



**MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN FLU
BURUNG DENGAN VAKSINASI
DAN PERTUMBUHAN LOGISTIK PADA POPULASI
UNGGAS**

Skripsi

disusun sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika

oleh

Frida Anggraeni Setyowati

4111414029

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG**

2019



**MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN FLU
BURUNG DENGAN VAKSINASI
DAN PERTUMBUHAN LOGISTIK PADA POPULASI
UNGGAS**

Skripsi

disusun sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika

oleh

Frida Anggraeni Setyowati

4111414029

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG**

2019

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya yang diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dirujuk dalam skripsi ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Semarang, Februari 2019



Frida Anggraeni Setyowati

4111414029

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Model Matematika Penyebaran Flu Burung dengan Vaksinasi dan
Pertumbuhan Logistik Pada Populasi Unggas

Disusun oleh

Nama : Frida Anggraeni Setyowati

NIM : 4111414029

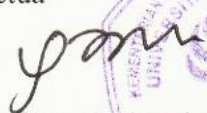
Telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi Unnes pada

Hari : Senin

Tanggal : 18 Februari 2019

Panitia,

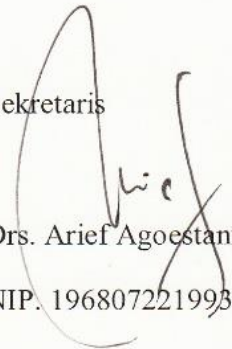
Ketua


Prof. Dr. Sudarmin, M.Si.

NIP. 196601231992031003




Sekretaris


Drs. Arief Agoestanto, M.Si.

NIP. 19680722199331005

Ketua Penguji


Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si.

NIP. 196809071993031002

Anggota Penguji

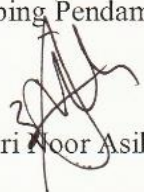
Pembimbing Utama


Muhammad Kharis, S.Si., M.Sc.

NIP. 198210122005011001

Anggota Penguji

Pembimbing Pendamping


Dr. Tri Sri Noor Asih, S.Si., M.Si.

NIP. 197706142008122002

MOTTO

Kesuksesan adalah hasil usaha kerja keras, ketekunan, kesabaran, kebenaran dalam tindak dan berfikir, akhirnya menyerahkan segala sesuatu Kepada Yang Maha Kuasa (R.A Kartini)

Menjadi orang jenius itu tidak harus menjadi sombong, tapi harus tetap rendah hati (Albert Einstein)

Kemuliaan dalam kehidupan bukan terletak pada ketidak gagalan abadi, namun dapat bangkit kembali setelah jatuh (Napoleon)

Keberuntungan adalah sesuatu yang terjadi ketika kesempatan bertemu dengan kesiapan (Thomas Alfa Edison)

PERSEMBAHAN

Untuk Papa Imam Sujarwo, Mama Suerni, Kakakku Reni Vitaningrum, dan Adikku Krisna Nur Alamsyah yang selalu memberikan doa serta dukungan

Untuk semua orang yang telah membantu penyusunan skripsi ini baik secara langsung maupun tidak langsung

PRAKATA

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Model Matematika Penyebaran Flu Burung dengan Vaksinasi dan Pertumbuhan Logistik pada Populasi Unggas”.

Penulisan skripsi ini dapat selesai karena adanya bimbingan, bantuan, dan dukungan dari berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M. Hum., Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Prof. Dr. Sudarmin, M.Si., Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Arief Agoestanto, M. Si., Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
4. Drs. Mashuri, M. Si., Koordinator Program Studi Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
5. Muhammad Kharis, S. Si., M. Sc., Pembimbing utama sekaligus dosen wali yang telah memberikan bimbingan, motivasi, dan pengarahan selama masa kuliah sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
6. Dr. Tri Sri Noor Asih, S.Si., M.Si., Pembimbing pendamping yang telah memberikan bimbingan, motivasi, dan pengarahan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
7. Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si., Dosen penguji yang telah memberikan inspirasi, kritik, saran, dan motivasi kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi.

8. Staff Dosen Matematika Universitas Negeri Semarang yang telah membekali penulis dengan berbagai ilmu selama mengikuti perkuliahan sampai akhir penulisan skripsi ini.
9. Staff Tata Usaha Universitas Negeri Semarang yang telah membantu penulis selama mengikuti perkuliahan dan penulisan skripsi ini.
10. Orangtua dan keluarga tercinta yang senantiasa mendoakan serta memberikan dukungan baik secara moral maupun spiritual.
11. Teman-teman Matematika Unnes 2014 dan Keluarga Mbois Ilakes (KMI) yang telah berjuang bersama dan memberikan dukungan dalam penyusunan skripsi.
12. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya penulisan skripsi ini.

Hanya ucapan terimakasih dan doa, semoga apa yang telah diberikan tercatat sebagai amal baik dan mendapatkan balasan dari Allah SWT.

Semoga skripsi ini bisa membawa manfaat bagi penulis sendiri khususnya dan bagi para pembaca pada umumnya.

Semarang, Februari 2019

Penulis

ABSTRAK

Setyowati, F.A. 2019. *Model Matematika Penyebaran Flu Burung dengan Vaksinasi dan Pertumbuhan Logistik Pada Populasi Unggas*. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang. Pembimbing Utama Muhammad Kharis, S. Si., M. Sc. dan Pembimbing Pendamping Dr. Tri Sri Noor Asih, S.Si., M.Si.

Kata Kunci: flu burung, vaksinasi, pertumbuhan logistik, titik kesetimbangan, analisis kestabilan

Flu burung adalah penyakit yang disebabkan oleh virus influenza tipe A. Virus influenza tipe B dan C dapat diisolasi dari manusia dan sifatnya kurang patogen dibandingkan dengan virus influenza tipe A. Penelitian ini membahas model matematika penyebaran flu burung dengan vaksinasi dan pertumbuhan logistik pada populasi unggas. Tujuan penelitian ini adalah membangun, menganalisis, mensimulasi, dan menginterpretasikan model matematika penyebaran flu burung dengan vaksinasi dan pertumbuhan logistik pada populasi unggas.

Metode penelitian yang digunakan adalah (1) menentukan masalah, (2) merumuskan masalah, (3) studi pustaka, (4) analisis dan pemecahan masalah, dan (5) penarikan kesimpulan. Dalam penelitian ini populasi manusia dibagi menjadi tiga kelas yaitu kelas manusia rentan $S(t)$, kelas manusia terinfeksi $I(t)$, dan kelas manusia sembuh $R(t)$. Sedangkan populasi unggas dibagi menjadi tiga kelas yaitu kelas unggas rentan $S_b(t)$, kelas unggas terinfeksi $I_b(t)$, dan kelas unggas divaksinasi $V_b(t)$.

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh satu titik kesetimbangan bebas penyakit (P_0) dan satu titik kesetimbangan endemik (P_1). Analisis yang dilakukan diperoleh bilangan reproduksi dasar (R_0) bergantung pada peluang terjadinya kontak antara unggas sehat dengan unggas terinfeksi, laju kematian alami pada populasi unggas, laju kematian unggas akibat terinfeksi flu burung, laju kematian unggas yang terinfeksi akibat dibakar, dan proporsi unggas yang divaksinasi. Analisis kestabilan juga telah dilakukan diperoleh $R_0 < 1$ maka P_0 stabil asimtotik lokal dan $R_0 > 1$ maka P_1 stabil asimtotik lokal. Selanjutnya, hasil simulasi menunjukkan bahwa proporsi unggas yang divaksinasi memperkecil populasi manusia yang terinfeksi flu burung. Demikian pula halnya dengan proporsi pembakaran unggas sehingga dapat mencegah terjadinya wabah endemik.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN	ii
PENGESAHAN	iii
MOTTO DAN PERSEMBAHAN	iv
PRAKATA	v
ABSTRAK	vii
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
BAB 1	
PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	6
1.3 Batasan Masalah	6
1.4 Tujuan Penelitian	7
1.5 Manfaat Penelitian	7
1.6 Sistematika Penulisan	8
BAB 2	
TINJAUAN PUSTAKA	11

2.1	Pemodelan Matematika	11
2.1.1	Pengertian Pemodelan Matematika	11
2.1.2	Klasifikasi Model Matematika	11
2.1.3	Tahapan-tahapan dalam Konstruksi Model Matematika	12
2.2	Model Epidemi SIR Klasik	15
2.3	Flu Burung	16
2.3.1	Etimologi	16
2.3.2	Gejala dan Tanda	17
2.3.3	Penyebaran Flu Burung pada Populasi Unggas	19
2.3.4	Penyebaran Flu Burung pada Populasi Manusia	19
2.3.5	Pengobatan dan Pencegahan	19
2.4	Persamaan Diferensial	20
2.4.1	Pengertian Persamaan Diferensial	20
2.4.2	Klasifikasi Persamaan Diferensial	20
2.4.3	Contoh Persamaan Diferensial	20
2.5	Pertumbuhan Populasi Logistik	21
2.6	Titik Keseimbangan (Ekuilibrium)	23
2.7	Kestabilan Titik Keseimbangan	24
2.8	Vektor Eigen dan Nilai Eigen	25
2.9	Titik Keseimbangan Hiperbolik	26
2.10	Kriteria Kestabilan <i>Routh-Hurwitz</i>	27
2.11	Bilangan Reproduksi Dasar	28
2.12	Maple	28

BAB 3

METODE PENELITIAN	30
3.1 Menentukan Masalah	30
3.2 Merumuskan Masalah	30
3.3 Studi Pustaka	31
3.4 Analisis dan Pemecahan Masalah	31

3.5 Penarikan Kesimpulan	32
--------------------------------	----

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN	33
----------------------------	----

4.1 Model Matematika Flu Burung	33
4.1.1 Fakta-fakta	33
4.1.2 Asumsi-asumsi	34
4.1.3 Pembentukan Model Matematika	35
4.2 Titik Keseimbangan Model Matematika	39
4.3 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Model Matematika	47
4.3.1 Analisis Kestabilan di Sekitar Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	48
4.3.2 Analisis Kestabilan di Sekitar Titik Keseimbangan Endemik ..	49
4.4 Simulasi Model Matematika	58
4.4.1 Simulasi Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	60
4.4.2 Simulasi Titik Keseimbangan Endemik	62
4.4.3 Proporsi Minimum Unggas yang Divaksinasi dan Unggas Terinfeksi yang Dibakar	64
4.4.3.1 Proporsi Minimum Unggas yang Divaksinasi	64
4.4.3.2 Proporsi Minimum Unggas Terinfeksi yang Dibakar	69

BAB 5

PENUTUP	74
---------------	----

5.1 Simpulan	74
--------------------	----

5.2 Saran	77
-----------------	----

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Makna dari Variabel-variabel dalam Model Matematika	36
Tabel 4.2 Makna dari Parameter-parameter dalam Model Matematika	36
Tabel 4.3 Nilai parameter-parameter pada Sistem (4.4)	58
Tabel 4.4 Titik Kesetimbangan Endemik P_{12}	65

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Tahapan-tahapan dalam Konstruksi Matematika	13
Gambar 2.2 Siklus Pemodelan Matematika	14
Gambar 2.3 Diagram Alir Proses Pemodelan Matematika	15
Gambar 2.4 Diagram Transfer Model Epidemii SIR Klasik	16
Gambar 4.1 Diagram Transfer Penyebaran Flu Burung dengan Vaksinasi dan Pertumbuhan Logistik pada Populasi Unggas	35
Gambar 4.2 Medan vektor pada bidang (a) N_b vs I_b , (b) N_b vs V_b , (c) S vs I di sektor titik P_0 untuk $R_0 < 1$ dan $A > \mu_b$ dengan $\beta_b = 0.45$...	61
Gambar 4.3 Medan vektor pada bidang (a) N_b vs I_b , (b) N_b vs V_b , dan (c) S vs I di sektor titik P_1 untuk $R_0 > 1$, $\delta = \mu_b$, $BI_b > A$, $A > \mu_b$, dan $M_1 + M_2 > 3\mu_b$ dengan $\beta_b = 0.64$	63
Gambar 4.4 Dinamika banyak populasi manusia (a) S dan (b) I terhadap waktu t untuk P_{12} dengan $\beta_b = 0.64$ dan variasi nilai δ	65
Gambar 4.5 Dinamika banyak populasi unggas (a) N_b , (b) I_b dan (c) V_b terhadap waktu t untuk P_{12} dengan $\beta_b = 0.64$ dan variasi nilai δ	66
Gambar 4.6 Banyak populasi I , I_b , dan V_b terhadap waktu t dengan $\beta_b = 0.64$ dan (a) $\delta = 0.025$, (b) $\delta = 0.030$, (c) $\delta = 0.046$, (d) $\delta =$ 0.089	68
Gambar 4.7 Dinamika banyak populasi manusia (a) S dan (b) I terhadap waktu t untuk P_{13} dengan $\beta_b = 0.64$ dan variasi nilai M_2	70

Gambar 4.8 Dinamika banyak populasi unggas (a) N_b , (b) I_b dan (c) V_b terhadap waktu t untuk P_{13} dengan $\beta_b = 0.64$ dan variasi nilai M_2 71

Gambar 4.9 Banyak populasi I, I_b , dan V_b terhadap waktu t dengan $\beta_b = 0.64$ dan (a) $M_2 = 0.30$, (b) $M_2 = 0.32$, (c) $M_2 = 0.34$, (d) $M_2 = 0.36$ 72

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Kasus Medan Vektor Di Sekitar Titik P_0 untuk $R_0 < 1$ dengan $\beta_b = 0.45$	82
Lampiran 2 Kasus Medan Vektor Di Sekitar Titik P_1 untuk $R_0 > 1$ dengan $\beta_b = 0.64$	86
Lampiran 3 Kasus Pengaruh Pemberian Vaksinasi pada Unggas Rentan dengan $\delta = 0.025, 0.03, 0.046, 0.089$	90
Lampiran 4 Kasus Pengaruh Pembakaran pada Unggas Terinfeksi dengan $M_2 = 0.3, 0.32, 0.34, 0.36$	101

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyakit merupakan suatu keadaan abnormal dari tubuh atau pikiran yang menyebabkan ketidaknyamanan, disfungsi, atau kesukaran terhadap orang yang dipengaruhinya. Penyakit dibagi menjadi dua jenis, yaitu penyakit menular dan penyakit tidak menular (Bustan, 1997). Penyakit menular adalah penyakit yang disebabkan oleh kuman berupa virus, bakteri, amuba, atau jamur yang menyerang tubuh manusia, di antaranya influenza, malaria, campak, dan flu burung. Penyakit tidak menular adalah penyakit yang tidak disebabkan oleh kuman, tetapi disebabkan karena adanya problem fisiologis atau metabolisme pada jaringan tubuh manusia, di antaranya batuk, sariawan, dan sakit perut. Penyakit menular dapat menyebabkan wabah pada suatu populasi. Wabah penyakit selama periode waktu yang singkat disebut epidemi. Jika wabah tetap dalam suatu populasi selama jangka waktu yang panjang, maka disebut endemik (Padilah, 2017).

Flu burung telah menjadi perhatian masyarakat luas karena telah menewaskan banyak korban baik unggas maupun manusia (Rahmalia, 2017). Laporan dari WHO, pada awal tahun 1918 wabah pandemik virus influenza telah membunuh lebih dari 40.000 orang, di mana subtype yang mewabah saat itu adalah virus H1N1 yang dikenal "*Spanish Flu*". Tahun 1957 virus bermutasi menjadi

H2N2 atau "*Asian Flu*" menyebabkan 100.000 kematian. Tahun 1968 virus bermutasi menjadi H3N2 atau "*Hongkong Flu*" menyebabkan 700.000 kematian. Pada tahun 1997 virus bermutasi lagi menjadi H5N1 atau "*Avian Influenza*" (Murwanti *et al.*, 2013).

Murwanti *et al* (2013) menyebutkan bahwa di Asia Tenggara banyak terjadi kasus flu burung. Hingga 6 Juni 2007, WHO mencatat sebanyak 310 kasus dengan 189 kematian pada manusia yang disebabkan oleh virus ini, termasuk di Indonesia sebanyak 99 kasus dengan 79 kematian. Hal ini dipengaruhi oleh mata pencaharian sebagian penduduk Indonesia sebagai peternak unggas, sehingga Indonesia rawan terhadap penyebaran penyakit flu burung. Selain itu, kurangnya pengetahuan sebagian penduduk Indonesia tentang flu burung ikut pula mempengaruhi laju penyebaran flu burung.

Pada tahun 2009 merebak epidemi flu burung kemudian diikuti epidemi flu babi. Epidemi flu tersebut menyebabkan beberapa kasus kematian dan banyak manusia yang masuk rumah sakit. Turunan virus H5N1 diidentifikasi sebagai penyebab terjadinya epidemi flu burung sedangkan turunan virus H1N1 diidentifikasi sebagai penyebab epidemi flu babi. Gejala yang ditimbulkan mirip dengan flu musiman yang disebabkan oleh turunan virus H3N2 (Yang *et al.*, 2009). Kemampuan virus H5N1 untuk bermutasi sangatlah tinggi sehingga perlu diwaspadai terkait penyebaran virus ini di populasi unggas sehingga beberapa tindakan pencegahan telah dilakukan seperti pemusnahan unggas yang diduga terinfeksi, vaksinasi pada unggas sebelum dan sesudah terinfeksi, dan karantina bagi manusia yang terinfeksi (Gooskens *et al.*, 2009). Menurut WHO dalam

Hutapea (2016), pada Desember 2014 beberapa pusat penelitian bahkan universitas di dunia sudah berhasil menemukan vaksin untuk virus flu burung, baik vaksin untuk manusia atau vaksin untuk unggas.

Pada tahun 2015 flu burung pada manusia masih mewabah di dunia. Kasus tersebut dapat ditemukan di Afrika Utara dan Asia Timur. Negara yang paling parah terjangkit adalah China dengan mengalami banyak strain virus yang mewabah dan terus meluas. Informasi yang diterbitkan oleh CNN Indonesia menyatakan bahwa kasus flu burung di dunia masih terjadi, walaupun kemungkinan risiko flu burung menyerang manusia lebih kecil. Kasus flu burung terus terjadi di Asia maupun Eropa, hingga kini flu burung masih menjadi ancaman bagi seluruh dunia (Damaryana, 2017).

Model matematika untuk epidemi merupakan suatu alat yang dapat digunakan untuk mempertimbangkan strategi-strategi dalam mengendalikan penyebaran penyakit. Model matematika juga dapat membantu memprediksi pengendalian epidemi di masa mendatang agar tidak terjadi endemik. Macam-macam model matematika epidemi untuk menganalisis penyebaran penyakit adalah *SEI*, *SEIS*, *SEIR*, *SI*, *SIR*, *SIS*, *SIRS*, dst (Siswanto, 2013).

Padilah (2017) menjelaskan bahwa model yang paling sederhana adalah model *SI*. Pada model ini, populasi yang diamati terbagi menjadi dua kompartemen, yaitu kelompok individu yang rentan *S* dan kelompok individu terinfeksi *I*. Pada tahun 1927, Kermack dan McKendrick memperluas model *SI* menjadi model *SIR*. Model *SIR* pada awalnya dikembangkan untuk mengetahui laju penyebaran dan kepunahan suatu wabah penyakit dalam suatu populasi tertutup dan bersifat

epidemik. Model endemik *SIR* menggambarkan penyebaran penyakit dimana total populasi pada model ini diasumsikan konstan karena pengaruh kelahiran, kematian maupun laju migrasi. Laju kelahiran pada model *SIR* diasumsikan sama dengan laju kematian. Pada tahun 1932, Kermack dan Hendrick juga merumuskan model *SIS*. Pada model ini, individu yang terinfeksi menjadi rentan kembali setelah sembuh dari penyakitnya. Sedangkan model *SIRS* adalah model di mana individu yang sembuh tidak akan rentan terhadap penyakit yang sama sampai kekebalannya hilang. Model *SIRS* pernah diteliti dalam Padilah (2017) yang model epideminya tidak memperhatikan adanya perubahan populasi manusia seperti imigrasi atau emigrasi dan model yang dikembangkan memperhatikan pertumbuhan logistik pada populasi manusia.

Beberapa peneliti telah melakukan penelitian tentang pemodelan matematika penyebaran flu burung di antaranya adalah Derouich dan Boutayeb (2008). Model yang dikembangkan Derouich dan Boutayeb belum mengakomodir fakta adanya kematian unggas yang terinfeksi karena infeksi virus dan belum adanya tindakan vaksinasi pada burung yang rentan. Model yang dikembangkan juga mengasumsikan bahwa populasi burung konstan dan belum mengakomodir adanya mutasi virus flu burung yang mampu menjangkiti manusia. Siswanto (2013), melakukan analisis model *SIR-SI* dengan mengasumsikan bahwa populasi manusia tidak konstan dan populasi unggas konstan. Sedangkan dalam Hutapea (2016), model yang diteliti memperhatikan kontrol vaksinasi pada populasi manusia dan model *SI-SIIR* yang diteliti mengasumsikan bahwa setiap unggas yang terinfeksi akan mati, tetapi setiap manusia terinfeksi bisa meninggal atau sembuh.

Dalam Kharis dan Cahyono (2015), model yang diteliti berbentuk *SIRS* dengan mengasumsikan populasi konstan. Vaksinasi diberikan pada populasi kelas rentan. Model yang dikembangkan Tasmi dan Nuraini (2016) menggunakan metode algoritma Genetika pada pengoptimalan vaksinasi dan *treatment* dengan biaya minimal. Model tersebut mengasumsikan populasi manusia dan populasi unggas tidak konstan. Pada populasi unggas dijelaskan bahwa vaksinasi memiliki tingkat keberhasilan 100% dan populasi manusia yang sembuh memiliki kemungkinan rentan kembali. Sedangkan dalam Rahmalia (2017), dilakukan analisis dari model penyebaran flu burung pada populasi campuran. Model tersebut mengasumsikan bahwa manusia yang telah terinfeksi belum bermutasi sehingga belum dapat menularkan penyakit pada manusia sehat lainnya.

Pada penelitian ini, penulis berusaha melengkapi pemodelan yang telah dikembangkan dengan menambahkan beberapa fakta dan asumsi. Selain itu, peneliti berusaha melengkapi studi kasus menjadi pertumbuhan logistik pada unggas dan membatasi penelitian vaksinasi hanya pada populasi unggas. Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis mengambil judul **“MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN FLU BURUNG DENGAN VAKSINASI DAN PERTUMBUHAN LOGISTIK PADA POPULASI UNGGAS”**.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menurunkan model matematika yang dihasilkan. Penelitian ini juga ditujukan untuk mengetahui efektifitas tindakan pencegahan yang dilakukan pada virus flu burung. Kontribusi penelitian ini antara lain untuk menambah dan memperluas pengetahuan tentang pemodelan

matematika khususnya model penyebaran flu burung. Hasil penelitian ini dapat menjadi salah satu acuan dalam menyikapi kasus flu burung yang terjadi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas dapat dirumuskan beberapa masalah, antara lain.

1. Bagaimana penurunan model matematika penyebaran flu burung dengan vaksinasi dan pertumbuhan logistik pada populasi unggas?
2. Bagaimana menentukan titik kesetimbangan dalam model tersebut?
3. Bagaimana analisis kestabilan titik kesetimbangan model yang dibentuk?
4. Bagaimana simulasi solusi model dan interpretasi perilaku solusi model yang dibentuk dengan *software* Maple 12?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang dilakukan pada penelitian ini sebagai berikut.

1. Penyebaran flu burung (H5N1).

Pemodelan matematika penyebaran flu burung dengan model deterministik *SIRS* pada populasi manusia dan model deterministik $S_b I_b V_b$ pada populasi unggas.

2. Vaksinasi pada burung.

Keberhasilan vaksinasi adalah 100%. Model matematika ini hanya mengamati vaksinasi pada populasi unggas yang rentan.

3. Pertumbuhan populasi logistik.

Model matematika hanya mengamati pertumbuhan logistik pada populasi unggas.

4. Simulasi menggunakan *software* Maple 12.

Setelah melakukan analisis titik kesetimbangan dan analisis kestabilan titik kesetimbangan, disimulasikan menggunakan *software* Maple 12.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas didapatkan tujuan sebagai berikut.

1. Menentukan dan menurunkan model matematika penyebaran flu burung dengan vaksinasi dan pertumbuhan logistik pada populasi burung.
2. Menentukan titik kesetimbangan dalam model tersebut.
3. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model yang dibentuk.
4. Menyusun simulasi solusi model di sekitar titik kesetimbangan dan menginterpretasikan perilaku solusi model yang dibentuk dengan *software* Maple 12.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penulisan ini sebagai berikut.

1.5.1 Bagi Penulis

- a. Penulis dapat mengembangkan dan mengaplikasikan pengetahuan dan keilmuan di bidang matematika.

- b. Penulis dapat menentukan model matematika penyebaran flu burung dengan vaksinasi dan pertumbuhan logistik pada populasi burung.
- c. Penulis dapat menentukan titik kesetimbangan dalam model tersebut.
- d. Penulis dapat menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model yang dibentuk.
- e. Penulis dapat menyusun simulasi solusi model di sekitar titik kesetimbangan dan menginterpretasikan perilaku solusi model yang dibentuk dengan *software* Maple 12.

1.5.2 Bagi Pembaca

Sebagai bahan informasi dan tambahan pengetahuan pada bidang matematika khususnya pemodelan matematika tentang penyebaran flu burung, vaksinasi dan pertumbuhan logistik pada populasi unggas dan diharapkan kepada pembaca untuk melakukan penelitian selanjutnya.

1.5.3 Bagi Lembaga

Sebagai bahan informasi dan tambahan referensi pada bidang matematika.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi disusun dalam tiga bagian, yaitu bagian awal, bagian inti, dan bagian akhir.

1.6.1 Bagian Awal

Bagian awal dari penulisan proposal ini berisi halaman *cover* dan daftar isi.

1.6.2 Bagian Inti

Bagian inti dari penulisan proposal ini terdiri dari tiga bab, yaitu.

Bab 1: Pendahuluan

Pendahuluan berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab 2: Tinjauan Pustaka

Tinjauan pustaka berisi mengenai teori-teori yang mendukung dan berkaitan dengan pembahasan proposal sehingga dapat membantu penulis maupun pembaca dalam memahami isi proposal. Bab ini terdiri dari gambaran umum pemodelan matematika, gambaran umum flu burung, sistem persamaan diferensial, model matematika, vaksinasi pada burung, pertumbuhan populasi logistik, titik kesetimbangan (*equilibrium*), kestabilan titik kesetimbangan (*equilibrium*), titik kesetimbangan hiperbolik, nilai *Eigen*, vektor *Eigen*, matriks *Jacobian*, kriteria kestabilan *Routh-Hurwitz* dan Maple.

Bab 3: Metode Penelitian

Metode penelitian berisi prosedur atau langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini. Bab ini terdiri dari melakukan studi pustaka, pemecahan masalah, dan penarikan kesimpulan.

Bab 4: Hasil dan Pembahasan

Hasil dan pembahasan berisi tentang konstruksi model matematika penyebaran flu burung dengan vaksinasi pada burung dan pertumbuhan populasi logistik, titik kesetimbangan, analisis kestabilan titik kesetimbangan, dan hasil simulasi model dengan Maple 12.

Bab 5: Penutup

Berisi kesimpulan dan saran dari penulisan skripsi ini.

1.6.3 Bagian Akhir

Bagian akhir dari penulisan skripsi ini berisi daftar pustaka sebagai acuan penulisan yang memberikan informasi tentang buku, jurnal, dan literatur lain yang digunakan dalam skripsi ini serta lampiran yang mendukung kelengkapan skripsi ini.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pemodelan Matematika

2.1.1 Pengertian Pemodelan Matematika

Istilah model berasal dari bahasa Latin *modus* (ukuran). Model merupakan representasi dari suatu objek atau masalah nyata. Menurut Kharis dan Asih (2018), model merupakan gambaran dari kejadian nyata yang memenuhi batasan-batasan yang ada dengan tujuan untuk menyelesaikan permasalahan nyata tersebut.

2.1.2 Klasifikasi Model Matematika

Beberapa kategori model matematika yang umum digunakan sebagai berikut (Kharis & Asih, 2018).

1. Menurut keberadaan faktor waktu.
 - a. Model statistik: perubahan tanpa faktor waktu.
 - b. Model dinamik: perubahan dengan mempertimbangkan faktor waktu.
2. Menurut interval input waktu.
 - a. Model diskrit: output hanya terdefinisi untuk input waktu yang berupa interval bilangan bulat.

- b. Model kontinu: output hanya terdefinisi untuk input waktu yang berupa interval bilangan real.
3. Menurut metode.
- a. Model empirik: tidak melihat mekanisme sistem, berupa *fitting curve* terhadap gugus data.
 - b. Model mekanisme: mempertimbangkan mekanisme yang melandasi sistem.
 - c. Model deterministik: tidak ada unsur ketidakpastian, output bersifat unik untuk input yang sama.
 - d. Model stokastik: mempertimbangkan unsur ketidakpastian (peluang), output tak unik untuk input yang sama.
 - e. Model kompartemen: model dengan pola input → kompartemen/bagian → output. Pendekatan model kompartemen mudah divisualisasikan menggunakan software – software simulasi seperti, Simulink, Stella, dll.
 - f. Model simulasi: perilaku sistem ditiru dengan membangkitkan gugus data yang menyerupai hasil yang riil, menggunakan bilangan acak.

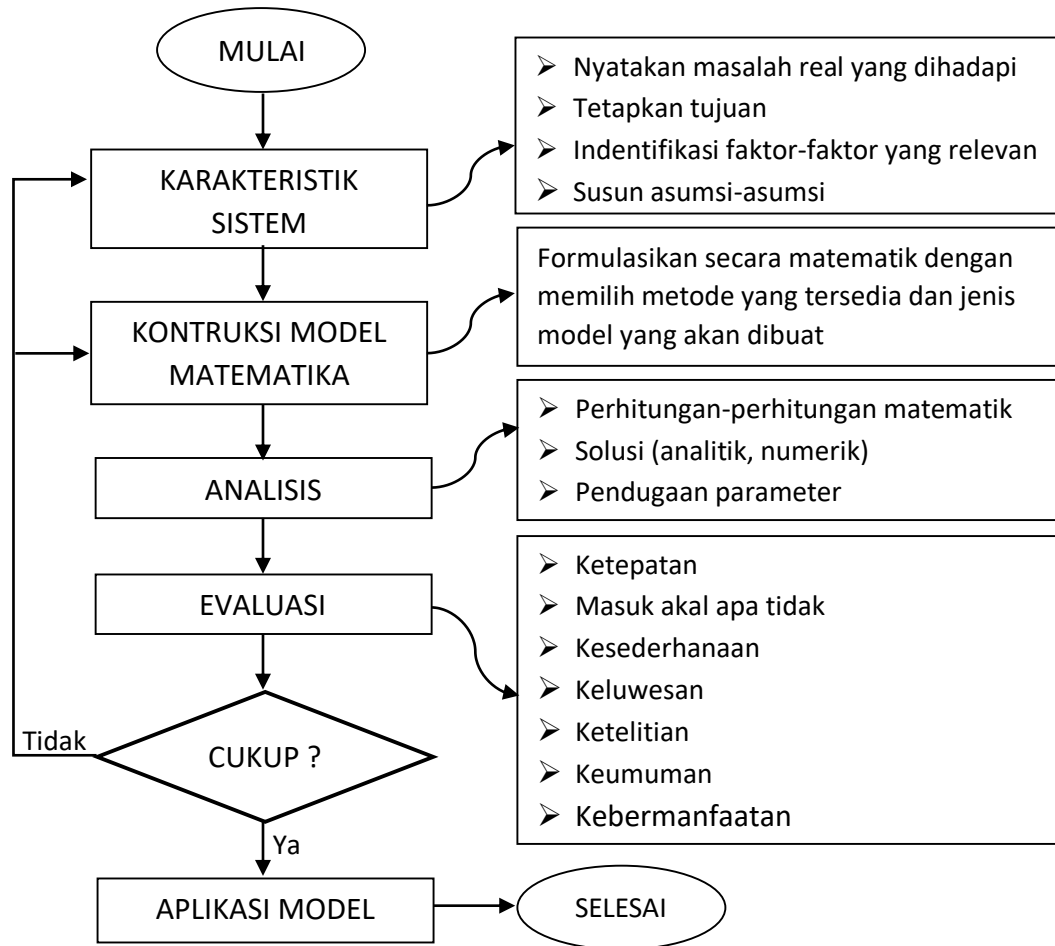
2.1.3 Tahapan-tahapan dalam Konstruksi Model Matematika

Tahapan dalam membuat suatu model matematika merupakan suatu proses yang terdiri dari empat tahap utama, yaitu.

1. Karakteristik sistem,
2. Konstruksi model matematika,
3. Analisis, dan

4. Evaluasi.

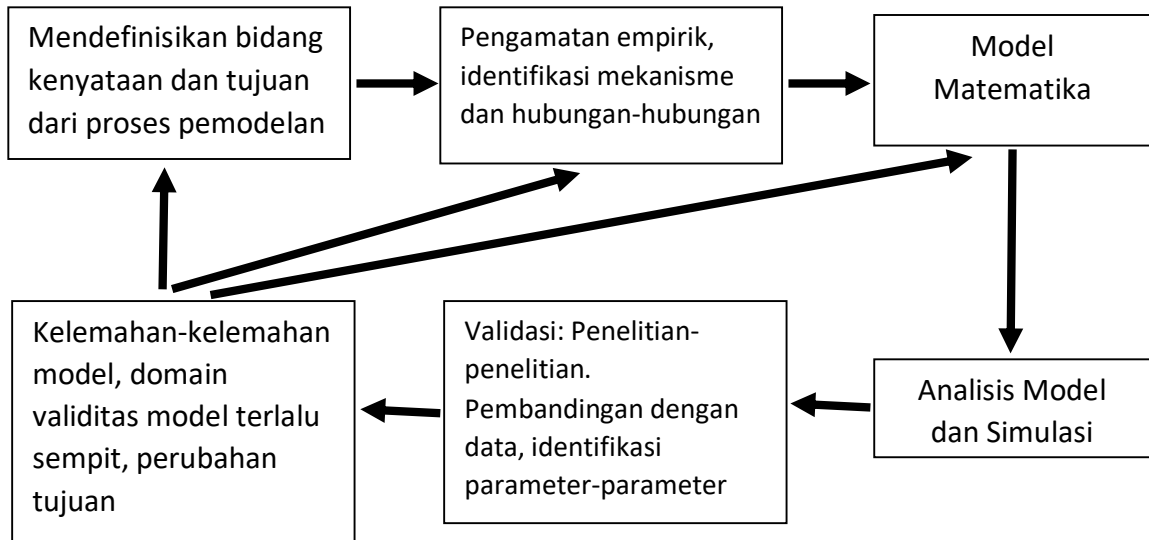
Proses ini secara sistematis digambarkan dengan diagram alir berikut.



Gambar 2.1 Tahapan-tahapan dalam Konstruksi Matematika

(Kharis & Asih, 2018)

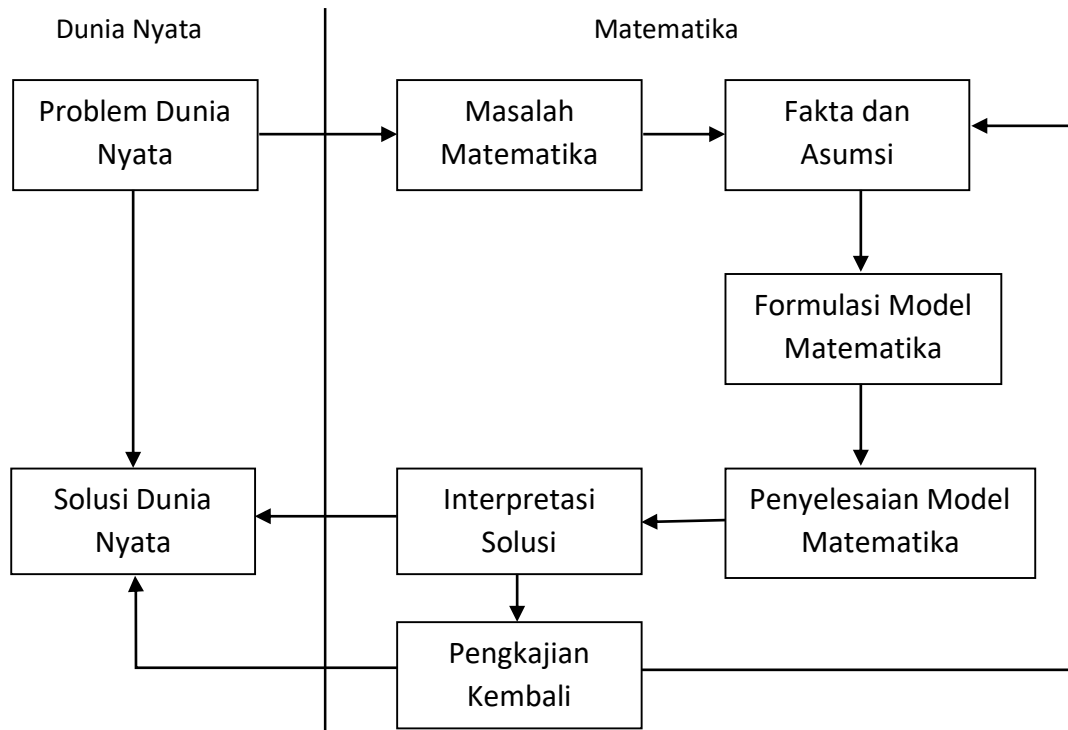
Diberikan siklus pemodelan matematika sebagai berikut.



Gambar 2.2 Siklus Pemodelan Matematika

(Kharis & Asih, 2018)

Proses pemodelan matematika dapat digambarkan dengan diagram alir berikut.

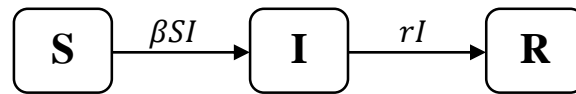


Gambar 2.3 Diagram Alir Proses Pemodelan Matematika

(Haberman, 1997)

2.2 Model Epidemik SIR Klasik

Salah satu model matematika epidemi untuk menganalisis penyebaran penyakit di antaranya adalah SIR (Puspita *et al.*, 2017). Model SIR klasik adalah model epidemik yang paling sederhana, model ini dibagi menjadi tiga kompartemen masing-masing meliputi *suspected* (S), *infected* (I), dan *recovered* (R). Diagram kompartemen dari model epidemi SIR klasik dapat dilihat pada diagram berikut.



Gambar 2.4 Diagram Transfer Model Epidemi SIR Klasik

(Kermack & Kendrick, 1927)

Gambar 2.4 menunjukkan bahwa S , I , dan R berturut-turut menyatakan jumlah individu yang rentan, sakit/terinfeksi, dan sembuh saat t .

Model matematika dari diagram kompartemen di atas dapat dilihat pada Sistem (2.1).

$$\dot{S} = -\beta SI$$

$$\dot{I} = \beta SI - rI$$

$$\dot{R} = rI$$

$$S + I + R = N \tag{2.1}$$

dengan parameter-parameter sebagai berikut.

N = besarnya populasi total, $N > 0$,

β = laju kontak antara individu rentan dengan individu terinfeksi,

r = konstanta penyembuhan per kapita.

2.3 Flu Burung

2.3.1 Etimologi

Flu burung adalah penyakit infeksi yang disebabkan oleh virus influenza tipe A. Selain tipe A, virus influenza juga memiliki 2 tipe lain yaitu B dan C. Tipe A menyerang unggas dan manusia, tipe B hanya menyerang manusia dan tipe C menyerang babi dan

manusia. Tipe A mudah bermutasi dan sangat patogen, sedang tipe B dan C hanya dapat menimbulkan sakit ringan dan tidak menyebabkan epidemik.

Flu burung memiliki sifat antara lain mudah mengalami mutasi atau modifikasi genetik, dapat mengaglutinasi sel darah merah, virus mudah mati di luar tubuh (tidak stabil di lingkungan luar), mudah mati oleh beberapa desinfektan, berpotensi menular pada manusia, dan menyebabkan kematian. Flu burung secara natural dapat menginfeksi unggas dan manusia. Dilaporkan bahwa H5 dan H7 yang sangat virulen pada unggas dan berpotensi sebagai penyebab pandemik (Murwanti *et al.*, 2013).

2.3.2 Gejala dan Tanda

Virus flu burung dapat menimbulkan gejala penyakit pernafasan pada unggas dari patogen ringan (*low pathogenis*) sampai yang bersifat patogen ganas atau fatal (*highly pathogenis*). Virus flu burung yang ganas ditandai dengan proses penyakit yang cepat dan disertai kematian tinggi.

Gejala flu burung pada manusia meliputi hal-hal berikut ini (Radji, 2006).

1. Demam (suhu badan di atas $38^{\circ}C$).
2. Lemas.
3. Pendarahan hidung dan gusi.
4. Sesak napas.
5. Muntah dan nyeri perut disertai diare.
6. Batuk dan nyeri tenggorokan.
7. Radang saluran pernapasan.

8. Pneunomia.
9. Infeksi mata.
10. Nyeri otot.

Masa inkubasi flu burung pada unggas berkisar antara beberapa jam sampai dengan tiga hari. Masa inkubasi tergantung dosis virus, rute kontak dan spesies unggas yang terserang. Gejala klinis flu burung ditemukan dalam dua bentuk, yaitu bentuk akut dan bentuk ringan. Bentuk akut ditandai dengan proses penyakit yang cepat disertai mortalitas yang tinggi, gangguan pernafasan, diare dan pendarahan jaringan subkutan. Pada bentuk akut ini dapat menyebabkan kematian mendadak tanpa adanya gejala tertentu. Menurut Murwanti *et al.* (2013), virus avian influenza berdasar daya patogenitasnya digolongkan menjadi dua.

- a. *Low Pathogenic Avian Influenza Virus* (LPAIV) adalah virus influenza unggas berpatogenitas rendah dengan ciri lesi bervariasi tergantung dari jenis virus, spesies, dan usia hospes. LPAIV biasanya hanya menyebabkan gejala ringan misalnya ditandai dengan bulu kasar atau produksi telur menurun bahkan kadang tidak terdeteksi sama sekali.
- b. *High Pathogenic Avian Inluenza Virus* (HPAIV), bercirikan terjadi patologi yang sangat menyolok. HPAIV ditandai dengan proses penyakit yang cepat disertai mortalitas tinggi, gangguan pernafasan, lakrimasi yang berlebihan, edema di daerah muka dan kepala, pendarahan jaringan subkutan dan kebiruan pada daerah muka, jengger, pial, dada, tungkai dan telapak kaki.

2.3.3 Penyebaran Flu Burung pada Populasi Unggas

Pada penyebaran flu burung, populasi unggas dibagi menjadi dua kelompok. Pertama adalah unggas *susceptible*, yaitu unggas yang sehat namun rentan terhadap penyakit. Kedua adalah unggas *infected*, yaitu unggas yang telah terinfeksi flu burung dan dapat menularkan penyakitnya (Murwanti *et al.*, 2013).

2.3.4 Penyebaran Flu Burung pada Populasi Manusia

Pada penyebaran flu burung, populasi manusia dibagi menjadi tiga kelompok. Pertama adalah manusia *susceptible*, yaitu manusia yang sehat namun rentan terhadap penyakit. Kedua adalah manusia *infectide*, yaitu manusia yang telah terinfeksi flu burung yang telah bermutasi, dan dapat menularkan penyakit pada manusia sehat lainnya. Ketiga adalah manusia *recovered*, yaitu manusia yang sembuh dan mendapatkan kekebalan setelah terkena flu burung (Murwanti *et al.*, 2013).

2.3.5 Pengobatan dan Pencegahan

Dalam upaya pengobatan dan pencegahan penyebaran penyakit flu burung dari unggas ke manusia, terdapat empat macam obat anti viral, yaitu amantadine, rimantadine, zanamivir, dan oseltamivir atau yang lebih dikenal dengan nama tamiflu. Mekanisme kerja amantadine dan rimatadine adalah menghambat replikasi virus, namun kedua obat ini sudah tidak mempan lagi untuk membunuh virus flu burung yang saat ini beredar luas. Sedangkan mekanisme kerja zanamivir dan asetamivir dapat menghentikan replikasi virus flu burung (Radji, 2006).

2.4 Persamaan Diferensial

2.4.1 Pengertian Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. Selain itu, persamaan diferensial juga didefinisikan sebagai persamaan yang memuat satu atau beberapa turunan fungsi yang tak diketahui (Waluya, 2006: 1).

2.4.2 Klasifikasi Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial atau sebagian didasarkan pada apakah fungsi yang diketahui tergantung pada satu atau beberapa variabel bebas. Suatu persamaan diferensial yang mengandung turunan biasa dengan satu peubah bebas dinamakan persamaan diferensial biasa. Sedangkan suatu persamaan yang mengandung turunan parsial dengan lebih dari satu peubah bebas dinamakan persamaan diferensial parsial (Waluya, 2006: 2-3).

2.4.3 Contoh Persamaan Diferensial

Berikut ini adalah beberapa contoh persamaan diferensial.

1. $y' - 4y = 0$ merupakan persamaan diferensial biasa,
2. $y'' - y' - 2y = 0$ merupakan persamaan diferensial biasa,
3. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ merupakan persamaan diferensial parsial, dan
4. $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = x + 2y$ merupakan persamaan diferensial parsial.

Order dari persamaan diferensial adalah besar turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial (Waluya, 2006: 3).

2.5 Pertumbuhan Populasi Logistik

Prinsip biologi memberikan beberapa persyaratan lain P.F. Verhulst pada 1838 merupakan orang pertama yang mengemukakan mengenai batasan dalam model pertumbuhan sebelumnya, dari pda harus mengabaikan karena dapat menyebabkan adanya ambiguitas katatosprotik yang ada pada model Malthus. Persamaan yang diusulkan oleh Verhulst, dinamakan persamaan logistik, yang sampai saat ini persamaan tersebut masih dianggap lebih mendekati realita lapangan. Persamaan ini berdasarkan kehadiran spesies pada lingkungan akan memiliki populasi maksimum. Jika pertumbuhan maksimum populasi K , maka Berhulst berpendapat bahwa laju pertumbuhan per kapita bersih (laju kelahiran dikurangi laju kematian) harus sepanjang N mendekati K , dan akan menjadi negatif ketika N melebihi K . Fungsi yang paling mudah menggambarkan persamaan tersebut adalah $r \left(1 - \frac{N}{K}\right)$, di mana r merupakan konstanta positif. Dengan menggunakan asumsi ini maka laju pertumbuhan bersih (net) per kapita akan mendapatkan persamaan logistik sebagai berikut.

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (2.2)$$

dengan N adalah jumlah populasi dan K pertumbuhan maksimum populasi.

Model logistik ini memiliki dua titik keseimbangan sebagai solusi yaitu $N = 0$ dan $N = K$. Titik keseimbangan tersebut dapat ditemukan dengan mudah pada persamaan di atas, untuk penyelesaian yang pertama adalah tidak stabil sedangkan penyelesaian kedua stabil (Iswanto, 2012).

Menurut Haberman (1977), model pertumbuhan logistik ini memberikan asumsi bahwa nilai $R_1 = R(N)$. Nilai $R(N)$ pendekatan laju pertumbuhan tanpa pengaruh lingkungan dan ditentukan oleh pengaruh kelahiran dan kepadatan populasi (keterbatasan luas lingkungan). Nilai $R(N)$ dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$R(N) = a - bN \quad (2.3)$$

dengan a menyatakan laju pertumbuhan populasi tanpa pengaruh lingkungan dan b menyatakan pengaruh dari pertambahan kepadatan populasi (semakin padat maka persaingan antar individu meningkat).

Laju perubahan populasi $\frac{dN}{dt}$ sama dengan laju pertumbuhan dikalikan populasi N , model pertumbuhan logistik dirumuskan sebagai berikut.

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bN) \quad (2.4)$$

di mana a menyatakan laju pertumbuhan populasi tanpa pengaruh lingkungan dan b menyatakan pengaruh dari kepadatan populasi.

Titik ekuilibrium dari model di atas dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $N(a - bN) = 0$ diperoleh nilai $N = 0$ dan $N = \frac{a}{b}$. Populasi nol pasti

menjadi titik ekuilibrium. Namun yang menarik adalah kasus $N = \frac{a}{b}$. Kasus ini adalah populasi terbesar di mana lingkungan masih mendukung populasi tanpa adanya kehilangan individu anggota populasi (individu mati), hal ini disebut *carrying capacity* dari lingkungan. Teori ini memprediksi bahwa populasi $N = \frac{a}{b}$ berkaitan dengan Z.P.G. (*zero population growth*) (Haberman, 1977).

2.6 Titik Keseimbangan (Ekuilibrium)

Secara umum, model penyebaran penyakit biasanya mempunyai dua titik keseimbangan, yaitu titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik penyakit. Titik keseimbangan bebas penyakit adalah suatu kondisi di mana tidak ada lagi penyakit yang menyerang dalam suatu populasi atau dapat dikatakan tidak ada individu yang terinfeksi penyakit, sedangkan titik keseimbangan endemik penyakit adalah suatu kondisi di mana penyakit selalu saja ada dalam populasi tersebut atau dapat dikatakan selalu ada individu yang terinfeksi (Tamrin *et al.*, 2007).

Suatu sistem dinamik dikatakan setimbang jika sistem tidak berubah sepanjang waktu. Secara formal titik keseimbangan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1 (Perko, 2001)

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik keseimbangan (titik *equilibrium*) dari $\dot{x} = f(x)$ jika $f(\bar{x}) = 0$.

2.7 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Kestabilan perilaku sistem pada titik kesetimbangan (*equilibrium*) dikenal sebagai kestabilan titik kesetimbangan. Kestabilan tersebut merupakan informasi untuk menggambarkan perilaku sistem. Dibawah ini definisi formal mengenai kestabilan titik kesetimbangan.

Definisi 2.2 (Hale & Kocak, 1991)

Titik kesetimbangan $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ dari $\dot{x} = f(x)$ dikatakan:

- a) Stabil lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$ maka berakibat $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.
- b) Stabil asimotik lokal jika titik *equilibrium* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta_0$ maka berakibat $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$.
- c) Tidak stabil jika titik *equilibrium* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tak memenuhi (a).

Sifat kestabilan titik *equilibrium* dari $\dot{x} = f(x)$ dapat didekati dengan menggunakan metode linearisasi. Metode ini digunakan untuk mengetahui perilaku sistem persamaan diferensial yang tidak dapat ditentukan penyelesaian eksaknya. Sebelum penyelesaian dengan metode linearisasi, perlu ditentukan terlebih dahulu matriks Jacobian di titik \bar{x} . Di bawah ini diberikan definisi matriks Jacobian di titik \bar{x} .

Definisi 2.3 (Hale & Kocak, 1991)

Diberikan $f = (f_1, \dots, f_n)$ pada sistem $\dot{x} = f(x)$ dengan $f_i \in C'(E, \mathbb{R}), i = 1, 2, \dots, n$.

$$Jf(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

dinamakan matriks *Jacobian* dari f di titik \bar{x} .

Setelah ditentukan matriks *Jacobian*, maka penyelesaian dengan metode linearisasi dapat dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem yang tidak dapat ditentukan dengan penyelesaian eksaknya. Berikut definisi mengenai metode linearisasi.

Definisi 2.4 (Perko, 2001)

Sistem $\dot{x} = Jf(\bar{x})$ disebut linearisasi sistem $\dot{x} = f(x)$ di \bar{x} .

Kestabilan dari titik *equilibrium* pada sistem $\dot{x} = f(x)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen matriks *Jacobian* pada metode linearisasi. Nilai eigen dapat ditentukan melalui persamaan karakteristik dari matriks *Jacobian* di titik \bar{x} . Kriteria kestabilan titik *equilibrium* pada sistem $\dot{x} = f(x)$ tersebut disajikan pada teorema dibawah ini.

2.8 Vektor Eigen dan Nilai Eigen

Berikut diberikan definisi dari vektor *eigen* dan nilai *eigen* beserta penggunaannya dalam menentukan kestabilan titik *equilibrium*.

Definisi 2.5 (Barnes & Fulford, 2011)

Vektor *eigen* dari matriks A merupakan vektor tak nol x sedemikian hingga $Ax = \lambda x$, untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut nilai *eigen* dari A jika terdapat solusi tak nol x untuk $Ax = \lambda x$ sehingga x merupakan vektor *eigen* yang bersesuaian dengan nilai *eigen* λ .

Definisi 2.6 (Barnes & Fulford, 2011)

Polinomial karakteristik dari A didefinisikan sebagai $|\lambda I - A|$ sedangkan $|\lambda I - A| = 0$ disebut persamaan karakteristik dari A .

Teorema 2.1 (Olsder, 1994)

Diberikan kestabilan sistem persamaan dengan nilai *eigen* dari matriks *Jacobian* $Jf(\bar{x})$.

1. Jika semua nilai *eigen* dari matriks *Jacobian* $Jf(\bar{x})$ mempunyai bagian real negatif, maka titik *equilibrium* \bar{x} dari sistem persamaan non linear stabil asimtotik lokal.
2. Jika terdapat nilai *eigen* matriks *Jacobian* $Jf(\bar{x})$ mempunyai bagian real positif, maka titik ekuilibrium \bar{x} dari sistem persamaan non linear tidak stabil.

2.9 Titik Keseimbangan Hiperbolik

Sifat kestabilan titik *equilibrium* \bar{x} dapat diketahui asalkan titik tersebut hiperbolik. Berikut definisi titik hiperbolik.

Definisi 2.7 (Haberman, 1977)

Titik *equilibrium* \bar{x} disebut titik *equilibrium* hiperbolik jika semua nilai eigen $Jf(\bar{x})$ mempunyai bagian real tak nol.

2.10 Kriteria Kestabilan *Routh-Hurwitz*

Kriteria kestabilan *Routh-Hurwitz* adalah suatu metode yang menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar karakteristik secara langsung.

Jika $P(z) = z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_{n-1}z + a_n$ adalah polinomial dengan koefisien riil, dan misalkan D_1, D_2, \dots, D_n menotasikan determinan

$$D_1 = a$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_3 & \dots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_2 & \dots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{vmatrix} \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

dimana $a_j = 0$ jika $j > n$. Jika $D_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$, maka semua solusi dari persamaan $P(z) = 0$ memiliki nilai riil negatif.

Syarat perlu supaya persamaan stabil adalah semua akar dari $P(z)$ mempunyai bagian riil negatif. Sedangkan syarat perlu dan cukup agar semua akar persamaan mempunyai bagian riil negatif adalah semua koefisien persamaan harus positif dan semua suku pada kolom pertama dari susunan tersebut harus bertanda positif.

(Cronim, 1994)

2.11 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar adalah bilangan yang menyatakan banyaknya rata – rata individu *infected* sekunder akibat tertular individu *infected* primer yang berlangsung di dalam populasi *susceptible*. Namun, adapula yang mengartikan rasio atau perbandingan yang menunjukkan jumlah individu *susceptible* yang menderita penyakit yang diakibatkan oleh satu individu *infected* (Rahmalia, 2017).

Jika $R_0 < 1$ maka penyakit akan menghilang dari populasi. Jika $R_0 > 1$ maka pada akhirnya akan terjadi epidemik (Hutapea, 2016).

2.12 Maple

Maple adalah perangkat lunak matematika berbasis komputer, yaitu sistem komputer aljabar yang mampu menyelesaikan persamaan dalam bentuk solusi numerik dan simbolik. Maple dibuat oleh *Wateloo Maple Software* (WMS) yang cikal bakalnya berasal dari para peneliti dari *University of Wateboo*, Canada tahun 1988. Menu-menu

yang terdapat pada tampilan program Maple ini terdiri dari menu *File, Edit, View, Insert, Format, Spreadsheet, Option, Window, dan Help*. Sebagian besar menu-menu di atas merupakan menu standar yang dikembangkan untuk program aplikasi pada sistem operasi *Windows* (Siswanto, 2013).

Pernyataan yang sering digunakan untuk menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial antara lain: *diff* digunakan untuk mendiferensialkan (menurunkan) suatu fungsi, *dsolve* digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, *evalf* memberikan nilai numerik dari suatu persamaan, dan *simplify* digunakan untuk menyederhanakan suatu persamaan. Namun tentu saja pernyataan-pernyataan awal seperti *restart* dan deklarasi variabel/konstanta yang diperlukan tidak boleh diabaikan. Membuat grafik pada Maple gunakan *perintah plot, plot2d, plot3d*, tergantung dimensi dari pernyataan yang dimiliki. Untuk membuat gerakan animasi digunakan perintah *animate3d* (Kartono, 2001).

Maple sering digunakan untuk keperluan penyelesaian permasalahan persamaan diferensial dan visualisasinya, karena Maple memiliki kemampuan menyederhanakan persamaan, hingga suatu solusi persamaan diferensial dapat dipahami dengan baik. Keunggulan lain dari Maple untuk aplikasi persamaan diferensial adalah kemampuan melakukan animasi grafik dari suatu fenomena gerakan yang dimodelkan ke dalam persamaan diferensial yang memiliki nilai awal dan syarat batas (Kartono, 2001).

BAB 5

PENUTUP

5.1 Simpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Model matematika penyebaran flu burung dengan vaksinasi dan pertumbuhan logistik pada populasi unggas sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = \mu K + \theta[K - (S + I)] - S \left(\beta_1 \frac{I_b}{K} + \mu \right)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta_1 \frac{S}{K} I_b - (\mu + \gamma_1) I$$

$$\frac{dN_b}{dt} = N_b(A - BN_b - \mu_b) - (M_1 + M_2)I_b$$

$$\frac{dI_b}{dt} = \beta_b \frac{N_b - (I_b + V_b)}{N_b} I_b - (\mu_b + M_1 + M_2)I_b$$

$$\frac{dV_b}{dt} = \delta[N_b - (I_b + V_b)] - \mu_b V_b$$

2. Model matematika penyebaran flu burung dengan vaksinasi dan pertumbuhan logistik pada populasi unggas mempunyai dua titik kesetimbangan serta kestabilannya sebagai berikut.

(1) Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah $P_0 = (S, I, N_b, I_b, V_b) =$

$$\left(K, 0, \frac{A - \mu_b}{B}, 0, \frac{\delta(A - \mu_b)}{B(\delta + \mu_b)} \right).$$

(2) Titik kesetimbangan endemik adalah $P_1 = (S, I, N_b, I_b, V_b) = (S^*, I^*, N_b^*, I_b^*, V_b^*)$

dengan

$$S^* = \frac{K(\mu + \gamma_1)I^*}{\beta_1 I_b^*}$$

$$I^* = \frac{\beta_1 K(\mu + \theta)I_b^*}{K(\mu + \theta)(\mu + \gamma_1) + \beta_1 I_b^*(\mu + \gamma_1 + \theta)}$$

$$N_b^* = \frac{\beta_b(2\delta + \mu_b)I_b^*}{\beta_b\mu_b - (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)}$$

$$I_b^* = \frac{\beta_b\mu_b - (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)}{B\beta_b^2(2\delta + \mu_b)^2} [\beta_b((2\delta + \mu_b)(A - \mu_b) - \mu_b(M_1 + M_2)) + (M_1 + M_2)(\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)]$$

$$V_b^* = \frac{\delta[2\beta_b\delta + (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)]I_b^*}{(\delta + \mu_b)[\beta_b\mu_b - (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)]}$$

$$\text{Diberikan } R_0 = \frac{\beta_b\mu_b}{(\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)}.$$

(1) Jika $R_0 < 1$ dan $A > \mu_b$ maka Sistem mempunyai satu titik kesetimbangan, yaitu $P_0 = (S, I, N_b, I_b, V_b) =$

$$\left(K, 0, \frac{A - \mu_b}{B}, 0, \frac{\delta(A - \mu_b)}{B(\delta + \mu_b)}\right) \text{ dan } P_0 \text{ stabil asimtotik lokal.}$$

(2) Jika $R_0 > 1$, $\delta = \mu_b$, $BI_b > A$, $A > \mu_b$, dan $M_1 + M_2 > 3\mu_b$ maka Sistem mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu P_0 dan $P_1 =$

$$(S, I, N_b, I_b, V_b) = (S^*, I^*, N_b^*, I_b^*, V_b^*)$$

dengan

$$S^* = \frac{K(\mu + \gamma_1)I^*}{\beta_1 I_b^*}$$

$$I^* = \frac{\beta_1 K(\mu + \theta)I_b^*}{K(\mu + \theta)(\mu + \gamma_1) + \beta_1 I_b^*(\mu + \gamma_1 + \theta)}$$

$$N_b^* = \frac{\beta_b(2\delta + \mu_b)I_b^*}{\beta_b\mu_b - (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)}$$

$$I_b^* = \frac{\beta_b\mu_b - (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)}{B\beta_b^2(2\delta + \mu_b)^2} [\beta_b((2\delta + \mu_b)(A - \mu_b) - \mu_b(M_1 + M_2)) + (M_1 + M_2)(\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)]$$

$$V_b^* = \frac{\delta[2\beta_b\delta + (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)]I_b^*}{(\delta + \mu_b)[\beta_b\mu_b - (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)]}$$

P_0 tidak stabil dan P_1 stabil asimtotik lokal.

3. Pada pertumbuhan populasi unggas secara logistik diperoleh dua titik kesetimbangan. Dari model pertumbuhan logistik ini diperoleh populasi unggas (N_b) yang memenuhi adalah $N_b = \frac{A - \mu_b}{B}$ pada kondisi bebas penyakit. Populasi unggas (N_b) adalah populasi terbesar di mana lingkungan masih mendukung populasi tanpa adanya kehilangan individu anggota populasi atau disebut dengan *carrying capacity* dari lingkungan.
4. Berdasarkan simulasi model matematika yang telah dilakukan diperoleh beberapa fakta, yaitu semakin besar perubahan peluang kontak antara unggas sehat dengan unggas terinfeksi (β_b) menyebabkan populasi manusia

terinfeksi $I(t)$ dan populasi unggas terinfeksi $I_b(t)$ semakin besar, tetapi populasi manusia rentan $S(t)$, populasi unggas $N_b(t)$, dan populasi unggas yang divaksinasi $V_b(t)$ semakin kecil. Kemudian diperoleh fakta bahwa semakin besar proporsi unggas divaksinasi dapat mencegah terjadinya wabah endemik. Hal ini dibuktikan jika peluang kontak antara unggas sehat dan unggas terinfeksi (β_b) dan semakin besar proporsi unggas divaksinasi (δ) maka nilai $R_0 < 1$. Sedangkan semakin besar proporsi pembakaran unggas terinfeksi dapat mencegah terjadinya wabah endemik. Hal ini dibuktikan jika peluang kontak antara unggas sehat dan unggas terinfeksi (β_b) dan semakin besar proporsi pembakaran unggas terinfeksi (M_2) maka nilai $R_0 < 1$. Artinya populasi akan stabil karena penyakit akan hilang dari populasi (bebas penyakit).

5.2 Saran

Dalam penulisan ini, nilai-nilai parameter hendaknya disesuaikan dengan fakta-fakta medis. Pembahasan model matematika penyebaran flu burung dengan vaksinasi dan pertumbuhan logistik pada populasi unggas belum mengamati adanya laju manusia yang meninggal karena penyakit flu burung. Selain itu, dalam penelitian ini belum diteliti adanya penularan penyakit flu burung dari manusia ke manusia. Oleh karena itu, penulis menyarankan kepada pembaca yang tertarik pada masalah ini untuk mengembangkan model yang sudah ada dengan mempertimbangkan adanya laju manusia meninggal karena penyakit flu burung dan adanya penularan penyakit flu burung dari manusia ke manusia.

DAFTAR PUSTAKA

- Barnes, B. & Fulford, G.R. 2011. *Mathematical Modelling With Case Studies*.
New York: Taylor & Francis, Inc.
- Bustan, M.N. 1997. *Pengantar Epidemiologi*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Chong, N.S & Smith, R.J. 2015. Modelling Avian Influenza Using Filippov Systems to Determine Culling of Infected Birds and Quarantine. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. Elsevier. Vol 24: 196-218.
- Cronim, J. 1994. *Differential Equations (Introduction and Qualitative Theory: Second Edition, Revised, and Expanded)*. New York: Marcel Dekker, Inc.
- Darmayana, H. *Flu Burung Masih Hantui Dunia*. CNN Indonesia.
<http://m.cnnindonesia.com/gaya-hidup/20170309113747-255-198940/fli-burung-masih-hantui-dunia/> (diakses pada 16 Februari 2018).
- Derouich, M. & Boutayeb, A. 2008. An Avian Influenza Mathematical Model. *Applied Mathematical Science*. Vol 2(36): 1749-1760.
- Gooskens, J., Jonges, M., Claas, E.C.J., Meijer, A., van den Broek, P.J., & Kroes, A.C.M. 2009. Morbidity and Mortality Associated With Nosocomial Transmission of Oseltamivir-Resistant Influenza A(H1N1) Virus. *JAMA*. Vol 301(10): 1042-1046.

- Haberman, R. 1977. *Mathematical Models Mechanical Vibration, Population Dynamic, and Traffic Flow*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Hale, J.K. & Kocak, H. 1991. *Dynamic and Bifurcation*. New York: Springer-Verlag.
- Hutapea, T.A. 2016. Prevensi Penyebaran Virus H5N1 dengan Model SI-SIIR Melalui Kontrol Vaksinasi pada Populasi Manusia. *Jurnal Generasi Kampus*. Vol 9(2): 162-175.
- Iswanto, R.J. 2012. *Pemodelan Matematika Aplikasi dan Penerapannya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Kartono. 2001. *Maple untuk Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: J&J Learning.
- Kermack, W.O. & Mc. Kendrick, A.G. 1927. Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematics*. 115: 700-721.
- Kharis, M. & Asih, T.S.N. 2018. *Pengantar Pemodelan Matematika*. Semarang: Universitas Negeri Semarang.
- Kharis, M. & Cahyono, A.N. 2015. Pemodelan Matematika pada Epidemologi Influenza dengan Strategi Vaksinasi. *Jurnal MIPA UNNES*. Vol 38(2): 176-185.

- Murwanti, I., Ratiningsih, R., & Jaya, A.I. 2013. Studi Penyebaran Penyakit Flu Burung Kajian Dinamis Revisi Model Endemik SIRS dengan Pemberian Vaksinasi Unggas. *Online Journal of Nature Science*. Vol 2(1): 27-35.
- Olsder, G.J. 1994. *Mathematics System Theory*. The Netherlands: Delftse Uitgevers Maatscappij b.v.
- Padilah, T.N. 2017. Model Epidemologi SIRS dengan Pertumbuhan Logistik. *Jurnal Silogisme: Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya*. Vol 2(1): 2527-6182.
- Perko, L. 2001. *Differential Equations and Dynamical System*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Puspita, G., Kharis, M., & Supriyono. 2017. Pemodelan Matematika pada Penyebaran Penyakit Difteri dengan Pengaruh Karantina dan Vaksinasi. *Journal of UNNES*. UJM Vol 6(1).
- Radji, M. 2006. Avian Influenza A (H5N1): Patogenesis, Pencegahan dan Penyebaran pada Manusia. *Majalah Ilmu Kefarmasian*. Vol 3(2): 55-65.
- Rahmalia, D. 2017. Pemodelan Matematika dan Analisis Stabilitas dari Penyebaran Penyakit Flu Burung. *Jurnal UJMC*. Vol 1(1): 11-19. ISSN: 2460-3333.
- Siswanto. 2013. Model Matematika Penyebaran Flu Burung dari Unggas ke Manusia. *UJM*. Vol 2(1): 32-38.

Swayne, D.E. & Kapczynski, D.R. 2008. *Vaccines, Vaccination, and Immunology for Avian Influenza Viruses in Poultry*. Avian Influenza edited by David E. Swayne 1st ed. Blackwell Publishing.

Tamrin, H., Riyanto, M. Z., Akhid, & Ardhian, A. 2007. Model SIR Penyakit Tidak Fatal. *Jurnal Matematika*. Jurusan Matematika FMIPA UGM.

Tasmi and Nuraini, N. 2016. Optimal Vaccination and Treatment Schedules in a Deterministic Avian Influenza Model. *Journal of Mathematical and Fundamental Science*. Vol 48(2): 164-177.

Waluya, S.B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Yang, Y., Sugimoto, J.D., Halloran, M.E., Basta, N.E., Chao, D.L., Matrajt, L., Potter, G., Kenah, E., & Longini Jr., I.M.. 2009. The Transmissibility and Control of Pandemic Influenza A (H1N1) Virus. *Science*. 10.1126/science.1177373.

Zou, Y., Yang, Y., Gao, R., Sun, Y., Li, X., Ju, X., Liang, Z., Liu, Q., Zhao, Y., Guo, F., Bai, T., Han, Z., Zhu, J., Zhou, H., Huang, F., Li, C., Lu, H., Li, N., Li, D., Jin, N., Penninger, J.M., & Jiang, C. 2014. Angiotensin-converting Enzyme 2 Protects Lethal Avian Influenza A H5N1 Infectious. *Journal Nature Communication*. DOI: 10.1038/ncomms4594.