PENENTUAN NILAI EIGEN SUATU MATRIKS

DENGAN METODE PANGKAT (*POWER METHOD*)

Skripsi

disusun sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

Benedikta Putri Herviani

4111414025

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2019

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, dan apabila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan.

Semarang,

Yang membuat pernyataan

Benedikta Putri Herviani

NIM. 4111414025

PENGESAHAN

Skripsi dengan judul

Penentuan Nilai Eigen Suatu Matriks dengan Metode Pangkat (*Power Method*)

disusun oleh

Benedikta Putri Herviani

4111414025

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES pada tanggal 25 Februari 2019

Ketua

Prof. Dr. Sudarmin, M.Si

NIP. 196601231992031003

Sekretaris

Drs. Arief Agoestanto, M.Si.

NIP. 196807221993031005

Ketua Penguji

Drs. Mashuri, M.Si

NIP. 196708101992031003

Anggota Penguji/
Pembimbing I

Dr. Isnarto, M.Si.

NIP. 196902251994031001

Anggota Penguji/
Pembimbing II

Dra. Rahayu BV, M.Si.

NIP. 196406131988032002

MOTTO

"*Banyaklah rancangan di hati manusia, tetapi keputusan Tuhanlah yang terlaksana*." (Amsal 19:21)

"*Bertekunlah dalam doa dan dalam pada itu berjaga-jagalah sambil mengucap syukur*." (Kolose 4:2)

"*Happiness can be found even in the darkest of times, if one only remembers to turn on the light.*" (Albus Dumbledore)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan kepada :

1. Ibu dan Bapak saya yang telah memberikan doa, dan dukungannya.
2. Kakak saya yang selalu memberikan semangat, motivasi dan dukungan.
3. Rekan jurusan Matematika Angkatan 2014 yang selalu memberikan semangat.
4. Almamaterku tercinta.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penyusunan skripsi yang berjudul “Penentuan Nilai Eigen Suatu Matriks dengan Metode Pangkat (*Power Method*)” sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang dapat terselesaikan dengan baik.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak berupa saran, bimbingan maupun petunjuk. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis menguucapkan terimakasih kepada :

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum., Rektor Universitas Negeri Semarang yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk menyelesaikan studi Strata 1 di Universitas Negeri Semarang;
2. Prof. Dr. Sudarmin, M.Si., Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang yang telah mengizinkan penulis melakukan penelitian dan telah mengesahkan skripsi ini;
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si., Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang yang telah memberikan dukungan dan motivasi kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini;
4. Dr. Isnarto, M.Si., Dosen Pembimbing I yang telah memberikan waktu, bimbingan, dukungan, arahan, ide, kritik dan saran selama menyelesaikan skripsi;

5. Dra. Rahayu Budhiati Veronica, M.Si., Dosen Pembimbing II yang dengan sabar memberikan motivasi, bimbingan, saran, arahan dan dukungan selama penyusunan skripsi;
6. Muhammad Kharis, S.Si., M.Sc., Dosen Wali yang telah memberikan arahan, kritik dan saran selama menyelesaikan skripsi;
7. Seluruh dosen dan staf karyawan di lingkungan Universitas Negeri Semarang terkhusus Jurusan Matematika yang telah berkenan mendidik, memberi banyak ilmu dan pengalaman selama penulis belajar di kampus;
8. Kedua orang tua, Ibu Maria Anna Eri Yuniarti dan Bapak Agustinus Hariyanto yang selalu memberikan doa dan kakakku Agatha Putri Hersanti yang telah memberikan dukungan dalam menyelesaikan skripsi;
9. Teman-teman Matematika angkatan 2014 yang telah berbagi banyak suka dan duka serta pengalaman yang tidak bisa diulang;
10. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam penelitian dan penyusunan skripsi yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan para pembaca.

Semarang,

Penulis

Benedikta Putri Herviani

ABSTRAK

Herviani, Benedikta Putri. 2014. *Penentuan nilai eigen suatu matriks dengan metode pangkat (power method).* Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Pembimbing utama Dr. Isnarto, M.Si. dan Pembimbing pendamping Dra. Rahayu Budhiati Veronica, M.Si.

Kata kunci: Nilai eigen dominan, nilai eigen tak dominan, metode pangkat.

Penelitian ini membahas mengenai penentuan nilai eigen dominan dan tak dominan suatu matriks dengan metode pangkat (*power method*). Metode penelitian yang digunakan adalah kajian pustaka. Pada penelitian ini disimpulkan: 1) Nilai eigen dominan suatu matriks A dengan metode pangkat langsung ditentukan dengan langkah-langkah berikut. (i) Menentukan sebarang vektor taknol x_0. (ii) Mencari vektor $y_k = Ax_k$ untuk k = 0, dan vektor x_{k+1} untuk k = 0 yaitu membagi y_k dengan $\lambda^{(k+1)}$, elemen y_k dengan nilai mutlak terbesar. (iii) Mencari vektor y_k dan x_{k+1} untuk k dari 1 sampai n hingga $\lambda^{(k)}$ mendekati $\lambda^{(k+1)}$. (2) Nilai eigen tak dominan suatu matriks A dengan metode pangkat invers ditentukan dengan mencari nilai eigen dominan A invers dimisalkan λ_{invers}, dan nilai eigen tak dominan A adalah 1 dibagi λ_{invers}. (3) Nilai eigen tak dominan suatu matriks A dengan metode pangkat tergeser ditentukan dengan mencari nilai eigen dominan A yang digeser dimisalkan $\lambda_{shifted}$ dengan nilai geseran s, dan nilai eigen tak dominan A adalah $\lambda_{shifted}$ ditambah s. (4) Nilai eigen dominan suatu matriks A dengan metode pangkat invers tergeser ditentukan dengan mencari nilai eigen dominan A invers yang digeser dimisalkan $\lambda_{shiftedinvers}$ dengan nilai geseran s, dan nilai eigen dominan A adalah 1 dibagi $\lambda_{shiftedinvers}$ ditambah s.

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam kehidupan sehari-hari, ada banyak permasalahan yang dihadapi oleh manusia. Berbagai masalah yang ada sering kali menjadi fokus beberapa kalangan yang tentunya terkait dengan masalah tersebut, untuk dapat menyelesaikannya dengan mudah. Untuk menyelesaikan masalah-masalah yang ada, membawa masalah tersebut ke dalam model matematika dapat menjadi salah satu solusi. Permasalahan-permasalahan yang riil tersebut dibawa ke dalam model matematika untuk diselesaikan dan kemudian dikembalikan ke bentuk riil semula dan diaplikasikan ke kehidupan sehari-hari.

Beberapa permasalahan di kehidupan sehari-hari yang dapat diambil sebagai contoh adalah masalah-masalah yang berhubungan dengan nilai eigen. Suatu skalar λ disebut nilai eigen atau nilai karakteristik (*characteristic value*) dari suatu matriks A jika terdapat suatu vektor taknol X, sehingga $AX = \lambda X$. Vektor X disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari λ.

Menurut Leon (2001:256), nilai eigen adalah suatu hal yang wajar dalam kehidupan sehari-hari, dimana ada getaran di situ ada nilai eigen yaitu frekuensi alami dari getaran tersebut. Nilai-nilai eigen berperan juga dalam penyelesaian sistem persamaan diferensial linear. Contoh penerapan sistem persamaan diferensial linear sendiri dalam kehidupan sehari-hari adalah campuran beberapa cairan seperti air dan larutan garam, pada dua buah tangki yang dipompa dengan suatu kecepatan. Jumlah garam dalam setiap tangki pada waktu t dapat dicari dengan menggunakan sistem persamaan diferensial linear. Selain dalam campuran, penerapan lain dari sistem persamaan diferensial linear adalah pada gerak harmonik suatu pegas. Jadi nilai eigen juga berkaitan dengan masalah-masalah ini.

Di bidang fisika, nilai eigen berhubungan dengan struktur melengkungnya suatu batang. Jika sebuah batang diberikan gaya pada salah satu ujungnya maka batang akan melengkung ketika beban mencapai nilai kritis. Setiap nilai eigen dapat digunakan untuk memperkirakan beban kritis dengan rumus $P = \frac{R\lambda}{h^2}$ tetapi beban kritis yang terpenting adalah yang paling sesuai dengan nilai eigen terkecil (bersesuaian dengan nilai eigen tak dominan) sebab batang tersebut akan patah jika beban ini terlampaui.

Selain itu nilai eigen juga berperan dalam memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan suatu populasi. Untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan suatu populasi, dalam pendekatan matematika dapat menggunakan Matriks Leslie. Dalam memprediksi laju pertumbuhan suatu populasi menggunakan Matriks Leslie dibutuhkan nilai eigen. Selanjutnya dari nilai-nilai eigen tersebut dicari nilai-nilai eigen dominan yaitu nilai eigen yang memiliki harga mutlak paling besar. Jika nilai eigen dominan bernilai lebih dari 1 maka laju pertumbuhan populasi cenderung meningkat. Jika nilai eigen dominan bernilai kurang dari 1 maka laju pertumbuhan populasi cenderung menurun. Jika nilai eigen dominan bernilai sama dengan 1 maka laju pertumbuhan populasi cenderung tetap.

Bagaimana cara untuk memperoleh nilai eigen itu sendiri? Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk mencari nilai eigen, diantaranya adalah menggunakan persamaan karakteristik dan metode pangkat. Dalam penggunaannya metode pangkat dirasa lebih efisien untuk mencari nilai eigen dari sebuah matriks dengan ordo yang besar karena jika menggunakan persamaaan karakteristik maka akan menghasilkan polinomial dengan derajat yang besar sehingga membutuhkan waktu yang cukup lama untuk menemukan akar-akar dari persamaan karakteristik tersebut.

Metode pangkat merupakan metode iterasi yang digunakan untuk mencari nilai eigen suatu matriks. Metode pangkat menghasilkan hampiran nilai eigen yang mendekati nilai eigen sebenarnya. Beberapa bentuk dari metode pangkat adalah metode pangkat langsung, metode pangkat invers, metode pangkat yang tergeser, dan metode pangkat invers tergeser. Metode pangkat langsung dan metode pangkat invers tergeser dapat digunakan untuk mencari nilai eigen dominan, yaitu nilai eigen dengan nilai mutlak terbesar, sedangkan metode pangkat invers dan metode pangkat yang tergeser dapat digunakan untuk mencari nilai eigen tak dominan, yaitu nilai eigen dengan nilai mutlak terkecil.

Di bidang teknik mesin, konsep metode pangkat dapat diterapkan pada beberapa masalah. Menurut Panza (2018), beberapa masalah yang dapat dikaitkan dengan konsep metode pangkat adalah dinamika translasi dan rotasi, keseimbangan energi termal, kontinuitas fluida, sistem kendali umpan balik (*feedback control*). Masalah-masalah ini berkaitan dengan aljabar linear, terutama nilai eigen dan vektor eigen.

Pada penelitian sebelumnya (Chandra, 2016) telah sedikit dibahas mengenai metode pangkat, algoritma-algoritma dari beberapa bentuk metode pangkat untuk mencari nilai eigen dominan dan tak dominan. Namun dalam penelitian sebelumnya belum dijelaskan bagaimana sampai mendapatkan algoritma-algoritma tersebut, apa saja teorema yang berkaitan. Oleh sebab itu penulis tertarik untuk membahas lebih lanjut mengenai metode ini.

Metode pangkat merupakan pengetahuan baru yang tidak penulis dapatkan saat berada di bangku kuliah, sehingga diharapkan akan menambah pengetahuan dan memperluas wawasan baik untuk penulis maupun pembaca. Hal yang menarik untuk dikaji adalah bagaimana langkah-langkah yang harus dilakukan untuk mencari nilai-nilai eigen dengan metode pangkat dan apa saja teori yang mendasari metode-metode tersebut, serta bagaimana contoh penerapan nilai eigen dalam kehidupan sehari-hari khususnya untuk nilai eigen dominan dan tak dominan. Oleh karena itu, penulis melakukan penelitian berjudul "**Penentuan Nilai Eigen Suatu Matriks dengan Metode Pangkat (*Power Method*)".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut dapat dirumuskan beberapa masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana penentuan nilai eigen dominan dengan metode pangkat langsung?
2. Bagaimana penentuan nilai eigen tak dominan dengan metode pangkat invers?

3. Bagaimana penentuan nilai eigen tak dominan dengan metode pangkat yang tergeser?
4. Bagaimana penentuan nilai eigen dominan dengan metode pangkat invers tergeser?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk:

1. Mengetahui cara menentukan nilai eigen dominan dengan metode pangkat langsung,
2. Mengetahui cara menentukan nilai eigen tak dominan dengan metode pangkat invers,
3. Mengetahui cara menentukan nilai eigen tak dominan dengan metode pangkat yang tergeser, dan
4. Mengetahui cara menentukan nilai eigen dominan dengan metode pangkat invers tergeser.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memiliki beberapa manfaat sebagai berikut:

1. Menambah dan memperkaya pengetahuan ilmu matematika khususnya di bidang aljabar,
2. Memberikan tambahan wawasan mengenai penerapan nilai eigen dalam kehidupan sehari-hari,

3. Memperluas pengetahuan mahasiswa mengenai kajian tentang metode-metode yang dapat digunakan untuk mencari nilai eigen dominan dan tak dominan, dan
4. Menjadi referensi untuk penelitian-penelitian selanjutnya yang berkaitan.

1.5 Batasan Masalah

Pada penelitian ini ada beberapa batasan mengenai hal-hal yang diteliti yang perlu dicermati terlebih dahulu agar lebih mudah dipahami dan tidak menimbulkan masalah. Batasan-batasannya sebagai berikut:

1. Nilai Eigen

Misalkan A adalah suatu matriks $n \times n$. Skalar λ disebut sebagai suatu nilai eigen atau nilai karakteristik (*characteristic value*) dari A jika terdapat suatu vektor taknol X, sehingga $AX = \lambda X$. Vektor X disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari λ (Leon, 2001: 260). Penelitian ini berfokus pada pencarian nilai eigen dominan yaitu nilai eigen yang memiliki harga mutlak paling besar dan nilai eigen tak dominan yaitu nilai eigen yang memiliki harga mutlak paling kecil.

2. Metode Pangkat

Menurut Arif, Wahyuni, dan Try (2015: 66), metode pangkat menghasilkan sebuah aproksimasi terhadap nilai eigen dengan nilai mutlak terbesar dan vektor eigen yang bersesuaian. Metode ini digunakan untuk mencari aproksimasi nilai eigen dominan. Ada beberapa bentuk pada metode pangkat ini, yaitu metode pangkat langsung, metode pangkat invers, metode pangkat yang digeser, dan metode pangkat invers tergeser. Penelitian ini akan membahas metode pangkat langsung dan metode pangkat invers tergeser untuk mencari nilai eigen dominan dan metode pangkat invers dan metode pangkat yang tergeser untuk mencari nilai eigen tak dominan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

.

2.1 Operasi Baris Elementer (OBE)

Operasi baris elementer merupakan salah satu metode untuk memecahkan sistem-sistem persamaan linear. Menurut Anton (1987:5), ada 3 tipe operasi pada OBE yaitu:

1. Kalikanlah persamaan dengan konstanta taknol.
2. Pertukarkanlah dua persamaan tersebut.
3. Tambahkanlah kelipatan dari satu persamaan terhadap yang lainnya.

Operasi baris elementer juga dapat digunakan untuk mencari invers suatu matriks yaitu dengan mereduksi matriks menjadi bentuk eselon baris terreduksi.

Contoh 2.1.1

Carilah invers dari

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Mencari invers A dengan OBE sebagai berikut

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Tambahkan -2 kali baris pertama pada baris kedua dan -1 kali baris pertama pada baris ketiga.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1\end{array}\right]$$

Tambahkan 2 kali baris kedua pada baris ketiga.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1\end{array}\right]$$

Kalikan baris ketiga dengan -1.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3\\0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3\\0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1\end{array}\right]$$

Tambahkan 3 kali baris ketiga pada baris kedua dan -3 kali baris ketiga pada baris pertama.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9\\0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3\\0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1\end{array}\right]$$

Tambahkan -2 kali baris kedua pada -1 kali baris pertama.

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix}-40 & 16 & 9\\13 & -5 & -3\\5 & -2 & -1\end{bmatrix}$.

2.2 Matriks Elementer

Definisi 2.2.1 (Anton, 1987:40)

Sebuah matriks $n \times n$ disebut matriks elementer jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks satuan (identitas) $n \times n$ yakni I_n dengan melakukan sebuah operasi baris elementer tunggal .

Contoh 2.2.1 (Anton, 1987:41)

$$E = \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Operasinya dengan menambahkan tiga kali baris ketiga dari I_n pada baris pertama.

Teorema 2.2.1 (Anton, 1987:43)

Jika A adalah matriks $n \times n$ maka pernyatan-pernyataan berikut ekivalen yakni, semuanya benar atau semuanya salah

(a) A dapat dibalik

(b) $A\boldsymbol{x} = 0$ hanya mempunyai pemecahan trivial

(c) A ekivalen baris terhadap I_n

Bukti:

$(a) \Rightarrow (b)$

Anggap A dapat dibalik dan misalkan $\boldsymbol{x_0}$ adalah suatu pemecahan bagi $A\boldsymbol{x_0}$. Jadi $A\boldsymbol{x_0} = 0$. Dengan mengalikan kedua ruas persamaan ini dengan A^{-1} diperoleh

$$
\begin{aligned}
A^{-1}(A\boldsymbol{x_0}) = A^{-1}0 &\Leftrightarrow (A^{-1}A)\boldsymbol{x_0} = 0 \\
&\Leftrightarrow I\boldsymbol{x_0} = 0 \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{x_0} = 0.
\end{aligned}
$$

Jadi $A\boldsymbol{x} = 0$ hanya mempunyai pemecahan trivial.

$(b) \Rightarrow (c)$

Misalkan $A\boldsymbol{x} = 0$ adalah bentuk matriks dari sistem persamaan

$$
\begin{matrix}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0
\end{matrix}
$$

dan anggap sistem persamaan tersebut hanya mempunyai pemecahan trivial. Jika sistem persaaman tersebut dipecahkan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, maka sistem persamaan yang bersesuaian dengan bentuk eselon baris tereduksi dari matriks yang diperbesar akan menjadi

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 0 \\ x_2 \qquad &= 0 \\ \ddots \quad & \\ x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Jadi matriks yang diperbesar tersebut yakni

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Matriks yang diperbesar direduksi menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Sehingga menghasilkan sistem persamaan (1) dengan operasi baris elementer. Jika kolom terakhir matriks (2) dan (3) diabaikan, maka dapat disimpulkan bahwa A dapat direduksi terhadap I_n dengan operasi baris elementer, yakni A ekivalen baris pada I_n.

$(c) \Rightarrow (a)$

Anggap A ekivalen baris pada I_n, sehingga A dapat direduksi pada I_n dengan urutan berhingga dari operasi baris elementer. Karena A direduksi pada I_n dengan operasi baris elementer, dapat dicari matriks elementer $E_1, E_2, \ldots, E_k$ sehingga

$$E_k \ldots E_2 E_1 A = I_n \tag{4}$$

Dengan mengalikan kedua ruas persamaan (5) dari sebelah kiri berturut-turut dengan ${E_k}^{-1}, \dots, {E_2}^{-1}, {E_1}^{-1}$ diperoleh

$$A = {E_1}^{-1}{E_2}^{-1} \dots {E_k}^{-1}I_n = {E_1}^{-1}{E_2}^{-1} \dots {E_k}^{-1} \quad (5)$$

Karena (5) merupakan hasil kali matriks yang dibalik maka A dapat dibalik.

2.3 Ruang Vektor

Definisi 2.3.1 (Anton 1987:138)

Misalkan V sebarang himpunan tak kosong dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar (bilangan riil), V dinamakan sebuah ruang vektor jika untuk semua elemen $u, v, w \in V$ dan $k, l \in \mathbb{R}$ berlaku aksioma-aksioma berikut:

(1) $u + v$ di V.

(2) $u + v = v + u$.

(3) $u + (v + w) = (u + v) + w$.

(4) Ada suatu elemen 0 di V sehingga $0 + u = u + 0 = u$ untuk semua u di V

(5) Untuk setiap u di V, ada suatu elemen $-u$ di V yang dinamakan negatif u sehingga $u + (-u) = (-u) + u = 0$.

(6) ku di V.

(7) $k(u + v) = ku + kv$.

(8) $(k + l)u = ku + lu$.

(9) $k(lu) = kl(u)$.

(10) $1u = u$.

Elemen-elemen pada V dinamakan vektor.

2.3.1 Kombinasi Linear

Definisi 2.3.1.1 (Anton 1987:145)

Sebuah vektor $\boldsymbol{w}$ dinamakan kombinasi linear dari vektor-vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_r}$ jika vektor tersebut dapat diungkapkan dalam bentuk

$$\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_r\boldsymbol{v_r}$$

dimana $k_1, k_2, \dots, k_r$ adalah skalar.

Contoh 2.3.1.1 (Anton 1987:146)

Tinjaulah vektor-vektor $\boldsymbol{u} = (1,2,-1)$ dan $\boldsymbol{v} = (6,4,2)$ di $\mathbb{R}^3$. Perlihatkan bahwa $\boldsymbol{w} = (9,2,7)$ adalah kombinasi linear $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$.

Penyelesaian:

Supaya $\boldsymbol{w}$ merupakan kombinasi linear $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$, harus ada skalar k_1 dan k_2 sehingga $\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{v}$, yakni

$$(9,2,7) = k_1(1,2,-1) + k_2(6,4,2)$$

Diperoleh sistem persamaan sebagai berikut

$$k_1 + 6k_2 = 9$$

$$2k_1 + 4k_2 = 2$$

$$-1k_1 + 2k_2 = 7$$

Dengan memecahkan sistem ini menghasilkan $k_1 = -3$ dan $k_2 = 2$ sehingga

$$\boldsymbol{w} = -3\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$$

2.3.2 Merentang

Definisi 2.3.2.1 (Anton 1987:146)

Jika $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_r}$ adalah vektor-vektor di ruang vektor V dan jika setiap vektor di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_r}$ maka vektor-vektor ini merentang V.

Contoh 2.3.2.1 (Anton 1987:146)

Vektor-vektor $\boldsymbol{i} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{j} = (0,1,0)$, dan $\boldsymbol{k} = (0,0,1)$ merentang $\mathbb{R}^3$ karena setiap vektor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ dapat dituliskan sebagai

$$(a, b, c) = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$$

yang merupakan kombinasi linear i, j, dan k.

2.3.3 Bebas Linear

Definisi 2.3.3.1 (Anton 1987:151)

Jika $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ adalah himpunan vektor, maka persamaan

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n} = 0$$

mempunyai paling sedikit satu pemecahan, yakni

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$$

Jika $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$ adalah satu-satunya pemecahan, maka S disebut himpunan bebas linear. Jika ada pemecahan lain, maka S disebut himpunan tak bebas linear.

Contoh 2.3.3.1 (Anton 1987:151)

Tinjau vektor-vektor $\boldsymbol{i} = (1,0,0), \boldsymbol{j} = (0,1,0), \boldsymbol{k} = (0,0,1)$ pada $\mathbb{R}^3$. Persamaan vektor

$k_1\boldsymbol{i} + k_2\boldsymbol{j} + k_3\boldsymbol{k} = 0 \Leftrightarrow k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (0,0,0)$

Diperoleh $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$. Sehingga $S = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ bebas linear.

2.4 Basis

Definisi 2.4.1 (Anton 1987:146)

Jika V adalah sebarang ruang vektor dan $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ merupakan himpunan berhingga dari vektor-vektor di V, maka S dinamakan basis untuk V jika:

(i) S bebas linear;

(ii) S merentang V.

Contoh 2.4.1

Misalkan $\boldsymbol{v_1} = (1,2,1), \boldsymbol{v_2} = (2,9,0),\ \boldsymbol{v_3} = (3,3,4)$. Perlihatkan bahwa himpunan $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ adalah basis untuk $\mathbb{R}^3$.

Penyelesaian:

Himpunan S basis untuk $\mathbb{R}^3$ jika S merentang $\mathbb{R}^3$ dan S bebas linear.

Untuk memperlihatkan S merentang $\mathbb{R}^3$ harus diperlihatkan sebarang vektor $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ dapat dinyatakan sebagai

$$\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + k_3\boldsymbol{v_3}$$

yang merupakan kombinasi linear dari S. Dengan menyatakan persaman ini dalam komponen-komponennya diperoleh

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1,2,1) + k_2(2,9,0) + k_3(3,3,4)$$

dan sistem persamaan linear

$$\left.\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= b_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= b_2 \\ k_1 + 4k_3 &= b_3 \end{aligned}\right\} (1)$$

Matriks yang diperbesar dari SPL (1) adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 9 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 4 & b_3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya reduksi matriks yang diperbesar tersebut dengan OBE

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 9 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 4 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 5 & -3 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -2 & 1 & b_3 - b_1 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -2 kali baris pertama pada baris kedua dan tambahkan -1 kali baris pertama pada baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & b_3 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 - 4b_1 + 2b_3 \\ 0 & -2 & 1 & b_3 - b_1 \end{bmatrix}$$

Tambahkan baris ketiga pada baris pertama dan tambahkan 2 kali baris ketiga pada baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & b_3 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 - 4b_1 + 2b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 2b_2 + 5b_3 - 9b_1 \end{bmatrix}$$

Tambahkan 2 kali baris kedua pada baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & b_3 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 - 4b_1 + 2b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -2b_2 - 5b_3 + 9b_1 \end{bmatrix}$$

Kalikan -1 pada baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 & -b_2 + 5b_1 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -2b_2 - 5b_3 + 9b_1 \end{bmatrix}$$

Tambahkan baris ketiga pada baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8b_2 + 21b_3 - 36b_1 \\ 0 & 1 & 0 & -b_2 + 5b_1 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -2b_2 - 5b_3 + 9b_1 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -4 kali baris ketiga pada baris kedua

Diperoleh

$k_1 = 21b_3 - 36b_1 + 8b_2$

$k_2 = -b_2 + 5b_1 - 3b_3$

$k_3 = -5b_3 + 9b_1 - 2b_2$

Sehingga untuk setiap $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ dapat dinyatakan sebagai

$$\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + k_3\boldsymbol{v_3}$$

yang merupakan kombinasi linear dari S. Jadi S merentang $\mathbb{R}^3$.

Untuk memperlihatkan S bebas linear harus diperlihatkan bahwa satu-satunya penyelesaian dari

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + k_3\boldsymbol{v_3} = 0$$

adalah $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Jika persamaan di atas dinyatakan dalam komponen-komponennya, maka diperoleh SPL berikut

$$\left.\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= 0 \\ k_1 + 4k_3 &= 0 \end{aligned}\right\} (2)$$

atau dapat dinyatakan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dengan } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} det(A) &= (1)(9)(4) + (2)(3)(1) + (3)(2)(0) - (3)(9)(1) - (3)(0)(1) - (2)(2)(4) \\ &= 36 + 6 + 0 - 27 - 0 - 16 = -1 \end{aligned}$$

Karena $det(A) \neq 0$ maka A dapat dibalik sehingga $k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + k_3\boldsymbol{v_3} = 0$ hanya mempunyai satu penyelesaian. Dengan menyelesaikan SPL (2) diperoleh $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Sehingga S bebas linear.

Teorema 2.4.1 (Anton 1987:162)

Jika $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ adalah sebuah himpunan n vektor bebas linear pada sebuah ruang V berdimensi n maka S adalah sebuah basis untuk V.

Bukti:

S bebas linear pada sebuah ruang V berdimensi n sehingga

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n} = 0$$

untuk $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$.

Karena $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, .., k_n) = (0,0, \dots, 0)$, diperoleh sistem persaman linear homogen yang mempunyai pemecahan trivial. Sehingga matriks koefisiennya dapat dibalik dan determinannya taknol. Diperoleh S merentang V. Jadi S adalah sebuah basis untuk V.

2.5 Nilai Eigen

Definisi 2.5.1 (Anton, 1987: 277)

Jika A adalah matriks $n \times n$ maka vektor taknol $\boldsymbol{x}$ di $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika $A\boldsymbol{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$ yakni

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan $\boldsymbol{x}$ disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Contoh 2.5.1

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Jelas $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\boldsymbol{x}$.

Diperoleh $A\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{x}$. Jadi nilai eigen adalah $\lambda = 3$

Untuk mencari nilai eigen dari suatu matriks A yang berordo $n \times n$ digunakan langkah-langkah sebagai berikut:

$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \lambda I\boldsymbol{x}$

$\Leftrightarrow \lambda I\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan taknol dari persamaan tersebut atau $det(\lambda I - A) = 0$. $Det(\lambda I - A)$ disebut persamaan karakteristik dari A.

Contoh 2.5.2

Cari nilai-nilai eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$

Persamaan karakteristik dari A:

$Det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}$

$= (\lambda - 3)(\lambda) - (1)(-2)$

$= \lambda^2 - 3\lambda - (-2)$

$= \lambda^2 - 3\lambda + 2$

Dari persamaan karakteristik $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ diperoleh:

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$

$\lambda - 2 = 0\ dan\ \lambda - 1 = 0$

$\lambda = 2\ dan\ \lambda = 1$

Jadi nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda = 2$ dan $\lambda = 1$.

2.5.1 Nilai Eigen Dominan

Definisi 2.5.1.1 (Anton, 1987: 372)

Nilai eigen dari sebuah matriks A dinamakan nilai eigen dominan (*dominant eigenvalue*) A jika nilai mutlaknya lebih besar dari nilai-nilai mutlak dari nilai-nilai eigen yang selebihnya. Sedangkan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan dinamakan vektor eigen dominan (*dominant eigen vector*) A.

Contoh 2.5.1.1

Sebuah matriks A berukuran 4×4 mempunyai nilai-nilai eigen

$$\lambda_1 = -4, \qquad \lambda_2 = 3, \qquad \lambda_3 = -2, \qquad \lambda_4 = 2$$

$\lambda_1 = -4$ adalah nilai eigen dominan dari A karena

$$|-4| > |3|,\ |-4| > |-2|,\ \text{dan}\ |-4| > |2|.$$

2.5.2 Nilai Eigen Tak Dominan

Definisi 2.5.2.1 (Andriani, 2011:9)

Nilai eigen dari sebuah matriks A dinamakan nilai eigen tak dominan dari A jika nilai mutlaknya lebih kecil dari nilai-nilai mutlak nilai-nilai eigen yang selebihnya.

Contoh 2.5.2.1

Sebuah matriks A berukuran 3×3 mempunyai nilai-nilai eigen

$$\lambda_1 = -4, \qquad \lambda_2 = 3, \qquad \lambda_3 = -2,$$

$\lambda_3 = -2$ adalah nilai eigen tak dominan karena $|-2| < |3|$ dan $|-2| < |-4|$.

2.6 Ruang Eigen

Menurut Anton (2000:341), vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor taknol $\boldsymbol{x}$ yang memenuhi $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah vektor taknol di ruang penyelesaian dari $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0$. Ruang penyelesaian ini disebut ruang eigen dari A yang bersesuaian dengan λ.

Contoh 2.6.1 (Anton, 2000:341)

Tentukan basis untuk ruang eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$, atau dalam bentuk yang telah difaktorkan yaitu $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$, sehingga nilai eigen dari A adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$. Sehingga ada dua ruang eigen dari A.

Berdasarkan definisi

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x}$ adalah penyelesaian taktrivial dari $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0$ yaitu

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Jika $\lambda = 2$ maka persamaan (6) menjadi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan diatas diperoleh

$$x_1 = -s, \qquad x_2 = t, \qquad x_3 = s$$

Sehingga vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ adalah vektor taknol dari bentuk berikut

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Karena $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ bebas linear, vektor-vektor ini membentuk basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$.

Jika $\lambda = 1$ maka persamaan (6) menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan diatas diperoleh

$$x_1 = -2s, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = s$$

Sehingga vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah vektor taknol dari bentuk berikut

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$.

2.7 Diagonalisasi

Definisi 2.7.1 (Anton, 1987:284)

Matriks Persegi A dinamakan dapat didiagonalisasi (*diagonalizable*) jika terdapat matriks P yang dapat dibalik sehingga $P^{-1}AP$ diagonal; matriks P dikatakan mendiagonalisasi A.

Teorema 2.7.1 (Anton, 1987:285)

Jika A adalah matriks $n \times n$ maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen satu sama lain

(a) A dapat didiagonalisasi

(b) A mempunyai n vektor eigen bebas linear

Bukti:

(a) $\Longrightarrow$ (b)

Karena A dianggap dapat didiagonalisasi maka terdapat matriks yang dapat dibalik

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Sehingga $P^{-1}AP = D$ dimana

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Diperoleh $AP = PD$ yakni

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$$

Misalkan $p_1, p_2, \dots, p_n$ vektor-vektor kolom P, kolom-kolom PD yang berurutan adalah $\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \dots, \lambda_n p_n$. Sedangkan kolom-kolom AP yang berurutan adalah $Ap_1, Ap_2, \dots, Ap_n$, sehingga diperoleh

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \dots, Ap_n = \lambda_n p_n$$

Karena P dapat dibalik, vektor-vektor kolomnya taknol, jadi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen A dan $p_1, p_2, \dots, p_n$ adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian. Karena P dapat dibalik diperoleh $p_1, p_2, \dots, p_n$ bebas linear. Jadi A mempunyai n vektor eigen bebas linear

(b) $\Longrightarrow$ (a)

Anggap A mempunyai n vektor eigen bebas linear, maka $p_1, p_2, \dots, p_n$ dengan nilai eigen yang bersesuaian $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, dan misalkan

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

adalah matriks yang vektor-vektor kolomnya $p_1, p_2, \dots, p_n$. Kolom-kolom hasil kali AP adalah $Ap_1, Ap_2, \dots, Ap_n$ dan

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \dots, Ap_n = \lambda_n p_n$$

sehingga

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= PD$$

dimana D adalah matriks diagonal yang memiliki nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada diagonal utama. Karena P bebas linear maka P dapat dibalik sehingga diperoleh $P^{-1}AP = D$. Jadi A dapat didiagonalisasi.

Misalkan A adalah matriks $n \times n$ yang dapat didiagonalisasi dengan nilai eigen dominan. Jika $\boldsymbol{x_0}$ adalah sebarang vektor taknol dalam $\mathbb{R}^n$ maka vektor

$$A^p \boldsymbol{x_0}$$

adalah aproksimasi yang baik terhadap vektor eigen dominan *A* bila eksponen tersebut besar. Hal ini yang mendasari adanya metode pangkat untuk mencari nilai eigen dominan.

2.8 Limit di Tak Hingga

Menurut Anton (1987:372), misalkan *A* adalah matriks $n \times n$ yang dapat didiagonalisasi dengan nilai eigen dominan. Jika $\boldsymbol{x_0}$ adalah sebarang vektor taknol di $\mathbb{R}^n$ maka vektor $A^p \boldsymbol{x_0}$ adalah aproksimasi yang baik terhadap vektor eigen dominan *A* bila eksponen tersebut besar. Hal ini memungkinkan adanya limit di tak hingga untuk memperoleh aproksimasi nilai eigen dan vektor eigen dominan dari A.

Definsi 2.8.1 (Chotim 2008:175)

Dipunyai fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\lim_{n \to +\infty} f(x) = L$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \ni |f(x) - L| < \varepsilon$ apabila $x > M$.

Contoh 2.8.1 (Chotim 2008:175)

Tunjukkan

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Penyelesaian:

Tulis $\frac{1}{x} = f(x)$.

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$.

Pilih $M = \frac{1}{\varepsilon}$.

Dipunyai $x > M$.

Jelas $\frac{1}{x} < \frac{1}{M} \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{1}{M}$.

Jadi $|f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{M} = \varepsilon$.

Jadi $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \ni |f(x) - 0| < \varepsilon$ apabila $x > M$.

Jadi

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

2.9 Matriks Leslie

Salah satu penerapan nilai eigen terutama nilai eigen dominan dalam kehidupan sehari-hari adalah matriks Leslie. Dalam matriks Leslie, nilai eigen dominan berguna untuk mengetahui laju pertumbuhan suatu populasi. Matriks Leslie sendiri adalah salah satu model pertumbuhan populasi yang banyak digunakan oleh ahli kependudukan. Model ini menjelaskan pertumbuhan banyaknya betina dari populasi manusia atau hewan. Dalam model ini populasi manusia atau hewan betina dibagi atas kelompok umur dengan kurun waktu yang sama. Misalkan umur maksimum yang dicapai sebarang betina dalam populasi itu adalah L tahun (atau dinyatakan dalam satuan waktu yang lain) dan populasi tersebut dibagi atas n kelompok umur, maka kurun waktu dari setiap kelompok umur adalah $\frac{L}{n}$ tahun. Pembagian kelompok umur terlihat pada tabel di bawah

Tabel 1. Pembagian Kelompok Umur

Kelompok Umur	Interval Umur
1	$[0, \frac{L}{n})$
2	$\left[\frac{L}{n}, \frac{2L}{n}\right)$
3	$\left[\frac{2L}{n}, \frac{3L}{n}\right)$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$\left[\frac{(n-2)L}{n}, \frac{(n-1)L}{n}\right)$

n	$\left[\frac{(n-1)L}{n}, \frac{nL}{n}\right)$

Misalkan diketahui banyaknya betina dalam setiap kelompok dari ke-n kelompok tersebut pada waktu $t = 0$. Jumlah betina di dalam kelompok pertama ditulis $x_1^{(0)}$, jumlah betina di dalam kelompok kedua ditulis $x_2^{(0)}$, dan seterusnya. Dengan bilangan-bilangan ini akan terbentuk sebuah matriks kolom $x^{(0)}$ sebagai berikut:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Matriks kolom $x^{(0)}$ ini dinamakan matriks distribusi umur mula-mula.

Seriring berjalannya waktu banyaknya betina di dalam setiap kelompok akan berubah karena proses kelahiran, penuaan, dan kematian. Untuk mempelajari proses penuaan adalah dengan mengamati populasi pada waktu-waktu diskrit, misalkan $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$. Model Leslie menyaratkan bahwa kurun waktu diantara dua waktu pengamatan yang berurutan adalah sama seperti kurun waktu dari interval umur. Karena itu dibuat

$$t_0 = 0$$

$$t_1 = \frac{L}{n}$$

$$t_2 = \frac{2L}{n}$$

$$\vdots$$

$$t_k = \frac{kL}{n}$$

$\vdots$

Proses kelahiran dan kematian diantara dua waktu pengamatan yang berurutan dapat dijelaskan dengan menggunakan parameter-parameter berikut:

a_i $i = 1,2, \dots, n$	Jumlah rata-rata anak betina yang dilahirkan dari betina selama berada dalam kelompok umur ke-i
b_i $i = 1,2, \dots, n-1$	Perbandingan banyaknya betina dalam kelompok umur ke-i yang diharapkan masih hidup dan sampai ke kelompok umur ke-$(i+1)$ dengan banyaknya betina dalam kelompok umur ke-i

Berdasarkan penjelasan di atas, diperoleh bahwa

$$a_i \geq 0 \qquad untuk\ i = 1,2, \dots, n$$

$$0 < b_i \leq 1 \qquad untuk\ i = 1,2, \dots, n-1$$

Tampak bahwa nilai b_i tidak boleh ada yang sama dengan nol, karena itu berarti tidak ada betina yang masih hidup sesudah kelompok umur ke-i. Selain itu, anggap bahwa sedikitnya ada satu a_i yang positif, sehingga akan terjadi kelahiran. Matriks Leslie sendiri memiliki elemen-elemen yang berasal dari dua parameter tersebut, secara umum dapat ditulis sebagai berikut:

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

2.10 Metode Pangkat (*Power Method*)

Metode pangkat adalah suatu metode iteratif untuk mendapatkan nilai eigen dominan dari suatu matriks dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut (Chandra, 2016: 37). Metode ini dinamakan metode pangkat karena mengalikan matriks A terus menerus dengan suatu vektor taknol untuk mendapatkan aproksimasi yang baik terhadap nilai eigen dan vektor eigen. Untuk mengetahui lebih lanjut mengenai metode pangkat, perhatikan pembahasan berikut.

Misalkan A adalah matriks $n \times n$ yang dapat didiagonalisasi, A mempunyai n vektor eigen $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ yang bebas linear. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan A dan anggap

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Vektor-vektor eigen $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ bebas linear sehingga membentuk basis di $\mathbb{R}^n$, jadi sebarang vektor $\boldsymbol{x_0}$ taknol dapat dinyatakan sebagai

$$\boldsymbol{x_0} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan A akan diperoleh

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x_0} &= A(k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n) \\ &= Ak_1\boldsymbol{v}_1 + Ak_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + Ak_n\boldsymbol{v}_n \\ &= k_1A\boldsymbol{v}_1 + k_2A\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_nA\boldsymbol{v}_n \\ &= k_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\lambda_n\boldsymbol{v}_n \end{aligned}$$

Kemudian jika dikalikan lagi dengan A akan diperoleh

$$\begin{aligned} A^2\boldsymbol{x_0} &= A(k_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\lambda_n\boldsymbol{v}_n) \\ &= Ak_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + Ak_2\lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + Ak_n\lambda_n\boldsymbol{v}_n \end{aligned}$$

$$= k_1\lambda_1 A\boldsymbol{v}_1 + k_2\lambda_2 A\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\lambda_n A\boldsymbol{v}_n$$

$$= k_1{\lambda_1}^2\boldsymbol{v}_1 + k_2{\lambda_2}^2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n{\lambda_n}^2\boldsymbol{v}_n$$

Dengan terus melanjutkan perkalian ini, setelah p perkalian akan diperoleh

$$A^p\boldsymbol{x_0} = k_1{\lambda_1}^p\boldsymbol{v}_1 + k_2{\lambda_2}^p\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n{\lambda_n}^p\boldsymbol{v}_n$$

Karena $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ maka $\lambda_1 \neq 0$ sehingga

$$A^p\boldsymbol{x_0} = {\lambda_1}^p(k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^p\boldsymbol{v}_n)$$

Kemudian diperoleh

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \cdots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

semuanya memiliki nilai mutlak kurang dari satu sehingga

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p, \cdots, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^p$$

nilainya semakin mendekati nol jika p semakin besar.

Diperoleh

$$A^p\boldsymbol{x_0} = {\lambda_1}^p(k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^p\boldsymbol{v}_n$$

$$\Leftrightarrow A^p\boldsymbol{x_0} \approx {\lambda_1}^p(k_1\boldsymbol{v}_1 + 0 + \cdots + 0)$$

$$\Leftrightarrow A^p\boldsymbol{x_0} \approx {\lambda_1}^p k_1\boldsymbol{v}_1$$

Jadi aproksimasi $A^p\boldsymbol{x_0} \approx {\lambda_1}^p k_1\boldsymbol{v}_1$ semakin bertambah baik.

Seperti yang sudah disebutkan pada subbab 2.7 dan penjelasan di atas, misalkan A adalah matriks $n \times n$ yang dapat didiagonalisasi dengan nilai eigen dominan, dan jika $\boldsymbol{x_0}$ adalah sebarang vektor taknol di $\mathbb{R}^n$ maka vektor $A^p\boldsymbol{x_0}$ adalah aproksimasi yang baik terhadap vektor eigen dominan A bila eksponen tersebut besar. Dengan ini pun dapat diperoleh nilai eigen dominan matriks A.

Menurut Anton (1987), algoritma pencarian nilai eigen menggunakan metode pangkat sebagai berikut:

Langkah 0. Pilihlah sebarang vektor taknol $\boldsymbol{x_0}$.

Langkah 1. Hitunglah $A\boldsymbol{x_0}$ dan skalakanlah ke bawah untuk mendapatkan aproksimasi pertama terhadap vektor eigen dominan. Namakanlah vektor eigen tersebut $\boldsymbol{x_1}$.

Langkah 2. Hitunglah $A\boldsymbol{x_1}$ dan skalakanlah ke bawah untuk mendapatkan aproksimasi kedua $\boldsymbol{x_2}$.

Langkah 3. Hitunglah $A\boldsymbol{x_2}$ dan skalakanlah ke bawah untuk mendapatkan aproksimasi ketiga $\boldsymbol{x_3}$.

Dengan melanjutkan cara ini, maka urutan $\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \ldots$, yang aproksimasinya semakin bertambah baik terhadap vektor eigen dominan akan didapatkan.

2.10.1 Macam-Macam Metode Pangkat

Metode pangkat mempunyai beberapa bentuk pengembangan, yaitu metode pangkat langsung, metode pangkat invers, metode pangkat yang tergeser, dan metode pangkat invers yang tergeser. Metode-metode ini pada penelitian sebelumnya (Chandra, 2016: 37-38), telah sedikit diulas meliputi algoritma pencarian nilai eigen dari beberapa bentuk metode pangkat sebagai berikut

1. Metode Pangkat Langsung

a. Jika matriks A berukuran n x n, maka tentukanlah sebuah matriks $x^{(0)}$ yang berukuran n x 1 dan bukan matriks nol.

b. Carilah nilai $y^{(1)}$ yang memenuhi perkalian matriks $Ax^{(0)} = y^{(1)}$.

c. Bagi matriks $y^{(1)}$ dengan elemen matriks tersebut yang harga mutlaknya terbesar yaitu $\lambda^{(1)}$ sehingga didapatkan $y^{(1)} = \lambda^{(1)}x^{(1)}$.

d. Ulangi langkah b dan c dengan $x^k = x^{k+1}$ untuk $k = 0,1,2,3$, sampai suatu iterasi yang menunjukkan bahwa nilai $\lambda^k \approx \lambda^{k+1}$. λ^{k+1} merupakan nilai eigen mutlak terbesar dari matriks tersebut, sedangkan x^{k+1} adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ^{k+1}.

2. Metode Pangkat Invers

a. Carilah matriks L dan U yang memenuhi persamaan $LU = A$ dengan menggunakan metode Doolittle LU.

b. Tentukan matriks $x^{(0)}$ yang bukan matriks nol.

c. Carilah x' yang memenuhi perkalian $Lx' = x^{(0)}$.

d. Carilah y' yang memenuhi perkalian $Uy' = x'$.

e. Bagi $y^{(1)}$ dengan elemen $y^{(1)}$ yang terbesar (dalam harga mutlak) agar diperoleh $y^{(1)} = \lambda_{inverse}^{(1)} x^{(1)}$.

f. Ulangi langkah c sampai e dengan $x^k = x^{k+1}$ untuk $k = 0,1,2,3, \dots$. Iterasi dilakukan sampai nilai x konvergen. Pada saat konvergen, $\lambda = \frac{1}{\lambda_{inverse}}$ adalah nilai eigen yang dicari dan $x^{(k+1)}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian.

3. Metode Pangkat yang Tergeser

a. Mencari nilai eigen mutlak terbesar dengan metode pangkat langsung, $\lambda_{largest}$.

b. Mengurangkan semua elemen diagonal utama matriks A dengan $s = \lambda_{largest}$ untuk memperoleh matriks $A_{shifted}$.

c. Mencari nilai eigen terbesar ($\lambda_{shifted}$) dari matriks $A_{shifted}$ dengan metode pangkat langsung.

d. Menghitung nilai eigen tak dominan dari matriks A yaitu $\lambda = \lambda_{shifted} + s$.

4. Metode Pangkat Invers yang Tergeser

a. Buatlah nilai tebakan awal λ_{guess} untuk nilai eigen menengah.

b. Kurangi seluruh elemen diagonal utama dari matriks A dengan $s = \lambda_{guess}$ untuk memperoleh matriks $A_{shifted}$.

c. Cari nilai ($\lambda_{shifted,inverse}$) dari matriks $A_{shifted}$ dengan metode pangkat invers.

d. Hitung nilai $\lambda_{shifted} = \frac{1}{\lambda_{shifted,inverse}}$.

e. Hitung nilai $\lambda_{inter} = \lambda_{shifted} + s$

BAB V

PENUTUP

5.1 Simpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan sebelumnya, diperoleh beberapa simpulan mengenai penentuan nilai eigen sebagai berikut:

1. Menentukan nilai eigen dominan dengan metode pangkat langsung dapat dilakukan dengan menentukan sebarang vektor taknol $\boldsymbol{x}_0$ berukuran $n \times 1$. Kemudian cari $\boldsymbol{y}_k$ yang memenuhi $\boldsymbol{y}_k = A\boldsymbol{x}_k$ untuk $k = 0$. Selanjutnya bagi $\boldsymbol{y}_k$ dengan elemen $\boldsymbol{y}_k$ yang memiliki nilai mutlak terbesar yaitu $\lambda^{(k+1)}$ sehingga diperoleh $\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{1}{\lambda^{(k+1)}}\boldsymbol{y}_k$. Ulangi mencari $\boldsymbol{y}_k$ dan $\boldsymbol{x}_{k+1}$ untuk $k = 1,2, \dots$ sampai diperoleh nilai $\lambda^{(k)} \approx \lambda^{(k+1)}$. Nilai $\lambda^{(k+1)}$ yang diperoleh merupakan nilai eigen dominan dari matriks A.
2. Menentukan nilai eigen tak dominan dengan metode pangkat invers dilakukan dengan mencari nilai eigen dominan dari matriks A^{-1} menggunakan metode pangkat langsung terlebih dahulu. Nilai eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan dari matriks A^{-1} merupakan nilai eigen tak dominan matriks A yakni $\lambda = \frac{1}{\lambda_{invers}}$.
3. Menentukan nilai eigen tak dominan dengan metode pangkat tergeser dilakukan dengan mencari nilai eigen dominan dari matriks A yang digeser yakni $(A - sI)$ menggunakan metode pangkat langsung, dimana nilai geseran atau s diperoleh dari daerah nilai eigen dominan menggunakan

teorema Gerschgorin. Nilai eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan dari matriks $(A - sI)$ merupakan nilai eigen tak dominan matriks A yakni $\lambda = \lambda_{shifted} + s$.

4. Menentukan nilai eigen dominan dengan metode pangkat invers tergeser dilakukan dengan mencari nilai eigen dominan matriks $(A - sI)^{-1}$ dengan metode pangkat langsung. Nilai eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan dari matriks $(A - sI)^{-1}$ merupakan nilai eigen dominan matriks A yakni $\lambda = \frac{1}{\lambda_{shiftedinvers}} + s$.

5.2 Saran

Pada penelitian ini penulis mengkaji tentang penentuan nilai eigen dengan metode pangkat. Penelitian selanjutnya dapat mengembangkan kajian penentuan nilai eigen untuk matriks-matriks yang lain, mengkaji penentuan nilai eigen dominan dan tak dominan dengan metode yang lain disertai dengan teorema dan buktinya, dapat pula melakukan perbandingan antar metode untuk melihat perbedaan tiap metode, melihat keefektifan tiap metode dalam menentukan nilai eigen, atau mengembangkan algoritma metode pangkat itu sendiri.

DAFTAR PUSTAKA

Andriani, Yuli. "Menentukan Nilai Eigen Tak Dominan Suatu Matriks Definit Negatif Menggunakan Metode Kuasa Invers dengan Shifted." *Jurnal Penelitian Sains* 14.1 (2011):8-12.

Anton, Howard. 1987. *Edisi Kelima Aljabar Linear Elementer*. Diterjemahkan oleh: Pantur Silaban. Jakarta: Erlangga.

Anton, Howard. 2000. *Elementary Linear Algebra 8th Ed*. USA: Anton Textbooks, Inc.

Arif, Wahyuni, dan Try Azisah. "Metode Pangkat dan Metode Deflasi dalam Menentukan Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari Matriks." *Jurnal MSA* 3.2 (2015): 64-74.

Bartle, Robert G dan Donald R. Sherbert. 1994. *Introduction to Real Analysis.* Second Edition. Singapore: John Wiley & Sons Inc.

Chandra, Novita Eka dan Wiwin Kusniati. "Aplikasi Metode Pangkat dalam Mengapoksimasi Nilai Eigen Kompleks Pada Matriks." *Jurnal UJMC* 2.1 (2016):36-40.

Chotim, Moch. 2008. *Kalkulus 1*. Semarang: Jurusan Matematika FMIPA Univesitas Negeri Semarang.

Gere, James M dan William Weaver, Jr. 1987. *Aljabar Matriks untuk Para Insinyur*. Edisi Kedua. Diterjemahkan oleh: G Tejosutikno. Jakarta: Erlangga.

Jacob, Bill. 1990. *Linear Algebra*. USA: W.H Freeman and Company.

Kusumawati, Ririen. 2009. *Aljabar Linear & Matriks*. Malang: UIN Malang Press.

Leon, Steven J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Edisi kelima. Diterjemahkan oleh: Alit Bondan. Jakarta: Erlangga.

Mathews, John H. dan Kurtis D. Fink. 2004. *Numerical Methods using MATLAB.* Fourth Edition. USA: Prentice-Hall Inc.

Panza, Michael J. "Application of Power Method and Dominant Eigenvector/Eigenvalue Concept for Approximate Eigenspace Solutions to Mechanical Engineering Algebraic Systems." *American Journal of Mechanical Engineering* 6.3(2018):98-113.

Pratama, Yudha., Bayu Prihandono., dan Nilamsari Kusumastuti. "Aplikasi Matriks Leslie untuk Memprediksikan Jumlah dan Laju Pertumbuhan

Suatu Populasi." *Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)* 2.3 (2013):163-172.

Tunisa, Kholipah., Kristina Wijayanti., dan Rahayu Budhiati Veronica. "Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Atas Aljabar Max-Plus." *UNNES Journal of Mathematics* 4.1(2016):189-197.