KONSTRUKSI STRUKTUR MENTAL MAHASISWA PADA PEMBELAJARAN *ACE*

DISERTASI

Untuk memperoleh gelar Doktor Pendidikan Matematika pada Universitas Negeri Semarang

Oleh
Kristina Wijayanti
0401614008

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
PASCASARJANA
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
2020

PERNYATAAN KEASLIAN

Dengan ini saya

Nama : Dra. Kristina Wijayanti, M.S

NIM : 0401614008

Program studi : Pendidikan Matematika S3

menyatakan bahwa yang tertulis dalam disertasi yang berjudul "Konstruksi Struktur Mental Mahasiswa Pada Pembelajaran ACE" ini benar-benar karya saya sendiri, bukan jiplakan dari karya orang lain atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku, baik sebagian atau seluruhnya. Pendapat atau temuan orang lain yang terdapat dalam disertasi ini dikutip atau dirujuk berdasarkan kode etik ilmiah. Atas pernyataan ini **saya secara pribadi** siap menanggung risiko/sanksi hukum yang dijatuhkan apabila ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya ini.

Semarang, 7 Oktober 2020

Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL

BAE33AHF584585554

6000

ENAM RIBU RUPIAH

Dra. Kristina Wijayanti, M.S

PENGESAHAN

Disertasi berjudul

Konstruksi Struktur Mental Mahasiswa Pada Pembelajaran ACE

karya

Nama: Kristina Wijayanti
NIM : 0401614008
Prodi : Pendidikan Matematika, S3

ini telah dipertahankan dalam Ujian Disertasi Pascasarjana Universitas Negeri Semarang pada tanggal 7 Oktober 2020 dan disahkan oleh Panitia Ujian.

Semarang, 15 Oktober 2020

Panitia

Ketua,	Sekretaris,
Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum. NIP 196612101991031003	Prof. Dr. Agus Nuryatin, M.Hum. NIP 196008031989011001
Penguji I,	Penguji II,
Prof. Dr. Irawati, M.S. NIP 195904181983032001	Dr. Mulyono, M.Si. NIP 197009021997021001
Penguji III,	Penguji IV/Anggota Promotor,
Prof. Drs. YL. Sukestiyarno, M.S., Ph.D. NIP 195904201984031002	Dr. Isnarto, M.Si. NIP 196902251994031001
Penguji V/Co-Promotor,	Penguji VI/Promotor,
Prof. Dr. Kartono, M.Si. NIP 195602221980031002	Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si. NIP 196809071993031002

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

Motto:

- Syukur
- Ad omne opus bonum semper paratus

Persembahan:
Untuk Widi dan Dismas

PRAKATA

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas karunia dan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan disertasi dengan judul "Konstruksi Struktur Mental Mahasiswa Pada Pembelajaran ACE". Disertasi ini disusun sebagai salah satu persyaratan meraih gelar Doktor Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika, Pascasarjana, Universitas Negeri Semarang.

Ucapan terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya penulis sampaikan kepada para pembimbing: Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si. (Promotor), Prof. Dr. Kartono, M.Si. (Kopromotor), dan Dr. Isnarto, M.Si. (Anggota Promotor) yang telah berkenan mengorbankan waktu, pikiran, dan tenaga sehingga disertasi ini dapat diselesaikan. Ucapan terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya penulis haturkan kepada penguji luar Prof. Dr. Irawati, M.S. yang telah berkenan menguji dan memberi masukan yang sangat berharga untuk disertasi ini.

Disertasi ini dapat diselesaikan atas bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah membantu penyelesaian disertasi ini. Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum., Rektor Universitas Negeri Semarang atas ijin dan kesempatan yang diberikan kepada penulis untuk menempuh studi di Universitas Negeri Semarang
2. Prof. Dr. Agus Nuryatin, M.Hum., Direktur Pascasarjana Universitas Negeri Semarang yang telah memberikan dukungan untuk kelancaran dalam menempuh studi.
3. Prof. Drs. YL. Sukestiyarno, M.S., Ph.D., Ketua Program Studi Pendidikan Matematika S3, Pascasarjana, Universitas Negeri Semarang yang telah memberikan dukungan untuk kelancaran dalam menempuh studi.

4. Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si., Akt., Dekan FMIPA UNNES periode 2014-2018 yang telah berkenan memberikan ijin untuk melaksanakan penelitian disertasi ini.
5. Bapak dan Ibu dosen Program Studi Pendidikan Matematika Pascasarjana UNNES, yang telah banyak memberikan bimbingan dan ilmu kepada penulis selama menempuh pendidikan.
6. Dr. Sugianto, M.Si, Dekan FMIPA UNNES yang telah memberikan dukungan moral kepada penulis.
7. Drs. Arief Agoestanto, M.Si. Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNNES periode 2015-2019 yang telah berkenan memberikan rekomendasi untuk melaksanakan penelitian disertasi ini.
8. Dr. Mulyono, M.Si, Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNNES yang telah mendukung penelitian ini.
9. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam penyusunan disertasi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Masih banyak kekurangan pada karya ini, namun semoga bermanfaat bagi pembaca dan memberi kontribusi bagi pengembangan ilmu pengetahuan.

Semarang, Oktober 2020

Penulis

ABSTRAK

Wijayanti, Kristina. (2020). *Konstruksi Struktur Mental Mahasiswa Pada Pembelajaran ACE*. Disertasi. Program Studi Pendidikan Matematika. Pascasarjana. Universitas Negeri Semarang. Promotor: Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si., Kopromotor: Prof. Dr. Kartono, M.Si., Anggota Promotor: Dr. Isnarto, M.Si.

Kata kunci: APOS, dekomposisi genetik, pembelajaran ACE, struktur mental.

Salah satu aktivitas dalam mengkonstruksi bukti adalah mengolah informasi. Cara yang disukai dalam memilih, memahami, dan mengolah informasi baru disebut gaya kognitif. Ada tiga gaya kognitif yaitu *field-independent* (FI), *field- neutral* (FN), dan *field-dependent* (FD). Pembelajaran berbasis APOS (Aksi, Proses, Objek, Skema) diawali dengan sebuah dugaan yang disebut dekomposisi genetik. Pembelajaran ACE merupakan pembelajaran berbasis APOS. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menganalisis kemampuan awal mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti (KAM) pada materi *prerequisite*, kualitas pembelajaran ACE, struktur mental yang dikonstruksi mahasiswa berdasarkan gaya kognitif dan kemampuan awal dalam mengkonstruksi bukti, dan dekomposisi genetik untuk materi grup.

Penelitian ini dirancang sebagai penelitian dengan metode campuran strategi *embedded concurrent* dengan metode primer kualitatif dan metode sekunder kuantitatif. Untuk metode kuantitatif, pengumpulan data dilakukan dengan tes dan teknik analisis data menggunakan uji binomial dan uji Mann-Whitney. Untuk metode kualitatif, pengumpulan data dilakukan dengan tes, wawancara, dan observasi dan teknik analisis data selama di lapangan menggunakan model Miles dan Huberman. Derajat kepercayaan menggunakan triangulasi sumber dan triangulasi teknik.

Hasil analisis KAM adalah ketuntasan klasikal belum tercapai dan tidak terdapat perbedaan yang signifikan antara rata-rata kemampuan awal mengkonstruksi bukti pada pembelajaran ACE dan pada pembelajaran Langsung. Dari analisis kualitas pembelajaran ACE diperoleh bahwa perangkat dan proses pembelajaran ACE termasuk pada rentang penilaian baik dan sangat baik, sedangkan untuk hasil belajar diperoleh ketercapaian ketuntasan klasikal dan rata-rata kemampuan mengkonstruksi bukti pada kelas yang dikenai pembelajaran ACE lebih tinggi daripada pada kelas yang dikenai pembelajaran Langsung. Hasil penelitian kualitatif menemukan deskripsi struktur mental yang dikonstruksi oleh mahasiswa berdasarkan KAM dan gaya kognitif dan menemukan dekomposisi genetik yang digunakan sesuai untuk materi grup.

ABSTRACT

Wijayanti, Kristina. (2020). *Mental Structures Construction of Students in ACE Learning*. Dissertation. Mathematics Education Program. Postgraduate. Universitas Negeri Semarang. Promoter: Prof. Dr. S.B. Waluya, M.Si., Co-promoter: Prof. Dr. Kartono, M.Si., Promoter Member: Dr. Isnarto, M.Si.

Keywords: ACE learning, APOS, genetic decomposition, mental structure.

One of the activities in constructing proofs is processing information. The preferred way of choosing, understanding, and processing new information is called cognitive style. There are three cognitive styles namely field-independent (FI), field -neutral (FN), and field-dependent (FD). APOS (Action, Process, Object, Schema) -based learning begins with a conjecture called genetic decomposition. ACE learning is APOS-based learning. The purpose of this study was to analyze the student's initial ability in constructing proof on prerequisite, the ACE learning quality, the mental structures constructed by students based on cognitive style and initial ability to construct proofs, and the appropriate genetic decomposition for study groups.

This study was designed as research with mixed methods of embedded concurrent strategy with qualitative primary methods and quantitative secondary methods. For the quantitative method, the data collection was done by tests. Data analysis techniques using the binomial test and Mann-Whitney test. For the qualitative method, the data collection was done by tests, interviews, and observations. Data analysis techniques while in the field using the model of Miles and Huberman. The credibility used source triangulation and technique triangulation.

The analysis of student's initial ability in constructing proof found classical completeness has not been achieved and there was no significant difference between the average initial ability to construct proof in ACE learning and Direct learning. The analysis of the quality of ACE learning gave results that instruments and processes of ACE learning were in the range of good and very good assessment and the learning outcome obtained were classical completeness was achieved and the average ability to construct proof in class subjected to ACE learning was higher than in class subjected to Direct learning. The qualitative study found the description of mental structures constructed by students based on the initial ability to construct proofs and cognitive styles and found the genetic decomposition used was appropriate for groups.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Berdasarkan Permendiknas No 22 tahun 2006 tentang standar isi matematika, melalui pembelajaran matematika siswa diharapkan memiliki kemampuan sebagai berikut: (1) memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antara konsep, dan mengaplikasikan konsep atau algoritma secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah; (2) menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika; (3) memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model, dan menafsirkan solusi yang diperoleh; (4) mengkomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah; dan (5) memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah. Sejalan dengan hal ini *National Council of Teacher Mathematics* (2000) menyatakan bahwa pembelajaran matematika adalah proses membelajarkan siswa agar memiliki kemampuan untuk berpikir matematis serta memiliki pengetahuan dan keterampilan dasar matematika, dimana proses tersebut meliputi pemecahan masalah (*problem solving*), penalaran dan pembuktian (*reasoning and proof*), komunikasi (*communication*), koneksi (*connections*), dan representasi (*representation*).

Menurut Ross (Lithner, 2000, h. 165) salah satu tujuan paling penting dari perkuliahan matematika adalah untuk mengajar penalaran yang logis bagi mahasiswa. Penalaran merupakan komponen mendasar dalam matematika. Sejalan dengan hal ini, Miyazaki, *et al*. (2017, h. 237) menyatakan bahwa pengajaran dan pembelajaran bukti deduktif dalam matematika merupakan salah satu tujuan terpenting dalam pendidikan matematika. Stylianides & Stylianides (2007, h. 146) menyatakan bahwa pengetahuan yang kuat akan bukti merupakan hal yang penting untuk dimiliki para guru dari semua tingkatan. Namun, Knut (2002, h. 379) melaporkan bahwa banyak guru memiliki pandangan terbatas tentang sifat pembuktian dalam matematika dan menunjukkan pemahaman yang tidak memadai tentang apa yang mendukung bukti. Berdasarkan hal di atas, kesenjangan pertama muncul antara pentingnya guru memiliki pengetahuan yang kuat akan bukti dan pemahaman yang tidak memadai mengenai bukti.

Kesenjangan pertama ini memunculkan masalah ketika mahasiswa calon guru terjun ke lapangan sebagai guru untuk mengajar tentang pembuktian. Untuk meminimalkan kesenjangan ini, mahasiswa calon guru harus diberi bekal agar dapat mengajarkan matematika di sekolah sehingga siswa dapat mencapai kemampuan penalaran dan pembuktian. Bekal ini diberikan dalam salah satu mata kuliah wajib yaitu Pengantar Struktur Aljabar 1. Melalui pembelajaran ini diharapkan pemahaman mahasiswa calon guru mengenai bukti lebih baik. Tujuan mata kuliah ini adalah agar mahasiswa memahami beberapa struktur dalam aljabar dan dapat memanfaatkannya untuk menyelesaikan masalah sederhana dalam aljabar serta mampu berpikir logis dan bernalar secara matematis dalam menyelesaikan masalah. Mahasiswa calon guru penting mempelajari materi ini karena dapat membantu guru untuk menghubungkan matematika lanjut dengan matematika sekolah dalam hal memperkuat dan memperdalam pemahaman mereka tentang matematika yang akan mereka ajarkan. Keabstrakan dari aljabar abstrak oleh Wasserman (2017, h. 200) dikatakan berguna bagi para guru karena membantu mereka memahami dan memaknai matematika yang akan mereka ajarkan.

Materi pada Pengantar Struktur Aljabar 1 adalah teori grup yang merupakan salah satu bagian dari aljabar abstrak. Topik-topik dalam teori grup sarat dengan definisi dan teorema. Oleh karena itu, mahasiswa dituntut untuk memahami setiap definisi dan teorema yang dipelajari dan mampu mengorganisasi konsep-konsep dalam pembuktian teorema. Berkaitan dengan bukti dalam matematika, Stout (2014) menyatakan bahwa "*A large portion of mathematics consists of proofs*. *A proof of a theorem is a finite sequence of claims, each claim being derived logically* *from the previous claims as well as theorems whose truth has been already established*". Anton & Rorres (2015) menyatakan bahwa bukti merupakan argumen yang meyakinkan yang menjustifikasi kebenaran pernyataan matematik. Sejalan dengan pendapat ini bukti merupakan argumen yang meyakinkan yang dinyatakan dalam bahasa matematik bahwa pernyataan itu benar (Solow, 2014). Seseorang yang dapat menuliskan bukti yang valid menunjukkan bahwa orang tersebut mempunyai pemahaman yang menyeluruh terhadap masalah tersebut. Representasi umum seperti simbol matematik atau variabel yang dikuantifikasi sering digunakan dalam bukti formal (David, *et al*., 2015).

Peran bukti menurut Sarah, *et al*. (2017) adalah untuk membuktikan, menjelaskan, mensistematisasikan, menemukan dan mengomunikasikan. Hanna & Hersh (seperti dikutip oleh Lo & Crory, 2009) menyatakan 3 peran utama dari bukti adalah untuk membuktikan, menjelaskan, dan meyakinkan.

Penelitian tentang pembuktian antara lain penjenjangan kemampuan membuktikan telah dilakukan oleh Balacheff (dalam Coe & Ruthven, 1994), Sowder & Harel (1998), Weber (2004), dan Isnarto (2014). Kemampuan membuktikan diperingkat oleh Balacheff (dalam Coe & Ruthven, 1994) menjadi 4 yaitu empirisisme sederhana (*naïve empiricism*), eksperimen dasar (*crucial experiment*), contoh umum (*generic example*), dan eksperimen penalaran (*thought experiment*). Empirisisme sederhana meliputi verifikasi pernyataan melalui melihat beberapa kasus, tanpa generalisasi. Eksperimen dasar melibatkan uji kasus tertentu yang dipilih untuk menjadi khas dan tidak biasa. Contoh umum meliputi verifikasi pernyataan berdasarkan operasi dan aspek contoh umum, yang mewakili suatu kelas objek. Eksperimen penalaran memberikan verifikasi melalui operasi-operasi dan sifat-sifat matematika, tanpa menggunakan contoh. Sowder & Harel (1998) mengklasifikasi berdasarkan skema bukti menjadi 3 kategori utama yaitu skema bukti berbasis eksternal, skema bukti empirik, dan skema bukti analitik.

Berdasarkan proses menulis bukti, Weber (2004) mengklasifikasikan menjadi 3 kategori yaitu bukti prosedural, bukti sintaktik, dan bukti semantik. Isnarto (2014) mengungkap enam aspek yang perlu diperhatikan dalam konstruksi bukti matematis yakni langkah awal, alur pembuktian, konsep terkait, argumen, ekspresi kunci, dan bahasa pembuktian.

Berdasarkan pengalaman mengajar mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1 yang mengkaji teori grup, kemampuan mahasiswa dalam membuktikan masih rendah meskipun selalu dilakukan latihan soal tentang pembuktian. Hasil belajar mahasiswa pada mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1 selama 3 tahun terakhir kurang dari 50% mahasiswa mendapat skor lebih dari 61. Kenyataan ini didukung oleh pendapat Fraleigh (2014, h. 1) yang menyatakan bahwa "*Many students do not realize the great importance of definitions to mathematics... there is an important structural weakness*." Sejalan dengan hal tersebut, Durbin (2009, h. 9) menyatakan hampir setiap orang mengalami kesulitan dalam mengkonstruksi bukti; Lo & Crory (2009) mengemukakan bahwa komunitas pendidikan matematika di seluruh dunia menghadapi tantangan untuk meningkatkan kemampuan siswa dalam membuktikan dan bernalar secara matematik di semua tingkat; sedangkan Schoenfeld (1985) menyampaikan "*Often, students fail to construct proofs because they do not know how to begin, spend all their time pursuing dead-ends, or reach an impasse where they simply cannot decide how to proceed*".

Masalah mengkonstruksi dan memahami bukti dihadapi oleh mahasiswa di setiap level, mahasiswa mengalami kesulitan dalam mengkonstruksi argumen matematik yang berkualitas. Menulis bukti adalah krusial (Thompson, *et al*., 2012; Stylianou & Blanton, 2011). Bagi mahasiswa S1 tingkat awal, bukti matematik merupakan tugas yang menuntut banyak kemampuan (Stylianou, *et al*., 2015).

Penelitian tentang kesulitan ini dilakukan antara lain oleh Martin & Harel (1989), Moore (1994), Epp (2003), Samkoff, *et al*. (2012), dan Wijayanti (2016) yang melaporkan bahwa porsi terbesar mahasiswa matematika mengalami kesulitan dalam mengkonstruksi, memahami, dan memvalidasi bukti. Martin & Harel (1989) menemukan bahwa 52% mahasiswa matematika menerima argumen yang salah sebagai bukti dari pernyataan yang tidak familier. Moore (1994) mendapatkan bahwa beberapa mahasiswa bergantung pada menghafalkan bukti karena mereka tidak memahami buktinya dan tidak tahu bagaimana menulisnya.

Ketidakmampuan ini bukanlah fenomena baru. Perkuliahan yang dilaksanakan Epp (2003) pada akhir tahun 1970-an menggambarkan bahwa hampir seluruh usaha menulis bukti mahasiswa berkualitas rendah. Samkoff, *et al*. (2012, h. 64) menyatakan mahasiswa memiliki sejumlah kesulitan yang mengejutkan dalam konstruksi bukti. Karena bukti membentuk dasar struktur matematika, ketidakmampuan ini menghadirkan masalah besar. Kemampuan memahami bukti merupakan kemampuan yang harus dikuasai mahasiswa agar dapat mengkonstruksi bukti dengan baik. Hasil kajian pendahuluan mengenai kesulitan mahasiswa (*Field- Independent, Field-Neutral,* dan *Field-Dependent*) dalam pembuktian yang dilakukan oleh Wijayanti (2016) antara lain: kesulitan dalam mengidentifikasi elemen dalam himpunan, miskonsepsi terkait dengan penggunaan notasi matematik, kesulitan mengidentifikasi pernyataan yang diketahui, kesulitan dalam menggunakan definisi untuk membuktikan, bahkan untuk mahasiswa *Field-Dependent* mengalami kesulitan dalam menuliskan definisi.

Di sisi lain, Mills (2014, h.106) menyatakan bahwa mahasiswa jurusan matematika tingkat sarjana diharapkan dapat memahami bukti matematis dan menulis bukti asli mereka sendiri. Oleh karena itu, kesenjangan kedua muncul antara pemahaman mengenai bukti yang diharapkan dan kesulitan mahasiswa dalam belajar pembuktian.

Agar mahasiswa berhasil dalam matematika tingkat lanjut, mereka harus menguasai kumpulan fakta dan seperangkat proses penalaran (Weber, 2009, h. 200; Dimmel, 2018, h. 281) dan instruktur harus mengambil peran aktif dalam mengelola kegiatan pembuktian mahasiswa (Stylianides , 2007a, h. 318). Fakta dalam hal ini adalah aksioma, definisi, contoh, teorema, dan bukti dari matematika yang sedang dipelajari. Instruktur dapat menggunakan definisi sebagai dasar untuk diskusi kelas yang mengeksplorasi kesalahpahaman mahasiswa tentang prinsip-prinsip logis yang penting. Instruktur tidak dapat secara efektif membimbing kegiatan penalaran mahasiswa mereka jika mereka sendiri tidak secara eksplisit menyadari prinsip-prinsip dasar penalaran logis (Hanna & de Villiers, 2012, h. 378, 380). Di kelas-kelas kecil 10-40, di mana selain mendengar ceramah, mahasiswa dapat menunjukkan bukti mereka sendiri di papan tulis dan menerima umpan balik. Mereka dapat bekerja dalam kelompok kecil dengan dosen bertindak sebagai narasumber / pelatih, atau dosen dan mahasiswa dapat bersama-sama bekerja sebagai komunitas praktik untuk mengembangkan matematika. Dalam kelas kuliah besar, dari 40 hingga 100 (atau lebih), perhatian individu seperti itu tidak mungkin (Hanna & de Villiers, 2012, h. 406). Vygotsky menunjukkan bahwa apa yang dapat dilakukan siswa ketika mereka bekerja sepenuhnya sendiri sangat berbeda dari apa yang dapat mereka capai dengan bimbingan seorang guru; pekerjaan yang mereka lakukan dengan bantuan guru hari ini memungkinkan mereka untuk mencapai sukses sendiri kelak (Epp, 1998: h. 713). Latihan pada seperangkat soal memberi kesempatan dosen untuk melibatkan mahasiswa dalam praktik dengan penalaran dan bukti (Thompson, *et al*., 2012, h. 255; Johnson, *et al*., 2010, h.416).

Berdasarkan uraian di atas, tindak lanjut yang dapat diupayakan untuk meminimalkan kesenjangan kedua adalah melalui pembelajaran yang dapat menumbuhkan penguasaan akan fakta-fakta dan proses penalaran dan ada suatu tahapan dosen berperan aktif dalam mengelola kegiatan pembuktian mahasiswa. Untuk menumbuhkan penguasaan fakta dilakukan melalui tugas-tugas sebelum perkuliahan berlangsung dan dapat dikerjakan secara berkelompok. Untuk mengeksplor kesalahan pemahaman fakta dilakukan diskusi kelas. Latihan soal diberikan agar mahasiswa melakukan praktik dengan penalaran dan bukti.

Kematangan matematik diperlukan untuk mempelajari aljabar abstrak (Malik, *et al*., 2007, h. v). Hal serupa ini dinyatakan oleh Fraleigh (2014, h. iii), "*This is an introduction to abstract algebra. ... However, these are mathematical maturity prerequisites rather than subject matter prerequisites".* Sejalan dengan hal ini Hungerford (1984, h. ix) menyatakan "*There are, in theory, no formal prerequisites other than some elementary facts about sets, functions, the integers, and the real numbers, and a certain amount of "mathematical maturity*." Hammack (2013) juga menyatakan hal serupa ini yakni, karena setiap struktur atau objek matematik dapat digambarkan sebagai himpunan, maka himpunan adalah mendasar. Logika mendasar untuk memahami pernyataan, mendeduksikan fakta-fakta tentang struktur matematik dan mengungkap struktur selanjutnya. Dengan menguasai fungsi, mahasiswa disiapkan untuk mengkaji matematika lanjut seperti aljabar abstrak. Selden & Selden (2003) menyatakan perkuliahan berbasis bukti seperti aljabar abstrak meliputi logika, himpunan, relasi dan fungsi. Grillet (2007) juga mengemukakan bahwa dalam mempelajari aljabar abstrak mahasiswa dapat melakukan bukti sederhana mengenai himpunan, elemen, pemetaan dan relasi ekivalen. Berdasarkan hal ini diduga mahasiswa dengan kematangan matematik yang tinggi lebih baik dalam mempelajari aljabar abstrak.

Mengacu pada *prerequisite* yang dinyatakan oleh Hungerford (1984), Fraleigh (2014), Grillet (2007), Hammack (2013), dan Selden (2003), mahasiswa dapat dikelompokkan berdasarkan kemampuan awal dalam mengkonstruksi bukti pada materi himpunan dan fungsi. Selain karena himpunan dan fungsi merupakan *prerequisite* juga karena merupakan objek pada struktur grup.

Pemecahan masalah merupakan elemen penting dari pemikiran matematika (Drijvers, *et al*. 2019, h. 1). Dalam perkuliahan matematika universitas, aktivitas mengkonstruksi bukti dapat dipandang sebagai tugas pemecahan masalah di mana orang yang membuktikan diminta untuk membuat pembenaran logis yang menunjukkan bahwa pernyataan tertentu harus benar (Weber, 2005, h. 351; Schoenfield sebagaimana dikutip oleh Selden & Selden, 2003, h. 6; Mamona-Downs & Downs, 2005, h. 397). Oleh karena itu, untuk dapat mengkonstruksi bukti dengan baik diperlukan kemampuan memecahkan masalah. Cara yang konsisten yang dilakukan seseorang dalam menangkap informasi, cara mengingat, cara berpikir, cara memecahkan masalah, menanggapi suatu tugas atau menanggapi berbagai jenis situasi lingkungannya disebut gaya kognitif (Altun & Cakan, 2006, h. 290). Menurut Witkin & Goodenough (sebagaimana dikutip oleh Cataloglu & Ates, 2014, h.702), gaya kognitif adalah cara yang disukai dalam memilih, memahami, dan mengolah informasi baru. Berdasarkan kedua pengertian di atas dapat disimpulkan gaya kognitif adalah cara yang dilakukan secara konsisten dalam menangkap, memahami, dan mengolah informasi baru, serta memecahkan masalah. Ada berbagai gaya kognitif yang tersedia dalam literatur, diantaranya adalah *visual/haptic*, *visualizer*/*verbalizer*, *leveling/sharpening*, *serialist*/*holistic*, dan *field -dependent*/*independent*. Menurut Witkin, *et al*. (1977), orang *field-independent*

(FI) mampu mengabstraksikan unsur dari konteksnya, atau latar belakang bidangnya. Dalam hal ini, mereka cenderung lebih analitik dan mendekati masalah dengan cara yang lebih analitis. Di sisi lain, orang *field-dependent* (FD), lebih mungkin untuk menjadi lebih baik dalam mengingat informasi sosial seperti percakapan dan hubungan. Mereka mendekati masalah dengan cara yang lebih global dengan mengamati gambar total dalam konteks tertentu. Angeli & Valanides (2004, h.24) menyatakan perbedaan utama antara pebelajar FD dan FI adalah persepsi visual. Pebelajar FD tidak visual perseptif dan memiliki lebih banyak kesulitan dalam mengabstraksi informasi yang relevan dari materi pembelajaran visual (atau bahkan tekstual) yang mendukung tugas belajar yang lebih sulit. Perbedaan yang lain dikemukakan oleh Witkin, *et al*. (1977, h. 25) yaitu mahasiswa *field-dependent* mungkin memerlukan instruksi yang lebih eksplisit dalam strategi pemecahan masalah atau definisi yang lebih tepat dari hasil kinerja daripada mahasiswa *field-independent*, yang bahkan dapat bekerja lebih baik ketika diizinkan untuk mengembangkan strategi mereka sendiri. Witkin, *et al*. (sebagaimana dikutip oleh Oh & Lim, 2005, h. 54) mengemukakan orang *field-independent* cenderung melihat lingkungan secara analitis sedangkan *field-dependent* mudah dipengaruhi oleh bidang yang berlaku atau konteks. Dowlatabadi & Mehraganfar (2014, h. 102) menemukan bahwa mahasiswa *field-dependent* cenderung menggunakan strategi sosial lebih dari pada mahasiswa yang *field-independent*, sementara mahasiswa *field- independent* lebih sering menggunakan strategi kognitif dan metakognitif daripada mahasiswa *field-dependent*.

Kajian tentang kemampuan individu FI dan individu FD telah dilakukan oleh Ates & Cataloglu (2007), Umaru & Tukur (2013), dan Dowlatabadi & Mehraganfar (2014). Ates & Cataloglu (2007, h.175) menemukan hubungan yang signifikan secara statistik antara gaya kognitif dan prestasi fisika siswa. Mereka juga menunjukkan bahwa terdapat perbedaan yang signifikan secara statistik antara keterampilan pemecahan masalah siswa FI dan FD. Temuan penelitian Umaru & Tukur (2013) menunjukkan bahwa siswa gaya kognitif FI secara signifikan mencapai hasil Tes Prestasi Matematika lebih tinggi daripada siswa gaya kognitif

FD. Dowlatabadi & Mehraganfar (2014) mendapatkan hasil bahwa mahasiswa FD cenderung menggunakan strategi sosial lebih dari pada mahasiswa FI, sementara mahasiswa FI lebih sering menggunakan strategi kognitif dan metakognitif daripada mahasiswa FD.

Berdasarkan uraian di atas, karakteristik mahasiswa FI dan FD dapat disajikan sebagai berikut.

Karakteristik mahasiswa FI

(1) Mahasiswa FI mempelajari konsep lebih cepat ketika informasi yang menonjol tidak relevan dengan definisi konsep tersebut.
(2) Mahasiswa FI dapat bekerja lebih baik ketika diberi kesempatan untuk mengembangkan strategi mereka sendiri.
(3) Mahasiswa FI cenderung melihat lingkungan secara analitis.
(4) Mahasiswa FI memilih metode deduktif.
(5) Mahasiswa FI lebih sering menggunakan strategi kognitif dan metakognitif.
(6) Mahasiswa FI lebih menyukai bekerja secara mandiri.
(7) Mahasiswa FI unggul dalam tugas-tugas pemecahan masalah.

Karakteristik mahasiswa FD

(1) Mahasiswa FD memiliki kesulitan memunculkan dan menggunakan informasi yang tidak menonjol.
(2) Mahasiswa FD memerlukan instruksi yang lebih eksplisit dalam strategi pemecahan masalah.
(3) Mahasiswa FD cenderung mudah dipengaruhi oleh konteks.
(4) Mahasiswa FD lebih memilih metode induktif.
(5) Mahasiswa FD cenderung menggunakan strategi sosial.
(6) Mahasiswa FD lebih menyukai situasi kerja yang berorientasi kelompok dan kolaboratif.
(7) Mahasiswa FD unggul dalam domain pengetahuan yang fokus pada masalah sosial.

Berdasarkan karakteristik mahasiswa FI, FD, dan karakteristik materi perkuliahan teori grup, kesenjangan ketiga yang muncul antara kemampuan yang diperlukan untuk mempelajari konstruksi bukti dan gaya kognitif mahasiswa lebih mungkin terjadi pada mahasiswa FD. Untuk meminimalkan kesenjangan ini diupayakan suatu pembelajaran dengan memberikan latihan awal dengan struktur yang jelas, memberikan banyak contoh dan non-contoh, banyak informasi, umpan balik yang konsisten, *scaffolding*, memasangkan mahasiswa FI dan FD dalam belajar (Musser, 1998).

Menurut Piaget (Asimow, 2013 ; Cousins, 2010) ada tiga macam pengetahuan yaitu pengetahuan sosial, pengetahuan fisik, dan pengetahuan logico-matematik. Pengetahuan logico-matematik adalah pengetahuan yang dikonstruksi dalam pikiran pebelajar, pengetahuan tentang hubungan-hubungan. Mekanisme mental dimana semua struktur logico-matematik diperoleh oleh Piaget (sebagaimana dikutip oleh Arnon, *et al*., 2014, h. 6) disebut abstraksi reflektif dalam matematika. Abstraksi reflektif terdiri atas dua bagian. Bagian pertama melibatkan refleksi dalam arti kesadaran dan pemikiran kontemplatif yang disebut isi dan operasi pada isi tersebut dan dalam arti merefleksikan isi dan operasi dari tingkat rendah sampai tingkat tinggi (yaitu dari Proses ke Objek). Bagian kedua terdiri atas rekonstruksi dan reorganisasi dari isi dan operasi-operasi pada tingkat tinggi yang dalam operasi-operasi itu sendiri menghasilkan isi dimana operasi-operasi baru dapat diterapkan. Dubinsky menjelaskan bagian kedua ini muncul sangat dekat dengan ide-ide matematika tertentu. Salah satu contoh pada bilangan bulat, pada satu tahapan, sebuah bilangan bulat merupakan suatu operasi atau proses membentuk unit-unit (objek-objek) menjadi sebuah himpunan, menghitung objek-objek tersebut dan mengurutkannya. Pada tahapan yang lebih tinggi, bilangan-bilangan bulat menjadi objek-objek dimana operasi-operasi baru diterapkan (misalkan operasi aritmetik). Contoh-contoh yang serupa ini menuntun Dubinsky untuk meyakini bahwa abstraksi reflektif dapat menjadi alat yang ampuh dalam menggambarkan perkembangan mental konsep-konsep matematik lanjut.

Menurut Piaget dan diadopsi oleh Teori APOS (Aksi, Proses, Objek, Skema) (Arnon, *et al*. 2014, h. 19), konsep dipahami pertama-tama sebagai Aksi, yaitu transformasi dari Objek (Objek-Objek) terdahulu yang diarahkan secara eksternal. Aksi adalah eksternal dalam arti bahwa setiap langkah dari transformasinya perlu dilakukan secara eksplisit dan dipandu oleh instruksi eksternal; setiap langkah mendorong langkah berikutnya, yaitu langkah-langkah dari Aksi tidak dapat dibayangkan dan tidak dapat dilompati.

Proses-Proses dikonstruksi menggunakan salah satu dari dua mekanisme mental interiorisasi atau koordinasi. Masing-masing mekanisme tersebut memunculkan Proses-Proses baru. Ketika Aksi-Aksi diulang dan direfleksikan, individu berpindah dari bergantung pada perintah eksternal ke mempunyai kontrol internal atas Aksi-Aksi tersebut. Hal ini dikarakterisasi oleh kemampuan membayangkan melakukan langkah-langkah tanpa perlu melakukannya secara eksplisit dan dapat melompati langkah-langkah, dan juga melakukan pembalikan. Interiorisasi ditandai dengan kemampuan untuk menerapkan simbol, bahasa, gambar dan bayangan mental untuk mengkonstruksi proses internal sebagai cara untuk memahami fenomena yang dirasakan (Brijlall & Bansilal, 2010, h. 133). Sebagaimana dikatakan oleh Dubinsky (Arnon, *et al*., 2014, h. 107) bahwa suatu Aksi harus diinteriorisasi. Hal ini berarti bahwa beberapa konstruksi internal dibuat bersesuaian dengan Aksi tersebut. Aksi yang dinteriorisasi adalah sebuah Proses. Interiorisasi membenarkan seseorang menjadi sadar akan sebuah Aksi, merefleksikan pada Aksi tersebut dan mengkombinasikan Aksi itu dengan Aksi-Aksi yang lain.

Enkapsulasi terjadi ketika individu menerapkan sebuah Aksi ke sebuah Proses, yaitu melihat sebuah struktur dinamis (Proses) sebagai sebuah struktur statis dimana Aksi-Aksi dapat diterapkan. Dubinsky, *et al*. (2005, h. 339) menyatakan bahwa jika seseorang menjadi sadar akan Proses sebagai totalitas, menyadari bahwa transformasi dapat bertindak pada totalitas tersebut dan dapat mengkonstruksi secara aktual transformasi tersebut (secara ekspilit atau dalam bayangan seseorang), maka dikatakan individu telah mengenkapsulasi Proses tersebut menjadi objek kognitif.

Beberapa kajian berbasis APOS mendapatkan bahwa mekanisme enkapsulasi adalah yang paling sulit. Trigueros & Martinezz- Planell (2010) menemukan dalam kajian tentang konstruksi mental fungsi dua variabel bahwa hanya satu mahasiswa yang telah mengkonstruksi konsepsi Objek. Sfard (1991, h. 30) melaporkan bahwa kemampuan untuk melihat sesuatu familier dalam cara baru secara total adalah tidak pernah mudah untuk dicapai. Kesulitan yang muncul ketika suatu Proses diubah menjadi suatu Objek adalah seperti yang mereka alami selama transisi dari satu paradigma ilmiah ke yang lainnya. Cotrill, *et al*. (1996) menemukan bahwa kesulitan mahasiswa dapat dihubungkan dengan tidak cukupnya konsepsi dinamik yang berkembang baik, yang tampaknya perlu didasarkan pada Skema Proses yang dikoordinasi. Hasil penelitian Asiala, *et al*. (1997a, h. 242) menyatakan bahwa perlakuan pembelajaran yang didesain agar mahasiswa melakukan konstruksi struktur mental dan didasarkan pada strategi pedagogik umum (ACE) efektif untuk membantu mahasiswa dalam memahami konsep koset, normalitas dan kosien.

Ketika Proses telah dienkapsulasi menjadi Objek mental, Objek tersebut dapat di-de-enkapsulasi pada saat diperlukan, kembali ke Proses yang mendasarinya. Dengan kata lain, dengan menerapkan mekanisme de-enkapsulasi, individu dapat kembali ke Proses yang menghasilkan Objek tersebut. Mekanisme koordinasi sangat diperlukan dalam konstruksi beberapa Objek. Dua Objek dapat di-de-enkapsulasi, Proses-Prosesnya dikoordinasi, dan Proses yang dikoordinasi dienkapsulasi untuk membentuk Objek baru (Arnon, *et al*., 2014, h. 23).

Menurut Dubinsky (Arnon, *et al*., 2014), Skema dikarakterisasi oleh dinamika dan kekontinuan rekonstruksi yang ditentukan oleh aktivitas matematik dari subyek dalam situasi matematik tertentu. Koherensi dari Skema ditentukan oleh kemampuan individu untuk meyakinkan/ memastikan apakah dapat digunakan pada situasi matematik tertentu. Sekali Skema dikonstruksi sebagai koleksi struktur (Aksi-Aksi, Proses-Proses, Objek-Objek, dan Skema- Skema lain) yang koheren dan koneksi-koneksi terbangun diantara struktur tersebut, Skema dapat ditransformasikan menjadi struktur statis (Objek) dan dapat digunakan sebagai struktur dinamis yang mengasimilasi Objek atau Skema lain yang terkait.

Dubinsky mengemukakan ada lima jenis abstraksi reflektif atau mekanisme mental, yaitu interiorisasi, koordinasi, reversal, enkapsulasi, dan generalisasi, yang menuntun kepada konstruksi struktur mental Aksi, Proses, Objek, dan Skema (APOS) yang diuraikan di atas. Kedalaman dan kompleksitas pemahaman konsep individu bergantung pada kemampuan untuk membangun koneksi di antara struktur mental yang mendukungnya.

Dekomposisi genetik merupakan model hipotesis yang menggambarkan struktur dan mekanisme mental yang diperlukan mahasiswa untuk mempelajari konsep matematik tertentu. Arnon, *et al*. (2014, h. 55) menyatakan bahwa dekomposisi genetik bukan sekedar sederet langkah-langkah pembelajaran atau daftar konsepsi yang mungkin dimiliki mahasiswa. Namun, dekomposisi genetik merupakan gambaran struktur mental yang perlu dikonstruksi mahasiswa dalam mempelajari konsep matematik. Hal yang mungkin untuk meyakinkan apakah mahasiswa telah mengkonstruksi objek mental adalah berdasarkan pada cara mereka mengatakan dan menulis tentang konsep (Tall, *et al*., 2000). Konsep matematik baru seringkali muncul sebagai transformasi dari konsep yang sudah ada. Dengan demikian, dekomposisi genetik terdiri atas deskripsi Aksi-Aksi yang perlu dilakukan mahasiswa pada Objek mental dan menyertakan penjelasan bagaimana Aksi-Aksi itu diinteriorisasi menjadi Proses-Proses. Agar dipahami sebagai sesuatu yang dapat ditransformasi, Proses dienkapsulasi menjadi Objek mental. Sangat mungkin bahwa sebuah konsep terdiri atas beberapa Aksi, Proses, dan Objek yang berbeda. Dekomposisi genetik memuat deskripsi tentang bagaimana struktur tersebut terkait dan terorganisasi menjadi struktur mental yang lebih besar yang disebut Skema. Dalam deskripsi Skema dijelaskan bagaimana Skema ditematisasi menjadi Objek. Dekomposisi genetik juga menjelaskan apapun yang diketahui tentang hasil pekerjaaan mahasiswa yang diharapkan yang menunjukkan perbedaan perkembangan konstruksi mahasiswa (Arnon, *et al*., 2014, h. 28).

Dekomposisi genetik dapat dikembangkan dari data. Dalam hal ini mahasiswa diwawancarai dan transkrip wawancara dibagi menjadi potongan-potongan kecil. Dengan membandingkan potongan-potongan itu, mungkin menemukan perbedaan-perbedaan dalam hasil pekerjaaan mahasiswa pada tugas-tugas tertentu. Perbedaan hasil pekerjaan ini mengungkap contoh-contoh dimana konstruksi mental perlu dibuat. Ketidakberhasilan dalam menyelesaikan tugas menunjukkan mahasiswa belum membuat konstruksi mental yang diperlukan, sedangkan keberhasilan menyelesaikan tugas menunjukkan konstruksi mental telah dibuat (Arnon, *et al*., 2014, h. 34).

Kajian terkait dekomposisi genetik telah dilakukan oleh Trigueros & Martinez-Planell (2010), Arnon, *et al*. (2014, h. 106). Asiala, *et al*. (1997a), Roa-Fuentes & Oktaç (2012). Trigueros & Martinez-Planell (2010) melakukan kajian tentang fungsi dua variabel dengan mendesain wawancara untuk mendapatkan informasi tentang komponen-komponen dekomposisi genetik pendahuluan yang diusulkan. Karena ada konstruksi-konstruksi yang tidak diperkirakan dalam dekomposisi genetik pendahuluan, maka dilakukan penghalusan. Dekomposisi genetik yang dihaluskan diuji dalam kajian yang kedua pada tahun 2012 dan hasilnya menunjukkan bahwa itu merupakan model konstruksi mental mahasiswa yang baik (Arnon, *et al*., 2014, h. 106). Asiala, *et al*. (1997a) melakukan penelitian tentang bagaimana mahasiswa mengkonstruksi pemahaman mereka dalam konsep-konsep aljabar abstrak tertentu, yaitu koset, normalitas, dan grup kuosien. Kajian lain oleh Roa-Fuentes & Oktaç (2012) dengan melakukan wawancara untuk mendapatkan dekomposisi genetik pendahuluan yang mereka usulkan untuk konsep transformasi linear (Arnon, *et al*., 2014, h. 106).

Lembar Kerja Peserta Didik (LKPD) adalah lembar kerja yang berisikan informasi dan interaksi dari guru kepada peserta didik agar dapat mengerjakan sendiri aktivitas belajar melalui praktik atau penerapan hasil-hasil belajar untuk mencapai tujuan instruksional. Prastowo (2012) menyebut LKPD ini sebagai LKS. Macam-macam bentuk LKS antara lain: (1) LKS yang membantu peserta didik menemukan konsep, (2) LKS yang membantu peserta didik menerapkan dan mengintegrasikan berbagai konsep yang telah ditemukan, (3) LKS yang berfungsi sebagai penuntun belajar, (4) LKS yang berfungsi sebagai penguatan, (5) LKS sebagai petunjuk praktikum.

LKPD atau LKS untuk mahasiswa, selanjutnya disebut Lembar Tugas Mahasiswa (LTM), berisi tugas-tugas yang dikembangkan oleh peneliti untuk membantu mahasiswa mengkonstruksi struktur mental Aksi dan menginteriorisasinya menjadi Proses kemudian mengenkapsulasi menjadi Objek. LTM disusun berdasarkan dekomposisi genetik yang telah ditetapkan. Salah satu fungsi LTM adalah sebagai sarana belajar sehingga mahasiswa berpeluang besar untuk mengembangkan kemampuan menerapkan pengetahuan, melatih keterampilan, memproses sendiri untuk mendapatkan perolehannya. Mengingat fungsi LTM ini, pembelajaran matematika perlu menggunakan LTM.

Teori APOS menyatakan bahwa individu harus mempunyai struktur mental yang memadai untuk dapat mengerti konsep matematika tertentu (Arnon, *et al.*, 2014, h. 17). Struktur mental ini merujuk pada Aksi, Proses, Objek, dan Skema yang diperlukan untuk mempelajari suatu konsep. Teori APOS dan aplikasinya dalam mengajar didasarkan pada asumsi berikut.

(1) Asumsi pada pengetahuan matematik: Pengetahuan matematik seseorang merupakan kecenderungannya untuk merespon situasi masalah matematik yang dirasakan dan solusinya dengan merefleksikannya pada konteks sosial, dan mengkonstruksi atau merekonstruksi struktur mental untuk menggunakannya dalam situasi yang terkait tersebut.

(2) Hipotesis pada pembelajaran: Seseorang tidak mempelajari konsep matematik secara langsung. Dia mengaplikasikan struktur mental untuk mengerti konsep (Piaget,1964). Belajar terfasilitasi jika individu memiliki struktur mental yang memadai untuk konsep matematik tertentu. Jika tidak ada struktur mental yang memadai maka belajar konsep hampir tidak mungkin.

Dalam pembelajaran tentang bukti, diperoleh fakta pekerjaan yang menunjukkan mahasiswa calon guru yang belum memiliki struktur mental yang memadai. Hal ini tampak pada pekerjaan mahasiswa untuk soal berikut ini.

Soal

I.1. Tuliskan definisi operasi biner!

2. Misalkan $S = \mathbb{R} - \{-1\}$.

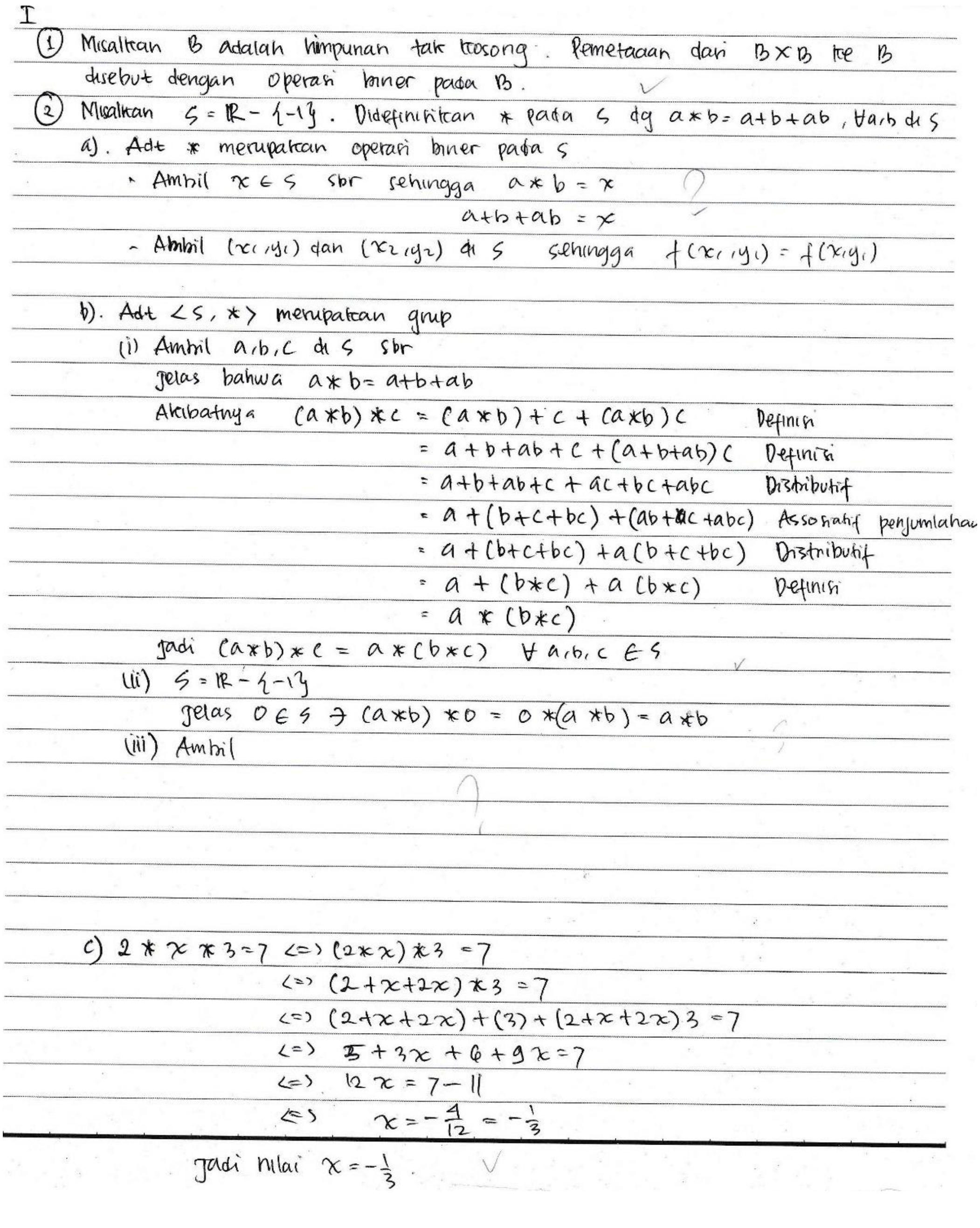
   Didefinisikan $*$ pada S dengan $a * b = a + b + ab, \ \forall\, a, b \in S.$

   a. Tunjukkan $*$ merupakan operasi biner pada S!

   b. Tunjukkan $< S, * >$ merupakan grup!

c. Tentukan solusi persamaan $2 * x * 3 = 7$ di S!

Gambar 1.1 menyajikan pekerjaan mahasiswa untuk soal di atas.



I

(1) Misalkan B adalah himpunan tak kosong. Pemetaan dari $B \times B$ ke B disebut dengan operasi biner pada B.

(2) Misalkan $S = \mathbb{R} - \{-1\}$. Didefinisikan $*$ pada S dg $a * b = a + b + ab$, $\forall a, b$ di S

a). Adt $*$ merupakan operasi biner pada S

- Ambil $x \in S$ sbr sehingga $a * b = x$
  $a + b + ab = x$
- Ambil (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) di S sehingga $f(x_1, y_1) = f(x, y_1)$

b). Adt $\langle S, * \rangle$ merupakan grup

(i) Ambil a, b, c di S sbr
jelas bahwa $a * b = a + b + ab$
Akibatnya $(a * b) * c = (a * b) + c + (a * b)c$ Definisi
$= a + b + ab + c + (a + b + ab)c$ Definisi
$= a + b + ab + c + ac + bc + abc$ Distributif
$= a + (b + c + bc) + (ab + ac + abc)$ Assosiatif penjumlahan
$= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc)$ Distributif
$= a + (b * c) + a(b * c)$ Definisi
$= a * (b * c)$
Jadi $(a * b) * c = a * (b * c)$ $\forall a, b, c \in S$

(ii) $S = \mathbb{R} - \{-1\}$
jelas $0 \in S \ni (a * b) * 0 = 0 * (a * b) = a * b$

(iii) Ambil

c) $2 * x * 3 = 7 \Leftrightarrow (2 * x) * 3 = 7$
$\Leftrightarrow (2 + x + 2x) * 3 = 7$
$\Leftrightarrow (2 + x + 2x) + (3) + (2 + x + 2x)3 = 7$
$\Leftrightarrow 5 + 3x + 6 + 9x = 7$
$\Leftrightarrow 12x = 7 - 11$
$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$

Jadi nilai $x = -\frac{1}{3}$.

Gambar 1.1 Contoh Pekerjaan Mahasiswa

Berdasarkan Gambar 1.1 tampak bahwa mahasiswa belum dapat menunjukkan operasi biner meskipun dapat menuliskan definisinya dengan benar. Langkah untuk menunjukkan operasi biner tidak tepat. Hal ini menunjukkan bahwa mahasiswa belum memahami konsep operasi biner dengan baik. Pada bagian selanjutnya, mahasiswa mengalami kesulitan dalam menunjukkan grup, khususnya dalam menunjukkan eksistensi elemen identitas dan eksistensi invers elemen. Mahasiswa ini menduga 0 merupakan elemen identitas dimungkinkan karena operasi biner $*$ yang bekerja pada himpunan S melibatkan operasi $+$. Langkah untuk menunjukkan bahwa 0 merupakan elemen identitas tidak benar, yakni aksioma eksistensi elemen identitas belum dipahami dengan baik. Bahkan, mahasiswa ini tidak mempunyai ide untuk menunjukkan eksistensi invers elemen.

Skema grup dikonstruksi dari Skema himpunan, operasi biner, dan aksioma. Dari Gambar 1.1 diperoleh bahwa kesulitan yang dialami mahasiswa menunjukkan bahwa mahasiswa belum mengkonstruksi struktur mental yang memadai untuk konsep grup. Kondisi ini belum memenuhi hipotesis pada pembelajaran sehingga belajar belum terfasilitasi. Oleh karena itu, menurut teori APOS, mahasiswa ini hampir tidak mungkin dapat mempelajari konsep grup. Kesenjangan keempat yang muncul antara struktur mental yang seharusnya dikonstruksi dan kenyataan struktur mental yang dikonstruksi mahasiswa menghadirkan masalah dalam mempelajari pembuktian dalam konsep matematik.

Faktor-faktor yang mempengaruhi hasil belajar matematika antara lain: siswa, guru, sumber belajar, metode pembelajaran, lingkungan siswa, kemandirian, dan motivasi. Faktor guru mempengaruhi hasil belajar seperti dinyatakan oleh Beilock, *et al*. (dalam Gresham, 2017) yang mengemukakan bahwa guru adalah pengaruh penting tidak hanya pada kualitas belajar matematika siswa tapi juga pada belajar mandiri. Usaha untuk meningkatkan kemampuan mahasiswa calon guru dapat dilakukan dalam hal penguasaan materi yang baik, mengidentifikasi/ mendeteksi kesulitan mahasiswa, cara mengajar dengan berbagai metode untuk mengembangkan kemampuan penalaran dan pembuktian.

Implementasi pembelajaran dengan tujuan agar mahasiswa calon guru memiliki kemampuan penalaran dan pembuktian perlu dilaksanakan pada perkuliahan sehari-hari. Praktik pembelajaran ini akan menjadi model bagi mahasiswa ketika menjadi guru kelak. Pelaksanaan pembelajaran untuk melatih mahasiswa mengembangkan kemampuan penalaran dan pembuktian diterapkan pada mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1.

Untuk meminimalkan kesenjangan pertama, kedua, ketiga, dan keempat di atas, pembelajaran ACE (*Activities*, *Classroom Discussion*, *Exercises*) diterapkan pada mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1. Pembelajaran ACE merupakan pembelajaran berbasis teori APOS. Karakteristik pembelajaran ini adalah konstruktivistik, pemahaman konsep berdasarkan pada struktur mental yang dikonstruksi, terdapat tiga tahap pembelajaran yaitu *Activities*, *Classroom discussion*, dan *Exercises*, tahap pembelajaran *Activities* dan *Exercises* dilakukan dengan belajar kelompok.

Pembelajaran ACE didahului dengan menyusun dekomposisi genetik yaitu model hipotesis yang menggambarkan struktur (Aksi, Proses, Objek, Skema) dan mekanisme mental (interiorisasi, pembalikan, koordinasi, enkapsulasi, tematisasi, generalisasi) yang diperlukan mahasiswa untuk mempelajari konsep matematik tertentu. Tahap-tahap pada pembelajaran ACE adalah (A) *Activities*, (C) *Classroom discussion*, dan (E) *Exercises*. Pada tahap *Activitie*s, mahasiswa dikelompokkan dalam 3-4 orang berdasarkan kemampuan awal mengkonstruksi bukti dan gaya kognitif. Secara berkelompok mahasiswa mengerjakan LTM. Pada tahap *Classroom discussion*, dosen menyajikan materi dengan tanya jawab dan memandu diskusi tentang permasalahan yang muncul pada tahap *Activitie*s. Selanjutnya, pada tahap *Exercises* mahasiswa mengerjakan latihan soal sebagai pekerjaan rumah. Pembahasan soal yang diperlukan mahasiswa dilaksanakan pada pertemuan berikutnya.

Dekomposisi genetik yang digunakan pada penelitian ini diperoleh setelah melalui tahapan yang disyaratkan pada pembelajaran berbasis APOS. Tahap pertama adalah penyusunan dekomposisi genetik pendahuluan berdasarkan identifikasi kesulitan mahasiswa pada teori grup (Wijayanti, 2016), pengalaman belajar dan mengajar konsep pada teori grup, penelitian-penelitian terdahulu mengenai konsep pada teori grup, dan pengetahuan tentang teori APOS. Tahap kedua yaitu implementasi dekomposisi genetik pendahuluan pada pembelajaran berbasis APOS (Wijayanti &

Wiyanti, 2016). Implementasi ini menghasilkan revisi dekomposisi genetik pendahuluan yang dalam teori APOS disebut penghalusan dekomposisi genetik pendahuluan (Wijayanti, 2017). Tahap ketiga adalah implementasi penghalusan dekomposisi genetik pada pembelajaran berbasis APOS. Pada tahap ini tidak ada revisi untuk penghalusan dekomposisi genetik sehingga disebut dekomposisi genetik. Penyusunan dekomposisi genetik ini merupakan salah satu kegiatan untuk meminimalkan kesenjangan keempat mengenai struktur mental yang seharusnya dikonstruksi dan kenyataan struktur mental yang dikonstruksi mahasiswa. Dekomposisi genetik yang digunakan dalam penelitian ini terdapat pada Lampiran 3a.

Pada tahap *Activities*, mahasiswa secara berkelompok mengerjakan LTM. Pembagian mahasiswa dalam kelompok secara heterogen berdasarkan kemampuan awal mengkonstruksi bukti (KAM) untuk materi operasi biner dan gaya kognitif sehingga dalam kelompok terdapat mahasiswa dengan KAM tinggi, sedang, atau rendah dan gaya kognitif FI, FN, atau FD. Hal ini dilakukan untuk meminimalkan kesenjangan 3 sesuai dengan karakteristik mahasiswa FI dan FD. Untuk meminimalkan kesenjangan 4, LTM memuat tugas agar mahasiswa melakukan Aksi sehingga diinteriorisasi menjadi Proses dan untuk meminimalkan kesenjangan 2 dan 3, LTM berisi penguasaan fakta, khususnya aksioma, definisi, dan contoh.

Pada tahap *Classroom discussion*, dosen menyajikan materi, yaitu definisi, teorema, secara formal dengan tanya jawab dan memandu diskusi tentang permasalahan yang muncul pada tahap *Activitie*s, khususnya untuk mengeksplor kesalahan pemahaman fakta. Hal ini untuk meminimalkan kesenjangan 1, 2, dan 4. Pada tahap *Exercises*, mahasiswa mengerjakan latihan soal agar melakukan praktik dengan penalaran dan bukti untuk meminimalkan kesenjangan 2.

Siklus pembelajaran ACE yang dikembangkan oleh Dubinsky terdiri atas tiga komponen yaitu *Activities*, *Classroom Discussion*, dan *Exercises.* Pada komponen *Activities* mahasiswa bekerja di laboratorium komputer menggunakan program ISETL yang berisi tugas-tugas yang dirancang untuk membantu mahasiswa mengembangkan konstruksi kognitif yang benar yaitu membantu mahasiswa mengenkapsulasi Proses menjadi Objek. Aktivitas komputer ini mendukung aktivasi mekanisme mental (yaitu interiorisasi dan enkapsulasi) yang menuntun pada perkembangan struktur mental (yaitu Proses dan Objek). Pada komponen *Classroom Discussion*, mahasiswa dengan dipandu oleh dosen merefleksikan pekerjaan mereka pada komponen *Activities*. Kegiatan pada komponen *Exercises* dilakukan di luar kelas ditujukan kepada mahasiswa untuk bekerja dalam kelompok guna membantu mahasiswa menguatkan kerangka kerja konseptual matematik yang sedang dipelajari. Latihan soal terdiri atas soal-soal standar yang didesain untuk menguatkan kegiatan pada komponen *Activities* dan *Classroom Discussion*.

Nurlaelah (2007) menerapkan pembelajaran APOS dan pembelajaran berbasis APOS yang disebut M-APOS untuk mengukur daya dan kreativitas matematik mahasiswa. Pembelajaran ini dilaksanakan dengan tahapan *Activities*, *Class Discussion*, dan *Exercises*. Tahap *Activities* pada pembelajaran M-APOS, mahasiswa mengerjakan LKT (Lembar Kerja Tugas). LKT berfungsi untuk memandu mahasiswa mempelajari materi yang akan dipelajari pada pertemuan di kelas. Pada LKT disusun instruksi yang memandu mahasiswa untuk mempelajari konsep yang akan disajikan pada pertemuan di kelas yang mendorong daya dan kreativitas mahasiswa. Pada tahap *Class Discussion*, mahasiswa mengerjakan Lembar Kerja Diskusi (LKD) yang berisi soal-soal yang mendorong pemahaman dan pengembangan daya dan kreativitas matematik. Tahap *Activities* pada pembelajaran APOS, mahasiswa mengerjakan tugas-tugas yang disajikan melalui media komputer dengan menggunakan panduan Lembar Kerja Komputer (LKK). Tahap *Class Discussion* dilaksanakan seperti pada tahap *Class Discussion* pada pembelajaran M-APOS. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa kreativitas matematik mahasiswa calon guru yang belajar dengan model M-APOS lebih baik dibandingkan dengan pada model APOS. Model pembelajaran M-APOS lebih besar peranannya dalam mendorong pencapaian daya matematik dibandingkan dengan kemampuan awal mahasiswa.

Pembelajaran yang menekankan pada aktivitas penjelasan materi oleh dosen, tanya jawab, dan penugasan latihan soal beserta pembahasannya untuk pendalaman materi disebut Pembelajaran Langsung. Menurut Magliaro, *et al*. (2005, h. 45) model Pembelajaran Langsung awal terdiri atas tiga tahap yaitu (a) pengantar konten baru yang akan dipelajari, (b) presentasi utama pelajaran, dan (c) berlatih dengan umpan balik segera. Pada awalnya, latihan diarahkan oleh guru, dengan seluruh kelas menanggapi pertanyaan yang serba cepat dan strategis dari guru. Setelah guru yakin bahwa siswa siap untuk menerapkan konsep yang baru dipelajari, siswa dialihkan ke praktik mandiri, dipantau secara ketat oleh guru untuk memastikan hanya interpretasi dan aplikasi yang tepat dari materi yang ditargetkan. Samkoff, *et al*. (2012, h. 64) menyatakan Pembelajaran Langsung tidak dijamin untuk meningkatkan kemampuan mahasiswa untuk menggunakan diagram untuk mengkonstruksi bukti.

1.2 Alasan Pemilihan Topik

(1) Bukti deduktif dalam matematika merupakan tujuan terpenting dalam pendidikan matematika (Miyazaki, *et al*., 2017, h. 237; Anton & Rorres , 2015, Solow, 2014; David, Yopp, & Rob, 2015; Sarah, Bleiler, & Jeffrey, 2017; Mills, 2014, h.106).

(2) Mahasiswa calon guru penting memiliki pengetahuan yang kuat tentang bukti (Stylianides & Stylianides, 2007, h. 146; Schwarz & Kaiser, 2009, h. 2-191; Wasserman, 2017, h. 200; Dimmel, 2018, h. 281).

(3) Pembuktian merupakan masalah yang pelik dalam pembelajaran Pengantar Struktur Aljabar 1 (materi grup) (Thompson, *et al*., 2012; Stylianou & Blanton, 2011; Lo & Crory, 2009; Stylianou *et al*., 2015).

(4) Berdasarkan kajian terdahulu, mahasiswa mengalami kesulitan dalam pembuktian (Martin & Harel, 1989; Moore , 1994; Epp, 2003; Samkoff, *et al*., 2012; Lo & Crory, 2009; Wijayanti, 2016).

(5) Kematangan matematik yang diperlukan dalam mempelajari materi grup (Malik, *et al*., 2007, h. v; Fraleigh, 2014, h. iii; Hungerford 1984, h. ix) masih rendah.

(6) Mahasiswa dengan gaya kognitif FI, FN, dan FD mempunyai karakteristik berbeda dan mereka mendekati masalah dengan cara yang berbeda (Umaru & Tukur, 2013; Dowlatabadi & Mehraganfar, 2014; Ates & Cataloglu, 2007, h.175; Wijayanti, 2016).

(7) Berdasarkan kajian pendahuluan diperoleh dekomposisi genetik materi grup. Setelah diimplementasikan diperoleh penghalusan dekomposisi genetik. Penghalusan ini mungkin masih perlu diperhalus (Wijayanti, 2017).

1.3 Masalah Penelitian

(1) Bagaimanakah kemampuan awal mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti pada *prerequisite* materi grup?

(2) Bagaimanakah kualitas pembelajaran ACE pada materi grup?

(3) Bagaimanakah struktur mental yang dikonstruksi mahasiswa berdasarkan gaya kognitif dan kemampuan awal dalam mengkonstruksi bukti pada materi grup?

(4) Bagaimanakah dekomposisi genetik yang digunakan berjalan pada pembelajaran ACE materi grup?

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

(1) menganalisis kemampuan awal mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti pada *prerequisite* materi grup,

(2) menganalisis kualitas pembelajaran ACE pada materi grup,

(3) menemukan struktur mental yang dikonstruksi mahasiswa pada pembelajaran ACE untuk materi grup berdasarkan gaya kognitif dan kemampuan awal mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti,

(4) menemukan dekomposisi genetik yang sesuai untuk materi grup.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini antara lain:

(1) memberi pengalaman bagi mahasiswa calon guru peserta kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1 mengenai implementasi pembelajaran ACE,
(2) memberi bekal kepada mahasiswa calon guru dalam mengkonstruksi bukti,
(3) mengembangkan pembelajaran untuk mempelajari materi grup sebagai alternatif pembelajaran untuk meningkatkan kemampuan dalam mengkonstruksi bukti,
(4) menemukan dekomposisi genetik yang sesuai sehingga mahasiswa dapat mengkonstruksi struktur mental yang diperlukan untuk mempelajari materi grup.

1.6 Ruang Lingkup Penelitian

Fokus penelitian ini adalah struktur mental yang dikonstruksi mahasiswa dengan gaya kognitif FI, FN, FD dan dengan kemampuan awal tinggi, sedang, dan rendah pada kemampuan mengkonstruksi bukti dalam mempelajari materi grup yang didesain pada pembelajaran ACE. Selain itu juga dekomposisi genetik materi grup dan pelaksanaannya pada pembelajaran ACE. Mahasiswa yang dimaksud disini adalah mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika, di UNNES yang menempuh mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1 pada semester genap tahun akademik 2016/2017.

1.7 Definisi Terminologi

Untuk menyatukan pengertian yang digunakan dalam penelitian ini, perlu ditegaskan istilah-istilah yang digunakan dalam definisi operasional berikut ini.

(1) Bukti adalah sejumlah berhingga langkah-langkah logis dari apa yang diketahui sampai pada kesimpulan dengan menggunakan aturan penarikan kesimpulan yang berlaku (Zandieh, *et al*., 2014, h. 210; Miyakawa, 2017, h. 13; Stylianides, *et al*., 2016, h. 20).
(2) Konstruksi bukti adalah tugas matematik dimana orang yang membuktikan diberi beberapa informasi awal (misalnya asumsi, aksioma, definisi) dan diminta untuk menerapkan aturan penarikan kesimpulan (yaitu mengingat fakta-fakta yang telah terbentuk sebelumnya, menerapkan teorema-teorema)

hingga kesimpulan yang diinginkan terbukti (Weber, 2005, h. 351-352; Weber & Mejia-Ramos, 2009, h. 214; Dimmel, 2018, h. 281).

(3) *Prerequisite* materi grup dalam hal ini adalah himpunan dan operasi biner (Hungerford, 1984, h ix; Fraleigh, 2014, h. iii; Grillet, 2007; Selden & Selden, 2003; Hammack, 2013).

(4) Struktur mental yang dimaksud adalah Aksi, Proses, Objek, dan Skema pada Teori APOS (Arnon, *et al*., 2014).

(5) Dekomposisi genetik adalah model hipotesis yang menggambarkan struktur dan mekanisme mental yang mungkin diperlukan mahasiswa untuk mempelajari konsep matematik tertentu, dalam hal ini konsep grup. Dekomposisi genetik terdiri atas deskripsi Aksi-Aksi yang perlu dilakukan mahasiswa pada Objek mental dan terus menyertakan penjelasan bagaimana Aksi-Aksi itu diinteriorisasi menjadi Proses-Proses serta Proses dienkapsulasi menjadi Objek mental, termasuk deskripsi tentang bagaimana struktur tersebut terkait dan terorganisasi menjadi struktur mental yang lebih besar yang disebut Skema. Hal yang mungkin untuk meyakinkan apakah mahasiswa telah mengkonstruksi struktur mental berdasarkan pada cara mereka mengatakan dan menulis tentang konsep (Arnon, *et al*., 2014).

(6) Lembar Tugas Mahasiswa (LTM) merupakan lembar kegiatan yang berisi tugas-tugas (Prastowo, 2012) untuk mengkonstruksi struktur mental Aksi, Proses, dan Objek berdasarkan dekomposisi genetik yang telah disusun.

(7) Pembelajaran ACE adalah pembelajaran dengan tahap-tahap *Activities*, *Classroom discussion*, dan *Exercises*. *Acticities* dilakukan mahasiswa secara berkelompok melalui LTM. *Classroom discussion* dipandu oleh dosen untuk membahas permasalahan yang muncul pada *Activities* dan penyajian materi. *Exercises* merupakan kegiatan latihan soal yang dilakukan mahasiswa di luar kelas (Arnon, *et al*., 2014).

(8) Pembelajaran Langsung adalah pembelajaran yang menekankan pada aktivitas penjelasan materi oleh dosen, tanya jawab, dan penugasan latihan soal beserta

pembahasannya untuk pendalaman materi (Magliaro, *et al*., 2005, h. 45; Schuster, *et al*., 2018, h. 401).

(9) Kualitas pembelajaran yang dimaksud adalah kualitas input yaitu perangkat pembelajaran, proses yaitu keterlaksanaan perangkat pembelajaran, dan hasil yaitu hasil pembelajaran. Kualitas input divalidasi oleh ahli, kecuali untuk perangkat tes selain divalidasi oleh ahli juga diuji secara empirik, kualitas proses divalidasi melalui observasi terhadap keterlaksanaan perangkat pembelajaran, serta kualitas hasil dengan indikator sekurang-kurangnya 75% mahasiswa mendapat skor minimal 61 yang diuji dengan uji binomial dan rata-rata kemampuan mengkonstruksi bukti pada kelas yang dikenai pembelajaran ACE lebih tinggi daripada pada kelas yang dikenai pembelajaran Langsung yang diuji melalui *Mann-Whitney U*-test.

1.8 Sistematika Disertasi

Secara garis besar penulisan disertasi ini terdiri atas tiga bagian, yaitu bagian awal, bagian isi, dan bagian akhir.

Bagian awal, berisi halaman judul, pernyataan keaslian tulisan, pengesahan, motto dan persembahan, prakata, abstrak, daftar isi, daftar tabel, daftar gambar, dan daftar lampiran.

Bagian isi, terdiri atas lima bab. Bab I memuat latar belakang, alasan pemilihan topik, masalah penelitian, tujuan penelitian, manfaat penelitian, ruang lingkup penelitian, definisi terminologi, dan sistematika disertasi. Bab II berisi kajian pustaka, kajian hasil penelitian yang relevan, dan kerangka teoretis penelitian. Bab III membahas desain penelitian, populasi dan sampel, subjek penelitian, variabel/objek penelitian, latar penelitian, instrumen penelitian dan metode pengumpulan data, keabsahan data, metode analisis data, tahap-tahap penelitian. Bab IV mencakup hasil penelitian dan pembahasan. Bab V memuat simpulan dan saran.

Bagian akhir disertasi terdiri atas daftar pustaka yang digunakan sebagai acuan teori dan lampiran yang melengkapi penjelasan pada bagian inti disertasi.

Penelitian ini didukung oleh teori-teori yang relevan dengan tujuan penelitian. Kajian mengenai teori-teori ini diuraikan pada BAB II.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA DAN KERANGKA TEORETIS

2.1. Kajian Pustaka

2.1.1 Bukti

Bourbaki menyatakan Teori grup merupakan salah satu teori aksiomatis yang tertua dan paling sederhana. Pada Teori Grup, mahasiswa dapat mempelajari pentingnya bahasa yang tepat (*precise*) dalam matematika dan tentang peran definisi dalam mendukung ketepatan tersebut. Mahasiswa calon guru penting mempelajari materi ini karena dapat membantu guru untuk menghubungkan matematika lanjut dengan matematika sekolah dalam hal memperkuat dan memperdalam pemahaman mereka tentang matematika yang akan mereka ajarkan. Teori grup merupakan salah satu bagian dari aljabar abstrak. Keabstrakan dari aljabar abstrak oleh Wasserman (2017, h. 200) dikatakan berguna bagi para guru karena membantu mereka memahami dan memaknai matematika yang akan mereka ajarkan.

Bukti adalah sarana untuk membenarkan apakah pernyataan itu benar (Miyakawa, 2017, h. 13). Bukti matematik merupakan salah satu dari karakteristik berpikir matematik lanjut, dan bukti memainkan peran penting dalam pembelajaran aljabar abstrak. Mingus dan Grassl (1999, h. 441) mendefinisikan bukti sebagai koleksi dari pernyataan yang bernilai benar yang terkait secara logis yang memberikan argumen yang meyakinkan untuk kebenaran suatu pernyataan matematik. Stylianides (2007b, h. 195) menyatakan bahwa bukti adalah argumen yang valid berdasarkan kebenaran yang diterima. Argumen menunjuk pada urutan pernyataan yang terkait; valid menunjuk bahwa pernyataan terhubung dari inferensi yang benar; kebenaran yang diterima mencakup aksioma, teorema, definisi. Semua definisi di atas merujuk pada ide yang sama, yaitu bahwa bukti adalah argumen logis deduktif.

Beberapa fungsi atau tujuan dari bukti dan membuktikan yang dikemukakan oleh Bell (1976) dan Mingus & Grassl (1999) adalah sebagai berikut:

(1) verifikasi atau justifikasi: memvalidasi kebenaran dari suatu pernyataan;

(2) penjelas atau penerang: menegaskan mengapa suatu pernyataan itu benar;
(3) kepastian: menghilangkan keraguan;
(4) sistematisasi: organisasi hasil-hasil dalam sistem deduktif aksioma-aksioma, konsep-konsep dan teorema-teorema utama, dan hasil-hasil minor darinya;
(5) komunikasi: menyebarkan pengetahuan dan penalaran matematik kepada yang lain;
(6) penemuan atau konstruksi: menemukan hasil-hasil baru;
(7) kepuasan: menerima tantangan intelektual dengan elegan.

Coe & Ruthven (1994, h. 42) menyatakan fungsi pembuktian yang paling menonjol adalah memberikan alasan untuk meyakinkan.

Hersh (sebagaimana dikutip oleh Mingus & Grassl, 1999, h. 438) mengarahkan peran yang berbeda dari bukti yaitu meyakinkan dan menjelaskan. "Bukti matematik dapat meyakinkan, dan dapat menjelaskan. Dalam penelitian matematik, peran utamanya adalah meyakinkan. Pada tingkat sekolah menengah atas dan mahasiswa peran utamanya adalah menjelaskan.

Komatsu, *et al*. (2017, h. 1) dan Inglis & Alcock (2012, h. 360) menyatakan bahwa validasi bukti adalah penting dalam matematika sekolah karena dapat memberikan dasar untuk mengkritisi argumen matematika dan untuk konstruksi bukti. Menurut Zandieh, *et al*. (2014, h. 210), pembuktian merupakan kegiatan yang terlibat dalam mengkonstruksi bukti yang mencakup penalaran yang terlibat dalam kegiatan tersebut. Sejalan dengan hal ini, Stylianides, *et al*. (2016, h. 20) menganggap membuktikan sebagai aktivitas dalam mencari bukti, dimana bukti adalah produk akhir dari aktivitas ini yang memenuhi kriteria tertentu.

Memvalidasi bukti adalah sarana penting untuk membangun pengetahuan matematika yang canggih, semua siswa SMA harus dapat menyelesaikan tugas ini pada saat mereka lulus (Alcock & Weber, 2005, h. 125). Tujuan utama dari pengajaran bukti menurut Epp (1998, h 710) adalah untuk memberikan alat untuk menganalisis kebenaran atau kesalahan pernyataan matematika. Komatsu (2016, h. 147) menyatakan pembuktian harus menjadi pusat pembelajaran matematika di semua tingkat sekolah. Agar siswa mengembangkan kemampuan mereka dalam bukti dan pembuktian, guru harus mengambil peran aktif dalam mengelola kegiatan pembuktian siswa (Stylianides , 2007a, h. 318). Menurut Schwarz & Kaiser (ICMI 2009, h. 2-191), tidak ada keraguan, bahwa membicarakan bukti dalam pelajaran matematika adalah penting dengan tujuan mengembangkan kemampuan umum seperti kemampuan heuristik. Guru-guru harus mempunyai pengetahuan isi matematik di matematik sekolah tingkat tinggi dan pengetahuan matematik pada bukti tingkat universitas. Hal ini terdiri atas kemampuan untuk mengidentifikasi struktur bukti yang berbeda (pre-formal –formal), kemampuan untuk melakukan bukti pada tingkat-tingkat yang berbeda dan untuk mengetahui alternatif bukti matematik khusus. Selain itu, guru-guru seharusnya dapat mengenali atau membangun koneksi antar bidang topik yang berbeda.

Perkuliahan matematika tingkat lanjut sering diajarkan dalam bahasa sehari-hari yang disebut sebagai format "definisi-teorema-bukti" (Weber, 2004, h. 116). Dalam perkuliahan matematika universitas, aktivitas mengkonstruksi bukti dapat dipandang sebagai tugas pemecahan masalah di mana orang yang membuktikan diminta untuk membuat pembenaran logis yang menunjukkan bahwa pernyataan tertentu harus benar. Konstruksi bukti adalah tugas matematik dimana orang yang membuktikan diberi beberapa informasi awal (misalnya asumsi, aksioma, definisi) dan diminta untuk menerapkan aturan penarikan kesimpulan (yaitu mengingat fakta-fakta yang telah terbentuk sebelumnya, menerapkan teorema-teorema) hingga kesimpulan yang diinginkan terbukti (Weber, 2005, h. 351-352). Setiap konstruksi bukti melibatkan serangkaian penarikan kesimpulan (Weber & Ramos, 2009, h. 214)

Agar mahasiswa berhasil dalam matematika tingkat lanjut, mereka harus menguasai kumpulan fakta dan seperangkat proses penalaran. Secara umum, fakta-fakta yang dibutuhkan terdiri atas aksioma, definisi, contoh, teorema, dan bukti dari domain matematika yang sedang dipelajari. Proses penalaran termasuk proses yang diperlukan untuk menafsirkan dan merepresentasikan fakta-fakta ini, menggunakan fakta-fakta ini untuk menarik kesimpulan, memecahkan masalah, membentuk dan mengevaluasi dugaan, dan mengkonstruksi bukti (Weber, 2009, h. 200). Sejalan dengan hal ini Dimmel (2018, h. 281) menyatakan bahwa ada keadaan di mana instruktur mengharapkan mahasiswa untuk menyatakan apa yang ditetapkan oleh definisi sebelum menerapkan teorema untuk menarik kesimpulan.

Kematangan matematik diperlukan untuk mempelajari aljabar abstrak. Hal ini dinyatakan oleh (Fraleigh, 2014, h. iii), "*This is an introduction to abstract algebra. ... However, these are mathematical maturity prerequisites rather than subject matter prerequisites".* Sejalan dengan hal ini Hungerford (1984, h. ix) menyatakan "*There are, in theory, no formal prerequisites other than some elementary facts about sets, functions, the integers, and the real numbers, and a certain amount of "mathematical maturity*." Berdasarkan hal ini diduga mahasiswa dengan kematangan matematik yang tinggi lebih baik dalam mempelajari aljabar abstrak.

Mengacu pada *prerequisite* yang dinyatakan oleh Hungerford, mahasiswa dapat dikelompokkan berdasarkan kemampuan awal mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti pada materi himpunan dan fungsi. Selain karena himpunan dan fungsi merupakan *prerequisite* juga karena objek pada struktur grup antara lain adalah himpunan dan operasi biner yang tidak lain merupakan fungsi.

2.1.2 Struktur Mental APOS

Menurut Piaget (Arnon, *et al*., 2014, h. 6), abstraksi reflektif terdiri atas dua bagian. Bagian pertama melibatkan refleksi, dalam arti kesadaran dan pemikiran kontemplatif, yaitu isi (*content*) dan operasi pada isi (*content*) tersebut. Selain itu juga dalam arti merefleksikan isi dan operasi pada isi tersebut dari tingkat rendah sampai tingkat tinggi (yaitu dari Proses ke Objek). Bagian kedua terdiri atas rekonstruksi dan reorganisasi dari isi dan operasi-operasi pada tingkat tinggi yang dalam operasi-operasi itu sendiri menghasilkan isi dimana operasi-operasi baru dapat diterapkan. Menurut Dubinsky bagian kedua ini muncul sangat dekat dengan ide-ide matematika tertentu. Salah satu contoh pada bilangan bulat, pada satu tahapan, sebuah bilangan bulat merupakan suatu operasi atau Proses membentuk unit-unit (Objek-Objek) menjadi sebuah himpunan, menghitung Objek-Objek tersebut dan mengurutkannya. Pada tahapan yang lebih tinggi, bilangan-bilangan bulat menjadi Objek-Objek dimana operasi-operasi baru diterapkan (misalkan operasi aritmetik). Contoh-contoh yang serupa ini menuntun Dubinsky untuk meyakini bahwa abstraksi reflektif dapat menjadi alat yang ampuh dalam menggambarkan perkembangan mental konsep-konsep matematik yang lebih lanjut.

Menurut Dubinsky, ada lima jenis abstraksi reflektif atau mekanisme mental, yaitu interiorisasi, koordinasi, reversal, enkapsulasi, dan generalisasi, yang menuntun kepada konstruksi struktur mental Aksi, Proses, Objek, dan Skema (APOS). Kedalaman dan kompleksitas pemahaman konsep individu bergantung pada kemampuan untuk membangun koneksi diantara struktur mental yang mendukungnya. Teori APOS memegang tempat penting dalam sejarah penelitian pada pendidikan matematika tingkat sarjana (Inglis, 2015, h. 413).

Teori APOS menyatakan bahwa individu harus mempunyai struktur mental yang memadai untuk dapat mengerti konsep matematika tertentu. Struktur mental ini merujuk pada Aksi, Proses, Objek, dan Skema yang diperlukan untuk mempelajari suatu konsep. Penelitian yang mendasarkan pada teori ini mensyaratkan bahwa untuk konsep tertentu struktur mental seperti itu perlu dideteksi, kemudian didesain aktivitas belajar yang sesuai untuk mendukung konstruksi struktur mental tersebut.

Teori APOS merupakan teori konstruktivitis tentang bagaimana mempelajari konsep matematik terjadi. Teori APOS dan aplikasinya dalam mengajar didasarkan pada asumsi berikut.

(1) Asumsi pada pengetahuan matematik: Pengetahuan matematik seseorang merupakan kecenderungannya untuk merespon situasi masalah matematik yang dirasakan dan solusinya dengan merefleksikannya pada konteks sosial, dan mengkonstruksi atau merekonstruksi struktur mental untuk menggunakannya dalam situasi yang terkait tersebut. Hal ini seperti yang dikemukakan Dubinsky (Arnon, *et al*. 2014: h. 191) dalam kutipan di bawah ini "*An individual's mathematical knowledge is her or his tendency to respond to perceived mathematical problem situations and their solutions by reflecting on them in a social context and constructing or reconstructing mathematical*

actions, processes and objects and organising these in schemas to use in dealing with the situations."

(2) Hipotesis pada pembelajaran: Seseorang tidak mempelajari konsep matematik secara langsung. Dia mengaplikasikan struktur mental untuk mengerti konsep (Piaget,1964). Belajar terfasilitasi jika individu memiliki struktur mental yang memadai untuk konsep matematik tertentu. Jika tidak ada struktur mental yang memadai maka belajar konsep hampir tidak mungkin.

Asumsi di atas mengakibatkan bahwa tujuan mengajar harus terdiri atas strategi untuk membantu mahasiswa membangun struktur mental yang memadai, dan membimbing mereka untuk menerapkan struktur mental tersebut untuk mengkonstruk pemahaman konsep matematik mereka.

Dalam perspektif teoretis, pernyataan ini juga merupakan dasar untuk perlakuan pembelajaran dan cara mengumpulkan dan menganalisis data. Dalam mengkaji bagaimana individu mempelajari konsep matematik tertentu, hal utama yang harus dilakukan peneliti adalah menganalisis konsep tersebut dipandang dari segi konstruk spesifik tersebut. Deskripsi yang dihasilkan dari analisis ini merupakan *dekomposisi genetik* dari suatu konsep.

2.1.2.1 Aksi

Menurut Piaget dan diadopsi oleh Teori APOS (Arnon, *et al*., 2014, h.19), konsep dipahami pertama-tama sebagai Aksi, yaitu transformasi dari Objek (Objek-Objek) terdahulu yang diarahkan secara eksternal. Aksi adalah eksternal dalam arti bahwa setiap langkah dari transformasinya perlu dilakukan secara eksplisit dan dipandu oleh instruksi eksternal; setiap langkah mendorong langkah berikutnya, yaitu langkah-langkah dari Aksi tidak dapat dibayangkan dan tidak dapat dilompati. Kompleksitas Aksi bergantung pada konteksnya. Individu yang terbatas pada konsepsi Aksi bergantung pada petunjuk eksternal. Meskipun Aksi merupakan struktur yang paling sederhana, Aksi merupakan dasar pada Teori APOS. Konsepsi Aksi diperlukan untuk pengembangan struktur lainnya.

Pada penelitian ini, Aksi yaitu transformasi dari Objek (Objek-Objek) terdahulu yang diarahkan secara eksternal.

Indikator mahasiswa telah mengkonstruksi struktur mental Aksi pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

(1) Dapat menerapkan suatu aturan tertentu.

(2) Dapat menyatakan ekspresi secara eksplisit.

(3) Dapat melakukan perhitungan untuk hal khusus.

Contoh

Diberikan ruang vektor V dengan skalar tertentu **R**, mahasiswa melakukan Aksi pada S subset dari V, khususnya Aksi untuk mengkonstruksi kombinasi linear dari vektor-vektor di S dengan skalar tertentu dari **R**. Aksi ini terdiri dari mengalikan vektor dengan skalar dan menjumlahkan hasilnya untuk mendapatkan vektor baru di V.

2.1.2.2 Proses

Proses-Proses dikonstruksi menggunakan salah satu dari dua mekanisme mental interiorisasi atau koordinasi. Masing-masing mekanisme tersebut memunculkan Proses-Proses baru. Ketika Aksi-Aksi diulang dan direfleksikan, individu berpindah dari bergantung pada perintah eksternal ke mempunyai kontrol internal atas Aksi-Aksi tersebut. Hal ini dikarakterisasi oleh kemampuan membayangkan melakukan langkah-langkah tanpa perlu melakukannya secara eksplisit dan dapat melompati langkah-langkah, dan juga melakukan pembalikan. Sebagaimana dikatakan oleh Dubinsky (Arnon, *et al.*, 2014, h 107) bahwa suatu Aksi harus diinteriorisasi. Hal ini berarti bahwa beberapa konstruksi internal dibuat bersesuaian dengan Aksi tersebut. Aksi yang dinteriorisasi adalah sebuah Proses. Interiorisasi memungkinkan seseorang menjadi sadar akan sebuah Aksi, merefleksikan pada Aksi tersebut dan mengkombinasikan Aksi itu dengan Aksi yang lain. Dubinsky (dalam Brijlall & Bansilal, 2010, h 133) menyatakan bahwa interiorisasi merupakan kemampuan untuk menerapkan simbol, bahasa, gambar dan bayangan mental untuk mengkonstruksi proses internal sebagai cara memahami fenomena yang diterima/dirasakan. Dubinsky, *et al*. (2005, h 264) juga menyatakan bahwa mekanisme interiorisasi dan enkapsulasi penting dalam kajian konsep matematika dan telah menunjukkan pedagogi yang efektif.

Pada penelitian ini, Proses adalah Aksi yang terjadi seluruhnya dalam pikiran. Indikator mahasiswa telah mengkonstruksi struktur mental Proses pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

(1) Dapat melakukan Aksi-Aksi secara mental dalam pikiran (*interiorisasi*).
(2) Dapat mentransformasi Proses melalui pembalikan (*reversal*).
(3) Dapat mengkoordinasikan Proses-Proses.
(4) Dapat menerapkan simbol dan bahasa untuk mengkonstruksi Proses internal.

Contoh

Diberikan ruang vektor V dengan skalar tertentu **R**, mahasiswa melakukan Aksi pada S subset dari V, khususnya Aksi untuk mengkonstruksi kombinasi linear dari vektor-vektor di S dengan skalar tertentu dari **R**. Aksi ini terdiri dari mengalikan vektor dengan skalar dan menjumlahkan hasilnya untuk mendapatkan vektor baru di V.

Interiorisasi Aksi-Aksi ini menghasilkan Proses untuk mengkonstruksi vektor baru yang merupakan elemen di V, yaitu Proses mengkonstruksi kombinasi linear.

Pembalikan dari Proses ini adalah mahasiswa memeriksa apakah vektor yang diberikan dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor yang diketahui.

Mahasiswa yang menunjukkan telah mengkonstruksi Proses ini dikatakan mempunyai konsepsi Proses dari kombinasi linear.

Dengan mengkoordinasikan pembalikan Proses mengkonstruksi himpunan semua kombinasi linear dari vektor-vektor di $S \subseteq V$ dengan Proses menemukan himpunan solusi dari sistem persamaaan, mahasiswa dapat memeriksa eksistensi skalar-skalar di **R** yang dapat digunakan untuk menentukan apakah vektor vektor di $T \subseteq V$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari S. Jadi, koordinasi memungkinkan mahasiswa untuk menentukan apakah $T \subseteq V$ dibangun oleh subset S.

2.1.2.3 Objek

Enkapsulasi terjadi ketika individu menerapkan sebuah Aksi ke sebuah Proses, yaitu melihat sebuah struktur dinamis (Proses) sebagai sebuah struktur statis dimana Aksi-Aksi dapat diterapkan. Dubinsky *et al*. (2005, h. 339) menyatakan bahwa jika seseorang menjadi sadar akan Proses sebagai totalitas, menyadari bahwa transformasi dapat bertindak pada totalitas tersebut dan dapat mengkonstruksi secara aktual transformasi tersebut (secara eksplisit atau dalam bayangan seseorang), maka dikatakan individu telah mengenkapsulasi Proses tersebut menjadi objek kognitif. Dubinsky (dalam Brijlall & Bansilal, 2010, h. 133) juga menyatakan bahwa enkapsulasi merupakan kemampuan untuk menerima Proses sebelumnya sebagai Objek. Beberapa kajian berbasis APOS melaporkan bahwa mekanisme enkapsulasi adalah yang paling sulit. Trigueros & Martinezz- Planell (2010) menemukan dalam kajian tentang konstruksi mental fungsi dua variabel bahwa hanya satu mahasiswa yang telah mengkonstruksi konsepsi Objek. Sfard (1991, h. 30) melaporkan bahwa kemampuan untuk melihat sesuatu familier dalam cara baru secara total adalah tidak pernah mudah untuk dicapai. Kesulitan yang muncul ketika suatu Proses diubah menjadi suatu Objek adalah seperti yang mereka alami selama transisi dari satu paradigma ilmiah ke yang lainnya.

Ketika Proses telah dienkapsulasi menjadi Objek mental, Objek tersebut dapat di-de-enkapsulasi pada saat diperlukan, yaitu kembali ke Proses yang menghasilkan Objek tersebut. Dengan kata lain, dengan menerapkan mekanisme de-enkapsulasi, individu dapat kembali ke Proses yang menghasilkan Objek tersebut. Mekanisme koordinasi sangat diperlukan dalam konstruksi beberapa Objek. Dua Objek dapat di-de-enkapsulasi, Proses-proses yang menghasilkan Objek tersebut dikoordinasi, dan Proses yang dikoordinasi dienkapsulasi untuk membentuk Objek baru (Arnon, *et al*., 2014, h. 23).

Perbedaan antara Proses dan Objek digambarkan oleh Brijlall & Bansilal (2010, h. 132) dan Sfard (1991). Brijlall & Bansilal (2010, h. 132) menyatakan bahwa Proses menjadi Objek ketika diterima sebagai entitas yang padanya dapat dilakukan Aksi-Aksi yang dibuat dalam pikiran individu. Menurut Sfard (1991), Aksi dan Proses dapat dipandang sebagai konsepsi operasional, sedangkan Objek dipandang sebagai konsepsi struktural.

Pada penelitian ini, sebuah Proses menjadi sebuah Objek jika dipahami sebagai suatu entitas yang padanya dapat dilakukan Aksi-Aksi yang dibuat dalam pikiran individu.

Indikator mahasiswa telah mengkonstruksi struktur mental Objek pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

(1) Dapat melakukan Aksi-Aksi dan Proses pada entitas (enkapsulasi).

(2) Dapat melakukan de-enkapsulasi entitas kembali menjadi Proses yang menghasilkan entitas tersebut.

Contoh

Diberikan ruang vektor V dengan skalar tertentu **R**. Dengan mengkoordinasikan pembalikan Proses mengkonstruksi himpunan semua kombinasi linear dari vektor-vektor di S $\subseteq$ V dengan Proses menemukan himpunan solusi dari sistem persamaaan, mahasiswa dapat memeriksa eksistensi skalar-skalar di **R** yang dapat digunakan untuk menentukan apakah vektor-vektor di T $\subseteq$V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari S. Jadi, koordinasi memungkinkan mahasiswa untuk menentukan apakah T $\subseteq$ **V** dibangun oleh subset S. Ketika himpunan-himpunan yang berbeda dibandingkan dan dipandang sebagai himpunan merentang berbeda yang mungkin untuk himpunan vektor T, Proses yang dikoordinasi dienkapsulasi menjadi Objek yang disebut himpunan yang merentang. Mahasiswa yang mempunyai konsepsi Objek himpunan yang merentang dapat melakukan perbandingan untuk menentukan apakah ruang vektor yang diberikan dapat dibangun oleh himpunan merentang yang berbeda yang tidak bergantung pada ukuran himpunan atau elemen-elemen tertentu.

Ketika Proses mengkonstruksi himpunan T yang dibangun oleh S dikoordinasi dengan Proses untuk ruang vektor, mahasiswa dapat memeriksa bahwa T merupakan ruang vektor. Proses yang terakhir ini dienkapsulasi menjadi Objek yang disebut rentangan atau ruang yang dibangun oleh S.

Konstruksi ini memungkinkan mahasiswa membedakan antara konsep rentangan dan himpunan yang merentang.

2.1.2.4 Skema

Skema adalah kumpulan yang koheren dari Aksi, Proses dan Objek yang dikonstruksi sebelumnya terkait dengan konsep matematika tertentu (Inglis, 2015, h. 414; Martinez-Planella & Gaisman, 2013, h. 664; Brijlall & Bansilal, 2010, h. 132; Moll, *et al*., 2016, h. 110). Menurut Dubinsky (Arnon, *et al*., 2014), Skema dikarakterisasi oleh dinamika dan kekontinuan rekonstruksi yang ditentukan oleh aktivitas matematik dari subyek dalam situasi matematik tertentu. Koherensi dari Skema ditentukan oleh kemampuan individu untuk meyakinkan apakah dapat digunakan pada situasi matematik tertentu. Dubinsky (dalam Brijlall & Bansilal, 2010, h. 133) menyatakan bahwa kemampuan untuk menerapkan Skema yang ada ke jangkauan yang lebih luas dari konteks disebut generalisasi. Ketika Skema dikonstruksi sebagai koleksi struktur (Aksi-Aksi, Proses-Proses, Objek-Objek, dan Skema- Skema lain) yang koheren dan koneksi-koneksi terbangun diantara struktur tersebut, Skema dapat ditransformasikan menjadi struktur statis (Objek) dan dapat digunakan sebagai struktur dinamis yang mengasimilasi Objek atau Skema lain yang terkait. Moll, *et al*. (2016) mengemukakan mekanisme yang terlibat dalam mengkonstruksi Objek dari Skema disebut tematisasi. Skema dapat ditematisasi menjadi Objek sehingga Aksi dapat diterapkan padanya.

Struktur dari sebuah Skema dapat berbeda diantara individu yang berlainan karena masing-masing individu mengkonstruksi jenis relasi yang berbeda diantara komponen Skema. Skema tertentu mungkin tidak perlu diakses di setiap situasi karena pembelajaran matematik tidak linear. Oleh karena itu, struktur dari Skema dan perkembangannya memungkinkan mahasiswa mengalami kesulitan pada aspek yang berbeda dari suatu topik.

Skema dapat dipandang tersusun dari komponen-komponen yang berbeda. Skema mungkin memuat konsep tunggal yang dapat diterapkan pada berbagai situasi, seperti pada kasus fungsi, atau mungkin memuat konsep yang berbeda tetapi saling berhubungan, seperti pada kasus Skema ruang vektor. Pada kedua kasus, Skema merupakan alat untuk memahami bagaimana Skema disusun dan pengembangannya melalui pembelajaran.

Pada penelitian ini, Skema untuk konsep matematik adalah koleksi yang koheren dari struktur mental (Aksi, Proses, Objek, dan Skema lain) dan hubungan diantara struktur tersebut untuk membentuk kerangka kerja dalam pikiran individu yang mungkin dibawa pada situasi masalah yang terkait dengan konsep tersebut.

Indikator mahasiswa telah mengonstruksi struktur mental Skema pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

(1) Dapat melakukan Aksi atau Proses pada komponen dan relasi pada entitas total (tematisasi).

(2) Dapat membangun hubungan diantara struktur mental yang mendukung suatu konsep (koherensi).

(3) Dapat menerapkan Objek kognitif yang ada ke dalam konteks yang lebih luas (generalisasi).

Contoh

Skema ruang vektor tersusun dari vektor-vektor dan operasi yang didefinisikan padanya, bersama dengan kombinasi linear, himpunan merentang, basis, dan dimensi yang masing-masing dipandang sebagai sebuah Proses atau sebuah Objek. Bagi beberapa mahasiswa, konsep ini berhubungan dengan ruang vektor hanya karena mereka didefinisikan untuk ruang vektor. Bagi mahasiswa lain yang telah mengkonstruksi Skema yang koheren menyadari sifat hubungannya dengan konsep ruang vektor.

Berdasarkan uraian di atas, rangkuman pengertian struktur mental, mekanisme mental, indikator dan contohnya disajikan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Definisi, Indikator, dan Contoh Struktur Mental dan Mekanisme Mental

NO	**STRUKTUR/ MEKANISME MENTAL**	**DEFINISI**	**INDIKATOR**	**CONTOH**
STRUKTUR MENTAL				
1	AKSI	Transformasi dari Objek (Objek-Objek) terdahulu yang diarahkan secara eksternal (Arnon, *et al.*, 2014, h. 19)	1.1. Dapat menerapkan suatu aturan tertentu. 1.2. Dapat menyatakan ekspresi secara eksplisit. 1.3. Dapat melakukan perhitungan untuk hal khusus.	$S_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ Didefinisikan $*: S_3 \text{x} S_3 \rightarrow S_3$ dengan $*(f, g) = fog,$ $\forall(f, g) \in S_3 \text{ x } S_3$. Mahasiswa dapat menentukan $*(\rho_1, \mu_2)$. Mahasiswa ini menerapkan aturan tertentu, yaitu $*(\rho_1, \mu_2) = \rho_1 o \mu_2 = \mu_1,$ menyatakan ekspresi $\rho_1 o \mu_2$ secara eksplisit, melakukan perhitungan untuk hal khusus, yaitu ρ_1 dan μ_2.

				Struktur mental yang dikonstruksi mahasiswa ini adalah Aksi untuk ketertutupan operasi biner.
2	PROSES	Aksi yang terjadi seluruhnya dalam pikiran (Brijlall)	2.1. Dapat melakukan Aksi-Aksi secara mental dalam pikiran (*interiorisasi*). 2.2. Dapat mentransformasi Proses melalui pembalikan (*reversal*). 2.3. Dapat mengkoordinasikan Proses-Proses. 2.4. Dapat menerapkan simbol dan bahasa untuk mengkonstruksi Proses internal.	Didefinisikan $*: S_3 \text{x } S_3 \rightarrow S_3$ dengan $*(f,g) = fog$, $\forall (f,g) \in S_3 \text{ x } S_3$. Mahasiswa dapat menunjukkan untuk setiap (f,g) di S_3 x S_3 berlaku $*$ (f,g) di S_3. Mahasiswa ini dapat melakukan Aksi secara mental dalam pikiran (*interiorisasi*) untuk ketertutupan operasi biner. Diketahui $f \in S_3$ dan $h \in S_3$, melalui pembalikan mahasiswa dapat menentukan $g \in S_3$ sehingga $fo\ g = h$. Koordinasi himpunan S_3, operasi biner komposisi, dan aksioma untuk sifat asosiatif, eksistensi elemen identitas, dan eksistensi invers elemen menghasilkan Proses dari S_3 memenuhi aksioma grup.
3	OBJEK	Sebuah Proses menjadi sebuah Objek jika dipahami sebagai	3.1. Dapat melakukan Aksi-Aksi dan Proses	Didefinisikan $*: S_3 \text{x } S_3 \rightarrow S_3$ dengan $*(f,g) = fog$,

		suatu entitas yang padanya dapat dilakukan aksi-aksi yang dibuat dalam pikiran individu.(Brijlall)	pada entitas (enkapsulasi). 3.2. Dapat melakukan de-enkapsulasi entitas kembali menjadi Proses yang menghasilkan entitas tersebut.	$\forall(f, g) \in S_3 \text{ x } S_3$. Mahasiswa dapat menunjukkan $*$ bersifat asosiatif. Mahasiswa ini dikatakan melakukan Aksi pada operasi biner (enkapsulasi). Diketahui f dan g di S_3 dengan $f = g$. Mahasiswa mengetahui alasan $\rho_1 o f = \rho_1 o\ g$. Mahasiswa ini dikatakan melakukan de-enkapsulasi operasi biner $*$.
4	SKEMA	koleksi yang koheren dari struktur mental (Aksi, Proses, Objek, dan Skema lain) dan hubungan diantara struktur tersebut untuk membentuk kerangka kerja dalam pikiran individu yang mungkin dibawa	4.1. Dapat melakukan Aksi atau Proses pada komponen dan relasi pada entitas total (tematisasi)	Didefinisikan $*\colon S_3 \text{x}\, S_3 \rightarrow S_3$ dengan $*(f, g) = f o g$, $\forall(f, g) \in S_3 \text{ x } S_3$. Mahasiswa dapat menunjukkan $*$ merupakan operasi biner pada S_3. Mahasiswa ini dapat melakukan Proses himpunan S_3 dengan Proses ketertutupan dan Proses ketunggalan peta $*$ (tematisasi).

		pada situasi masalah yang terkait dengan konsep tersebut.		Mahasiswa dapat memeriksa berbagai sifat operasi biner (tematisasi). Mahasiswa ini melakukan Proses himpunan dan Proses sifat operasi biner (asosiatif, komutatif, dan lain-lain)
			4.2. Dapat membangun hubungan diantara struktur mental yang mendukung suatu konsep (koherensi).	Mahasiswa dapat memberi contoh operasi biner, menggunakan sifat-sifat operasi biner untuk menyelesaikan masalah terkait. (koherensi)
			4.3. Dapat menerapkan Objek kognitif yang ada ke dalam konteks yang lebih luas (generalisasi)	Mahasiswa dapat mendefinisikan operasi biner pada himpunan koset-koset dikatakan dapat menerapkan Objek kognitif operasi biner yang ada ke dalam konteks yang lebih luas (generalisasi)
MEKANISME MENTAL				
5	INTERIORISASI	M ekanisme mental yang hanya	5.1. Aksi menjadi Proses	Didefinisikan $*: S_3 \text{x}\, S_3 \rightarrow S_3$ dengan $*(f,g) = fog,$

		menggerakkan suatu transformasi dari dunia eksternal (Aksi) ke pikiran mahasiswa (Proses).		$\forall(f, g) \in S_3$ x S_3. Mahasiswa dapat menunjukkan untuk setiap (f,g) di S_3 x S_3 berlaku $*$ (f,g) di S_3. Mahasiswa ini dikatakan menginteriorisasi ketertutupan operasi biner.
6	REVERSAL	Kemampuan untuk membalik Proses yang dipikirkan dari Proses yang diinteriorisasi sebelumnya.	6.1. Proses menjadi Proses baru	2 + ... = 5 ... + 3 = 5 Diketahui $f \in S_3$ dan $h \in S_3$, mahasiswa dapat menentukan $g \in S_3$ sehingga $f o\ g = h$
7	KOORDINASI	Dua atau lebih Proses dikoordinasi untuk membentuk Proses baru	7.1. De-enkapsulasi dua Objek menjadi dua Proses. Dua Proses ini dikoordinasi menghasilkan Proses baru	Koordinasi himpunan S_3, operasi biner komposisi, dan aksioma untuk sifat asosiatif, eksistensi elemen identitas, dan eksistensi invers elemen menghasilkan Proses dari S_3 memenuhi aksioma grup.

8	ENKAPSU-LASI	Kemampuan menerima Proses sebelumnya sebagai Objek	8.1. Proses menjadi Objek	Menyatakan relasi dari dua himpunan.
9	TEMATISASI	Kemampuan melakukan Aksi atau Proses pada komponen dan relasi pada Skema. (mengkonstruksi Objek dari Skema)	9.1. menentukan apakah suatu komponen dan relasi diantara komponen tersebut merupakan Skema, 9.2. memeriksa berbagai sifat Skema (Arnon, *et al*., 2014:73).	Mahasiswa dapat menunjukkan bahwa S_3 merupakan grup terhadap operasi biner komposisi.
10	GENERALISASI	Kemampuan menerapkan Skema yang ada (terdahulu) kedalam konteks yang lebih luas	10.1 Menerapkan Skema	Operasi biner komposisi pada himpunan dihedral. Operasi biner pada himpunan koset-koset.

2.1.2.5 Dekomposisi Genetik

Dekomposisi genetik merupakan model hipotesis yang menggambarkan struktur dan mekanisme mental yang diperlukan individu untuk mempelajari konsep matematik tertentu. Arnon, *et al.* (2014, h. 55) menyatakan bahwa dekomposisi genetik bukan sekedar sederet langkah-langkah pembelajaran atau daftar konsepsi yang mungkin dimiliki oleh individu. Namun, dekomposisi genetik merupakan gambaran konstruksi mental yang diperlukan untuk dibuat oleh individu dalam mempelajari konsep matematik. Konsep matematik baru seringkali muncul sebagai transformasi dari konsep yang sudah ada. Dengan demikian, dekomposisi genetik terdiri atas deskripsi Aksi-Aksi yang perlu dilakukan oleh individu pada Objek mental dan menyertakan penjelasan bagaimana Aksi-Aksi itu diinteriorisasi menjadi Proses-Proses. Agar dipahami sebagai sesuatu yang dapat ditransformasi, Proses dienkapsulasi menjadi Objek mental. Sangat mungkin bahwa sebuah konsep terdiri atas beberapa Aksi, Proses, dan Objek yang berbeda. Dekomposisi genetik memuat deskripsi tentang bagaimana struktur tersebut terkait dan terorganisasi menjadi struktur mental yang lebih besar yang disebut Skema. Dalam deskripsi Skema mungkin dijelaskan bagaimana Skema ditematisasi menjadi Objek. Dekomposisi genetik juga menjelaskan apapun yang diketahui tentang hasil pekerjaaan mahasiswa yang diharapkan yang menunjukkan perbedaan perkembangan konstruksi mahasiswa (Arnon, *et al.* 2014, h. 28). Jadi, dekomposisi genetik tidak menjelaskan apa yang terjadi dalam pikiran individu; tidak meramalkan apakah individu akan menerapkan struktur yang diberikan; dan tidak juga menawarkan analisis teoretis yang eksklusif tentang bagaimana matematika dipelajari. Deskripsi pada dekomposisi genetik tidak sama seperti pendahuluan matematik dari suatu konsep. Karena perbedaan-perbedaan individu, dekomposisi genetik menggambarkan struktur yang perlu dikonstruksi dalam mempelajari suatu konsep.

Arnon, *et al.* (2014, h. 194) mengemukakan desain dekomposisi genetik merupakan aspek yang paling sulit dalam menerapkan teori APOS untuk penelitian pemahaman konsep matematik individu d an untuk mengajar. Dekomposisi genetik merupakan alat yang dapat digunakan untuk memahami data yang berkaitan dengan pemahaman mahasiswa tentang suatu konsep (Asiala, *et al*., 1997b, h. 427). Dekomposisi genetik dapat dikembangkan dari data. Dalam hal ini mahasiswa diwawancarai dan transkrip wawancara dibagi menjadi potongan-potongan kecil. Dengan membandingkan potongan-potongan itu, mungkin menemukan perbedaan-perbedaan dalam hasil pekerjaaan mahasiswa pada tugas-tugas tertentu. Perbedaan pekerjaan mengungkap contoh-contoh dimana konstruksi mental perlu dibuat. Ketidakberhasilan dalam menyelesaikan tugas menunjukkan mahasiswa belum membuat konstruksi mental yang diperlukan, sedangkan keberhasilan menyelesaikan tugas menunjukkan konstruksi mental telah dibuat (Arnon, *et al*., 2014, h. 34). Hal yang mungkin untuk meyakinkan apakah mahasiswa telah mengkonstruksi objek mental adalah berdasarkan pada cara mereka mengatakan dan menulis tentang konsep (Tall, *et al*., 2000).

Ciri khas dari kajian yang menerapkan teori APOS adalah diawali dengan sebuah dugaan yang disebut dekomposisi genetik dari Aksi, Proses, dan Objek mental yang dapat dikonstruksi oleh individu untuk belajar suatu konsep. Dugaan ini diuji dengan membandingkannya dengan konstruksi mahasiswa yang sebenarnya, sebagaimana terungkap dalam wawancara semi-terstruktur. Wawancara ini memungkinkan untuk melihat konstruksi dugaan yang tidak ada dalam pekerjaan mahasiswa dan untuk menemukan konstruksi yang dibuat oleh mahasiswa yang berbeda dari konstruksi dugaan. Temuan-temuan ini mengarah pada penyempurnaan dekomposisi genetik, untuk membuatnya menjadi deskripsi yang lebih baik dari fenomena yang diamati dan panduan yang lebih baik untuk merancang pendekatan pembelajaran. Dekomposisi genetik pendahuluan didasarkan pada konsep itu sendiri, pengalaman para peneliti, dan data sebelumnya (Martinez-Planell & Gaisman, 2013, h. 664). Dekomposisi genetik suatu konsep tidak perlu tunggal, yang penting adalah bahwa hal itu mencerminkan konstruksi yang sebenarnya dilakukan mahasiswa, seperti diungkapkan dalam, misalnya, wawancara mahasiswa (Martinez-Planell & Gaisman, 2013, h. 664; Salgado & Trigueros, 2015, h. 104; Cooley, *et al*., 2007, h. 372; Bosch, *et al*., 2017: h.42).

Setelah dekomposisi genetik pendahuluan dikonstruksi, sebagai pendekatan pertama untuk memodelkan konstruksi konsep matematis, itu perlu diuji secara eksperimen dan dapat berfungsi sebagai dasar untuk penelitian dan desain pembelajaran (Arnon, *et al*., 2014, h 194; Salgado & Trigueros, 2015, h. 104; Fuentealba, *et al*., 2016, h. 3; Cooley, *et al*., 2007, h. 372). Studi penelitian dirancang dan digunakan untuk mengembangkan instrumen yang berguna untuk menganalisis konstruksi yang ditunjukkan mahasiswa ketika mereka mempelajari konsep matematika yang diinginkan. Konstruksi ini terungkap melalui penjelasan dan pekerjaan yang dilakukan oleh mahasiswa ketika mereka menyelesaikan kegiatan, latihan, dan masalah yang terkait dengan konsep tersebut (Salgado & Trigueros, 2015, h. 104)

Kajian terkait dekomposisi genetik telah dilakukan oleh Trigueros & Martinez-Planell (2010); Asiala (1997a); Roa-Fuentes & Oktaç (2012). Kajian yang dilakukan Trigueros & Martinez-Planell (2010) tentang fungsi dua variabel dengan mendesain wawancara untuk mendapatkan informasi tentang komponen-komponen dekomposisi genetik pendahuluan yang diusulkan. Karena ada konstruksi-konstruksi yang tidak diperkirakan dalam dekomposisi genetik pendahuluan, maka konstruksi-konstruksi yang tidak diperkirakan tersebut diajukan dalam penghalusannya. Dekomposisi genetik yang dihaluskan diuji dalam kajian yang kedua pada tahun 2012 dan hasilnya menunjukkan bahwa itu merupakan model konstruksi mental mahasiswa yang baik (Arnon, *et al*., 2014, h. 106). Asiala (1997a) melakukan penelitian tentang bagaimana mahasiswa mengkonstruksi pemahaman mereka dalam konsep-konsep aljabar abstrak tertentu, yaitu koset, normalitas, dan grup kuosien. Kajian lain oleh Roa-Fuentes & Oktaç (2012) dengan melakukan wawancara untuk mendapatkan dekomposisi genetik pendahuluan yang mereka usulkan untuk konsep transformasi linear (Arnon, *et al*., 2014, h. 106).

Untuk mendapatkan dekomposisi genetik yang mencerminkan kognisi dari konsep yang sangat dekat dengan banyak individu dan dapat digunakan dalam rancangan pembelajaran yang secara positif mempengaruhi belajar mahasiswa maka perlu implementasi dekomposisi genetik pendahuluan dalam pembelajaran. Tabel 2.2 merupakan contoh dekomposisi genetik pendahuluan dari limit dan penghalusannya.

Tabel 2.2 Dekomposisi Genetik Pendahuluan dari Limit dan Penghalusannya

Preliminary genetic decomposition	Refinement
	1R: The Action of evaluating the function f at a single point x that is considered to be close to, or even equal to, a
1P: The Action of evaluating the function f at a few points, each successive point closer to a	2R: The Action of evaluating the function f at a few points, each successive point closer to a
2P: Interiorization of the Action of Step 1P to a single Process in which $f(x)$ approaches L as x approaches a	3R: Construction of a coordinated Process Schema: (a) Interiorization of the Action of Step 2R to construct a domain Process in which x approaches a. (b) Construction of a range Process in which y approaches L. (c) Coordination of (a) and (b) via f
3P: Encapsulation of the Process of Step 2P so that the limit becomes an Object to which Actions can be applied	4R: Encapsulation of the Process of Step 3R(c) so that the limit becomes an Object to which Actions can be applied
4P: Reconstruction of the Process of Step 2P in terms of intervals and inequalities. This is done by introducing numerical estimates of the closeness approach: $0 < \|x - a\| < \delta$ and $0 < \|f(x) - L\| < \varepsilon$	5R: Reconstruction of the Process of Step 3R(c) in terms of intervals and inequalities. This is done by introducing numerical estimates of the closeness approach: $0 < \|x - a\| < \delta$ and $0 < \|f(x) - L\| < \varepsilon$
5P: Application of a two-level quantification Schema to connect the Process described in Step 4P to the formal definition	6R: Application of a two-level quantification Schema to connect the Process described in Step 5R to the formal definition
6P: Application of a completed $\varepsilon - \delta$ conception to specific situations	7P: Application of a completed $\varepsilon - \delta$ conception to specific situations

Sumber: (Arnon, *et al*. 2014, h. 100).

Konsep grup merupakan skema yang dikonstruksi melalui koordinasi tiga skema yaitu himpunan, operasi biner, dan aksioma. Skema himpunan dan operasi biner ditematisasi untuk membentuk objek-objek dan dikoordinasi melalui skema aksioma. Skema dari grup dikonstruksi secara mental melalui koordinasi Skema aksioma dengan Skema himpunan dan skema operasi biner. Skema aksioma mencakup dua komponen utama:

(1) Memeriksa sifat operasi biner yang didefinisikan pada suatu himpunan,

(2) Ketiga aksioma konsep grup dibangun sebagai Objek.

Koherensi skema grup didukung oleh:

(1) Kemampuan untuk membangun contoh dan bukan contoh,

(2) Kemampuan untuk mengenali hubungan yang ada dalam skema grup ketika menghadapi masalah yang karakteristik masalahnya berada dalam lingkup skema grup,

(3) Kemampuan untuk memastikan hubungan yang ada dalam skema grup ketika menghadapi masalah yang karakteristik masalahnya berada dalam lingkup skema grup.

Berdasarkan hasil review literatur tentang (pembelajaran) materi grup, pengalaman sebagai mahasiswa, pengalaman sebagai dosen, serta kajian pendahuluan tentang kesulitan mahasiswa dalam mempelajari konsep grup disusunlah desain dekomposisi genetik pendahuluan materi grup (Wijayanti, 2016). Menurut Arnon, *et al*. (2014, h. 194) untuk mendapatkan dekomposisi genetik yang mencerminkan kognisi dari konsep yang sangat dekat dengan banyak individu dan dapat digunakan dalam rancangan pembelajaran yang secara positif mempengaruhi belajar mahasiswa maka perlu implementasi dekomposisi genetik pendahuluan dalam pembelajaran. Wijayanti & Wiyanti (2016) menemukan implementasi dekomposisi genetik pendahuluan materi grup menghasilkan struktur mental yang dikonstruksi mahasiswa FN dan FI baru mencapai Proses untuk himpunan, operasi biner, dan aksioma sedangkan mahasiswa FD mencapai Proses hanya untuk operasi biner dan aksioma. Berdasarkan hasil implementasi ini disusunlah penghalusan dekomposisi genetik pendahuluan grup. Dekomposisi genetik pendahuluan grup dan penghalusannya disajikan pada Tabel 2.3.

Tabel 2.3 Dekomposisi Genetik Pendahuluan Grup dan Penghalusannya

Konsep	**Dekomposisi Genetik Pendahuluan**	**Penghalusan dari Dekomposisi Genetik Pendahuluan**
Operasi Biner	1. Aksi : diberikan aturan operasi biner pada himpunan tak-kosong A, individu menerapkan aturan operasi biner pada dua elemen di A.	1. Aksi : diberikan aturan operasi biner pada himpunan tak-kosong A, individu menerapkan aturan operasi biner pada dua elemen di A. 2. Aksi: menggunakan aturan di atas untuk dua pasang elemen tertentu dari himpunan yang

		didefinisikan pada operasi biner tersebut.
	2. Menginteriorisasi Aksi-Aksi pada langkah 1 yang terdiri atas: a. mengambil dua elemen. b. bertindak pada 2 elemen tersebut sesuai dengan aturan yang telah didefinisikan. c. membangun objek baru (misalkan peta dari pasangan elemen pada 2.a.)	3. Menginteriorisasi Aksi-Aksi pada langkah 2 yang terdiri atas: a. mengambil dua elemen. b. bertindak pada 2 elemen tersebut sesuai dengan aturan yang telah didefinisikan. c. membangun objek baru (misalkan peta dari pasangan elemen pada 3.a.)
		4. Menginteriorisasi Aksi-Aksi pada langkah 2 yang terdiri atas: a. mengambil dua pasang elemen yang sama. b. bertindak pada 2 objek pasangan elemen tersebut sesuai dengan aturan yang telah didefinisikan. c. membangun objek baru (misalkan peta dari elemen pada 4.a)
	3. Mengenkapsulasi Proses pada langkah 2 sehingga operasi biner menjadi Objek.	5. Mengenkapsulasi Proses pada langkah 3 dan 4 sehingga operasi biner menjadi Objek dengan indikator dapat memeriksa operasi biner memenuhi suatu aksioma.
		6. Mentematisasi Objek pada langkah 5 menjadi Skema dengan indikator dapat mendefinisikan operasi biner dan dapat memeriksa apakah suatu aturan yang didefinisikan pada suatu himpunan merupakan operasi biner.
Himpunan	1. Aksi mengambil elemen-elemen pada suatu himpunan.	1. Aksi mengambil elemen pada himpunan yang dinyatakan dengan menyebutkan anggota-anggotanya.

		2. Aksi mengambil elemen pada himpunan yang dinyatakan dengan menyebutkan syarat keanggotaan himpunan.
	2. Menginteriorisasi Aksi mengumpulkan dan meletakkan Objek-Objek dalam koleksi menurut syaratnya.	3. Menginteriorisasi Aksi, mengumpulkan dan meletakkan Objek dalam koleksi berdasarkan syaratnya dengan indikator memeriksa syarat keanggotaan, atau mengidentifikasi elemen dari himpunan.
	3. Mengenkapsulasi Proses pada langkah 2 sehingga himpunan menjadi Objek.	4. Mengenkapsulasi Proses pada langkah 3 sehingga menjadi Objek dengan indikator mengoperasikan himpunan atau menyatakan relasi dari dua himpunan.
Aksioma	1. Proses: memeriksa aksioma, memeriksa sifat-sifatnya, dan Proses yang didefinisikan oleh sifat tertentu yang harus dicek.	1. Proses: memeriksa aksioma, memeriksa sifat-sifatnya, dan Proses yang didefinisikan oleh sifat tertentu yang harus dicek.
	2. Skema dari aksioma memuat pengertian umum dan memeriksa apakah pasangan himpunan dan operasi biner pada himpunan tersebut memenuhi suatu sifat.	2. Skema dari aksioma memuat pengertian umum dan memeriksa apakah pasangan himpunan dan operasi biner pada himpunan tersebut memenuhi suatu sifat.

Asiala, *et al*. mengusulkan " *a specific framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. The framework consists of the following three component : theoritical analysis, teaching, and observations and assesment of student learning*. Menurut Asiala, *et al*., fungsi Teori APOS diilustrasikan pada Gambar 2.1.

Analisis Teoretis

Pengumpulan dan analisis data → Desain dan implementasi pembelajaran

Gambar 2.1 Fungsi Teori APOS

Berdasarkan paradigma yang diilustrasikan dalam Gambar 2.1, kegiatan dimulai dengan analisis teoretis. Analisis ini berdasarkan pada pengetahuan peneliti mengenai konsep dalam pertanyaan dan dari teori umum. Tujuan dari analisis teoretis untuk membuat konstruksi mental khusus, yaitu dekomposisi genetik yang dipandang mungkin dapat dipelajari individu. Peran dari perlakuan pembelajaran untuk mendapatkan individu membangun konstruksi mental yang diperlukan dan menggunakannya untuk mengkonstruk pemahaman konsep dan menerapkannya dalam situasi matematik maupun non-matematik.

Analisis data berhubungan dua arah dengan analisis teoretis. Analisis menyediakan pertanyaan untuk menanyakan data. Di lain pihak, data mengatakan sesuatu tentang keefektivan analisis teoretis mengenai konstruksi mental. Tentu juga data mengatakan tentang matematika yang dipelajari atau yang tidak dipelajari oleh individu.

Analisis teoretis membantu untuk memprediksi struktur mental yang diperlukan untuk mempelajari konsep tertentu. Untuk mempelajari konsep tertentu, analisis teoretis menginformasikan desain dan implementasi pembelajaran. Hal-hal tersebut digunakan untuk pengumpulan dan analisis data. Pengumpulan dan analisis data dapat menuntun pada modifikasi analisis teoretis awal dari konsep matematik tertentu.

Bagi para konstruktivis, pengetahuan bukanlah tertentu dan deterministik, tetapi suatu proses menjadi tahu. Konstruktivis menyatakan bahwa semua pengetahuan yang kita peroleh adalah konstruksi kita sendiri, maka mereka menolak kemungkinan transfer pengetahuan dari seseorang kepada yang lain bahkan secara prinsipiil. Von Glasersfeld & Kitchener meringkas gagasan konstruktivisme mengenai pengetahuan sebagai berikut.

(1) Pengetahuan bukanlah merupakan gambaran dunia kenyataan belaka, tetapi selalu merupakan konstruksi kenyataan melalui kegiatan subjek.
(2) Subjek membentuk skema kognitif, kategori, konsep, dan struktur yang perlu untuk pengetahuan.

(3) Pengetahuan dibentuk dalam struktur konsepsi seseorang. Struktur konsepsi membentuk pengetahuan bila konsepsi itu berlaku dalam berhadapan dengan pengalaman-pengalaman seseorang.

Sejumlah aspek dalam belajar matematika menurut paham konstruktivisme, yaitu (1) peserta didik mengkonstruksi pengetahuan matematika dengan cara mengintegrasikan ide yang mereka miliki, (2) matematika menjadi lebih bermakna karena peserta didik mengerti, (3) strategi peserta didik lebih bernilai, dan (4) peserta didik mempunyai kesempatan untuk berdiskusi dan saling bertukar pengalaman dan ilmu pengetahuan dengan temannya.

Beberapa hal yang mendapat perhatian pembelajaran konstruktivistik, yaitu:

(1) mengutamakan pembelajaran yang bersifat nyata dalam konteks yang relevan,

(2) mengutamakan proses,

(3) menanamkan pembelajaran dalam konteks pengalaman sosial, dan

(4) pembelajaran dilakukan dalam upaya mengkonstruksi pengalaman.

Piaget mengemukakan pendapatnya tentang konstruktivisme bahwa pengetahuan konseptual tidak dapat ditransfer dari seseorang ke orang lain, melainkan harus dikonstruksi sendiri oleh orang tersebut berdasarkan pengalaman mereka sendiri. Von Glasersfeld menyatakan bahwa pengetahuan secara aktif diterima orang melalui indera atau melalui komunikasi atau pengalaman. Menurut pendapat Vygotsky tentang pandangan konstruktivisme menekankan pada pengaruh budaya dan pada pentingnya hubungan antar individu dan lingkungan sosial dalam pembentukan pengetahuan.

2.1.3 Lembar Kerja Peserta Didik

Media pembelajaran dalam matematika sangatlah penting. Selain alat peraga, Lembar Kerja Peserta Didik (LKPD) juga dapat digunakan untuk membantu dan memperlancar proses pembelajaran juga dapat menumbuhkan minat peserta didik dalam belajar. Lembar kegiatan merupakan salah satu media pembelajaran matematika dengan penemuan terbimbing untuk meningkatkan pemahaman konsep peserta didik.

Pengertian LKPD dikemukakan oleh Prastowo (2012), bahwa LKPD adalah lembar kerja yang berisikan informasi dan interaksi dari guru kepada peserta didik agar dapat mengerjakan sendiri aktivitas belajar melalui praktik atau penerapan hasil-hasil belajar untuk mencapai tujuan instruksional. Lembar kerja ini sangat baik dipergunakan dalam strategi heuristik maupun strategi ekspositorik. Dalam strategi heuristik LKPD dipahami dalam penerapan metode penemuan terbimbing. Pada strategi ekspositorik LKPD ini sebaiknya dirancang dan dikembangkan oleh guru sendiri sesuai dengan materi pokok dan tujuan pembelajaran.

Fungsi LKPD dalam proses belajar mengajar ada 2, yaitu:

(1) dari segi peserta didik: fungsi LKPD sebagai sarana belajar baik di kelas, di ruang praktik maupun di luar kelas sehingga peserta didik berpeluang besar untuk mengembangkan kemampuan menerapkan pengetahuan, melatih keterampilan, memproses sendiri untuk mendapatkan perolehannya;

(2) dari segi guru: melalui LKPD, guru dalam menyelenggarakan kegiatan belajar mengajar sudah menerapkan metode “membelajarkan peserta didik” dengan kadar SAL (*Student Active Learning*) yang tinggi, intervensi yang diberikan guru bukan dalam bentuk jawaban atas pertanyaan peserta didik tetapi berupa panduan bagi peserta didik untuk memecahkan masalah.

Lembar kerja peserta didik terbagi dalam dua jenis yaitu LKPD berstruktur dan LKPD tak berstruktur. Lembar kerja berstuktur dirancang untuk membimbing peserta didik dalam suatu program pelajaran yang sedikit atau sama sekali tanpa bantuan guru untuk mencapai sasaran yang dituju dalam pelajaran. Pada LKPD ini telah disusun petunjuk dan pengarahannya. Lembar kerja ini tidak bisa menggantikan peran guru di kelas. Guru tetap membimbing, mengawasi, membantu, dan memberikan semangat belajar kepada peserta didik. Lembar kerja kategori inilah yang digunakan peneliti dalam membelajarkan peserta didik. Selanjutnya, LKPD dalam penelitian ini disebut sebagai Lembar Tugas Mahasiswa (LTM). LTM berisi tugas-tugas untuk membantu mahasiswa mengkonstruksi struktur mental Aksi dan menginteriorisasinya menjadi Proses kemudian mengenkapsulasi menjadi Objek. Lembar Tugas Mahasiswa dibuat berdasarkan dekomposisi genetik yang telah disusun. Berikut ini **c**ontoh Lembar Tugas Mahasiswa.

LEMBAR TUGAS MAHASISWA
(LTM-06)

Mata Kuliah : Pengantar Struktur Aljabar 1
Materi Pembelajaran : Koset dan Teorema Lagrange
Sub Materi Pembelajaran : Koset dan Teorema Lagrange
Alokasi Waktu : 50 menit

Indikator Kemampuan yang Diharapkan

1. Dapat menentukan koset kanan dan koset kiri dari suatu subgrup.
2. Dapat menggunakan sifat-sifat koset dari suatu subgrup dalam pembuktian.
3. Dapat memanfaatkan Teorema Lagrange dalam pembuktian.

Petunjuk

1. Diskusikan dengan anggota kelompok yang telah ditentukan.
2. Tuliskan jawaban pertanyaan pada tempat yang disediakan.

Tugas

Pandang grup $S_3 = \{ \rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \}$ dengan operasi komposisi pemetaan. Gunakan Tabel grup S_3 untuk menyelesaikan tugas ini.

1. Untuk $K = \{ \rho_0, \rho_1, \rho_2 \}$ subgrup S_3, tentukan himpunan berikut ini!
   a. $\rho_0 K = \{\rho_0\, x | x \in K\} = \{\rho_0\, \rho_0,\ \rho_0\, \rho_1,\ \rho_0\, \rho_2\} = \{\rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2\}$
   b. $\rho_1 K = \{\rho_1\, x | x \in K\} = \{\rho_1\rho_0,\ \rho_1\rho_1,\ \rho_1\rho_2\} = \{\rho_1,\ \rho_2, \rho_0\}$
   c. $\rho_2 K = \{\rho_2\, x | x \in K\} = ...$
   d. $\mu_1 K = \{\mu_1\, x | x \in K\} = ...$
   e. $\mu_2 K = \{\mu_2\, x | x \in K\} = ...$
   f. $\mu_3 K = \{\mu_1\, x | x \in K\} = ...$
2. Dari tugas nomor 1a sampai 1f di atas tentukan himpunan yang berlainan!
3. Untuk $K = \{ \rho_0, \rho_1, \rho_2 \}$ subgrup S_3, tentukan himpunanhimpunan berikut ini!
   a. $K\rho_0 = \{x\rho_0 | x \in K\} = \{\rho_0\rho_0,\ \rho_1\rho_0,\ \rho_2\rho_0\} = \{\rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2\}$
   b. $K\rho_1 = \{x\rho_1 | x \in K\} = \{\rho_0\rho_1,\ \rho_1\rho_1,\ \rho_2\rho_1\} = \{\rho_1,\ \rho_2, \rho_0\}$
   c. $K\rho_2 = \{x\rho_2 | x \in K\} = ...$

d. $K\mu_1 = \{x\mu_1 \mid x \in K\} = ...$

e. $K\mu_2 = \{x\mu_2 \mid x \in K\} = ...$

f. $K\mu_3 = \{x\mu_1 \mid x \in K\} = ...$

4. Dari tugas nomor 3a sampai 3f di atas tentukan himpunan yang berlainan!
5. Apakah $xK = Kx$ untuk setiap $x \in S_3$?
6. Untuk $L = \{ \rho_0 , \mu_2 \}$ subgrup S_3 tentukan himpunan-himpunan berikut ini!

a. $\rho_0 L = \{\rho_0 x \mid x \in L\} = ...$

b. $\rho_1 L = \{\rho_1 x \mid x \in L\} = ...$

c. $\rho_2 L = \{\rho_2 x \mid x \in L\} = ...$

d. $\mu_1 L = \{\mu_1 x \mid x \in L\} = ...$

e. $\mu_2 L = \{\mu_2 x \mid x \in L\} = ...$

f. $\mu_3 L = \{\mu_1 x \mid x \in L\} = ...$

7. Dari tugas nomor 6a sampai 6f di atas tentukan himpunan yang berlainan!
8. Untuk $L = \{ \rho_0 , \mu_2 \}$ subgrup S_3 tentukan himpunan-himpunan berikut ini!

a. $L\rho_0 = \{x\rho_0 \mid x \in L\} = ...$

b. $L\rho_1 = \{x\rho_1 \mid x \in L\} = ...$

c. $L\rho_2 = \{x\rho_2 \mid x \in L\} = ...$

d. $L\mu_1 = \{x\mu_1 \mid x \in L\} = ...$

e. $L\mu_2 = \{x\mu_2 \mid x \in L\} = ...$

f. $L\mu_3 = \{x\mu_1 \mid x \in L\} = ...$

9. Dari tugas nomor 8a sampai 8f di atas tentukan himpunan yang berlainan!
10. Apakah $xL = Lx$ untuk setiap $x \in S_3$?

Himpunan-himpunan pada tugas nomor 1, 3, 6, dan 8 di atas disebut koset yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi

Misalkan G grup dan H subgrup G.

Untuk setiap a, b di G, didefinisikan $a \sim_L b$ jika dan hanya jika $a^{-1}b \in H$.

Aturan di atas mendefinisikan relasi ekivalensi pada G.

Klas ekivalensi yang memuat $a \in G$ adalah

$\bar{a} = \{ x \in G \mid a \sim_L x\} = \{ah \mid h \in H\}$.

Klas ekivalensi yang memuat $a \in G$ disebut *koset kiri* H di G, ditulis

$aH = \{ah \mid h \in H\}$.

Definisi

Misalkan G grup dan H subgrup G.

Untuk setiap a, b di G, didefinisikan $a \sim_R b$ jika dan hanya jika $ab^{-1} \in H$.

Aturan di atas mendefinisikan relasi ekivalensi pada G.

Klas ekivalensi yang memuat $a \in G$ adalah

$\bar{a} = \{ x \in G \mid a \sim_R x \} = \{ ha \mid h \in H \}$.

Klas ekivalensi yang memuat $a \in G$ disebut *koset kanan* H di G, ditulis

$Ha = \{ha \mid h \in H\}$.

Pada Tugas nomor 1, 3, 6, dan 8 nampak bahwa banyaknya elemen pada setiap koset sama dengan banyaknya elemen pada subgrupnya. Hal ini juga dinyatakan pada sifat berikut ini.

Teorema

Jika G grup, H subgrup G dan $a \in G$ maka $|aH| = |H| = |Ha|$.

Tugas nomor 2, 4, 6, dan 8 merupakan contoh menemukan koset yang berlainan. Hubungan antara banyaknya elemen pada grup berhingga, banyaknya elemen pada subgrup, dan banyaknya koset kiri atau kanan yang berlainan dinyatakan dalam Teorema Lagrange.

Teorema Lagrange

Jika G grup berhingga dan H subgrup G maka $|H|$ membagi $|G|$

2.1.4 Pembelajaran ACE

Siklus pembelajaran ACE dikembangkan oleh Ed Dubinsky. Siklus yang berulang terdiri atas tiga komponen yaitu (A) *Activities,* (C) *Classroom discussion*, dan (E) *Exercises done outside of class*. Pada komponen *Activities*, mahasiswa bekerja dalam kelompok untuk tugas-tugas yang dirancang khusus untuk membantu mahasiswa mengembangkan konstruksi kognitif yang benar yang disarankan oleh model konstruktivis yaitu membantu mahasiswa mengenkapsulasi Proses menjadi Objek. Pada siklus pembelajaran ACE, tugas-tugas diberikan melalui program komputer ISETL. Arnon, *et al*. (2014, h. 66) menyatakan ide pendekatan pedagogik ISETL berupa aktivitas komputer ini mendukung aktivasi mekanisme mental (yaitu interiorisasi dan enkapsulasi) yang menuntun pada perkembangan struktur mental (yaitu Proses dan Objek) yang mendasari formasi kognitif dari konsep matematik. Konstruksi konsep baru yang dimulai sebagai Aksi diterapkan pada Objek mental yang sudah ada. Dari sudut pandang pembelajaran, hal ini melibatkan tugas komputasional dengan perintah yang eksplisit dan contoh yang spesifik. Mahasiswa mengkonstruksi Aksi ketika mereka mengulang pada layar komputer apa yang tertulis pada teks, meramalkan hasil dari kode yang dijalankan, atau memodifikasi kode yang telah diberikan.

Refleksi pada Aksi menuntun pada interiorisasi dari Aksi ke Proses mental. Dalam pembelajaran, interiorisasi didukung oleh mengganti kode kalkulasi khusus dengan kalkulasi untuk nilai yang tidak ditentukan; yaitu komputasi ditransformasi mahasiswa dari kalkulasi khusus ke prosedur umum.

Ketika Aksi diterapkan pada Proses, Proses tersebut mungkin dienkapsulasi menjadi Objek kognitif. Dari sudut pandang pembelajaran, enkapsulasi mungkin terjadi ketika Proses diperlakukan sebagai *input* atau *output* program, digunakan sebagai subrutin dalam program yang lebih rinci, atau dioperasikan pada program. Namun, gaya mengajar ini tidak menyediakan buku teks yang baku. Menulis buku teks baru yang mendukung siklus mengajar ini, secara realistis tidak mungkin bagi sebagian besar instruktur, sehingga masing-masing instruktur harus menemukan cara sendiri dalam menggunakan buku teks agar mendukung bentuk pembelajaran ini.

Dalam pembelajaran berbasis konstruktivisme, guru bukanlah satu-satunya sumber informasi baru, melainkan penuntun ketika siswa bekerja untuk mengkonstruk pengetahuan baru mereka. Tugas guru juga mengatur situasi belajar, menilai kemajuan siswa, dan memodifikasi jika diperlukan. Guru menjadi partner dalam proses pembelajaran.

Untuk memfasilitasi pembelajaran matematik, guru harus menciptakan tugas-tugas yang melibatkan siswa dalam proses belajar mereka. Tugas-tugas ini harus relevan dengan siswa untuk memaksimalkan motivasi. Tugas-tugas juga harus berguna dan ada alasan untuk menyelesaikan masalah ini. Oleh karena itu, sebagian besar tugas-tugas berbasis pada situasi dunia nyata. Tugas matematik ini memberi peluang kepada siswa untuk membuat dan menguji *conjecture*. Siswa perlu mendapat peluang untuk menganalisis strategi solusi mereka.

Pada pembelajaran ACE, peran ISETL pada komponen *Activities* digantikan oleh LTM sehingga tugas-tugas pada LTM diarahkan untuk mendukung aktivasi mekanisme mental (yaitu interiorisasi dan enkapsulasi) yang menuntun pada perkembangan struktur mental (yaitu Proses dan Objek) yang mendasari formasi kognitif dari konsep matematik. Interiorisasi didukung oleh transformasi dari kalkulasi khusus ke prosedur umum. Enkapsulasi mungkin terjadi ketika Aksi diterapkan pada Proses. LTM ini dikembangkan oleh peneliti berdasarkan dekomposisi genetik yang telah disusun terlebih dahulu. Materi pada LTM belum pernah dikaji secara formal di dalam kelas. Melalui LTM ini mahasiswa mengkonstruksi struktur mental yang disusun dalam dekomposisi genetik. Fokus tugas ini adalah lebih pada untuk meningkatkan abstraksi reflektif atau mekanisme mental daripada memperoleh jawaban yang benar.

Setelah komponen *Activities* ini berlangsung, kelompok-kelompok berkumpul bersama dalam diskusi kelas (*Classroom discussion*) dimana dosen melakukan aktivitas dengan penekanan pada penyajian materi melalui tanya jawab. Peran dari dosen adalah membantu mahasiswa agar berhasil menghubungkan konsep-konsep bersama-sama. Kegiatan ini memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk merefleksikan pekerjaan mereka pada komponen *Activities*. Pada kegiatan ini, dosen mungkin memberikan definisi, penjelasan, dan menyajikan gambaran untuk menyatukan apa yang telah dipikirkan dan dikerjakan mahasiswa pada komponen *Activities*. Menurut Hanna & de Villiers (2012, h. 380, 385) dosen dapat menggunakan definisi sebagai dasar untuk diskusi kelas yang mengeksplorasi kesalahpahaman mahasiswa tentang prinsip-prinsip logis yang penting. Keakraban dengan prinsip-prinsip logis dan aplikasinya paling berguna ketika pengetahuan matematika mahasiswa tidak cukup, dengan sendirinya, untuk mengevaluasi kebenaran pernyataan matematis.

Di luar kelas, *Exercises* ditujukan kepada mahasiswa untuk bekerja dalam kelompok. Latihan soal terdiri atas soal-soal standar yang didesain untuk menguatkan kegiatan pada komponen *Activities* dan *Classroom discussion*. Latihan-latihan digunakan untuk membantu mahasiswa menguatkan kerangka kerja konseptual matematik yang sedang dipelajari. Selain itu, latihan soal membantu mendukung perkembangan konstruksi mental lebih lanjut seperti dikemukakan pada dekomposisi genetik. Latihan soal juga memandu mahasiswa untuk menerapkan apa yang telah mereka pelajari dan untuk mengingat ide matematik terkait. Hal ini sejalan dengan Gallian (2017, h. xv) yang menyatakan bahwa latihan memfasilitasi pemahaman, memberikan wawasan, dan mengembangkan kemampuan mahasiswa untuk melakukan pembuktian. Latihan-latihan tersebut sering menggambarkan definisi, konsep, dan teorema selanjutnya. Gallian juga menyatakan penelitian pendidikan telah menunjukkan cara belajar matematika yang efektif adalah dengan latihan soal. Durbin (2009, h. 9) mengemukakan cara terbaik belajar matematika adalah dengan latihan soal, termasuk membuktikan teorema.

Dalam penelitian ini, buku teks *A First Course in Abstract Algebra* karya J.B. Fraleigh digunakan sebagai panduan untuk menyusun bahan ajar. Tugas-tugas yang terdiri atas peluang untuk menggali konsep secara konkrit dalam penelitian ini dilakukan melalui Lembar Tugas Mahasiswa. Aktivitas ini membawa mahasiswa dari representasi konkrit ke konsep yang lebih abstrak melalui pertanyaan-pertanyaan yang memerlukan keterampilan berpikir tingkat tinggi dan argumentasi matematik.

Langkah-langkah pembelajaran ACE pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

Activities

1. Mahasiswa dibagi dalam kelompok heterogen yang terdiri atas 3-4 mahasiswa berdasarkan hasil tes KAM dan gaya kognitif.
2. Mahasiswa secara berkelompok mengerjakan Lembar Tugas Mahasiswa (LTM) yang berisi tugas-tugas untuk membantu mahasiswa mengkonstruksi struktur mental Aksi dan menginteriorisasinya menjadi Proses kemudian mengenkapsulasi menjadi Objek. LTM disusun berdasarkan dekomposisi genetik yang telah disusun dan dikerjakan sebelum perkuliahan berlangsung sebagai pekerjaan rumah.

Classroom Discusssion

(1) Dosen memandu diskusi tentang permasalahan yang muncul dalam *Activities*.
(2) Dosen menyajikan materi dengan tanya jawab.

Exercises

(1) Mahasiswa mengerjakan soal-soal latihan sebagai pekerjan rumah untuk menguatkan kerangka kerja konseptual matematik yang sedang dipelajari.
(2) Pembahasan soal-soal yang diperlukan mahasiswa dilaksanakan pada pertemuan berikutnya.

2.1.5 Model Pembelajaran Langsung

Magliaro, *et al*. (2005, h. 41) menyatakan bahwa model Pembelajaran Langsung adalah model pembelajaran yang berfokus pada interaksi antara guru dan siswa. Model ini diciptakan oleh Engelmann, *et al*. di University of Illinois di Champagne-Urbana. Berikut ini komponen- komponen Pembelajaran Langsung yang dikemukakan oleh Magliaro, *et al*. (2005, h. 44).

(1) Bahan dan kurikulum dipecah menjadi langkah-langkah kecil dan disusun menjadi prasyarat.

(2) Tujuan harus dinyatakan dengan jelas (dalam hal hasil atau kinerja siswa).

(3) Siswa diberi kesempatan untuk menghubungkan pengetahuan baru mereka dengan apa yang sudah mereka ketahui.

(4) Siswa diberi latihan.

(5) Siswa mendapat peluang tambahan untuk berlatih yang meningkatkan tanggung jawab dan kemandirian (dibimbing dan / atau mandiri; dalam kelompok dan / atau sendiri).

(6) Umpan balik diberikan setelah latihan atau serangkaian latihan.

Menurut Magliaro, *et al*. (2005, h. 45) model Pembelajaran Langsung awal terdiri atas tiga tahap yaitu (a) pengantar konten baru yang akan dipelajari, (b) presentasi utama pelajaran, dan (c) berlatih dengan umpan balik segera. Pada awalnya, latihan diarahkan oleh guru, dengan seluruh kelas menanggapi pertanyaan yang serba cepat dan strategis dari guru. Setelah guru yakin bahwa siswa siap untuk menerapkan konsep yang baru dipelajari, siswa dialihkan ke praktik mandiri, dipantau secara ketat oleh guru untuk memastikan hanya interpretasi dan aplikasi yang tepat dari materi yang ditargetkan. Pendekatan ini - pengenalan konsep baru, presentasi interaktif dan penerapan konsep, dan praktik terbimbing - menjadi standar untuk variasi pada model Pembelajaran Langsung.

Tabel 2.4 menyajikan model Pembelajaran Langsung dasar dan model Pembelajaran Langsung Engelmann (Magliaro, *et al*., 2005, h. 46).

Tabel 2.4 Model Pembelajaran Langsung Dasar dan Model Pembelajaran Langsung Engelmann

Pembelajaran Langsung Dasar	*Model Pembelajaran Langsung Engelmann*
Pendahuluan	Pengenalan konsep baru berdasarkan keterampilan dan pengetahuan yang dikuasai sebelumnya
Presentasi Utama dari Pelajaran	Presentasi: Penjelasan atau demonstrasi yang serba cepat, dirancang untuk memperoleh hanya satu interpretasi konsep. Konsep target harus diperkuat dengan contoh dan non-contoh yang sesuai.
Pelaksanaan	Siswa diberi kesempatan untuk merespon secara verbal, baik melalui serangkaian pertanyaan atau tugas, untuk menunjukkan pembelajaran mereka tentang konsep dan kemampuan mereka untuk menghubungkannya dengan contoh selanjutnya.
	Umpan balik: Guru mengkonfirmasi tanggapan siswa yang benar atau memberikan koreksi dan pengulangan item yang salah tangkap.
	Praktik mandiri: Setelah kerja kelompok, siswa terlibat dalam latihan mandiri dalam buku kerja. Guru memantau kemajuan dan memberikan bimbingan saat dibutuhkan.

Menurut Ponte & Quaresma (2016, h. 52) tujuan latihan adalah agar siswa menerapkan metode solusi yang sudah dipelajari. Namun, Tait-McCutcheon (2011, h. 327) berpendapat bahwa penggunaan drill dan kegiatan praktik bersifat lebih tradisional dan behavioristik, yang menunjukkan bahwa pengajaran dan pembelajaran fakta dasar mungkin lebih banyak pada Pembelajaran Langsung daripada konstruksi aktif.

Berdasarkan Tabel 2.4 model Pembelajaran Langsung adalah model pembelajaran yang digunakan dengan cara memberikan penjelasan kepada siswa terlebih dahulu, konsep, prinsip, dan definisi materi pelajaran serta memberikan contoh pemecahan masalah dalam bentuk ceramah, demonstrasi, dan penugasan. Siswa mengikuti pola yang ditetapkan guru secara cermat. Dalam Pembelajaran Langsung semua pembelajaran terpusat pada guru. Tujuan utama Pembelajaran Langsung adalah memindahkan pengetahuan, keterampilan, dan nilai-nilai kepada siswa. Pembelajaran langsung yang baik bertujuan pada kejelasan penjelasan dan demonstrasi, dengan siswa terlibat secara kognitif (Schuster, *et al*., 2018, h. 401). Sintak Model Pembelajaran Langsung dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

(1) Persiapan (*preparation)*

Tahap persiapan berkaitan dengan mempersiapkan mahasiswa untuk menerima materi pembelajaran.

(2) Penyajian (*presentation*)

Tahap penyajian adalah tahap penyampaian materi pembelajaran sesuai dengan persiapan yang telah dilakukan.

(3) Korelasi (*correlation*)

Tahap korelasi adalah tahap menghubungkan materi pembelajaran dengan pengalaman mahasiswa atau dengan hal-hal lain yang memungkinkan mahasiswa dapat menangkap keterkaitannya dengan struktur pengetahuan yang telah dimilikinya.

(4) Kesimpulan (*generalization*)

Tahap kesimpulan adalah tahap untuk memahami inti (*core*) dari materi pembelajaran yang telah disajikan.

(5) Aplikasi (*application*)

Tahap aplikasi adalah tahap untuk mengaplikasikan kemampuan mahasiswa setelah mahasiswa menyimak penjelasan guru berupa latihan soal.

2.1.6 Gaya Kognitif

Ausburn & Ausburn (Altun & Cakan, 2006, h. 290) mendefinisikan gaya kognitif sebagai " *... psychological dimensions that represent the consistencies in an individual's manner of ackquiring and processing information*". Messick (Altun & Cakan, 2006, h. 290) menyatakan *"cognitive styles deals with the manner* *in which people prefer to make sense out of their world by collecting, analyzing, evaluating, and interpreting data".* Kedua definisi tersebut berkaitan dengan konsistensi individu dalam memproses informasi. Dalam penelitian ini gaya kognitif adalah cara yang konsisten yang dilakukan seseorang dalam menangkap informasi,cara mengingat, cara berpikir, cara memecahkan masalah, menanggapi suatu tugas atau menanggapi berbagai jenis situasi lingkungannya.

Menurut Witkin, *et al.* (dalam Oh & Lim, 2005) ada tiga gaya kognitif yaitu *field independent* (FI), *field dependent* (FD), dan *field neutral* (FN). Mereka berpendapat bahwa "*individuals have different cognitive styles according to each individual's way of disembedding figures from the distracting surrounding*". Witkin, *et al.* (dalam Oh &Lim, 2005) menyatakan bahwa mahasiswa dengan gaya kognitif FI dan FD mempunyai karakteristik yang berbeda seperti tersaji pada Tabel 2.5.

Tabel 2.5 Karakteristik Mahasiswa FI dan FD

Field-Independent Learners	***Field-Dependent Learners***
Analytic, competitive, independent, and individualistic	*Sensitive to environtments*
Self-defined goals, strategies, and reinforcement	*Prefer externally defined goals and reinforcements, and clear definitions of desired outcomes*
Intrinsically motivated	*Extrinsically motivated*
Poor social skill/prefer individual project	*Group oriented, global, and socially-sensitive/prefer group project*
Well organized and structured in their learning	*Less structured, less autonomous*
Autonomous in cognitive restructuring skills	*Easily influenced by prevailing field or contex*

> *There are various recognized cognitive styles available in literature, among which are visual/haptic, visualizer/verbalizer, leveling/sharperning, serialist/holist, and field-dependent/independent. Although various forms of cognitive styles have been introduced and different instruments have been developed to asses them, Witkin et al's Group Embedded Figures Test (GEFT) has been applied most commonly* (Altun & Cakan, 2006, h. 290).

Ada dua alasan menggunakan GEFT, yang pertama yaitu instrumen ini merupakan tes non-verbal dan hanya memerlukan tingkat minimum keterampilan bahasa untuk mengerjakannya, dan yang kedua yaitu sifat psikometri dari instrumen tersebut telah diteliti dalam seting lintas budaya dan diterima karena sangat masuk akal.

Group Embedded Figures Test (GEFT) yang dikembangkan oleh Witkin, *et al.* (dalam Oh & Lim, 2005) didesain untuk mengukur tingkat *field-independency* individu dengan melacak bentuk-bentuk sederhana dalam gambar yang lebih kompleks. Instrumen tes ini terdiri atas tiga bagian dengan 25 item yaitu bagian pertama memuat tujuh item sebagai latihan, sedangkan bagian kedua dan ketiga memuat sembilan item sebagai tes (untuk dinilai). Total skor adalah banyaknya gambar yang dapat dibuat dengan benar pada bagian kedua dan ketiga tes ini dan skor maksimum yang mungkin adalah 18. Validitas dan reliabilitas tes ini telah teruji. *The GEFT had a reliability coefficient of* 0,82 *and was a standardized paper-pencil test, which measured visual perceptiveness* (Somyurek, *et al*., 2008, h. 35).

Ada beberapa norma untuk mengidentifikasi berbagai jenis gaya kognitif dan waktu untuk menyelesaikan GEFT:

(1) Berdasarkan manual GEFT Witkin *et al*. (1971), siswa yang mendapat skor 0-8 dikategorikan sebagai FD, mereka yang mendapat skor 9-14 dikategorikan sebagai FN, dan mereka yang mendapat skor 15 sampai 18 dikategorikan sebagai FI (Oh & Lim, 2005, h. 57).

(2) Total waktu untuk menyelesaikan tes itu 12 menit dan untuk menentukan FD seorang individu, aturan 27% yang dibuat oleh Cureton (1957) diterapkan untuk tujuan klasifikasi. Dengan demikian, berdasarkan skor mentah dari individu pada GEFT itu, skor di atas 27% diidentifikasi sebagai *field-independent* (FI) dan skor dibawah 27% sebagai *field-dependent* (FD) (Altun & Cakan 2006, h. 293).

(3) Rumus Al-Banna digunakan untuk mengklasifikasi siswa sebagai FD, FN, dan FI. Siswa yang mendapat skor lebih dari seperempat dari standar deviasi (SD) di atas nilai rata-rata digolongkan sebagai FI, sedangkan siswa yang mendapat skor di bawah seperempat dari SD di bawah nilai rata-rata digolongkan sebagai FD, dan antara skor plus atau minus seperempat dari SD sekitar rata-rata

digolongkan sebagai FN. Siswa diberi waktu 15 menit untuk menyelesaikan tes (Cataloglu & Ates, 2014, h. 7).

Pada penelitian ini pengelompokkan gaya kognitif berdasarkan manual GEFT Witkin *et al*. (dalam Oh & Lim, 2005, h. 57-58) yaitu mahasiswa yang mendapat skor 0-8 dikategorikan sebagai FD, mereka yang mendapat skor 9-14 dikategorikan sebagai FN, dan mereka yang mendapat skor 15 sampai 18 dikategorikan sebagai FI. Tes GEFT diberikan dalam 15 menit.

2.1.7 Teori Belajar yang Mendukung

Pada penelitian ini, terdapat beberapa teori belajar yang digunakan sebagai teori pendukung. Teori belajar yang dijadikan sebagai teori pendukung dalam penelitian ini adalah belajar dalam pandangan Ausubel, Piaget, Vygotsky dan Bruner.

2.1.7.1 Belajar Bermakna dalam Pandangan Ausubel

Belajar dalam pandangan Ausubel terkenal dengan belajar bermakna dan pentingnya pengulangan sebelum belajar dimulai. Bahan pelajaran yang dipelajari haruslah bermakna (*meaningful*), artinya pelajaran baru haruslah dikaitkan dengan konsep-konsep yang telah ada agar konsep-konsep baru benar-benar terserap sehingga intelektual dan emosional siswa terlibat di dalam kegiatan belajar mengajar. Ausubel membedakan antara belajar menemukan dan belajar menerima Pada belajar menerima siswa hanya menerima sebuah pelajaran sehingga siswa hanya menghafalkannya, tetapi pada belajar menemukan, konsep ditemukan sendiri oleh siswa. Jika siswa aktif melibatkan dirinya di dalam menemukan suatu prinsip dasar, siswa itu akan mengerti konsep itu lebih baik, ingat lebih lama dan akan mampu menggunakan konsep tersebut di konteks yang lain.

Pembelajaran ACE sejalan dengan Teori Ausubel yang dirancang dalam penelitian ini. Teori Ausubel mengemukakan tentang belajar bermakna yang mengaitkan informasi-informasi baru dengan struktur kognitif yang telah dimiliki oleh mahasiswa. Pada pembelajaran ACE, mahasiswa bekerja dalam kelompok dengan konsep-konsep yang telah mereka miliki. Pengaitan antara pengetahuan sebelumnya yang telah didapat untuk mendapatkan pengetahuan yang baru disajikan pada Lembar Tugas Mahasiswa.

2.1.7.2 Belajar dalam Pandangan Piaget

Menurut Rifa"i & Anni (2011, h. 31), ada empat konsep yang diajukan oleh Piaget, yaitu skema, asimilasi, akomodasi, dan ekuilibrium. Skema menggambarkan tindakan mental dan fisik dalam mengetahui dan memahami objek. Skema meliputi kategori pengetahuan dan proses memperoleh pengetahuan. Asimilasi merupakan proses memasukan informasi ke dalam skema yang telah dimiliki. Proses ini bersifat subjektif karena seseorang cenderung memodifikasi pengalaman ataupun informasi yang agak sesuai dengan keyakinan yang telah dimiliki sebelumnya. Akomodasi merupakan proses pengubahan skema yang telah dimiliki dengan informasi yang baru. Ekuilibrium merupakan keseimbangan antara asimilasi dan akomodasi. Individu mengalami kemajuan karena adanya perkembangan kognitif, maka penting untuk mempertahankan keseimbangan antara menerapkan pengetahuan yang telah dimiliki sebelumnya (asimilasi) dan mengubah perilaku karena adanya pengetahuan baru (akomodasi).

Piaget juga menjelaskan tentang tahap-tahap perkembangan kognitif menurut perkiraan usia. Piaget menyatakan bahwa terdapat empat tahap perkembangan kognitif meliputi tahap sensorimotor, pra-operasional, operasional konkret, dan operasional formal. Menurut Rifai & Anni (2011: 25-27), tahap-tahap perkembangan kognitif tersebut dijabarkan pada Tabel 2.6.

Tabel 2.6 Tahap-Tahap Perkembangan Kognitif Menurut Piaget

Tahap	**Perkiraan usia**	**Kemampuan-kemampuan utama**
Sensorimotor	0-2 tahun	Anak memperoleh pemahaman tentang objek yang tidak dapat dilihat, didengar, dan disentuh
Pra-operasional	2-7 tahun	Anak mampu menggunakan simbol-simbol untuk menyatakan objek-objek dunia. Pemikiran masih egosentris dan sentrasi.
Operasional konkret	7-11 tahun	Anak mampu mengoperasikan berbagai logika benda konkret.
Operasional Formal	11 tahun dan seterusnya	Pemikiran abstrak dan murni simbolis mungkin dilakukan.

Piaget berpendapat bahwa proses berpikir manusia merupakan suatu perkembangan yang bertahap dari berpikir konkret ke abstrak. Mengingat usia mahasiswa yang mengambil mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1 sekitar 18 tahun maka berdasarkan Tabel 2.6 di atas mahasiswa berada pada tahap operasional formal. Pada tahap ini mahasiswa mampu berpikir abstrak dan simbolis.

Implikasi penting dalam pembelajaran dari belajar dalam pandangan Piaget dikemukakan oleh Trianto (2007, h. 16) sebagai berikut.

(1) Memusatkan pada proses berpikir atau proses mental, dan bukan sekadar pada hasilnya.

(2) Mengutamakan peran siswa dalam berinisiatif sendiri dan keterlibatan aktif dalam kegiatan pembelajaran. Di dalam kelas, penyajian pengetahuan jadi *(ready-made)* tidak mendapat penekanan, melainkan anak didorong menemukan sendiri pengetahuan itu melalui interaksi spontan dengan lingkungannya.

(3) Memaklumi akan adanya perbedaan individual dalam hal kemajuan perkembangan. Teori Piaget mengasumsikan bahwa seluruh siswa tumbuh

melewati urutan perkembangan yang sama, namun pertumbuhan tersebut berlangsung pada kecepatan berbeda.

Berdasarkan uraian di atas, mahasiswa berada dalam tahap operasional formal yang seharusnya tidak mengalami kesulitan dalam mempelajari materi yang memerlukan pemikiran abstrak dan menggunakan simbol-simbol seperti pada Teori grup.

2.1.7.3 Belajar dalam Pandangan Vygotsky

Vygotsky sebagaimana dikutip oleh Rifa‟i & Anni (2011, h. 34-35) memandang bahwa pengetahuan dipengaruhi situasi dan bersifat kolaboratif, artinya pengetahuan didistribusikan di antara orang dan lingkungan, yang mencakup objek artefak, alat, buku, dan komunitas tempat orang berinteraksi dengan orang lain. Danoebroto (2015, h. 194) menjelaskan bahwa teori Vygostky menekankan adanya pengaruh budaya terhadap perkembangan kognitif anak. Perkembangan pemikiran anak dipengaruhi oleh interaksi sosial dalam konteks budaya di tempat anak tersebut dibesarkan. Vygotsky (Epp, 1998, h. 713) menunjukkan bahwa apa yang dapat dilakukan siswa ketika mereka bekerja sepenuhnya sendiri sangat berbeda dari apa yang dapat mereka capai dengan bimbingan seorang guru; pekerjaan yang mereka lakukan dengan bantuan guru hari ini memungkinkan mereka untuk mencapai sukses sendiri kelak. Dapat dikatakan bahwa fungsi kognitif berasal dari situasi sosial.

Scaffolding adalah teknik pembelajaran yang didasarkan atas teori belajar konstruksivisme Vygotsky, dimana prinsip dari teori belajar konstruktivisme itu sendiri adalah menjadikan peserta didik sebagai pelaku yang aktif dan utama dalam pembelajaran. Menurut Vygotsky sebagaimana dikutip oleh Suyono & Hariyanto (2016: 113), *scaffolding* adalah sebuah teknik memberikan bantuan yang diberikan oleh orang yang lebih ahli (guru atau teman sesama peserta didik yang lebih pandai) sepanjang sesi pengajaran agar peserta didik beranjak dari zona aktual menuju zona potensial. Setelah kompetensi peserta didik meningkat, bimbingan dikurangi. Berdasarkan hal tersebut, *scaffolding* merupakan kegiatan memberikan bantuan kepada peserta didik pada tahap awal pembelajaran dan akan berkurang tingkatannya hingga peserta didik mampu menyelesaikan sendiri secara tanggung jawab. Bantuan yang diberikan dapat berupa petunjuk, peringatan, dorongan, menguraikan masalah pada langkah-langkah pemecahan, memberi contoh atau hal-hal lain yang memungkinkan peserta didik dapat mandiri. Dalam pembelajaran *scaffolding*, sebagaimana dikutip (Shabani, *et al*., 2010, h. 238) Vygotsky menyampaikan satu konsep penting yaitu *zone of proximal development* (ZPD).

Vygotsky mengemukakan beberapa idenya tentang ZPD yaitu serangkaian tugas yang terlalu sulit dikuasai anak secara sendirian, tetapi dapat dipelajari dengan bantuan orang dewasa atau anak yang lebih mampu. Untuk memahami batasan ZPD anak, terdapat batasan atas, yaitu tingkat tanggung jawab atau tugas tambahan yang dapat dikerjakan anak dengan bantuan instruktur yang mampu. Anak dapat menyelesaikan tugas-tugas dan memecahkan masalah ketika di bawah bimbingan orang dewasa atau ketika berkolaborasi dengan teman sebaya yang lebih kompeten. Diharapkan setelah pemberian bantuan ini anak ketika melakukan tugas sudah mampu tanpa bantuan orang lain dan batas bawah, yang dimaksud adalah tingkat problem yang dapat dipecahkan oleh anak seorang diri (Rifa‟i & Anni, 2011, h. 35). Implikasi teori Vygotsky dalam pembelajaran matematika, antara lain: (1) anak belajar secara bertahap dari materi yang mudah ke materi yang sulit, (2) anak belajar dari materi matematika yang konkrit ke materi matematika yang abstrak, dan (3) anak belajar matematika melalui bimbingan dan bantuan orang lain yang lebih memahami.

Berdasarkan uraian di atas, belajar dalam pandangan Vygotsky ini mendukung pembelajaran ACE yang digunakan dalam penelitian ini. Pada pembelajaran ACE ini, mahasiswa bekerja dan berdiskusi secara berkelompok yang terdiri atas 3-5 orang untuk menyelesaikan Lembar Tugas Mahasiswa dan latihan soal yang disajikan. Pada saat kegiatan diskusi tersebut dibutuhkan bimbingan antar teman, sehingga bagi mahasiswa yang berkemampuan kurang mendapat bimbingan dari temannya yang lebih paham.

Anghileri (2006) menyebutkan tiga tingkatan dari penggunaan *scaffolding* yang merupakan dukungan dalam pembelajaran matematika.

(1) Tingkat I – *Environtmental Provisions* (penataan lingkungan)

Pada tingkatan ini yaitu penataan lingkungan belajar yang memungkinkan berlangsungnya pembelajaran tanpa intervensi langsung dari guru. Guru dapat mengkondisikan lingkungan yang mendukung kegiatan belajar peserta didik (*classroom organization*), membentuk kelompok (*peer collaboration*), mengatur tempat duduk, menyediakan media atau gambar-gambar yang sesuai dengan masalah yang diberikan.

(2) Tingkat II- *Explaining*, *Reviewing*, dan *Restructuring* (menjelaskan, meninjau/memeriksa, dan membangun ulang pemahaman)

Pada tingkat kedua, interaksi guru semakin ditingkatkan untuk mengembangkan kemampuan peserta didik dalam belajar matematika. Guru dan peserta didik terlibat langsung dalam suatu interaksi, khususnya dalam matematika. Bentuk interaksi yang dimaksud yaitu:

a. *Explaining* (menjelaskan), guru menerapkan cara untuk menyampaikan konsep yang dipelajari peserta didik. Pada tahap ini guru memfokuskan perhatian peserta didik pada aspek-aspek yang berhubungan dengan matematika.
b. *Reviewing* (meninjau/memeriksa), saat peserta didik terlibat dengan tugas, mereka tidak selalu dapat mengidentifikasi aspek-aspek yang berkaitan dengan masalah yang akan dipecahkan. Guru membantu peserta didik dengan cara memfokuskan kembali peserta didik dengan memberi kesempatan lebih lanjut untuk mengembangkan sendiri daripada tergantung pada guru.
c. *Restructuring* (membangun ulang pemahaman), saat peserta didik tidak dapat menyelesaikan permasalahan matematika, guru dapat menangani hal tersebut dengan membuat permasalahan yang abstrak tersebut menjadi permasalahan yang lebih konkret, menyederhanakan permasalahan tersebut, mengamati peserta didik dalam menyelesaikan permasalahan, melakukan negosiasi makna dengan peserta didik sebelum dilakukan penggeneralisasian untuk menghindari kesalahpahaman.

(3) Tingkat III *Developing Conceptual Thinking* (mengembangkan pemikiran konseptual)

Tingkat ini menuntut banyak kemampuan pembelajaran matematika untuk mengulang prosedur yang telah dipelajari untuk menyelesaikan masalah. Tingkat tertinggi dari *scaffolding* ini terdiri atas interaksi pengajaran secara jelas mengembangkan pemikiran konseptual dengan menciptakan kesempatan untuk mengungkapkan pemahaman pada peserta didik.

Tabel 2.7 menyajikan kegiatan pada tiap tingkatan *scaffolding* menurut Anghileri yang dilakukan dalam penelitian ini.

Tabel 2.7 Kegiatan Pada Tiap Tingkatan *Scaffolding*

Tingkatan *Scaffolding*	**Kegiatan yang dilakukan pada pembelajaran ACE**
Environtmental Provisions	*Activities* 1. Mengkondisikan mahasiswa untuk menerima pembelajaran. 2. Memberikan LTM yang terstruktur.
Explaining	*Classroom discussion* 1. Membimbing mahasiswa hingga memahami konsep pada materi grup yang diberikan
Reviewing	*Classroom discussion* 1. Meminta mahasiswa untuk lebih teliti dalam membaca definisi dan teorema. 2. Meminta mahasiswa untuk menuliskan informasi-informasi yang diperoleh dari definisi dan teorema.
Restructuring	*Classroom discussion* 1. Memberikan penjelasan mengenai konsep yang belum dipahami oleh mahasiswa 2. Memberikan penjelasan pada mahasiswa untuk menuliskan konsep dengan tepat.
Developing Conceptual Thinking	*Exercises* 1. Memberikan seperangkat soal latihan mengkonstruksi bukti. 2. Mengajukan pertanyaan arahan hingga mahasiswa dapat menyelesaikan permasalahan secara bertanggung jawab. 3. Meminta mahasiswa untuk merefleksi jawaban yang telah dibuatnya sehingga sesuai dengan apa yang ditanyakan pada soal.

2.1.7.4 Belajar menurut pandangan Bruner

Hawa (2014) menjelaskan tiga proses kognitif yang terjadi dalam belajar, yaitu (1) proses perolehan informasi baru, (2) proses mentransformasikan informasi yang diterima dan (3) menguji relevansi dan ketepatan pengetahuan. Teori belajar Bruner terbagi atas tiga model tahapan, yaitu sebagai berikut.

(1) Model Tahap Enaktif

Pada tahap enaktif, peserta didik belajar suatu pengetahuan dengan cara dipelajari secara aktif, menggunakan benda-benda konkret atau menggunakan situasi nyata tanpa menggunakan imajinasi peserta didik atau kata-kata. Peserta didik akan memahami sesuatu karena berbuat atau melakukan sesuatu.

(2) Model Tahap Ikonik

Dalam tahap ini, peserta didik dapat memperoleh pengetahuan melalui perwujudan atau gambaran secara visual baik itu dengan gambar maupun diagram yang menggambarkan situasi konkret yang terdapat pada tahap enaktif.

(3) Model Tahap Simbolis

Pada tahap ini, peserta didik tidak lagi terikat dengan objek atau gambar seperti pada tahap sebelumnya. Peserta didik sudah mampu menggunakan notasi atau simbol tanpa ketergantungan objek nyata. Pada tahap simbolis, pembelajaran direpresentasikan dalam bentuk simbol-simbol abstrak, yaitu simbol-simbol arbiter yang dipakai berdasarkan kesepakatan orang-orang dalam bidang yang bersangkutan, baik simbol verbal, lambang matematika, maupun lambang abstrak yang lain.

Selain mengembangkan teori belajar kognitif, Bruner mengembangkan teorema yang berkaitan dengan pengajaran matematika. Sebagaimana dikutip dari Hawa (2014), dalil-dalil tersebut antara lain:

(1) Teorema Konstruksi/ Penyusunan *(Construction Theorem)*

Teorema ini menjelaskan bahwa cara yang terbaik bagi peserta didik untuk mempelajari sesuatu atau prinsip dalam matematika adalah dengan mengonstruksi atau melakukan penyusunan sebagai sebuah representasi dari konsep atau prinsip tersebut.

(2) Teorema Notasi *(Notation Theorem)*

Teorema ini mengatakan bahwa representasi dari sesuatu materi matematika akan lebih mudah dipahami oleh peserta didik apabila di dalam representasi itu digunakan notasi yang sesuai dengan tingkat perkembangan kognitif peserta didik.

(3) Teorema kekontrasan dan Variasi *(Contrast and Variation Theorem)*

Di dalam teorema kekontrasan dan variasi dikemukakan bahwa sesuatu konsep matematika akan lebih mudah dipahami oleh peserta didik apabila konsep itu dikontraskan dengan konsep-konsep yang lain, sehingga perbedaan antara konsep itu dengan konsep-konsep yang lain menjadi jelas.

(4) Teorema Konektivitas atau Pengaitan *(Connectivity Theorem)*

Di dalam teorema konektivitas disebutkan bahwa setiap konsep, setiap prinsip, dan setiap keterampilan dalam matematika berhubungan dengan konsep-konsep, prinsip-prinsip, dan keterampilan-keterampilan yang lain.

Penelitian ini dilakukan pada mahasiswa yang berada pada tahap simbolis, yakni mahasiswa sudah mampu menggunakan notasi atau simbol-simbol matematika yang mendukung kemampuan mengkonstruksi bukti. Pembelajaran matematika dengan Pembelajaran ACE mengarahkan mahasiswa untuk mengetahui hubungan konsep yang sudah diketahui dengan konsep baru. Hal ini sesuai dengan teorema yang dinyatakan oleh Bruner.

2.2 Kajian Hasil Penelitian yang Relevan

Penelitian Ndlovu & Brijlall (2015) menunjukkan bahwa sebagian besar peserta didik percaya diri dalam menerapkan algoritma tetapi mengalami kesulitan dalam menjawab pertanyaan yang mengharuskan mereka menjelaskan alasannya. Kemampuan membuktikan diperingkat oleh Balacheff (1988) (dalam Coe & Ruthven, 1994, h. 44) menjadi 4 yaitu empirisisme sederhana (*naïve empiricism*), eksperimen dasar (*crucial experiment*), contoh umum (*generic example*), dan eksperimen penalaran (*thought experiment*). Empirisisme sederhana meliputi verifikasi pernyataan melalui melihat beberapa kasus, tanpa generalisasi. Eksperimen dasar melibatkan uji kasus tertentu yang dipilih untuk menjadi khas dan tidak biasa. Contoh umum meliputi verifikasi pernyataan berdasarkan operasi dan aspek contoh umum, yang mewakili suatu kelas objek. Eksperimen penalaran memberikan verifikasi melalui operasi-operasi dan sifat-sifat matematika, tanpa menggunakan contoh.

Sowder & Harel (1998) mengklasifikasi berdasarkan skema bukti menjadi 3 kategori utama yaitu skema bukti berbasis eksternal, skema bukti empris, dan skema bukti analitis. Berdasarkan proses menulis bukti, Weber (2004) mengklasifikasikan menjadi 3 kategori yaitu bukti prosedural, bukti sintaktis, dan bukti semantik. Isnarto (2014) mengungkap 6 aspek yang perlu diperhatikan dalam konstruksi bukti matematis yakni langkah awal, alur pembuktian, konsep terkait, argumen, ekspresi kunci, dan bahasa pembuktian.

Arnawa (2009) secara statistik menguji kemampuan memvalidasi bukti mahasiswa yang memperoleh pembelajaran Aljabar Abstrak berdasarkan teori APOS dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran Aljabar Abstrak secara konvensional/biasa. Sowder dan Harel (2003) menganalisis keefektivan perlakuan pembelajaran mengenai bukti. Bayata & Tarmizia (2010) menganalisis korelasi antara kinerja pemecahan masalah aljabar dan dua strategi kognitif. Schwarz & Kaiser (ICMI 2009, h. 2-194) mengkaji kemampuan calon guru dalam mengerjakan bukti formal.

Beberapa kajian berbasis APOS melaporkan bahwa mekanisme enkapsulasi adalah yang paling sulit. Sfard (1991, h. 30) mengungkap kesulitan yang muncul ketika Proses diubah enjadi Objek. Trigueros & Martinez-Planell (2010) melakukan kajian tentang fungsi dua variabel dengan mendesain wawancara untuk mendapatkan informasi tentang komponen-komponen dekomposisi genetik pendahuluan yang diusulkan. Karena ada konstruksi-konstruksi yang tidak diperkirakan dalam dekomposisi genetik pendahuluan, maka dilakukan penghalusan. Dekomposisi genetik yang dihaluskan diuji dalam kajian yang kedua pada tahun 2012 dan hasilnya menunjukkan bahwa itu merupakan model konstruksi mental mahasiswa yang baik (Arnon, *et al*., 2014, h. 106). Kajian lain oleh Roa-Fuentes & Oktaç (2012) dengan melakukan wawancara untuk mendapatkan dekomposisi genetik pendahuluan yang mereka usulkan untuk konsep transformasi linear (Arnon, *et al*., 2014, h. 106). Cottrill, *et al*. (1996, h. 190) mengkaji tentang kesulitan mahasiswa dihubungkan dengan konsepsi dinamik.

Beberapa penelitian menganalisis pemahaman konsep aljabar abstrak dari perspektif teori APOS. Brown *et al*. (1997) menganalisis pemahaman tentang pengertian operasi biner, grup dan subgrup; Asiala *et al*. (1998) fokus pada pengembangan pemahaman mahasiswa tentang permutasi dan simetri; Asiala (1997a, h. 242) melakukan penelitian tentang bagaimana mahasiswa mengkonstruksi pemahaman mereka dalam konsep-konsep aljabar abstrak tertentu, yaitu koset, normalitas, dan grup kuosien. Hazzan (1999, h. 84) menganalisis proses mental mahasiswa ketika mereka memecahkan masalah dalam aljabar abstrak.

2.3 Kerangka Teoretis Penelitian

Bourbaki menyatakan Teori grup merupakan salah satu teori aksiomatis yang tertua dan paling sederhana. Pada Teori Grup, mahasiswa dapat mempelajari pentingnya bahasa yang tepat (*precise*) dalam matematika dan tentang peran definisi dalam mendukung ketepatan tersebut. Mahasiswa calon guru penting mempelajari materi ini karena dapat membantu guru untuk menghubungkan matematika lanjut dengan matematika sekolah dalam hal memperkuat dan memperdalam pemahaman mereka tentang matematika yang akan mereka ajarkan. Bukti matematik merupakan salah satu dari karakteristik berpikir matematik lanjut, dan bukti memainkan peran penting dalam pembelajaran aljabar abstrak.

Menurut Dubinsky, abstraksi reflektif dapat menjadi alat yang ampuh dalam menggambarkan perkembangan mental konsep-konsep matematik yang lebih lanjut. Ada lima jenis abstraksi reflektif atau mekanisme mental, yaitu interiorisasi, koordinasi, reversal, enkapsulasi, dan generalisasi, yang menuntun kepada konstruksi struktur mental Aksi, Proses, Objek, dan Skema (APOS). Kedalaman dan kompleksitas pemahaman konsep individu bergantung pada kemampuan untuk membangun koneksi diantara struktur mental yang mendukungnya.

Dekomposisi genetik merupakan model hipotesis yang menggambarkan struktur dan mekanisme mental yang mungkin diperlukan peserta didik untuk mempelajari konsep matematik tertentu. Konsep matematik baru seringkali muncul sebagai transformasi dari konsep yang sudah ada. Dengan demikian, dekomposisi genetik terdiri atas deskripsi Aksi-Aksi yang perlu dilakukan peserta didik pada Objek mental dan terus menyertakan penjelasan bagaimana Aksi-Aksi itu diinteriorisasi menjadi Proses-Proses. Agar dipahami sebagai sesuatu yang dapat ditransformasi, Proses dienkapsulasi menjadi Objek mental. Sangat mungkin bahwa sebuah konsep terdiri atas beberapa Aksi, Proses, dan Objek yang berbeda. Perbedaan pekerjaan mengungkap contoh-contoh dimana konstruksi mental perlu dibuat. Ketidakberhasilan dalam menyelesaikan tugas menunjukkan mahasiswa belum membuat konstruksi mental yang diperlukan, sedangkan keberhasilan menyelesaikan tugas menunjukkan konstruksi mental telah dibuat (Arnon, *et al*., 2014, h. 34). Hal yang mungkin untuk meyakinkan apakah mahasiswa telah mengkonstruksi objek mental adalah berdasarkan pada cara mereka mengatakan dan menulis tentang konsep (Tall, *et al*., 2000).

Teori APOS dan aplikasinya dalam mengajar didasarkan pada asumsi bahwa seseorang tidak mempelajari konsep matematik secara langsung. Belajar terfasilitasi jika individu memiliki struktur mental yang memadai untuk konsep matematik tertentu. Jika tidak ada struktur mental yang memadai maka belajar konsep hampir tidak mungkin.

Asumsi di atas mengakibatkan bahwa tujuan mengajar harus terdiri atas strategi untuk membantu peserta didik membangun struktur mental yang memadai, dan membimbing mereka untuk menerapkan struktur mental tersebut untuk mengkonstruk pemahaman konsep matematik mereka.

Model pembelajaran kooperatif merupakan kegiatan pembelajaran dengan cara berkelompok untuk bekerja sama saling membantu mengkonstruk konsep, menyelesaikan persoalan, atau inkuiri. Selain unggul dalam membantu peserta didik memahami konsep-konsep sulit, pembelajaran kooperatif sangat berguna untuk membantu peserta didik menumbuhkan kemampuan bekerja sama, berfikir kritis, dan kemampuan membantu teman.

LTM adalah lembar tugas yang berisikan informasi dan interaksi dari dosen kepada mahasiswa agar dapat mengerjakan sendiri aktivitas belajar melalui praktik atau penerapan hasil-hasil belajar untuk mencapai tujuan instruksional. Lembar tugas ini sangat baik dipergunakan dalam strategi ekspositoris. Dalam strategi ekspositoris LTM ini sebaiknya dirancang dan dikembangkan oleh dosen sendiri sesuai dengan pokok bahasan dan tujuan pembelajaran.

Pembelajaran ACE terdiri atas tiga tahap yaitu (A) *Activities*, (C) *Classroom discussion*, dan (E) *Exercises done outside of class*. Peran ISETL pada komponen *Activities* digantikan oleh LTM sehingga tugas-tugas pada LTM diarahkan untuk mendukung aktivasi mekanisme mental (yaitu interiorisasi dan enkapsulasi) yang menuntun pada perkembangan struktur mental (yaitu Proses dan Objek) yang mendasari formasi kognitif dari konsep matematik. Interiorisasi didukung oleh transformasi dari kalkulasi khusus ke prosedur umum. Enkapsulasi mungkin terjadi ketika Aksi diterapkan pada Proses. LTM ini dikembangkan berdasarkan dekomposisi genetik yang telah disusun terlebih dahulu. Melalui LTM ini mahasiswa mengkonstruksi struktur mental yang disusun dalam dekomposisi genetik. Fokus tugas ini adalah lebih pada untuk meningkatkan abstraksi reflektif atau mekanisme mental daripada memperoleh jawaban yang benar.

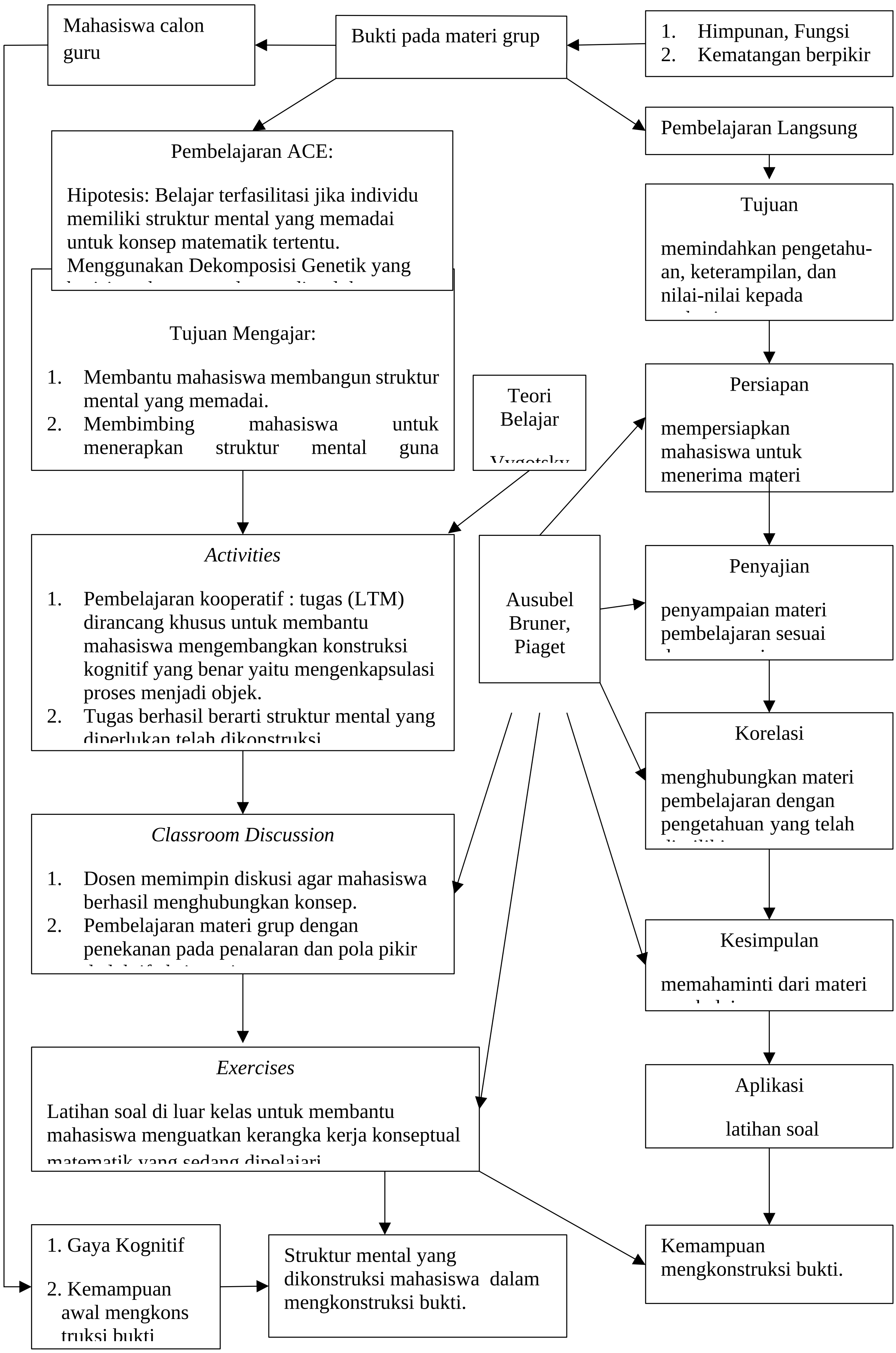
Pada akhir tahap *Activities* ini, kelompok-kelompok berkumpul bersama dalam diskusi kelas (*Classroom discussion*) dimana dosen memimpin jalannya diskusi diantara kelompok-kelompok. Peran dari dosen adalah membantu mahasiswa agar berhasil menghubungkan konsep-konsep bersama-sama. Kegiatan ini memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk merefleksikan pekerjaan mereka pada tahap *Activities*. Ketika dosen memandu diskusi, dosen mungkin memberikan definisi, penjelasan, dan menyajikan gambaran untuk menyatukan apa yang telah dipikirkan dan dikerjakan mahasiswa pada tahap *Activities*.

Di luar kelas, *Exercises* ditujukan kepada mahasiswa untuk bekerja dalam kelompok. Latihan soal terdiri atas soal-soal standar yang didesain untuk menguatkan kegiatan pada tahap *Activities* dan *Classroom discussion*. Latihan-latihan digunakan untuk membantu mahasiswa menguatkan kerangka kerja konseptual matematik yang sedang dipelajari. Selain itu, latihan soal membantu mendukung perkembangan konstruksi mental lebih lanjut seperti dikemukakan pada dekomposisi genetik. Latihan soal juga memandu mahasiswa untuk menerapkan apa yang telah mereka pelajari dan untuk mengingat ide matematik terkait.

Gaya kognitif adalah cara yang konsisten yang dilakukan seseorang dalam menangkap informasi, cara mengingat, cara berpikir, cara memecahkan masalah, menanggapi suatu tugas atau menanggapi berbagai jenis situasi lingkungannya. Ada tiga gaya kognitif yaitu *field independent* (FI), *field neutral* (FN), dan *field dependent* (FD).

Kematangan matematik diperlukan untuk mempelajari aljabar abstrak. Prasyarat untuk mempelajari aljabar abstrak antara lain himpunan dan fungsi. Mengacu pada hal ini, mahasiswa dapat dikelompokkan berdasarkan kemampuan awal mengkonstruksi bukti mahasiswa pada materi himpunan dan fungsi. Selain karena himpunan dan fungsi merupakan prasyarat juga karena objek pada struktur grup adalah himpunan dan operasi biner yang tidak lain merupakan fungsi.

Bagan kerangka berpikir disajikan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Bagan Kerangka Berpikir

Hipotesis penelitian ini adalah sebagai berikut.

(1) Kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa pada pembelajaran ACE mencapai ketuntasan.

(2) Rata-rata kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa pada pembelajaran ACE lebih dari rata-rata kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa pada pembelajaran Langsung.

BAB V
SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

5.1.1 Kemampuan Awal Mengkonstruksi Bukti

Kemampuan awal mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti masih rendah baik dari sisi banyaknya mahasiswa yang tuntas secara individu maupun dari sisi rata-rata. Kemampuan awal mengkonstruksi bukti pada kelas pembelajaran ACE belum mencapai ketuntasan klasikal sedangkan rata-rata kemampuan awal mahasiswa pada kelas pembelajaran ACE dan kelas pembelajaran Langsung tidak berbeda secara signifikan.

5.1.2 Kualitas Pembelajaran ACE

Perangkat yang digunakan pada pembelajaran ACE termasuk pada rentang penilaian baik dan sangat baik. Berdasarkan hasil uji empirik, perangkat tes memenuhi kriteria tes yang baik sehingga layak digunakan. Proses pembelajaran ACE berlangsung dengan kriteria antara baik dan sangat baik. Hasil belajar yang dicapai mahasiswa pada pembelajaran ACE mencapai ketuntasan klasikal dan rata-rata kemampuan mengkonstruksi bukti pada kelas yang dikenai pembelajaran ACE lebih tinggi daripada pada kelas yang dikenai pembelajaran Langsung.

5.1.3 Struktur Mental yang Dikonstruksi Mahasiswa

Struktur mental yang dikonstruksi mahasiswa berdasarkan KAM dan gaya kognitif adalah sebagai berikut.

(1) Skema grup mahasiswa FI-R belum ditematisasi dan belum koheren. Konstruksi struktur mental untuk subgrup adalah Aksi. Skema subgrup belum ditematisasi dan belum koheren. Dengan dukungan struktur mental Aksi untuk grup yang dikonstruksi oleh FI-R, Skema homomorfisma belum ditematisasi.

(2) Skema grup mahasiswa FI-S sudah ditematisasi dan sudah koheren. Skema subgrup sudah ditematisasi dan sudah koheren. Konstruksi struktur mental

untuk subgrup adalah Objek. Dengan dukungan struktur mental Aksi untuk grup yang dikonstruksi oleh FI-S, Skema homomorfisma belum ditematisasi.

(3) Skema grup mahasiswa FI-T sudah ditematisasi dan sudah koheren. Konstruksi struktur mental untuk subgrup adalah Objek. Skema subgrup sudah ditematisasi dan sudah koheren. Dengan dukungan struktur mental Objek untuk grup yang dikonstruksi oleh FI-T, Skema homomorfisma sudah ditematisasi.

(4) Skema grup Mahasiswa FN-R belum ditematisasi dan belum koheren. Konstruksi struktur mental untuk subgrup adalah Aksi. Skema subgrup belum ditematisasi dan belum koheren. Dengan dukungan struktur mental Aksi untuk grup yang dikonstruksi oleh FN-R, Skema homomorfisma belum ditematisasi.

(5) Skema grup Mahasiswa FN-S sudah ditematisasi, namun belum koheren. Konstruksi struktur mental untuk subgrup adalah Aksi. Skema subgrup belum ditematisasi dan belum koheren. Dengan dukungan struktur mental Objek untuk grup yang dikonstruksi oleh FN-S, Skema homomorfisma sudah ditematisasi.

(6) Skema grup mahasiswa FN-T sudah ditematisasi, namun belum koheren. Konstruksi struktur mental untuk subgrup adalah Objek. Skema subgrup sudah ditematisasi dan sudah koheren. Dengan dukungan struktur mental Objek untuk grup yang dikonstruksi oleh FN-T, Skema homomorfisma sudah ditematisasi.

(7) Skema grup Mahasiswa FD-R belum ditematisasi dan belum koheren. Konstruksi struktur mental untuk subgrup adalah Objek. Skema subgrup sudah ditematisasi dan sudah koheren. Dengan dukungan struktur mental Aksi untuk grup yang dikonstruksi oleh FD-R, Skema homomorfisma belum ditematisasi.

(8) Skema grup mahasiswa FD-S belum ditematisasi dan belum koheren. Konstruksi struktur mental untuk subgrup adalah Objek. Skema subgrup sudah ditematisasi dan sudah koheren. Dengan dukungan struktur mental Proses untuk grup yang dikonstruksi oleh FD-S, Skema homomorfisma belum ditematisasi.

(9) Skema grup mahasiswa FD-T sudah ditematisisasi dan sudah koheren. Konstruksi struktur mental untuk subgrup adalah Objek. Skema subgrup sudah ditematisasi dan sudah koheren. Dengan dukungan struktur mental Aksi untuk grup yang dikonstruksi oleh FD-T, Skema homomorfisma belum ditematisasi.

5.1.4 Dekomposisi Genetik

Struktur mental pada dekomposisi genetik yang digunakan belum seluruhnya dikonstruksi mahasiswa. Tidak ditemukan adanya kinerja mahasiswa yang berbeda dari struktur mental pada dekomposisi genetik yang digunakan. Dengan demikian, dekomposisi genetik yang digunakan belum perlu dilakukan penghalusan. Jadi, agar dapat mempelajari materi grup dengan baik, mahasiswa perlu mengkonstruksi struktur mental pada dekomposisi genetik yang digunakan pada penelitian ini.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian di atas diberikan saran-saran sebagai berikut.

(1) Jika dekomposisi genetik yang digunakan dalam penelitian ini akan digunakan oleh peneliti lain maka posisi dekomposisi genetik ini merupakan dekomposisi genetik pendahuluan dari penelitian lain yang berbasis APOS untuk materi grup. Karena dekomposisi genetik pendahuluan merupakan dugaan, maka perlu diuji secara eksperimen terlebih dahulu sebelum digunakan. Hasil eksperimen berfungsi sebagai dasar untuk penelitian dan desain pembelajaran.

(2) Berdasarkan struktur mental yang dikonstruksi mahasiswa, terdapat perbedaan struktur mental yang dikonstruksi oleh mahasiswa pada kategori berdasarkan KAM dan gaya kognitif. Untuk mengoptimalkan hasil pembelajaran ACE yang dilaksanakan, perlu perlakuan yang berbeda terhadap mahasiswa pada masing-masing kategori. Salah satu perlakuan yang dapat dilakukan adalah pemberian tugas melalui LTM sesuai dengan KAM dan gaya kognitifnya. Mahasiswa dengan kategori KAM rendah pada setiap gaya kognitif dan mahasiswa dengan gaya kognitif FD pada setiap KAM belum mengkonstruksi struktur mental Objek untuk grup sehingga perlu diberi LTM yang lebih banyak memuat tugas untuk menginteriorisasi Aksi-Aksi. Untuk mahasiswa

FN-S, FN-T, dan FI-T dapat diberi tugas-tugas untuk melakukan enkapsulasi selain diberi tugas untuk melakukan Aksi-Aksi secukupnya. Penelitian lanjutan diperlukan untuk mendapatkan LTM yang efektif untuk masing-masing kategori mahasiswa yang mendorong terjadinya mekanisme mental interiorisasi dan enkapsulasi sehingga struktur mental Proses dan Objek dapat dikonstruksi.

(3) Penelitian ini menunjukkan perangkat dan proses pembelajaran ACE yang baik serta hasil kemampuan mengkonstruksi bukti pada kelas pembelajaran ACE lebih baik dari pada pada kelas pembelajaran Langsung. Oleh karena itu, pembelajaran ACE potensial untuk diterapkan pada pembelajaran matematika tingkat unversitas.

Implementasi pembelajaran ACE perlu memperhatikan hal-hal berikut.

a. LTM memuat permasalahan yang bervariasi dan sesuai dengan pengetahuan yang telah dimiliki mahasiswa agar mahasiswa dapat mengkonstruksi struktur mental yang diharapkan, Pembentukan kelompok dilakukan secara heterogen menurut KAM dan gaya kognitif agar kekurangan yang dimiliki oleh mahasiswa yang satu dapat diatasi oleh mahasiswa yang lebih mampu.
b. Pada tahap awal *Classroom Discussion*, struktur mental yang diharapkan dipastikan sudah dikonstruksi oleh mahasiswa agar belajar konsep pada saat itu terfasilitasi. Salah satu hal yang dapat dilakukan adalah melalui pemberian kuis lisan atau tulis.
c. Praktik pembuktian yang cukup dipastikan telah dilakukan oleh mahasiswa melalui latihan soal dengan salah satu caranya adalah melalui presentasi pekerjaan mahasiswa. Hal ini dilakukan untuk memperkuat konstruksi struktur mental materi yang sedang dipelajari.

(4) Keberhasilan suatu pembelajaran tidak hanya ditentukan oleh hasil belajar mahasiswa saja, melainkan juga keaktivan mahasiswa dalam pembelajaran. Oleh karena itu, evaluasi yang diberikan tidak hanya tes tertulis melainkan juga mengevaluasi kegiatan mahasiswa selama pembelajaran termasuk di dalamnya menilai mahasiswa yang mengajukan/menjawab pertanyaan, dan merespon

pendapat teman atau dosen yang terkait dengan pembelajaran.

(5) Kemampuan mengkonstruksi bukti memerlukan berpikir kritis dan kreativitas mahasiswa. Oleh karena itu, perlu dilakukan penelitian lebih lanjut apakah pembelajaran ACE dapat mengembangkan kemampuan berpikir kritis dan kreativitas mahasiswa.

(6) Aktivitas mengkonstruksi bukti tidak hanya terdapat pada materi grup. Dengan demikian, dapat dikaji lebih lanjut implementasi pembelajaran ACE pada mata kuliah lain yang karakteristiknya banyak melakukan aktivitas mengkonstruksi bukti, misalnya analisis real.

(7) Hasil analisis struktur mental yang dikonstruksi mahasiswa pada masing-masing kategori, menunjukkan masih lemahnya metode pembuktian dan logika, himpunan, dan pemetaan. Oleh karena itu, perlu dilakukan penguatan pada metode pembuktian, logika, himpunan, dan pemetaan. Penguatan ini dapat dilaksanakan pada beberapa pertemuan awal terintegrasi dengan materi pendahuluan. Model penguatan untuk metode pembuktian, logika, himpunan dan pemetaan yang efektif perlu dikembangkan dalam kajian lebih lanjut.

(8) Teori APOS adalah teori konstruktivistis tentang bagaimana mempelajari konsep matematik itu terjadi. Teori Piaget merupakan dasar dari teori APOS. Menurut Piaget, tahap perkembangan kognitif anak usia 11 tahun ke atas berada pada tahap operasional formal. Pada tahap ini, pemikiran abstrak dan murni simbol dapat dilakukan. Aktivitas mengkonstruksi bukti memerlukan kemampuan berpikir formal. Berdasarkan tahap perkembangan kognitif Piaget, kemampuan untuk membuktikan sudah siap dilatihkan terhadap siswa SMP. Jika ini dilakukan, maka penalaran dan pembuktian akan berkembang sejak dini. Penalaran yang berkembang dengan baik akan membawa dampak pada keberhasilan siswa dalam matematika tingkat lanjut. Proses penalaran diperlukan untuk menafsirkan, merepresentasikan, dan menggunakan fakta-fakta yang terdiri atas aksioma, definisi, contoh, teorema untuk menarik kesimpulan, memecahkan masalah, dan mengkonstruksi bukti.

DAFTAR PUSTAKA

Alcock, L & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants, *Journal of Mathematical Behavior*, *24*, 125–134.

Altun, A. & Cakan, M. (2006). Undergraduate Students' Academic Achievement, Field Dependent/Independent Cognitive Styles and Attitude toward Computers. *Educational Technology & Society*, *9*(1), 289-297.

Angeli, C. & Valanides, N. (2004). Examining the Effects of Text-Only and Text-and-Visual Instructional Materials on the Achievement of Field-Dependent and Field-Independent Learners During Problem-Solving with Modeling Software. *ETR&D*, *52*(4), 23–36.

Anghileri, J. (2006). Scaffolding Practices that Enhance Mathematics Learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*, 33-52.

Anton, H. & Rorres, C. (2015). *Elementary Linear Algebra with Supplemental Applications* . Singapore: John Wiley & Sons.

Arnawa, I.M. (2009). Mengembangkan Kemampuan Mahasiswa dalam Memvalidsi Bukti pada Aljabar Abstrak melalui Pembelajaran Berdasarkan Teori APOS. *Jurnal Matematika dan Sains*, *14*(2), 62 – 68.

Arnon I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Fuentes, S.R., Trigueros, M. & Weller K. (2014). *Apos Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D. M., Morics, S. & Oktac, A. (1997a). Development of Students' Understanding of Cosets, Normality, and Quotient Groups. *The Journal of Mathematical Behavior*. *16*, 241-309.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. E. (1997b). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399-431.

Asiala, M., Brown, A., Kleiman, J. & Mathews, D. (1998). The development of students' understanding of permutations and symmetries. *International Journal of Computers forMathematical Learning*, *3*(1), 13–43.

Asimow, J. (2013). *Logico-Mathematical Knowledge*. Tesedia di https://mathathome.org/logico-mathematical-knowledge/

Ates, S. & Cataloglu, E. (2007). The effects of students' cognitive styles on conceptual understandings and problem-solving skills in introductory Mechanics. *Research in Science & Technological Education, 25*(2), 167–178.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 501–512.

Bansilal, S. (2015). An exploration of students' conversions from a symbolic to a verbal representation. *Journal of Communication*, *6*(1), 38–47.

Bansilal, S., Brijlall, D. & Trigueros, M. (2017). An APOS study on pre-service teachers' understanding of injections and surjections. *Journal of Mathematical Behavior, 48,* 22–37.

Bayata, S & Tarmizia, R. A. (2010). Assessing Cognitive and Metacognitive Strategies during Algebra Problem Solving Among University Students. *International Conference on Mathematics Education Research, 8*, 403-410.

Bell, A.W. (1976) A study of pupils' proof explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7,* 23-40.

Blanton, M.L. & Stylianou, D. A. (2014). Understanding the role of transactive reasoning in classroom discourse as students learn to construct proofs. *Journal of Mathematical Behavior, 34*, 76–98.

Bosch, M., Gascón, J. & Trigueros, M. (2017). Dialogue between theories interpreted as research praxeologiesthe case of APOS and the ATD. *Educational Studies in Mathemaics*, *95*(1), 39—52.

Brijlall, D. & Bansilal, S. (2010). A genetic decomposition of the Riemann Sum by student teachers. *Proceedings of the Eighteenth Annual Meeting of The Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology-Crossing the boundaries*, 131-142.

Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E. & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups and subgroups. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(3), 187–239.

Cai, J., Mamona-Downs, J. & Weber, K. (2005). Mathematical problem solving: What we know and where we are going. *Journal of Mathematical Behavior*. *24*, 217–220.

Cañadas, M.C., Molina, M. & Río, A.d. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem-posing. *Educational Studies in Mathematics*, tersedia di https://doi.org/10.1007/s10649-017-9797-9

Cataloglu, E. & Ates, S. (2014). The Effects of Cognitive Styles on Naive Impetus Theory Application Degrees of Pre-Service Science Teacher. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*, 699-719.

Coe, R. & Ruthven, K. (1994). Proof Practices and Constructs of Advanced Mathematics Students. *British Educational Research Journal*, *20*(1), 41-53.

Cooley, L., Trigueros, M., & Baker, B. (2007). Schema Thematization: A Framework and an Example. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(4), 370-392.

Cotrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a coordinate Process Schema. *The Journal of Mathematical Behaviour*, *15*, 167-192.

Cousins, L.P. (2010). The "Real" Magic of Logico-Mathematical Knowledge. Terdedia di https://blogs.psychcentral.com/always-learning/2010/01/the-real-magic-of-logico-mathematical-knowledge/ Diunduh 21-11-2019

Cresswell, J.W. (2013). *Research Design. Pendekatan Kualitatif, Kuantitatif, dan Mixed*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Danoebroto, S.W. (2015). Teori belajar konstruktivis Piaget dan Vygotsky. *Indonesian Digital Journal of Mathematics and Education*, *2*(3), 191-198.

David A., Yopp, D.A., & Rob E. (2016) When does an argument use a generic example? *Educational Studies in Mathematics*, *91*(1), 37-53

Dawkins, P.C. & Cook, J.P. (2017). Guiding reinvention of conventional tools of mathematical logic: students' reasoning about mathematical disjunctions. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(3), 41-256. DOI 10.1007/s10649-016-9722-7

Dawkins, P.C., & Weber, K. (2017). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(2), 123-142. DOI 10.1007/s10649-016-9740-5

Dimmel, J. K. (2018). What Details Do Teachers Expect From Student Proofs? A Study of Proof Checking in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *49*(3), 261–291.

Dowlatabadi, H. & Mehraganfar, M. (2014). The Causal Correlation Between Field Dependence/Independence Cognitive Style and Vocabulary Learning Strategies among Iranian EFL Leaners. *Intern*ational *Journ*al *of Latest Research in Science and Technology*, *3*(4), 97-103.

Drijvers, P., Kodde-Buitenhuis, H., & Doorman, M. (2019). Assessing mathematical thinking as part of curriculum reform in the Netherlands, *Educational Studies in Mathematics*, *102*, 435–456

Dubinsky, E., Weller, K., Michael, A.M., & Brown A. (2005). "Some Historical Issues And Paradoxes Regarding The Concept Of Infinity: An Apos-Based Analysis: Part 1". *Educational Studies In Mathematics*. *58*, 335–359.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S.& Denis Tanguay, D. (2012). Examining the Role of Logic in Teaching Proof. In Hanna, G. & de Villiers, M. (eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education, 369*. New ICMI Study Series 15, DOI 10.1007/978-94-007-2129-6_16

Durbin, J.R.(2009). *Modern Algebra. An Introduction. Sixth Edition*. John Wiley &Sons: United States of America.

Edwards, B. S. & Ward, M. B. (2004). Surprises from Mathematics Education Research: Student (Mis)use of Mathematical Definitions. *The American Mathematical Monthly*, *111*(5), 411-424.

Epp, S.S. (2003). The Role of Logic in Teaching Proof. *The Mathematical Association Of America* [Monthly 110 December 2003] pp. 886-899. Tersedia di http://condor.depaul.edu/sepp/monthly886-899.pdf (diunduh 2 - 2-2016).

Epp, S.S. (1998). A Unified Framework for Proof and Disproof. *The Mathematics Teacher*, *91(*8), 708-713.

Fraleigh, J.B. (2014). *A First Course in Abstract Algebra*. Seventh Edition. London : Pearson Education Limited.

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E., & Trigueros, M. (2016). Thematization of derivative schema in university students: nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International Journal of Mathematical Education*, 1-19

Gallian, J. A. (2017). *Contemporary Abstract Algebra*, Ninth Edition. Boston, USA: Cengage Learning.

Gresham, G. (2017). Preservice to Inservice: Does Mathematics Anxiety Change With Teaching Experience? *Journal of Teacher Education*, *69*(1), 90-107.

Grillet, P. A. (2007). *Abstract Algebra*. Second Edition. New York: Springer Science + Business Media, LLC.

Hammack. R. (2013). *Book of Proof* . Virginia: Richard Hammack.

Hanna, G. & de Villiers, M. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education*, Examining the Role of Logic in Teaching Proof *15*, 369-389 New ICMI Study Series 15.

Hawa, S. (2014.) *Pengembangan Pembelajaran Matematika SD*. Jakarta: Dirjen Dikti Depdiknas.

Hazzan, O. (1999). Reducing Abstraction Level When Learning Abstract Algebra Concepts. *Educational Studies in Mathematics* , *40*, 71-90.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 396-428.

Hendikawati, P. (2015). *Statistika Metode dan Aplikasinya dengan Excel dan SPSS*. Semarang: FMIPA Unnes.

Hungerford, T. W. (1984). *Graduate Text in Mathematics. Algebra*. New York: Springer Verlag.

Inglis, M. (2015). Review of APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *1*, 413–417.

Inglis, M. & Alcock, L. (2012). Expert and Novice Approaches to Reading Mathematical Proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 358-390.

Isnarto. (2014). Students' Proof Ability: Exploratory Studies of Abstract Algebra Course. *International Journal of Education and Research*, *2*(6), 215-28.

Johnson, G.J., Thompson, D.R. & Senk, S.L. (2010). Proof-Related Reasoning in High School Textbooks. *The Mathematics Teacher*, *103*(6), 410-417.

Knut, E. J. (2002). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 379- 405.

Koa,Y. & Knuthb, E. J. (2013). Validating proofs and counterexamples across content domains: Practices of importance for mathematics majors. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*, 20– 35.

Koichu, B. & Leron, U. (2015). Proving as problem solving: The role of cognitive decoupling. *Journal of Mathematical Behavior*, *40*, 233–244.

Komatsu, K. (2016). A framework for proofs and refutations in school mathematics: Increasing content by deductive guessing, *Educational Studies in Mathematics*, *92*(2), 147-162.

Komatsu, K., Jones, K., Ikeda, T. & Narazaki, A. (2017). Proof validation and modification in secondary school geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, *47*, 1–15.

Lithner, J. (2000). Mathematical Reasoning in Task Solving, *Educational Studies in Mathematics*, *41*(2), 165-190.

Lo, J.J., & Crory, R., Mc. (2009). *Proof and Proving in a Mathematics Course for Prospective Elementary Teachers*. "*Proc. of the ICMI Study 19 conf.: Proof and Proving in Mathematics Education*.," Taipe, Taiwan, pp 2-41 - 2-46

Magliaro, S. G., Lockee, B. B. & Burton, J. K. (2005). Direct Instruction Revisited: A Key Model for Instructional Technology, *ETR &D*, *53*(4), 41–55.

Malik, D.S., Mordeson, J.N., & Sen, M.K. (2007). *Introduction to Abstract Algebra*. United States of America.

Mamona-Downs, J. & Downs, M. (2005). The identity of problem solving, *Journal of Mathematical Behavior*, *24*, 385–401.

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(1), 41–51.

Martinez-Planell, R. & Gaisman, M.T. (2013). Graphs of functions of two variables: results from the design of instruction. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 663–672.

Masrukan. (2014). *Asesmen Otentik Pembelajaran Matematika Mencangkup Asesmen Afektif dan Karakter*. Semarang : Universitas Negeri Semarang.

Mejía-Ramos, J.B., Weber, K. & Fuller, E. (2015). Factors Influencing Students' Propensity for Semantic and Syntactic Reasoning in Proof Writing: a Case Study. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *1*, 187–208.

Mejia-Ramos, J.P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K. & Samkoff, A. (2012) An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics 79*, 3–18.

Mejía-Ramos, J.P., Lew,K., Torre, J. D & Weber, K. (2017). Developing and validating proof comprehension tests in undergraduate mathematics, *Research in Mathematics Education*, *19*(2), 130-146.

Mills, M. (2014). A framework for example usage in proof presentations, *Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 106– 118.

Mingus, T.Y & Grassl, R.M. (1999). Preservice Teacher Beliefs About Proofs. *School Science and Mathematics*, *99*(8), 438–444.

Miyakawa, T. (2017). Comparative analysis on the nature of proof to be taught in geometry: the cases of French and Japanese lower secondary schools. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(1), 37-54.

Miyazaki, M, Fujita, T., & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics*, *94*, 223–239.

Moleong, J.L. (2014). *Metode Penelitian Kualitatif*. Bandung: PT Remaja Rosdakarya.

Moll, V.F., Trigueros, M., Badillo, E., & Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(1), 107-122.

Moore, R.C. (1994). Making The Transisiton to Formal Proof. *Educational Studies in Mathematics*. *27*(3), 249-266.

Musser, T. (1998). Individual Differences, How Field-Dependence-Independence Affect Learners. Retrieved from: http: //www.personal.psu.edu/staff/t/x/txm4/paper1.htm1

National Council of Teacher Mathematics. 2000.

Ndlovu, Z. & Brijlall, D. (2015). Pre-service Teachers' Mental Constructions of Concepts in Matrix Algebra. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *19*(2), 156–171.

Nurlaelah, E. (2007) P*encapaian Daya Dan Kreativitas Matematik Mahasiswa Calon Guru Melalui Pembelajaran Berdasarkan Teori APOS.* Tersedia di http://repository.upi.edu/8060/

Oh, E.J. & Lim, D.H. (2005). Cross Relationships between Cognitive Styles and Learner Variables in Online Learning Environment. *Journal of Interactive Online Learning*, *4*, 53-66.

Permendiknas No 22 tahun 2006 tentang standar isi matematika. 2006. Jakarta: Depdiknas.

Ponte, J.P. & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions, *Educational Studies in Mathematics*, *93*(1), 51-66.

Prastowo, A. (2012). Panduan Kreatif Membuat Bahan Ajar Inovatif. Yogyakarta: DIVA Press

Rifa'i, A. & Anni, C.T. (2011). *Psikologi Pendidikan*. Semarang: UPT Unnes Press

Salgado, H & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory. *Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 100–120.

Samkoff, A., Lai, Y., & Weber, K. (2012). On the different ways that mathematicians use diagrams in proof construction. *Research in Mathematics Education*, *14*(1), 49-67.

Sarah K., Bleiler B., & Jeffrey D.P. (2017). Engaging students in roles of proof *Journal of Mathematical Behavior*, *47*, 16-34.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press, Inc.

Schuster, D., Cobern, W. W., Adams, B. AJ., Undreiu, A., & Pleasants, B. (2018). Learning of Core Disciplinary Ideas: Efficacy Comparison of Two Contrasting Modes of Science Instruction, *Research in Science Education* *48*, 389–435.

Scusa, T. (2008). Five Processes of Mathematical Thinking. Tersedia di http://digitalcommons.unl.edu/mathmidsummative/38

Shwarz, B. & Kaiser, G. (2009). Professional Competence of Future Mathematics Teachers on Argumentation and Proof and How to Evaluate It. *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Prove and Proving in Mathematics Education, 190-195*. Conference held on May 10-15, 2009 in Taipei, Taiwan.

Segal, J. (2000). Learning About Mathematical Proof: Conviction and Validity, *Journal Of Mathematical Behavior, 18*(2), 191-210.

Selden, A. & Selden, J. (2003). Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an ArgumentProves a Theorem? *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 4-36.

Sfard, A. (1991). On The Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflection on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies In Mathematics, 22*, 1-36.

Shabani, K., Khatib, M. & Ebadi, S. (2010). Vygotsky's Zone of Proximal Development: Instructional Implications and Teachers' Professional Development. *English language teaching*, *3*(4), 237-248.

Solow D. (2014). *How to Read and Do Proofs*. New York: John Wiley & Sons.

Somyurek, S. , Guyer, T. & Atasoy, B. (2008). The Effects of Individual Differences on Learner’s Navigation in A Courseware. *The Turkish Online Journal of Educational Technology* – TOJET, *7*, 32-40.

Sowder, L. & Harel, G. (1998). Types of Students' Justifications. *The Mathematics Teacher*, *91*(8), 670-675.

Sowder, L & Harel, G. (2003). Case Studies of Mathematics Majors’ Proof Understanding, Production, and Appreciation. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 3*(2), 251-267.

Stout, L.N. (2014). *How to Study Mathematics*. Tersedia di http://sun.iwu.edu/~lstout/How ToStudy.html (diunduh 1 Juli 2014).

Stylianides, A. (2007 a). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321.

Stylianides, G. (2007b). Investigating The Guidance Offered To Teachers In Curriculum Materials: The Case Of Proof In Mathematics, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6, 191-215.

Stylianides, G. & Stylianides, A. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Educa tion, 10*, 145–166.

Stylianides, G. J., Sandefur, J. & Watson, A. (2016). Conditions for proving by mathematical induction to be explanatory. *Journal of Mathematical Behavior*, *43*, 20–34.

Stylianou, D. A., Blanton, M.L. & Rotou, O. (2015). Undergraduate Students' Understanding of Proof: Relationships Between Proof Conceptions, Beliefs, and Classroom Experiences with Learning Proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. *1*(1), 91–134.

Stylianou, D.A. & Blanton, M.L. (2011). Developing Students' Capacity for Constructing Proofs through Discourse. *The Mathematics Teacher*, *105*(2), 140-145.

Sugiyono. (2013). *Metode Penelitian Kombinasi (Mixed Methods)*. Bandung: Alfabeta.

Suyono & Hariyanto. (2016). *Belajar dan Pembelajaran*. Bandung: PT Remaja Rosdakarya.

Swan, M. (2015). "Convincing and Proving" Task. Tersedia di http://archive.wceruw.org/CL1/flag/extra/download/cat/math/convincing/convince.pdf diunduh 13-05-2015.

Tait-McCutcheon, S., Drake, M., & Sherley, B. (2011). From direct instruction to active construction: teaching and learning basic facts. *Mathematics Education Research Journal*, *23*, 321–345.

Tall D.; Thomas M.; Davis G; Gray E.; Simpson A. (2000). What Is the Object of the Encapsulation of a Process? http://dx.doi.org/10.1016/S0732-

Thompson, D., Senk, S.L., & Johnson, G.J. (2012). Opportunities to Learn Reasoning and Proof in High School Mathematics Textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(3), 253-295.

Tim Penyusun. 2016. *Panduan Akademik Universitas Negeri Semarang*.

Trianto. (2007). *Model-model Pembelajaran Inovatif Berorientasi Konstruktivistik*. Jakarta: Prestasi Pustaka.

Trigueros, M. & Martinezz- Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies In Mathematics, 73*, 3–19.

Umaru, Y. & Tukur, H. (2013). The Influence of Dependent and Independent Cognitive Styles on Achievement in Mathematics among Senior Secondary School Students in Bida Educational Zone of Niger State, Nigeria. *Journal of Research in Education and Society*, *4*(2), 60-67.

Wasserman, N.H. (2017). Making Sense of Abstract Algebra: Exploring Secondary Teachers' Understandings of Inverse Functions in Relation to Its Group Structure. *Mathematical Thinking and Learning*, *19*(3), 181-201.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 115–133.

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behavior*, *24,* 351–360.

Weber, K. (2009). How syntactic reasoners can develop understanding, evaluate conjectures, and generate counterexamples in advanced mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *28,* 200–208.

Weber, K. (2010). Mathematics Majors' Perceptions of Conviction, Validity, and Proof *Mathematical Thinking and Learning*, *12*, 306–336.

Weber, K., Inglis, M. & Mejia-Ramos, J.P. (2014). How Mathematicians Obtain Conviction: Implications for Mathematics Instruction and Research on Epistemic Cognition. *Educational Psychologist*, *49*(1), 36-58.

Weber, K & Mejia-ramos, J.P. (2014) Mathematics majors' beliefs about proof reading, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(1), 89-103

Weber, K & Mejia-Ramos, J.P. (2009). An alternative framework to evaluate proof productions: A reply to Alcock and Inglis. *Journal of Mathematical Behavior*, *28*, 212–216.

Wijayanti, K. (2016). "Kesulitan Mahasiswa Field Dependent/Independent dalam Mempelajari Struktur Aljabar. (Studi Kasus di Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang)". *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan*

Matematika: Strategi Pengembangan Kualitas Pembelajaran Matematika dalam Kurikulum Nasional. pp. 251-258.

Wijayanti, K. (2017). The Refinement of The Preliminary Genetic Decomposition of Group. *Journal of Physics: Conference Series*, *824*, 012045.

Wijayanti, K. & Wiyanti, D.T. (2016). "Pengungkapan Struktur Mental Mahasiswa Pada Perkuliahan Pengantar Struktur Aljabar Melalui Implementasi Dekomposisi Genetik Pendahuluan Grup". *Makalah* Seminar Nasional di Universitas Negeri Semarang. Semarang, November 2016.

Williams-Pierce, C., Pier, E.L., Walkington, C., Boncoddo, R., Clinton, V., Alibali, M.W., & Nathan, M.J. (2017). What We Say and How We Do: Action, Gesture, and Language in Proving. *Journal for Research in Mathematics Education*, *48*(3), 248-260.

Witkin, Moore, Goodenough, & Cox. (1977). Field-Dependent and Field-Independent Cognitive Styles and Their Educational Implications. *Review of Educational Research*, *47*(1), 1-64.

Yopp, D. A. (2011). How some research mathematicians and statisticians use proof in undergraduate mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *30*, 115–130.

Zandieh, M., Roh, K. H. & Knapp, J. (2014). Conceptual blending: Student reasoning when proving "conditional implies conditional" statements. *Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 209– 229.