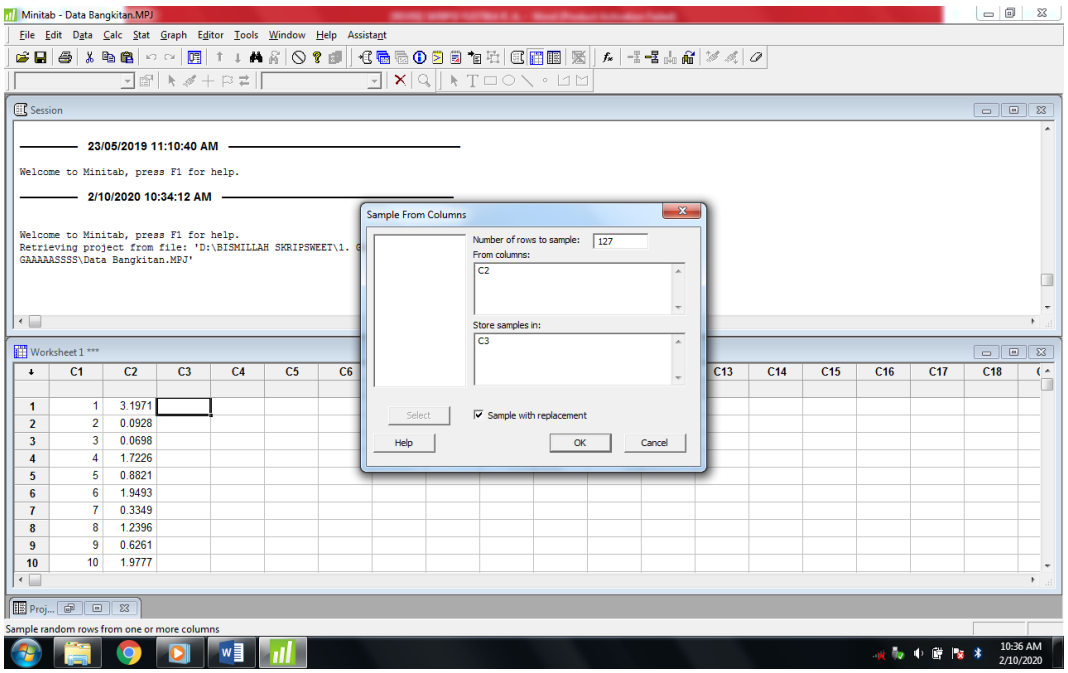
Gambar 4.2 Penentuan Spesifikasi Data Yang Akan Dibangkitkan

Data yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah 200 data dapat dilihat pada Lampiran 1. Sedangkan data yang digunakan dalam perhitungan nilai estimator yaitu sesuai dengan ketentuan data tersensor tipe II. Dalam kasus ini,

ditentukan banyaknya sampel data yang digunakan dalam perhitungan estimatornya berjumlah 127 data. Penentuan jumlah sampel yang digunakan didasarkan pada Tabel Isaac dan Michael yang terdapat pada Lampiran 6 dengan nilai signifikansi sebesar 0.05. Dalam pemilihan 127 data tersebut dilakukan dengan menggunakan program minitab dengan langkah sebagai berikut.



Gambar 4.3 Langkah Menentukan Sampel Data pada Worksheet



Gambar 4.4 Penentuan Asumsi Data yang akan Disensor

Peubah x yang digunakan dalam penelitian merupakan individu yang diteliti, sedangkan t merupakan waktu hidup data. Dalam Tabel 4.1 ditampilkan data yang telah disensor tipe II sebelumnya untuk perhitungan simulasi program.

Tabel 4.1 Data Simulasi Berdistribusi Gamma Tersensor Tipe II

x	t
1	2.770802
2	1.869681
3	0.004463
4	0.636741
5	0.073495
6	0.382551
7	2.296795
8	0.334926
9	0.349106
10	2.296795
11	1.949288
12	0.626099
13	0.382551
14	2.482399
15	1.123338
16	2.407593

17	3.097613
18	4.762065
19	0.125886
20	1.869681
21	2.230269
22	0.014058
23	1.221212
24	1.796647
25	3.439481
26	0.004603
27	0.007589
28	0.129003
29	4.696068
30	0.142897
31	0.270164
32	0.007589
33	3.724355
34	1.10233
35	2.664457
36	1.667095
37	4.596432
38	0.626099
39	0.021618
40	1.766204
41	0.121896
42	1.667095
43	1.667095
44	1.200042
45	3.196641
46	0.142897
47	0.020665
48	0.979298
49	0.252264
50	0.020665
51	0.554047
52	0.004603
53	0.121896
54	1.844783
55	0.072949
56	2.943102
57	3.724355
58	1.694828

59	1.009159
60	0.058984
61	0.758501
62	0.018682
63	2.482399
64	1.694828
65	0.092805
66	0.882098
67	0.347148
68	0.056631
69	2.296043
70	0.011497
71	0.215605
72	1.440629
73	5.542318
74	0.178627
75	2.143913
76	0.020665
77	0.318184
78	1.421703
79	0.110065
80	0.238563
81	1.473156
82	0.186214
83	0.125886
84	1.981388
85	1.766204
86	1.10233
87	0.018682
88	0.129003
89	4.296983
90	0.186214
91	6.623201
92	0.847095
93	0.236288
94	1.949288
95	3.403653
96	6.398894
97	0.554047
98	1.977728
99	0.17138
100	0.349481

101	3.197138
102	0.039334
103	0.106873
104	0.03967
105	3.737887
106	0.020665
107	6.9956
108	3.196641
109	0.758501
110	1.156666
111	0.056631
112	0.585446
113	1.809605
114	3.097613
115	0.085357
116	0.085357
117	0.007589
118	1.95578
119	0.088526
120	0.078235
121	0.053713
122	0.020665
123	0.876581
124	1.347827
125	0.027415
126	0.863547
127	1.566294

Setelah diperoleh data tersensor yang akan digunakan, maka akan dilakukan perhitungan dengan program Matlab untuk menentukan nilai estimator. Berikut merupakan syntax program matlab untuk membangkitkan data yang akan digunakan.

```
function[alphatopi,betatopi]=fisherscoring(alpha,beta,epsilon)
%input nilai awal alpha, beta, dan epsilon sesuai yang diinginkan
x = xlsread('sampel127.xlsx','C1:C127'); %x = data yang digunakan
r=length(x); %r= banyaknya data tersensor tipe II
theta1=[alpha;beta]; %theta=parameter yang ingin diestimasi
alpha1=0;
beta1=0;
theta2=zeros(2,2);
iter=0;
```

Gambar 4.5 Syntax Program untuk Membangkitkan Data

4.2 Pembahasan

Persamaan $-r\ln(\hat{\beta}) - r\frac{1}{\Gamma(\hat{\alpha})}\Gamma'(\hat{\alpha}) + \sum_{i=1}^{r}\ln x_i + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left((n-r)\ln\left(1 - \int_0^t \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\frac{x_i}{\beta}}\,dx\right)\right) = 0$ dan $-\frac{r\alpha}{\hat{\beta}} + \frac{\sum_{i=1}^{r} x_i}{\hat{\beta}^2} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left((n-r)\ln\left(1 - \int_0^t \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\frac{x_i}{\beta}}\,dx\right)\right) = 0$ berbentuk implisit, sehingga perhitungan tidak dapat diselesaikan secara analitik. Perhitungan nilai estimasi parameter dilakukan dengan menggunakan data bangkitan pada Tabel 4.1 yang diubah ke dalam bentuk excel untuk memudahkan perhitungan. Perhitungan nilai estimator dilakukan menggunakan software matlab dengan menginputkan nilai awal parameter dan data yang telah ditentukan. Berdasarkan perhitungan yang dilakukan, diperoleh nilai estimator α dan β sebagai berikut.

$$\hat{\alpha} = 1.3163030$$

$$\hat{\beta} = 2.3264578$$

Nilai estimator diperoleh setelah melakukan dua kali iterasi. Berdasarkan nilai yang diperoleh, diketahui apabila estimator parameter tersebut tidak konsisten. Hal tersebut dikarenakan nilai estimator $\hat{\alpha}$ tidak mendekati nilai awalnya α^0. Maka perlu adanya penelitian lebih lanjut mengenai estimasi pada distribusi Gamma dengan memperhatikan sifat-sifat estimator data yang digunakan agar diketahui memenuhi sifat estimator yang baik atau tidak. Hal lain yang perlu diperhatikan pula mengenai pemilihan software yang digunakan agar asumsi pada data sesuai dengan yang telah ditentukan.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Dari hasil perhitungan serta pengolahan data yang diinterpretasikan dalam bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Turunan pertama terhadap parameter α dan β menghasilkan persamaan

$$-r\ln(\hat{\beta}) - r\frac{1}{\Gamma(\hat{\alpha})}\Gamma'(\hat{\alpha}) + \sum_{i=1}^{r}\ln x_i + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left((n-r)\ln\left(1-\int_0^t \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x_i^{\alpha-1}e^{-\frac{x_i}{\beta}}dx\right)\right) = 0$$

   dan

$$-\frac{r\alpha}{\hat{\beta}} + \frac{\sum_{i=1}^{r}x_i}{\hat{\beta}^2} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left((n-r)\ln\left(1-\int_0^t \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x_i^{\alpha-1}e^{-\frac{x_i}{\beta}}dx\right)\right) = 0$$

   Kedua persamaan tersebut merupakan bentuk penyelesaian menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* yang mana berbentuk implisit dan tidak dapat diselesaikan secara analitik, untuk menyelesaikannya digunakan metode iterasi menggunakan algoritma *Fisher-Scoring*.

2. Nilai yang diperoleh dalam perhitungan estimasi parameter distribusi Gamma pada data tersensor tipe II menggunakan algoritma *Fisher-Scoring* pada data bangkitan yang digunakan dengan nilai awal parameter $\alpha = 8$ dan $\beta = 1$ dan galatnya $\varepsilon = 10^{-8}$ adalah $\hat{\alpha} = 1.3163030$ dan $\hat{\beta} = 2.3264578$. Berdasarkan nilai yang diperoleh diketahui apabila estimator tersebut bersifat tidak konsisten karena nilai estimatornya tidak mendekati nilai awal parameter yang telah ditentukan.

5.2 Saran

Saran yang dapat penulis berikan untuk peneliti selanjutnya adalah sebagai berikut.

1. Dalam pelaksanaan penelitian lebih lanjut mengenai estimasi parameter distribusi Gamma dapat menggunakan metode lain atau membandingkan

metode yang telah di teliti dengan metode lainnya untuk mendapatkan hasil yang lebih baik.

2. Peneliti selanjutnya disarankan untuk membangkitkan data lebih dari satu kali sehingga dapat membandingkan sampel data agar mendapatkan data paling baik.
3. Perlu adanya penelitian dengan nilai awal parameter yang berbeda serta sampel data yang berbeda pula untuk dapat mengetahui hasil yang lebih baik maupun untuk membandingkan keakuratan hasil yang diperoleh.
4. Peneliti selanjutnya sebaiknya mempelajari pula sifat-sifat dari estimator.

DAFTAR PUSTAKA

Bain, L. J. dan Engelhard B. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistic Second Edition.* Belmant : Duxbury Press.

Cormen, H. T., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., dan Stein, Clifford. 2001, *Introduction to Algorithms.* MIT Press: USA.

Degroot, Morris H. dan Scervish, Mark J. 2012. *Probability and Statistics* 4th *ed*. Boston: Pearson Education, Inc.

Devore, J. L. 2010. *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences.* 8th *ed*. USA: California Polytechnic State University.

Dosen Pendidikan. 2020. *Flowchart.* https://www.dosenpendidikan.co.id/simbol-flowchart/ (19 Februari 2020)

Dwidayati, Nur Karomah. 2012. *Analisis Cure Rate Penderita Kanker Payudara Berdasar Pemodelan Regresi Cox*. *Sainteknol.* Vol. 10 No. 2 Desember 2012.

Gujarati, Damador N. 2006. *Dasar-Dasar Ekonometrika*. Ciracas: Erlangga.

Hasan, I. (2002). Pokok-Pokok Materi Metodologi Penelitian & Aplikasinya. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Hilbe. Joseph, M. dan Robinson, A.P. 2013. *Methods of Statistical Model Estimation.* Melbourne: CRC Press.

Klein, John P. dan Moeschberger, Melvin L. 2003. *Survival Analysis Techniques for Cencored and Truncated Data*. New York: Springer-Verlag.

Kusumawardhani, G.E., dkk. 2018. Analisis Survival dengan Model Regresi pada Data Tersensor Berdistribusi Log-logistik. *Jurnal Statistika dan Aplikasinya.* 2(2) (2018).

Lawless, J. F. 1982. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. New York: John Willey and Sons, Inc.

_____. 2003. *Statistica Model and Methods for Lifetime Data.* 2nd ed. New Jersey: John Wiley and Sons, Inc.

Lee, Elisa T. dan Wang, John W. 2003. *Statistical Methods for Survival Data Analysis* 3th *ed*. New Jersey: John Wiley and Sons, Inc.

Misbahussurur, Ahmad. 2009. Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode Maksimum Likelihood. *Skripsi* Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Ni'mah, R., dan Agoestanto, Arief. 2014. Estimator Bayes Untuk Rata-Rata Tahan Hidup dari Distribusi Rayleigh pada Data Disensor Tipe II. *UNNES Journal of Mathematics.* 3 (2) (2014).

Rarasati, I. D., 2012. Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode Bayes. *Skripsi* Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Ridiani, Feby. 2014. Pendugaan Parameter Distribusi Beta dengan Metode Momen dan Metode Maksimum Likelihood. *Jurnal Matematika UNAND*. Vol 3 No. 2 Hal. 23-28.

Ridwan. 2005. Belajar Mudah Penelitian Untuk Guru, Karyawan dan Peneliti Pemula. Bandung: Alfabeta.

Sekaran, Uma. 2006. Metode Penelitian Bisnis. Jakarta: Salemba Empat.

Slideshare. 2017. *Praktikum Statistika*. https://www.slideshare.net/GanjarKusuma/lengkap-modul (14 September 2020)

Smyth, G. K. 2002. *Optimation.* Encyclopedia of Environmetrics, Vol. 3, pp 1481-1487. Edited: Abdel H. El Shaarawi and Walter W. Piegorsch, Chicester.

Spiegel, M. R., Schiller, J. J. dan Srinivasan, R. A. 2004. *Probabilitas dan Statistik*. Alih Bahasa oleh Wiwit, K dan Irzam, H. Jakarta: Erlangga.

Suharsimi, Arikunto. 2010. Prosedur Penelitian: Suatu Pendekatan Praktis edisi revisi 2010. Jakarta: Rineka Cipta.

Ummah, Z. 2012. Estimasi Model Linier Tergeneralisasi Gaussian Berdasarkan *Maximum Likelihood Estimator* dengan menggunakan Algoritma *Fisher-Scoring*. Skripsi Tidak Diterbitkan. Surabaya: Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga.

Wikipedia. 2018. *Scoring Algorithm*. https://en.wikipedia.org/wiki/Scoring_algorithm (6 Agustus 2019).

Wikipedia. 2020. *Method of Moments (Statistics).* **https://en.wikipedia.org/wiki/Method_of_moments_(statistics)** **(**17 September 2020).

Yitnosumarto, Suntoyo. 1990. *Dasar-Dasar Statistika.* Jakarta: CV. Rajawali.

Lampiran 1. Data Bangkitan

x	t
1	3.197138
2	0.092805
3	0.069809
4	1.722604
5	0.882098
6	1.949288
7	0.334926
8	1.239642
9	0.626099
10	1.977728
11	0.758501
12	1.626629
13	2.351478
14	5.208764
15	1.026767
16	0.863547
17	0.011497
18	0.482332
19	2.482399
20	0.129003
21	3.797862
22	0.158743
23	5.542318
24	0.625678
25	2.537573
26	5.166477
27	0.636741
28	1.443878
29	1.796647
30	0.203242
31	1.000391
32	1.021536
33	0.028708
34	0.018682
35	0.328135
36	0.726903
37	0.020665
38	0.039334
39	0.182319
40	2.350631

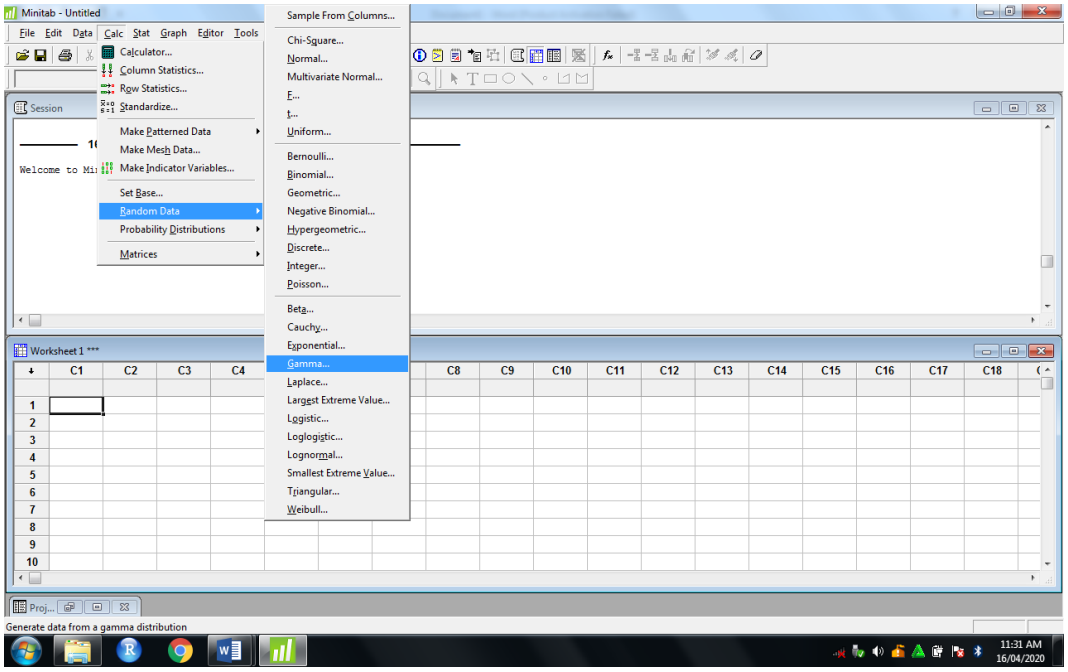
41	1.694828
42	1.421703
43	0.214501
44	6.337016
45	0.270164
46	0.040632
47	6.893181
48	0.00111
49	0.088526
50	1.667095
51	0.507316
52	0.152633
53	4.780341
54	0.058827
55	0.252264
56	0.178405
57	1.579664
58	0.057067
59	0.514687
60	1.156666
61	1.942605
62	4.596432
63	0.142897
64	1.981388
65	7.23E-06
66	0.349106
67	1.426291
68	1.95578
69	1.200042
70	1.869681
71	1.852189
72	0.364293
73	3.335748
74	0.004603
75	1.586341
76	1.766204
77	0.738445
78	0.125886
79	1.123338
80	3.403653
81	0.468575
82	6.398894

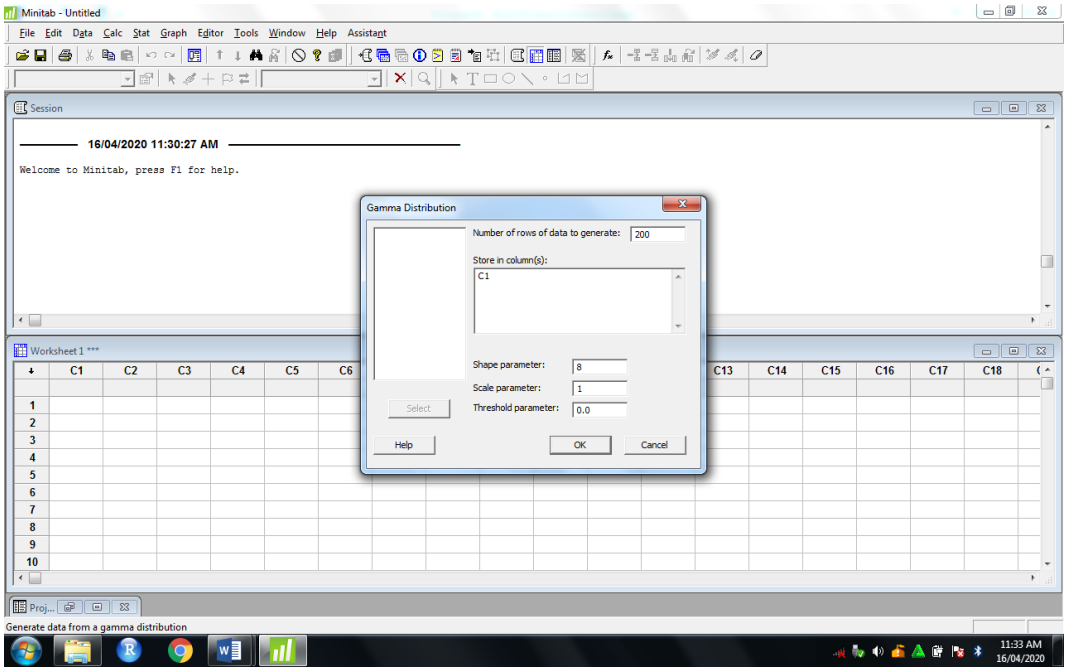
83	2.407593
84	0.17138
85	0.760308
86	0.056631
87	0.03597
88	0.000207
89	0.138716
90	2.230269
91	3.582379
92	0.436453
93	0.382551
94	0.009425
95	0.078235
96	1.501074
97	0.318184
98	0.038102
99	3.737887
100	1.440629
101	0.326567
102	0.143583
103	0.700182
104	0.058984
105	1.157776
106	0.10687
107	0.982582
108	1.844783
109	2.770802
110	0.236288
111	0.04527
112	2.943102
113	0.004463
114	0.186214
115	3.439481
116	6.623201
117	0.106873
118	0.14729
119	0.349481
120	0.072949
121	1.347827
122	1.566294
123	0.215605
124	2.296795

125	1.327304
126	4.428697
127	0.238563
128	0.019134
129	0.74322
130	3.105047
131	8.99345
132	0.979298
133	1.518651
134	1.174176
135	0.014058
136	2.143913
137	0.347148
138	0.277891
139	2.703246
140	3.757551
141	0.88385
142	1.009159
143	0.585446
144	3.981741
145	2.296043
146	3.724355
147	0.007589
148	0.010785
149	0.000442
150	4.296983
151	3.105666
152	0.876581
153	1.434098
154	1.509742
155	2.210999
156	0.156923
157	3.208372
158	0.528517
159	0.021618
160	0.0574
161	0.643044
162	0.251466
163	0.03967
164	0.847095
165	10.78069
166	1.494268

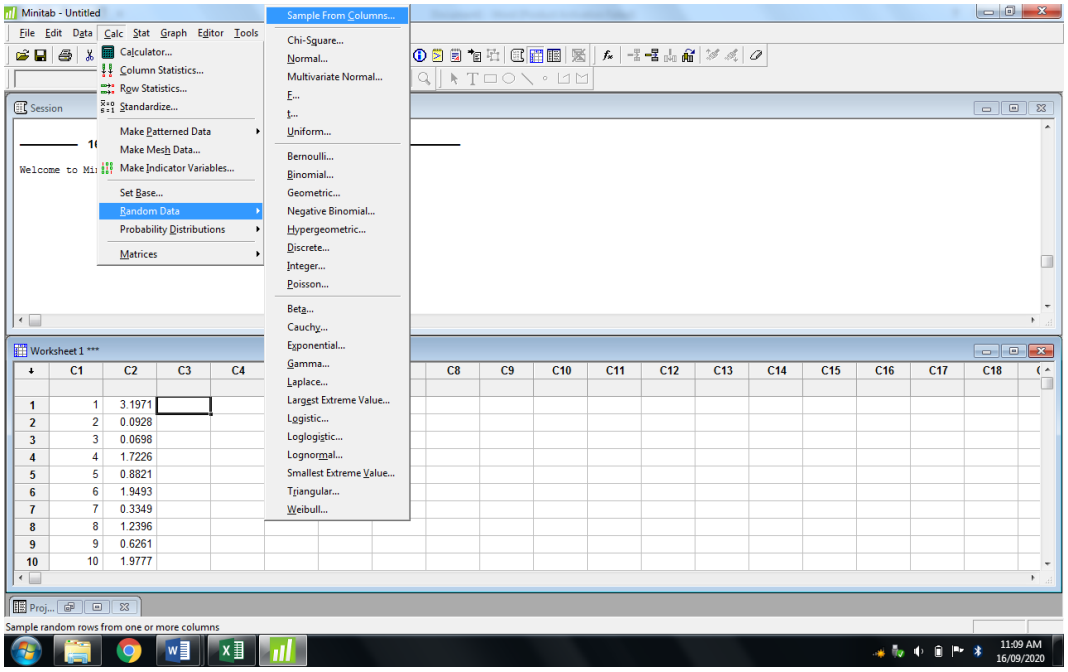
167	0.053713
168	0.110065
169	3.196641
170	0.063554
171	6.9956
172	1.395503
173	0.085357
174	0.554047
175	2.591181
176	1.221212
177	0.121896
178	2.564826
179	1.10233
180	0.230553
181	3.747582
182	3.097613
183	1.473156
184	0.027415
185	0.702652
186	2.831691
187	1.80633
188	1.809605
189	0.024995
190	0.571674
191	0.500127
192	0.178627
193	2.664457
194	0.000496
195	0.073495
196	0.967494
197	4.762065
198	0.294453
199	4.696068
200	2.817702

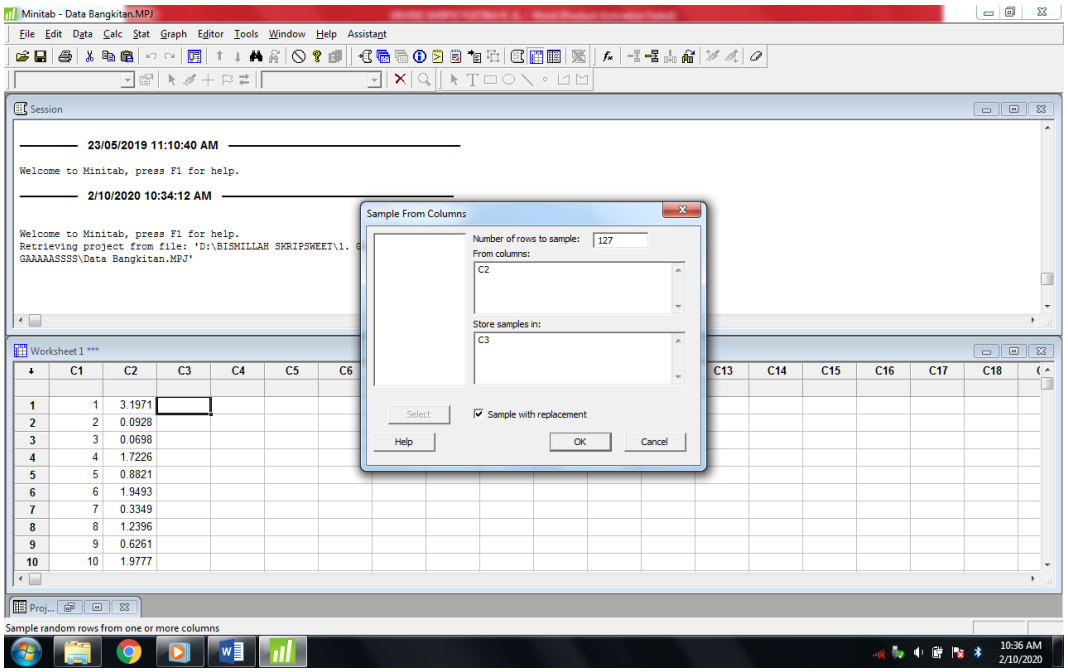
Lampiran 2. Langkah Membangkitkan Data Menggunakan Minitab



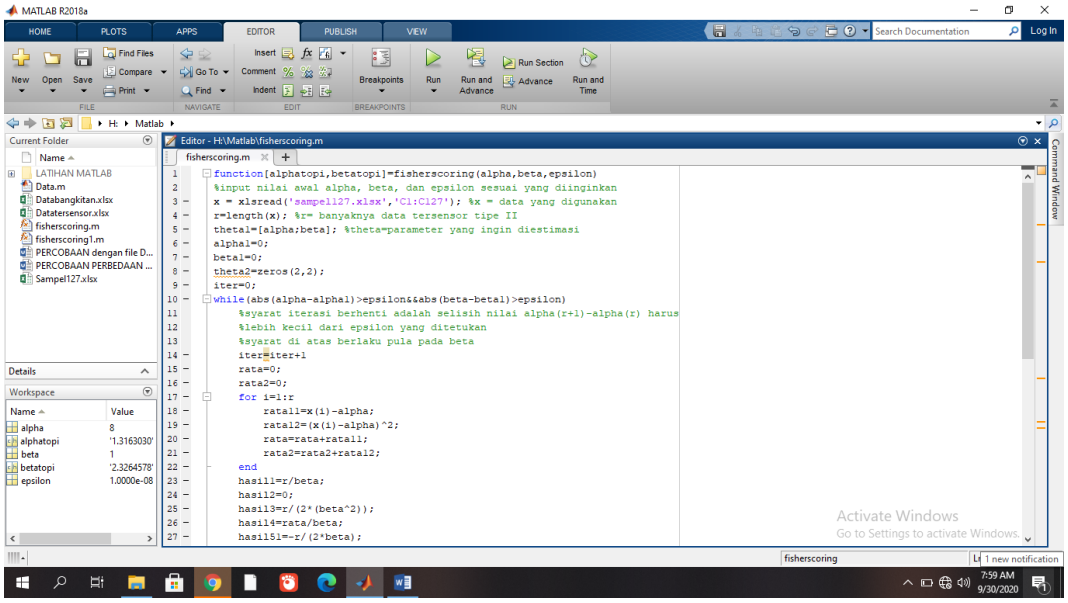


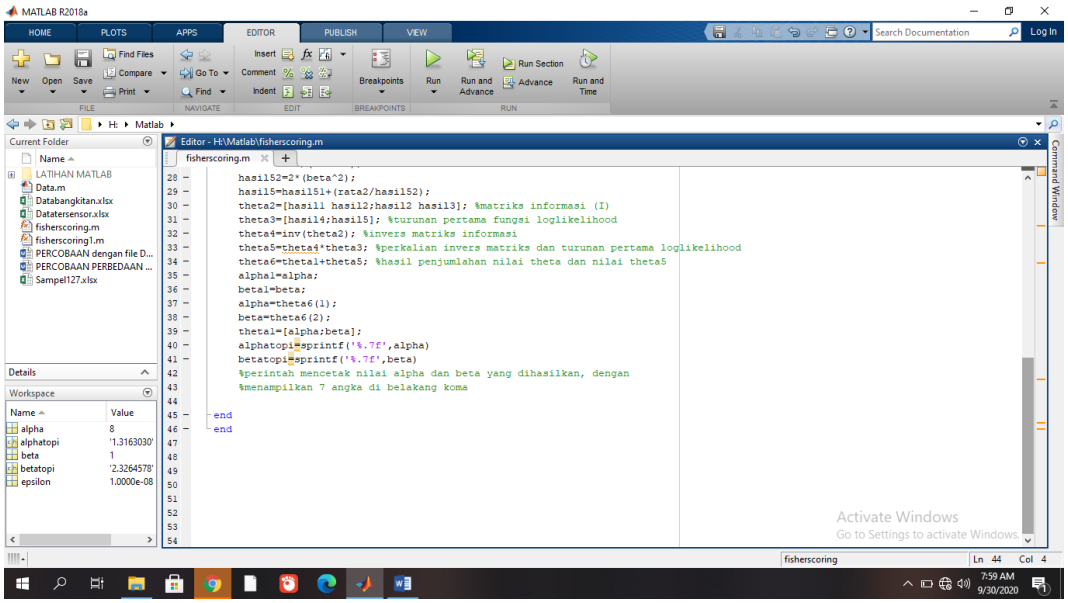
Lampiran 3. Langkah Menentukan Data Tersensor Tipe II





Lampiran 4. Syntax Program Matlab





Lampiran 5. Output Program Matlab

```
Command Window
>> alpha=8

alpha =

     8

>> beta=1

beta =

     1

>> epsilon=0.00000001

epsilon =

   1.0000e-08

>> [alphatopi,betatopi]=fisherscoring(alpha,beta,epsilon)
```

```
Command Window
iter =

     1


alphatopi =

    '1.3163030'


betatopi =

    '46.9982631'


iter =

     2


alphatopi =

    '1.3163030'


betatopi =

    '2.3264578'
```

Activate Windows
Go to Settings to activate Windows.

Lampiran 6. Tabel Isaac dan Michael

TABEL PENENTUAN JUMLAH SAMPEL DARI POPULASI TERTENTU

DENGAN TARAF KESALAHAN, 1, 5, DAN 10 %

N	Siginifikasi			N	Siginifikasi		
	1%	5%	10%		1%	5%	10%
10	10	10	10	280	**197**	155	138
15	15	14	14	290	**202**	158	140
20	19	19	19	300	**207**	161	143
25	24	23	23	320	**216**	167	147
30	29	28	28	340	**225**	172	151
35	33	32	32	360	**234**	177	155
40	38	36	36	380	**242**	182	158
45	42	40	39	400	**250**	186	162
50	47	44	42	420	**257**	191	165
55	51	48	46	440	**265**	195	168
60	55	51	49	460	**272**	198	171
65	59	55	53	480	**279**	202	173
70	63	58	56	500	**285**	205	176
75	67	62	59	550	**301**	213	182
80	71	65	62	600	**315**	221	187
85	75	68	65	650	**329**	227	191
90	79	72	68	700	**341**	233	195
95	83	75	71	750	**352**	238	199
100	87	78	73	800	**363**	243	202
110	94	84	78	850	**373**	247	205
120	102	89	83	900	**382**	251	208
130	109	95	88	950	**391**	255	211
140	116	100	92	1000	**399**	258	213
150	122	105	97	1100	**414**	265	217
160	129	110	101	1200	**427**	270	221

170	135	114	105	1300	**440**	275	224
180	142	119	108	1400	**450**	279	227
190	148	123	112	1500	**460**	283	229
200	154	127	115	1600	**469**	286	232
210	160	131	118	1700	**477**	289	234
220	165	135	122	1800	**485**	292	235
230	171	139	125	1900	**492**	294	237
240	176	142	127	2000	**498**	297	238
250	182	146	130	2200	**510**	301	241
260	187	149	133	2400	**520**	304	243
270	192	152	135	2600	**529**	307	245