



**APLIKASI PEWARNAAN GRAF FUZZY DAN FIS
UNTUK MENENTUKAN FASE DAN DURASI LAMPU
LALU LINTAS DI SIMPANG LAMPER GAJAH KOTA
SEMARANG**

SKRIPSI

**Disusun sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika**

oleh

**Siti Muzaroah
4111414024**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG**

2019

SURAT PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa yang tertulis di dalam skripsi ini benar-benar hasil karya tulis saya sendiri, bukan jiplakan dari karya tulis orang lain, baik sebagian atau seluruhnya. Pendapat atau temuan orang lain yang terdapat dalam skripsi ini dikutip atau dirujuk berdasarkan kode etik ilmiah. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan dari karya tulis orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan yang berlaku.

Semarang, 28 November 2018



Siti Muzaroah
NIM 4111414024

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Aplikasi Pewarnaan Graf Fuzzy dan FIS untuk Menentukan Fase dan Durasi
Lampu Lalu Lintas Di Simpang Lamper Gajah Kota Semarang

disusun oleh

Siti Muzaroah

4111414024

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA Unnes pada
tanggal 28 November 2018.



Prof. Dr. Sudarmin, M.Si
NIP. 196601231992031003

Sekretaris

Dr. Arief Agoestanto, M.Si
NIP. 196807221993031005

Ketua Penguji

Dr. Rochmad, M.Si
NIP. 195711161987011001

Anggota Penguji/ Pembimbing I

Dr. Isnaini Rosyida, S.Si, M.Si
NIP. 197302191998022001

Anggota Penguji/ Pembimbing II

Dr. Mulyono, M.Si
NIP. 197009021997021001

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO :

“Bukankah kami telah melapangkan untuk dadamu. Dan kami telah menghilangkan dari padamu bebanmu. Yang memberatkan punggungmu. Dan kami tinggikan bagimu sebutan (nama)mu. Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain. Dan hanya kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap.”
(QS Al Insyirah, 1-8)

“Kemudian apabila kamu telah membulatkan tekad, maka bertawakkallah kepada Allah. Sesungguhnya Allah menyukai orang-orang yang bertawakkal kepada-Nya. Jika Allah menolong kamu, maka tak adalah orang yang dapat mengalahkan kamu; jika Allah membiarkan kamu (tidak memberi pertolongan), maka siapakah gerangan yang dapat menolong kamu (selain) dari Allah sesudah itu? Karena itu hendaklah kepada Allah saja orang-orang mukmin bertawakkal.” (QS Ali Imraan; 159-160)

PERSEMBAHAN

Dengan memanjatkan puji dan syukur kepada Allah SWT yang telah mempermudah penyusunan skripsi ini, kupersembahkan karya ini untuk :

1. Bapak ibu tercinta, adik-adikku tersayang, dan kerabat dekat yang telah melimpahkan segala dukungan, dan doa baik secara spiritual maupun material.
2. Guru, dosen, dan teman-teman yang telah memberikan dorongan semangat.
3. Prodi Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT, karena atas rahmat, nikmat, dan karunianya-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Aplikasi Pewarnaan Graf Fuzzy dan FIS untuk Menentukan Fase dan Durasi Lampu Lalu Lintas Di Simpang Lamper Gajah Kota Semarang”. Skripsi ini disusun guna menyelesaikan studi strata 1 untuk mencapai gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang.

Pemilihan judul skripsi ini dilatarbelakangi oleh rasa ingin tahu penulis terhadap kasus kepadatan arus lalu lintas di simpang Lamper Gajah Kota Semarang. Untuk itu penulis mencoba mendalami mengenai kesesuaian pengaturan lampu lalu lintas yang digunakan saat ini dengan kondisi lalu lintas yang sebenarnya di simpang Lamper Gajah Kota Semarang.

Pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum, selaku Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Prof. Dr. Sudarmin, M.Si, selaku Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Mashuri, M.Si selaku Ketua Prodi Matematika Universitas Negeri Semarang.
4. Dr. Isnaini Rosyida, S.Si, M.Si selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan dan saran.
5. Dr. Mulyono, M.Si selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan dan saran.

6. Dr. Rochmad, M.Si selaku Penguji Skripsi yang telah memberikan saran.
7. Abdul Sukroni, dan rekan-rekan yang bertugas di *CC room* ATCS Dinas Perhubungan Kota Semarang yang telah membantu dalam penelitian.
8. Kedua orang tua dan adik-adikku yang selalu memberi doa dan motivasi sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
9. Semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari pembaca. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca dan semua pihak yang membutuhkan.

Semarang, 28 November 2018

Penulis

Abstrak

Muzaroah, Siti. 2015. Aplikasi Pewarnaan Graf Fuzzy dan FIS untuk Menentukan Fase dan Durasi Lampu Lalu Lintas Di Simpang Lamper Gajah Kota Semarang.

Kata Kunci : Graf fuzzy, pewarnaan graf fuzzy, FIS, fase, dan durasi lampu lalu lintas

Pewarnaan simpul pada graf fuzzy dengan *cut- α* dapat digunakan untuk menentukan fase lampu lalu lintas. Simpang Lamper Gajah direpresentasikan ke dalam graf fuzzy dengan menyatakan arus sebagai simpul dan derajat keanggotaan simpul menyatakan arus lalu lintas. Sedangkan arus yang bersilangan atau menyatu dinyatakan sebagai sisi dengan derajat keanggotaan sisi menyatakan tingkat konflik dari kedua arus. Derajat keanggotaan simpul dan sisi diperoleh menggunakan fungsi keanggotaan simpul dan sisi. Belum ada cara pasti untuk membangun fungsi keanggotaan simpul dan sisi sehingga digunakan metode *trial and error* dengan memilih nilai 2884 yaitu arus lalu lintas terbesar dan memilih nilai (sembarang) $1891 < 2884$ karena derajat keanggotaan sisinya memenuhi definisi graf fuzzy.

Pengaturan lampu lalu lintas di simpang lamper Gajah saat kondisi sibuk pagi dan sore terdiri dari 8 arus dan 20 pasang arus yang bersilangan atau menyatu artinya terdapat 8 simpul dan 21 sisi untuk membangun graf fuzzy. Sedangkan saat kondisi sibuk sore terdapat 8 arus dan 21 pasang arus yang bersilangan atau menyatu sehingga terdapat 8 simpul dan 21 sisi untuk membangun graf fuzzy.

Hasil pewarnaan graf fuzzy yaitu bilangan kromatik $\chi(\tilde{G}) = \chi(\tilde{H}) = 4$ yang merupakan 4 fase lampu lalu lintas saat kondisi sibuk pagi dan sore dengan urutan yang berbeda. Panjang antrian untuk setiap fase merupakan variabel linguistik input yang digunakan untuk menentukan durasi lampu hijau berbantu aplikasi matlab R2014a. Berdasarkan nilai normal waktu antar hijau, variabel linguistik input berupa interval panjang antrian dalam bentuk himpunan fuzzy dan variabel linguistik output berupa konstanta durasi lampu hijau dalam bentuk fuzzy point. Dengan demikian, penentuan durasi lampu hijau dapat menggunakan FIS tipe sugeno orde-nol dengan bantuan program matlab R2014a.

Pengaturan lampu lalu lintas yang mendekati optimal dapat diketahui melalui waktu siklus yang layak. Siklus lampu lalu lintas diperoleh dari durasi lampu hijau hasil FIS tipe sugeno orde-nol dengan bantuan matlab R2014a. Waktu siklus yang layak pada pengaturan lampu lalu lintas dengan empat fase adalah 80-130 detik. Siklus pengaturan lampu lalu lintas pada saat kondisi sibuk pagi hasil penelitian dan yang digunakan saat ini di simpang Lamper Gajah sebesar 138 detik dan 170 detik, jelas siklus pengaturan lampu lalu lintas hasil penelitian lebih mendekati layak. Begitupun juga siklus pengaturan lampu lalu lintas pada saat kondisi sibuk sore hasil penelitian dan yang digunakan saat ini di simpang Lamper Gajah sebesar 148 detik dan 165 detik, jelas siklus pengaturan lampu lalu lintas hasil penelitian lebih mendekati layak. Dengan demikian, pengaturan lampu lalu lintas hasil penelitian ini di simpang Lamper Gajah Kota Semarang baik saat kondisi sibuk pagi maupun sore lebih mendekati optimal dari yang digunakan saat ini.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
SURAT PERNYATAAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
MOTTO DAN PERSEMBAHAN	iv
KATA PENGANTAR	v
ABSTRAK	vii
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xviii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	6
1.3. Batasan Masalah	6
1.4. Tujuan Penelitian	7
1.5. Manfaat Penelitian	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	8
2.1. Graf Tegas	8
2.2. Pewarnaan Simpul Graf Tegas	11
2.3. Himpunan Fuzzy	13
2.3.1. Fungsi Keanggotaan	17

2.3.2. Relasi Fuzzy	22
2.3.3. Operasi pada Himpunan Fuzzy	23
2.4. Graf Fuzzy	25
2.5. Pewarnaan Simpul Graf Fuzzy Menggunakan <i>Cut-α</i>	29
2.6. Logika Fuzzy	33
2.6.1. <i>Fuzzy Inference System</i> (FIS)	36
2.6.2. <i>Fuzzy Logic Toolbox</i> MATLAB R2014a	44
BAB III METODE PENELITIAN	55
3.1. Studi Pustaka	56
3.2. Analisis Kebutuhan Penelitian	56
3.3. Metode Pengumpulan Data	57
3.4. Penyelesaian Masalah	58
3.4.1. Mengkonstruksikan Simpang Lamper Gajah Ke Dalam Graf Fuzzy	59
3.4.2. Pewarnaan Graf Fuzzy Menggunakan <i>Cut-α</i> untuk Menentukan Fase Lampu Lalu Lintas	59
3.4.3. Membangun FIS Tipe Sugeno Orde-Nol untuk Menentukan Durasi Lampu Hijau	60
3.5. Hasil dan Pembahasan	61
3.6. Penarikan Kesimpulan	65
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	66
4.1. Hasil Penelitian	68
4.1.1. Penentuan Fase dan Durasi Lampu Hijau Saat Kondisi Sibuk	

Pagi	99
4.1.2. Penentuan Fase dan Durasi Lampu Hijau Saat Kondisi Sibuk	
Sore	116
4.2. Bahasan Penelitian	132
4.2.1. Perbandingan Siklus Lampu Lalu Lintas Saat Kondisi Sibuk	
Pagi	135
4.2.2. Perbandingan Siklus Lampu Lalu Lintas Saat Kondisi Sibuk	
Sore	140
BAB V PENUTUP	148
5.1. Kesimpulan	148
5.2. Saran	151
DAFTAR PUSTAKA	152
LAMPIRAN	155

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Sisi dan Simpul Ujung Sisi Graf G dengan 6 Simpul	10
Tabel 2.2	Derajat Simpul Graf G dengan 7 Simpul	12
Tabel 2.3	Daftar Harga Tanah	42
Tabel 2.4	<i>Rule</i>	42
Tabel 2.5	Ekivalensi Mobil Penumpang untuk Pendekat Terlindung	53
Tabel 2.6	Waktu Siklus yang Layak	54
Tabel 2.7	Nilai Normal Waktu Antar Hijau	54
Tabel 3.1	Klasifikasi Derajat Keanggotaan Sisi $\mu(x)$ Linguistik menurut Dey dan Anita (2013)	63
Tabel 3.2	Klasifikasi Derajat Keanggotaan Sisi $\mu(x)$ Linguistik Berdasarkan Definisi Graf Fuzzy	64
Tabel 3.3	Luas Kendaraan	65
Tabel 4.1	Simpul yang Menyatakan Arus Saat Kondisi Normal	70
Tabel 4.2	Sisi yang Menyatakan Dua Arus Bersilangan atau Menyatu Saat Kondisi Normal	70
Tabel 4.3	Sisi yang Menyatakan Dua Arus Bersilangan atau Menyatu Saat Kondisi Sibuk Pagi	71
Tabel 4.4	Lebar Jalan untuk Setiap Arus Di Simpang Lamper Gajah	92
Tabel 4.5	Banyak Siklus Lampu Lalu Lintas dalam Satu Jam	92
Tabel 4.6	Nilai Normal Waktu Antar Hijau	93
Tabel 4.7	Domain dari Variabel Linguistik Input	95
Tabel 4.8	<i>Rule</i> Utama	97

Tabel 4.9	Rata-rata Arus Lalu Lintas (x) Saat Kondisi Sibuk Pagi	99
Tabel 4.10	Derajat Keanggotaan Simpul Graf Fuzzy \tilde{G}	102
Tabel 4.11	Derajat Keanggotaan Sisi Graf Fuzzy \tilde{G}	103
Tabel 4.12	Bilangan Kromatil Hasil Pewarnaan Graf Tegas G_α	110
Tabel 4.13	Durasi Lampu Hijau Saat Kondisi Sibuk Pagi Hasil FIS	114
Tabel 4.14	Siklus Lampu Lalu Lintas Hasil Penelitian Di Simpang Lamper Gajah Saat Kondisi Sibuk Pagi	115
Tabel 4.15	Alternatif 1 Fase dan Durasi Lampu Hijau Saat Kondisi Sibuk Pagi Hasil FIS	115
Tabel 4.16	Alternatif 1 Siklus Lampu Lalu Lintas Di Simpang Lamper Gajah Saat Kondisi Sibuk Pagi	116
Tabel 4.17	Rata-rata Arus Lalu Lintas (x) Saat Kondisi Sibuk Sore	116
Tabel 4.18	Derajat Keanggotaan Simpul Graf Fuzzy \tilde{H}	119
Tabel 4.19	Derajat Keanggotaan Sisi Graf Fuzzy \tilde{H}	120
Tabel 4.20	Bilangan Kromatil Hasil Pewarnaan Graf Tegas H_α	125
Tabel 4.21	Durasi Lampu Hijau Saat Kondisi Sibuk Sore Hasil FIS	128
Tabel 4.22	Siklus Lampu Lalu Lintas Hasil Penelitian Di Simpang Lamper Gajah Saat Kondisi Sibuk Sore	129
Tabel 4.23	Alternatif 1 Fase dan Durasi Lampu Hijau Saat Kondisi Sibuk Sore Hasil FIS	129
Tabel 4.24	Alternatif 1 Siklus Lampu Lalu Lintas Di Simpang Lamper Gajah Saat Kondisi Sibuk Sore	130
Tabel 4.25	Alternatif 2 Fase dan Durasi Lampu Hijau Saat Kondisi Sibuk Sore	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Simpang Lamper Gajah Kota Semarang.....	4
Gambar 2.1	Graf G dengan 6 simpul	10
Gambar 2.2	Graf G dengan 7 Simpul	12
Gambar 2.3	Hasil Pewarnaan Graf G dengan 4 Warna	13
Gambar 2.4	Fungsi Keanggotaan Himpunan Fuzzy \tilde{A}	17
Gambar 2.5	Grafik Fungsi Keanggotaan Linear Naik	18
Gambar 2.6	Grafik Fungsi Keanggotaan Linear Turun	19
Gambar 2.7	Grafik Himpunan Fuzzy MUDA	19
Gambar 2.8	Grafik Fungsi Keanggotaan Segitiga	20
Gambar 2.9	Grafik Fungsi Keanggotaan Himpunan Fuzzy \tilde{A}	20
Gambar 2.10	Grafik Fungsi Keanggotaan Trapesium	21
Gambar 2.11	Grafik Fungsi Keanggotaan TINGGI IDEAL	21
Gambar 2.12	Graf Fuzzy \tilde{G}	28
Gambar 2.13	Graf $G_{0,3}$	29
Gambar 2.14	$\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$	30
Gambar 2.15	G_1	31
Gambar 2.16	$G_{0,9}$	31
Gambar 2.17	$G_{0,8}$	31
Gambar 2.18	$G_{0,7}$	32
Gambar 2.19	$G_{0,6}$	32
Gambar 2.20	$G_{0,5}$	32

Gambar 2.21	Pemetaan Hubungan Input dan Output	33
Gambar 2.22	Domain Luas Tanah (m^2)	40
Gambar 2.23	Domain Jarak Tanah (m)	41
Gambar 2.24	<i>FIS Editor</i>	45
Gambar 2.25	<i>FIS Editor</i> Tipe Sugeno	45
Gambar 2.26	<i>Membership Function Editor</i> Variabel Input	46
Gambar 2.27	<i>Membership Function Editor</i> Variabel Output	47
Gambar 2.28	<i>Rule Editor Window</i>	48
Gambar 2.29	<i>FIS Editor</i> “Contoh Soal Sugeno Orde-Nol”	49
Gambar 2.30	<i>Membership Function Editor</i> Input Variabel Luas	49
Gambar 2.31	<i>Membership Function Editor</i> Input Variabel Jarak	50
Gambar 2.32	<i>Membership Function Editor</i> Output Variabel Harga	50
Gambar 2.33	<i>Rule Editor</i> “Sugeno Orde-Nol”	51
Gambar 2.34	<i>Rule Viewer</i> “Sugeno Orde-Nol”	51
Gambar 3.1	Fungsi Keanggotaan yang Digunakan dalam Penelitian	62
Gambar 4.1	Fase Lampu Lalu Lintas Saat Ini Di Simpang Lamper Gajah Kota Semarang	66
Gambar 4.2	Fase Lampu Lalu Lintas Saat Kondisi Sibuk Pagi Di Simpang Lamper Gajah Kota Semarang	67
Gambar 4.3	Fungsi Keanggotaan yang Digunakan dalam Penelitian	71
Gambar 4.4	Grafik Fungsi Keanggotaan Simpul (σ) untuk <i>Trial and Error</i> 1	72
Gambar 4.5	Grafik Fungsi Keanggotaan Simpul (σ) untuk <i>Trial and Error</i> 2	74
Gambar 4.6	Grafik Fungsi Keanggotaan Simpul (σ) untuk <i>Trial and Error</i> 3	77

Gambar 4.7	Grafik Fungsi Keanggotaan Simpul (σ) untuk <i>Trial and Error</i> 4	80
Gambar 4.8	Grafik Fungsi Keanggotaan Simpul (σ) untuk <i>Trial and Error</i> 5	82
Gambar 4.9	Grafik Fungsi Keanggotaan Simpul (σ) untuk <i>Trial and Error</i> 6	86
Gambar 4.10	Grafik Fungsi Keanggotaan Simpul (σ) untuk <i>Trial and Error</i> 7	88
Gambar 4.11	FIS <i>Editor</i>	94
Gambar 4.12	Fungsi Keanggotaan untuk Variabel Input	95
Gambar 4.13	Fungsi Keanggotaan Output	96
Gambar 4.14	Graf Fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$	103
Gambar 4.15	Hasil Pewarnaan Graf $G_{0,95}(V_{0,95}, E_{0,95})$	104
Gambar 4.16	Hasil Pewarnaan Graf $G_{0,94}(V_{0,94}, E_{0,94})$	104
Gambar 4.17	Hasil Pewarnaan Graf $G_{0,87}(V_{0,87}, E_{0,87})$	105
Gambar 4.18	Hasil Pewarnaan Graf $G_{0,83}(V_{0,83}, E_{0,83})$	105
Gambar 4.19	Hasil Pewarnaan Graf $G_{0,82}(V_{0,82}, E_{0,82})$	105
Gambar 4.20	Hasil Pewarnaan Graf $G_{0,79}(V_{0,79}, E_{0,79})$	106
Gambar 4.21	Hasil Pewarnaan Graf $G_{0,77}(V_{0,77}, E_{0,77})$	106
Gambar 4.22	Hasil Pewarnaan Graf $G_{0,61}(V_{0,61}, E_{0,61})$	107
Gambar 4.23	Hasil Pewarnaan Graf $G_{0,21}(V_{0,21}, E_{0,21})$	107
Gambar 4.24	Hasil Pewarnaan Graf $G_{0,18}(V_{0,18}, E_{0,18})$	108
Gambar 4.25	Hasil Pewarnaan Graf $G_{0,17}(V_{0,17}, E_{0,17})$	108
Gambar 4.26	Hasil Pewarnaan Graf $G_{0,13}(V_{0,13}, E_{0,13})$	109
Gambar 4.27	Hasil Pewarnaan Graf $G_{0,06}(V_{0,06}, E_{0,06})$	109
Gambar 4.28	Hasil Pewarnaan Graf $G_{0,05}(V_{0,05}, E_{0,05})$	110

Gambar 4.29	Fase Hasil Pewarnaan Graf Fuzzy \tilde{G}	111
Gambar 4.30	Durasi Lampu Hijau untuk Fase 1	112
Gambar 4.31	Durasi Lampu Hijau untuk Fase 2	113
Gambar 4.32	Durasi Lampu Hijau untuk Fase 3	113
Gambar 4.33	Durasi Lampu Hijau untuk Fase 4	114
Gambar 4.34	Graf Fuzzy $\tilde{H}(\tilde{V}, \tilde{E})$	121
Gambar 4.35	Hasil Pewarnaan Graf $H_{0,91}(V_{0,91}, E_{0,91})$	121
Gambar 4.36	Hasil Pewarnaan Graf $H_{0,89}(V_{0,89}, E_{0,89})$	122
Gambar 4.37	Hasil Pewarnaan Graf $H_{0,88}(V_{0,88}, E_{0,88})$	122
Gambar 4.38	Hasil Pewarnaan Graf $H_{0,87}(V_{0,87}, E_{0,87})$	122
Gambar 4.39	Hasil Pewarnaan Graf $H_{0,85}(V_{0,85}, E_{0,85})$	123
Gambar 4.40	Hasil Pewarnaan Graf $H_{0,66}(V_{0,66}, E_{0,66})$	123
Gambar 4.41	Hasil Pewarnaan Graf $H_{0,34}(V_{0,34}, E_{0,34})$	124
Gambar 4.42	Hasil Pewarnaan Graf $H_{0,13}(V_{0,13}, E_{0,13})$	124
Gambar 4.43	Fase Hasil Pewarnaan Graf Fuzzy \tilde{H}	125
Gambar 4.44	Durasi Lampu Hijau untuk Fase 1	126
Gambar 4.45	Durasi Lampu Hijau untuk Fase 2	127
Gambar 4.46	Durasi Lampu Hijau untuk Fase 3	127
Gambar 4.47	Durasi Lampu Hijau untuk Fase 4	128
Gambar 4.48	Perbandingan Durasi Lampu Hijau Saat Kondisi Sibuk Pagi	139
Gambar 4.49	Perbandingan Durasi Lampu Merah Saat Kondisi Sibuk Pagi ..	139
Gambar 4.50	Perbandingan Durasi Lampu Hijau Saat Kondisi Sibuk Sore	145
Gambar 4.51	Perbandingan Durasi Lampu Merah Saat Kondisi Sibuk Sore ..	145

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Bukti Video Dokumentasi Pengambilan Data	155
Lampiran 2	Rata-rata Arus Lalu Lintas dan Panjang Antrian	156
Lampiran 3	Rule Editor FIS Tipe Sugeno Orde-Nol	164
Lampiran 4	Perhitungan Derajat Keanggotaan Sisi Graf Fuzzy \tilde{G} dan \tilde{H}	172
Lampiran 5	Bukti Syarat Derajat Keanggotaan Sisi Graf Fuzzy \tilde{G} dan \tilde{H} Terpenuhi	184

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Teori graf merupakan cabang dari matematika yang ada lebih dari dua puluh dekade lalu. Jurnal pertama tentang teori graf muncul pada tahun 1736 oleh matematikawan terkenal dari Swiss bernama Euler (Budayasa, 2007). Jurnal tersebut mengupas tentang pemecahan masalah jembatan konisberg dengan membuat model yakni daratan dinyatakan sebagai simpul (*vertex*) dan jembatan dinyatakan sebagai sisi (*edge*) (Chartrand dan Zhang, 2005). Jawaban yang dikemukakan oleh Euler adalah orang tidak mungkin melalui ketujuh jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat asal jika derajat setiap simpul tidak seluruhnya genap (Munir, 2005). Tahun 1852, ahli matematika Francis Guthrie merupakan orang pertama yang melakukan penelitian tentang pewarnaan graf. Pewarnaan graf bukan hanya mewarnai simpul-simpul bertetangga dengan warna berbeda, tetapi warna yang dihasilkan minimum. Algoritma yang sering digunakan adalah algoritma *Welch-Powell*.

Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan bertambah lagi satu bahasan dalam matematika yaitu himpunan fuzzy. Himpunan fuzzy pertama kali dikenalkan oleh Zadeh (1965). Menurut Mordeson dan Nair (2000), pada tahun 1975 Azriel Rosenfeld memperkenalkan penelitiannya mengenai himpunan fuzzy dan graf yang dikenal dengan graf fuzzy. Rosenfeld (1975) mengenalkan graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ yang terdiri dari himpunan simpul fuzzy dan

himpunan sisi fuzzy. Sedangkan graf fuzzy $\tilde{G}(V, \tilde{E})$ yang terdiri dari himpunan simpul tegas dan himpunan sisi fuzzy telah dikenalkan oleh Kaufman (Munoz, dkk, 2005).

Bershtein dan Bozhenuk (2001), memberikan konsep pewarnaan graf fuzzy $\tilde{G}(V, \tilde{E})$ berdasarkan pada himpunan simpul independen fuzzy maksimal. Tahun 2005, Munoz, dkk memberikan konsep pewarnaan menggunakan $cut-\alpha$. Sedangkan Cioban (2007) mengenalkan konsep pewarnaan berdasarkan himpunan simpul independen fuzzy yang bergantung pada nilai $\delta \in [0,1]$. Rosyida, dkk (2015) telah mengembangkan konsep pendekatan baru untuk menentukan himpunan kromatik fuzzy berdasarkan pada bilangan kromatik- δ . Berikutnya, Rosyida (2016) mengembangkan metode pewarnaan simpul dan bilangan kromatik pada graf tak deterministik.

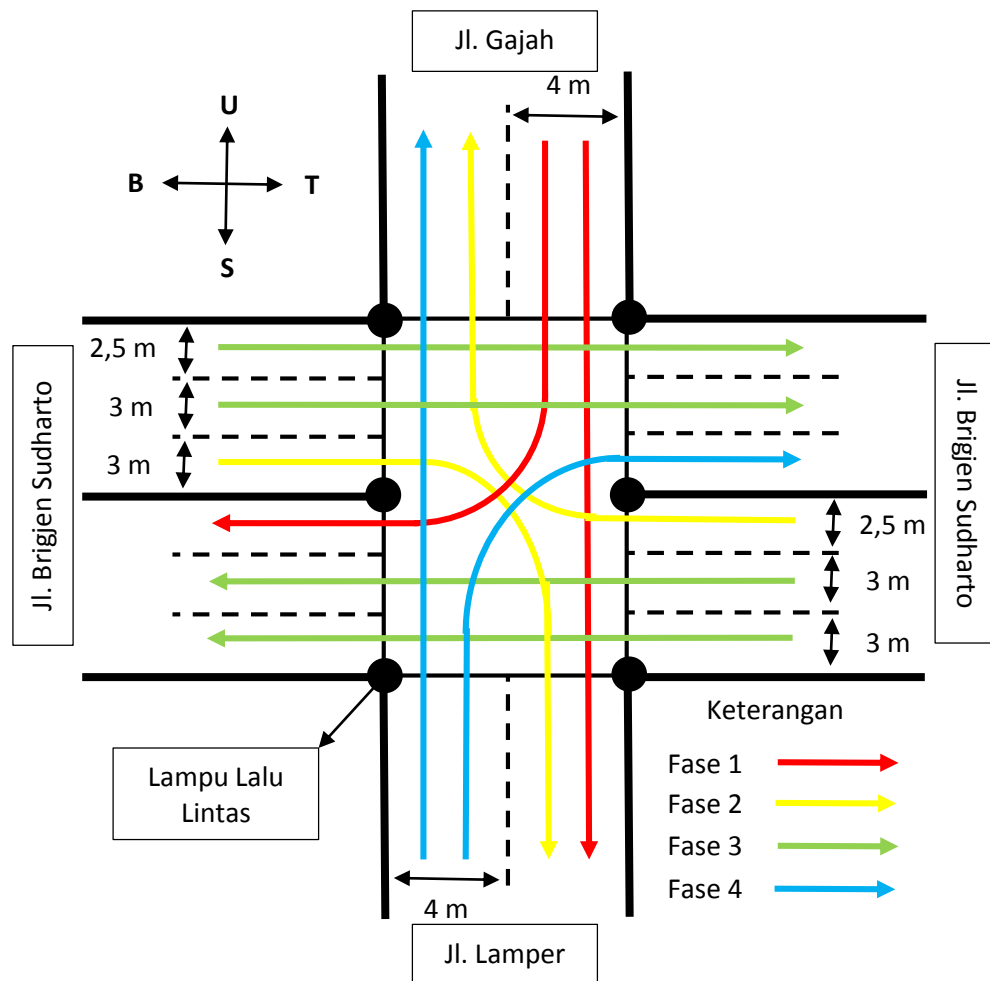
Eslahchi dan Onagh (2005) mengemukakan pewarnaan graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ yang dikenal dengan pewarnaan k-fuzzy. Sedangkan Dey dan Anita (2012) mengemukakan konsep pewarnaan simpul pada graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ menggunakan $cut-\alpha$. Kishore dan Sunitha (2013) menyumbangkan algoritma kromatik fuzzy. Saat ini pewarnaan graf fuzzy banyak mendapat perhatian diantaranya Firouzian dan Jouybari (2011), Dey dan Anita (2013), Sulastri, dkk (2014), Myna (2015), Kurniawan (2017) yang digunakan untuk menentukan fase lampu lalu lintas.

Jika fase lampu lalu lintas berubah maka durasi lampu hijau juga berubah. Penentuan durasi lampu hijau dapat dicari menggunakan salah satu aplikasi logika fuzzy yaitu FIS (*Fuzzy Inference System*) yang bekerja atas

dasar prinsip logika seperti halnya penalaran manusia. Takagi-Sugeno Kang pada tahun 1985 memperkenalkan FIS dengan fungsi keanggotaan output berupa persamaan linear atau konstanta yang dikenal dengan FIS tipe sugeno (Blej dan Azizi, 2016). FIS tipe sugeno yang fungsi keanggotaan outputnya berupa konstanta disebut FIS tipe sugeno orde-nol, sedangkan FIS tipe sugeno yang fungsi keanggotaan outputnya berupa persamaan linear disebut FIS tipe sugeno orde-satu. Saat ini FIS banyak mendapat perhatian, diantaranya Prasetiyo, dkk (2015), Fadhillah (2015), Blej dan Azizi (2016), dan Prasetiyo (2016) yang melakukan penelitian menggunakan FIS untuk menentukan durasi lampu hijau pada pengaturan lampu lalu lintas.

Sistem pengaturan lampu lalu lintas di Kota Semarang saat ini sudah menggunakan sistem yang moderen yaitu ATCS (*Area Traffic Control System*). ATCS adalah sebuah sistem pengaturan lampu lalu lintas bersinyal terkoordinasi yang diatur mencakup satu wilayah secara terpusat dan dikontrol oleh operator di ruang kontrol (*Central Control Room*). Operator yang bertugas di *CC room* dapat menambah durasi lampu hijau, mengurangi durasi lampu merah, mempercepat fase, dan mengubah plan sesuai kebutuhan. Meskipun operator di ATCS dapat mengatur durasi lampu lalu lintas sesuai dengan kebutuhan, pada kenyataannya masih terdapat persimpangan yang durasi lampu lalu lintasnya tidak sesuai dengan arus lalu lintas dan panjang antrian salah satunya yaitu di simpang Lamper Gajah.

Simpang Lamper Gajah Kota Semarang merupakan persimpangan dengan 4 pendekat seperti yang disajikan pada Gambar 1.1.



Gambar 1.1. Simpang Lamper Gajah Kota Semarang

Arus lalu lintas dan panjang antrian pada saat kondisi sibuk pagi dan sore dari Jl. Brigjen Sudharto dan Jl. Lamper di simpang Lamper Gajah Kota Semarang termasuk dalam klasifikasi sangat tinggi dan panjang. Sehingga pada pagi hari, dilakukan penambahan satu lajur untuk arus dari Jl. Brigjen Sudharto (timur). Selain itu, polisi yang bertugas sesekali melakukan rekayasa pada Jl. Lamper dengan meminta pengendara untuk memenuhi seluruh badan jalan pada saat arus dari Jl. Brigjen Sudharto ke arah barat dan timur melintas. Sedangkan pada sore hari arus dari Jl. Lamper seluruhnya dialihkan ke arah barat. Rekayasa yang dilakukan polisi menjadikan fase dan durasi lampu lalu

lintas di simpang Lamper Gajah yang sedang digunakan berubah sehingga harus disesuaikan dengan kondisi arus lalu lintas saat ini.

Karena arus lalu lintas di simpang Lamper Gajah tidak sama sehingga tingkat konflik dari dua arus yang bersilangan atau menyatu berbeda. Jika dua arus yang bersilangan atau menyatu dalam satu fase maka akan menimbulkan konflik lalu lintas, sehingga kedua arus harus mendapat fase yang berbeda. Dengan demikian, fase lampu lalu lintas dapat ditentukan dengan konsep pewarnaan simpul pada graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ yang diberikan oleh Dey dan Anita (2013). Arus dinyatakan sebagai simpul dan arus lalu lintas dinyatakan sebagai derajat keanggotaan simpul. Sedangkan, arus yang bersilangan atau menyatu dinyatakan sebagai sisi dan tingkat konflik dari kedua arus dinyatakan sebagai derajat keanggotaan sisi. Banyaknya fase lampu lalu lintas diperoleh dari bilangan kromatik hasil pewarnaan graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$.

Setelah fase lampu lalu lintas ditentukan selanjutnya dilakukan perubahan durasi lampu lalu lintas. Durasi lampu lalu lintas bergantung pada durasi lampu hijau sehingga untuk mencari durasi lampu lalu lintas harus ditentukan terlebih dahulu durasi lampu hijau. Jika dua arus memiliki tingkat arus lalu lintas sama akan tetapi lebar jalan dari dua arus tersebut berbeda, maka arus dengan jalan yang lebih lebar memiliki kesempatan terurai lebih cepat. Sehingga arus lalu lintas kurang tepat untuk dijadikan sebagai dasar penentuan durasi lampu hijau. Jika panjang antrian dari kedua arus sama maka kedua arus tersebut akan terurai pada waktu yang sama. Sehingga Panjang antrian dapat dijadikan dasar penentuan durasi lampu hijau.

Karena lebar jalan di simpang Lamper Gajah bervariasi antara 10 – 17 m, maka waktu yang diperlukan kendaraan untuk melintasi di simpang Lamper Gajah Kota Semarang paling sedikit 5 detik. Berdasarkan nilai normal waktu antar hijau (MKJI, 1997), waktu yang diperlukan kendaraan untuk melintasi di simpang Lamper Gajah paling sedikit 5 detik. Dengan demikian, variabel linguistik input berupa interval panjang antrian dalam bentuk himpunan fuzzy dan variabel linguistik output berupa konstanta durasi lampu hijau dalam bentuk fuzzy point. Sehingga penentuan durasi lampu hijau dapat menggunakan FIS tipe sugeno orde-nol.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, peneliti mengambil rumusan masalah sebagai berikut.

- a. Bagaimana merepresentasikan simpang Lamper Gajah dalam bentuk graf fuzzy?
- b. Bagaimana menentukan fase lampu lalu lintas di simpang Lamper Gajah menggunakan pewarnaan graf fuzzy?
- c. Bagaimana menentukan durasi lampu lalu lintas di simpang Lamper Gajah menggunakan FIS tipe sugeno orde-nol?

1.3. Batasan Masalah

Untuk memfokuskan obyek dari suatu penelitian maka dibutuhkan batasan masalah. Batasan masalah yang ditentukan peneliti sebagai berikut.

- a. Simpang yang digunakan adalah simpang Lamper Gajah.

- b. Banyak kendaraan untuk arus yang belok kiri diabaikan karena pada setiap kaki simpang sudah terdapat pembatas untuk belok kiri.
- c. Saat pengambilan data, lampu kuning diasumsikan sama dengan lampu hijau disesuaikan dengan perilaku pengendara yang melajukan kendaraannya saat lampu kuning.

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dari penelitian ini yaitu:

- a. Merepresentasikan simpang Lamper Gajah dalam bentuk graf fuzzy.
- b. Menentukan fase lampu lalu lintas di simpang Lamper Gajah menggunakan pewarnaan graf fuzzy.
- c. Menentukan durasi lampu lalu lintas di simpang Lamper Gajah menggunakan FIS tipe sugeno orde-nol.

1.5. Manfaat Penelitian

Dari penelitian ini dapat diketahui beberapa manfaat sebagai berikut:

- a. Bertambahnya referensi dinas terkait dalam menentukan solusi kemacetan di suatu persimpangan dengan menyesuaikan fase dan durasi lampu lalu lintas sesuai kondisi lalu lintas.
- b. Bertambahnya wawasan dan pengetahuan penulis tentang aplikasi graf fuzzy dan FIS pada pengaturan lampu lalu lintas.
- c. Bertambahnya wawasan dan pengetahuan pembaca tentang aplikasi graf fuzzy dan FIS pada pengaturan lampu lalu lintas.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Graf Tegas

Sebuah himpunan graf G berisikan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari obyek-obyek yang disebut simpul dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemennya disebut sisi sehingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak urut dari simpul-simpul di $V(G)$. Himpunan $V(G)$ disebut himpunan simpul G dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi G (Budayasa, 2007). Setiap sisi e_k pada himpunan sisi $E(G)$ merupakan pasangan tak terurut (v_i, v_j) dengan v_i dan v_j adalah simpul-simpul pada graf G yang dihubungkan oleh sisi e_k dengan $i, j, k \in \mathbb{N}$. Jika (v_i, v_j) adalah sisi, maka simpul v_i dan v_j disebut simpul ujung sisi (v_i, v_j) .

Munir (2005) menyatakan, dalam pembahasan mengenal graf biasanya sering menggunakan terminologi (istilah) yang berkaitan dengan graf. Beberapa terminologi yang berkaitan dengan graf sebagai berikut.

a. Bertetangga (*Adjacent*)

Dua buah simpul v_i dan v_j dikatakan bertetangga (berhubungan langsung) bila terdapat sisi (v_i, v_j) yang menghubungkan (*joining*) simpul v_i dan v_j (Munir, 2005).

b. Bersisian (*Incident*)

Setiap sisi e_k pada graf pasti mempunyai sekurang-kurangnya satu simpul ujung. Jika sebuah simpul v_i merupakan simpul ujung dari

sisi e_k , maka v_i dan e_k saling bersisian (*incident*). Dengan demikian, untuk sembarang sisi $e_k = (v_i, v_j)$, sisi e_k dikatakan bersisian dengan simpul v_i dan v_j (Munir, 2005).

c. Simpul terpencil (*Isolated Vertex*)

Simpul terpencil adalah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya, atau dapat juga dinyatakan bahwa simpul terpencil adalah simpul yang tidak satupun bertetangga dengan simpul-simpul lainnya (Munir, 2005).

d. Gelung (*Loop*)

Pada definisi dua simpul bertetangga, tidak dikatakan bahwa v_i dan v_j tidak boleh sama ($i \neq j$), artinya v_i dan v_j boleh sama ($i = j$). Akibatnya sebuah sisi graf yang menghubungkan sebuah simpul dengan dirinya sendiri disebut gelung (*loop*) (Budayasa, 2007).

e. Sisi rangkap (*Multiple-Edge*)

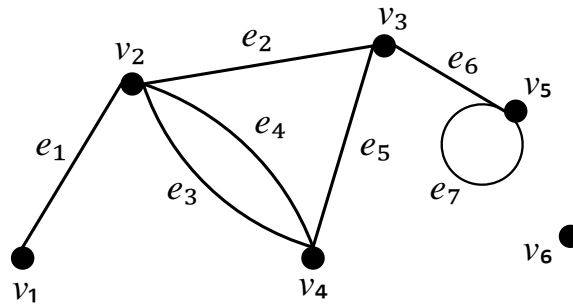
Pada sebuah graf dimungkinkan dua simpul dihubungkan oleh dua atau lebih sisi yang berbeda. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua simpul v_i dan v_j pada suatu graf, maka sisi tersebut disebut sisi-rangkap (*multiple-edge*) (Budayasa, 2007).

f. Derajat (*Degree*)

Misalkan G sebuah graf dan v sebuah simpul G . Derajat simpul v dilambangkan dengan $d_G v$ atau $d(v)$ adalah banyaknya sisi G yang terkait dengan simpul v (dengan catatan setiap gelung dihitung dua kali) (Budayasa, 2007).

Contoh 2.1

Misalkan dipunyai sebuah graf G dengan 6 simpul sebagai berikut:



Gambar 2.1 Graf G dengan 6 Simpul

Keterangan:

- Himpunan simpul di G yaitu $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
- Himpunan sisi di G yaitu $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$
- Sisi dan simpul ujungnya disajikan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Sisi dan Simpul Ujung Sisi Graf G dengan 6 Simpul

Sisi	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	
Simpul Ujung	v_1, v_2	v_2, v_3	v_2, v_4	v_2, v_4	v_3, v_4	v_3, v_5	v_5, v_5	v_6

- Simpul v_1 bertetangga dengan simpul v_2 , simpul v_5 bertetangga dengan dirinya sendiri, dan simpul v_1 tidak bertetangga dengan simpul v_3 .
- Sisi e_1 bersisian dengan simpul v_1 dan simpul v_2 , tetapi sisi tersebut tidak bersisian dengan simpul v_3 .
- Simpul v_6 adalah simpul terpencil.
- Sisi e_7 pada graf G dengan 6 simpul merupakan gelung.
- Sisi e_3 dan e_4 di graf G dengan 6 simpul merupakan sisi-rangkap.

- i. Derajat simpul v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dan v_6 adalah $d(v_1) = 1, d(v_2) = 4, d(v_3) = 3, d(v_4) = 3, d(v_5) = 3$ dan $d(v_6) = 0$.

2.2. Pewarnaan Simpul Graf Tegas

Misalkan G adalah graf, sebuah pewarnaan- k dari graf G dengan menggunakan k warna sedemikian hingga dua simpul G yang berhubungan langsung mendapat warna yang berbeda. Jika G memiliki sebuah warna- k maka dapat dikatakan G dapat diwarnai dengan k warna (Budayasa, 2007). Pewarnaan simpul bukan hanya mewarnai simpul pada suatu graf sedemikian hingga setiap simpul yang bertetangga mendapat warna berbeda, akan tetapi jumlah warna yang dihasilkan minimum yang disebut bilangan kromatik.

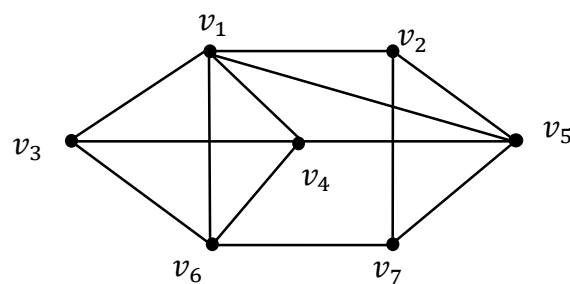
Misalkan G sebuah graf, bilangan kromatik (*Chromatic number*) dari graf G dilambangkan dengan $\chi(G)$ didefinisikan sebagai $\chi(G) = \min\{k \mid \text{ada pewarnaan-}k \text{ pada } G\}$ (Budayasa, 2007). Untuk melakukan pewarnaan dengan warna yang minimum maka diperlukan alat bantu, yaitu sebuah algoritma yang akan mengatur bagaimana proses pewarnaan pada suatu graf. Berikut aturan pewarnaan simpul pada graf G menggunakan algoritma *Welch-Powell* (Munir, 2005).

- a. Urutkan simpul-simpul dari graf G dalam derajat yang menurun (urutan seperti ini mungkin tidak unik karena beberapa simpul mungkin berderajat sama).
- b. Gunakan satu warna untuk mewarnai simpul pertama (yang mempunyai derajat tertinggi) dan simpul-simpul lain (dalam urutan yang berurut) yang tidak bertetangga dengan simpul pertama ini.

- c. Mulai lagi dengan simpul derajat tertinggi berikutnya di dalam daftar terurut yang belum diwarnai dan ulangi proses pewarnaan.
- d. Ulangi penambahan warna-warna sampai semua simpul telah diwarnai.

Contoh 2.2 (Meilani, dkk, 2016)

Dipunyai graf G dengan 7 simpul sebagai berikut.



Gambar 2.2 Graf G dengan 7 Simpul

Derajat simpul graf G dengan 7 simpul disajikan pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Derajat Simpul Graf G dengan 7 Simpul

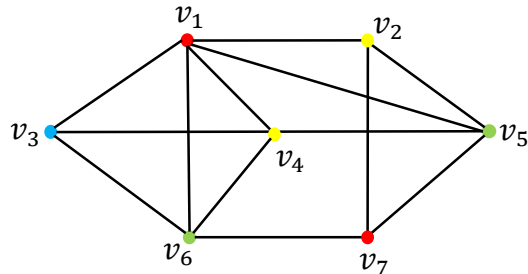
Simpul	v_1	v_4	v_5	v_6	v_2	v_3	v_7
Derajat	5	4	4	4	3	3	3

Berikut langkah pewarnaan graf G menggunakan algoritma *Welch-Powell*.

- a. Karena v_1 berderajat tertinggi, sehingga simpul v_1 dapat diwarnai dengan warna pertama yaitu merah, dan simpul v_7 yang tidak bertetangga dengan simpul v_1 dapat diwarnai dengan warna merah.
- b. Simpul berderajat tertinggi berikutnya yang belum diwarnai yaitu simpul v_4 . Warnai simpul v_4 dengan warna kedua yaitu kuning. Simpul yang belum diwarnai dan tidak bertetangga dengan simpul v_4 yaitu simpul v_2 , sehingga simpul v_2 mendapatkan warna kuning.

- c. Simpul berderajat tertinggi berikutnya yang belum diwarnai yaitu simpul v_5 . Warnai simpul v_5 dengan warna ketiga yaitu hijau. Simpul yang belum diwarnai dan tidak bertetangga dengan simpul v_5 yaitu simpul v_3 dan v_6 . Karena simpul v_3 dan v_6 bertetangga maka kedua simpul tersebut harus mendapat warna yang berbeda. Berdasarkan urutan derajat terbesar setelah simpul v_5 yaitu simpul v_6 , sehingga v_6 mendapat warna yang sama dengan simpul v_5 yaitu warna hijau.
- d. Simpul terakhir yang belum diwarnai yaitu simpul v_3 , sehingga simpul v_3 mendapatkan warna keempat yaitu biru.

Hasil pewarnaan simpul graf G menggunakan algoritma *Welch-Powel* dapat dilihat pada Gambar 2.3 dengan bilangan kromatiknya yaitu $\chi(G) = 4$.



Gambar 2.3 Hasil Pewarnaan Graf G dengan 4 Warna

2.3. Himpunan Fuzzy

Munoz, dkk (2005) menyatakan bahwa sebuah himpunan fuzzy \tilde{A} pada himpunan semesta tak kosong X didefinisikan sebagai,

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$$

dimana $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow I$ merupakan fungsi keanggotaan dan $\mu_{\tilde{A}}(x)$ mewakili keanggotaan x pada \tilde{A} . Pada teori himpunan fuzzy, himpunan I didefinisikan

sebagai selang $[0,1]$, dengan $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ jika x bukan unsur dari \tilde{A} , $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ jika x tepat unsur dari \tilde{A} , dan $0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1$ sebagai tingkatan unsur x dari \tilde{A} . Menurut Munoz, dkk (2005) himpunan I dapat berupa unsur-unsur yang terurut $I = (nul, low, medium, high, total)$ dan sebagainya.

Contoh 2.3

Himpunan A merupakan himpunan jenis buah yang banyak diminati masyarakat. Dalam teori himpunan tegas, himpunan A dapat ditulis sebagai,

$$A = \{\text{apel, pisang, anggur, naga, jeruk}\}$$

Dalam teori himpunan tegas, tingkat minat masyarakat terhadap kelima buah tersebut tidak diketahui karena tidak memiliki derajat keanggotaan. Dalam teori himpunan fuzzy, himpunan A dapat ditulis sebagai berikut:

$$\tilde{A} = \{(\text{apel}; 0,9), (\text{pisang}; 0,5), (\text{anggur}; 0,2), (\text{naga}; 0,7), (\text{jeruk}; 0,3)\}$$

Artinya, apel paling banyak diminati oleh masyarakat karena memiliki derajat keanggotaan 0,9 disusul naga 0,7 dan seterusnya hingga jenis buah yang memiliki peminat paling sedikit yaitu anggur dengan derajat keanggotaan 0,2.

Wang (1996), Susilo (2006), dan Lee (2005) menjelaskan konsep dasar himpunan fuzzy yaitu *support*, himpunan fuzzy singleton (elemen tunggal), tinggi (*height*), himpunan fuzzy normal, himpunan fuzzy subnormal, titik silang (*crossover point*), teras (*core*), pusat, himpunan level, dan *cut- α* .

a. Pendukung (*support*) pada himpunan fuzzy

Pendukung dari himpunan fuzzy \tilde{A} pada himpunan semesta X adalah himpunan tegas yang memuat semua elemen pada X dengan derajat keanggotaannya lebih dari nol dan didefinisikan sebagai berikut.

$$\text{supp}(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

- b. Himpunan fuzzy singleton (elemen tunggal)

Misalkan \tilde{A} adalah himpunan fuzzy dengan himpunan semesta tak kosong X . Himpunan fuzzy \tilde{A} dikatakan himpunan fuzzy singleton \tilde{A}' jika,

$$\mu_{\tilde{A}'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x = a \\ 0 & \text{jika } x \neq a \end{cases}$$

dengan a merupakan beberapa bilangan pada X . Himpunan fuzzy singleton \tilde{A}' adalah himpunan fuzzy \tilde{A} yang pendukungnya berupa elemen tunggal.

- c. Tinggi (*height*)

Tinggi (*height*) dari himpunan fuzzy \tilde{A} adalah derajat keanggotaan tertinggi yang dicapai setiap titik dan didefinisikan sebagai berikut.

$$\text{tinggi}(\tilde{A}) = \max_{x \in X} \{\mu_{\tilde{A}}(x)\}$$

- d. Himpunan fuzzy normal

Himpunan fuzzy yang tingginya sama dengan 1 disebut himpunan fuzzy normal.

- e. Himpunan fuzzy subnormal

Himpunan fuzzy yang tingginya kurang dari 1 disebut himpunan fuzzy subnormal.

- f. Titik silang (*crossover point*)

Titik dari semesta yang mempunyai derajat keanggotaan 0,5 dalam suatu himpunan fuzzy disebut titik silang.

g. Teras (*core*)

Teras dari himpunan fuzzy \tilde{A} yang dilambangkan dengan $teras(\tilde{A})$ adalah himpunan semua unsur dari semesta X yang mempunyai derajat keanggotaan sama dengan 1, didefinisikan sebagai berikut.

$$teras(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

h. Pusat

Jika nilai rata-rata dari semua titik yang fungsi keanggotaan himpunan fuzzy tersebut mencapai nilai maximum adalah berhingga, maka pusat himpunan fuzzy itu adalah nilai rata-rata tersebut.

i. Himpunan level

Himpunan yang memuat nilai $\mu_{\tilde{A}}(x) = \beta$ pada interval $[0,1]$ disebut himpunan level yang didefinisikan sebagai berikut.

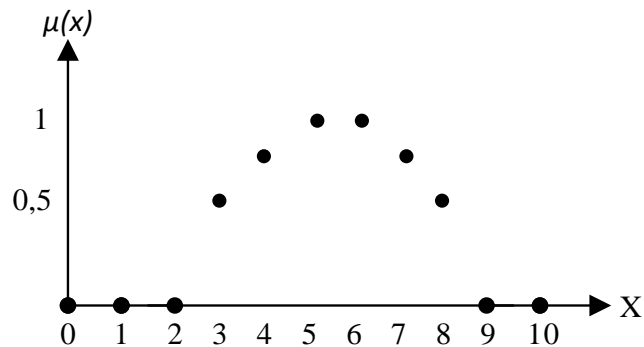
$$L_{\tilde{A}} = \{\beta | \mu_{\tilde{A}}(x) = \beta, \beta \geq 0, x \in X\}$$

j. *Cut- α*

Himpunan *cut- α* dari himpunan fuzzy \tilde{A} yang dilambangkan dengan A_{α} adalah himpunan tegas yang memuat semua elemen dari semesta X dengan derajat keanggotaan dalam \tilde{A} yang lebih dari atau sama dengan α , yaitu $A_{\alpha} = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$.

Contoh 2.4

Misalkan X himpunan bilangan bulat dari 1 sampai dengan 10. Dipunyai himpunan fuzzy $\tilde{A} = \{(3; 0,5), (4; 0,8), (5; 1), (6; 1), (7; 0,8), (8; 0,5)\}$ dan fungsi keanggotaanya disajikan pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4. Fungsi Keanggotaan Himpunan Fuzzy \tilde{A}

Keterangan :

- Pendukung himpunan fuzzy \tilde{A} yaitu $\text{supp}(\tilde{A}) = \{3,4,5,6,7,8\}$.
- Himpunan fuzzy \tilde{A} merupakan himpunan fuzzy singleton karena pendukungnya berupa elemen tunggal.
- Tinggi himpunan fuzzy \tilde{A} yaitu $\text{supp}(\tilde{A}) = \max\{0; 0,5; 0,8; 1\} = 1$.
- Himpunan fuzzy \tilde{A} disebut himpunan fuzzy normal karena tinggi himpunan fuzzy \tilde{A} sama dengan 1.
- Titik silang dari himpunan fuzzy \tilde{A} yaitu 3 dan 8.
- Teras dari himpunan fuzzy \tilde{A} yaitu $\text{teras}(\tilde{A}) = \{5,6\}$.
- Himpunan level dari himpunan fuzzy \tilde{A} yaitu $L_{\tilde{A}} = \{0; 0,5; 0,8; 1\}$.
- Himpunan $\text{Cut-}0,8$ dari himpunan fuzzy \tilde{A} yaitu $A_{0,8} = \{3,8\}$.

2.3.1. Fungsi Keanggotaan

Menurut Susilo (2006), untuk himpunan semesta berupa himpunan diskrit dinyatakan dengan cara mendaftar anggota-anggota himpunan semesta bersama dengan derajat keanggotaannya. Seperti contoh 2.3, himpunan fuzzy \tilde{A} dengan himpunan semestanya berupa himpunan buah-

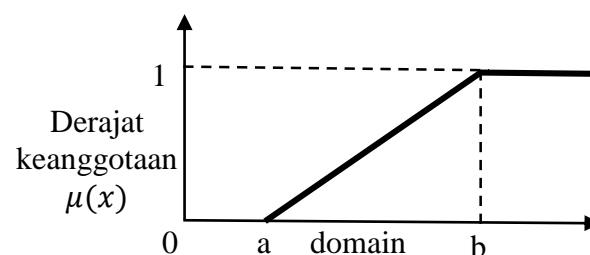
buah. Menurut Susilo (2006), untuk himpunan semesta tak hingga kontinu yaitu cara analitik untuk merepresentasikan fungsi keanggotaan himpunan fuzzy yang bersangkutan dalam bentuk formula matematis dan dapat disajikan dalam bentuk grafik. Fungsi keanggotaan $\mu(x)$ adalah suatu kurva yang menunjukkan pemetaan input data (sumbu x) ke dalam derajat keanggotaan pada interval 0 sampai dengan 1. Nilai x merupakan nilai input tegas yang akan diubah ke dalam bilangan fuzzy.

a. Fungsi keanggotaan linear

Fungsi keanggotaan linear adalah pemetaan input ke derajat keanggotaan yang digambarkan sebagai garis lurus. Terdapat dua jenis fungsi keanggotaan linear yakni fungsi keanggotaan linear naik dan turun. Fungsi keanggotaan untuk linear naik sebagai berikut.

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ \frac{x - a}{b - a} & , a \leq x \leq b \\ 1 & , b \leq x \end{cases}$$

Grafik fungsi keanggotaan linear naik ditunjukkan pada Gambar 2.5.

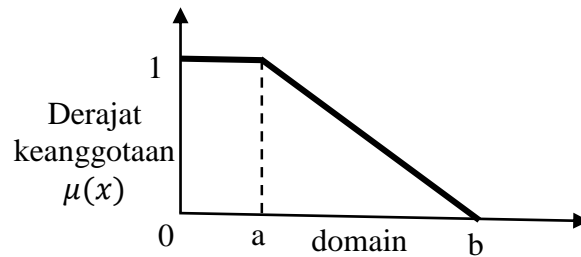


Gambar 2.5 Grafik Fungsi Keanggotaan Linear Naik

Fungsi keanggotaan untuk linear turun sebagai berikut.

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq a \\ \frac{b-x}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 0 & , b \leq x \end{cases}$$

Grafik fungsi keanggotaan linear turun ditunjukkan pada Gambar 2.6.



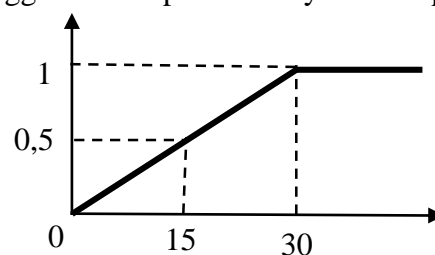
Gambar 2.6 Grafik Fungsi Keanggotaan Linear Turun

Contoh 2.5

Dipunyai himpunan fuzzy MUDA = “umur seseorang mulai 0 sampai dengan 30 tahun” dan dinyatakan dengan fungsi keanggotaan berikut.

$$\mu_{MUDA}(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \frac{x-0}{30-0} & , 0 \leq x \leq 30 \\ 1 & , 30 \leq x \end{cases}$$

Grafik fungsi keanggotaan himpunan fuzzy MUDA pada Gambar 2.7.



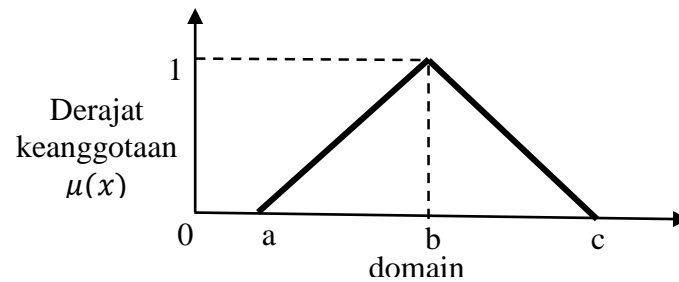
Gambar 2.7 Grafik Himpunan Fuzzy MUDA

b. Fungsi keanggotaan segitiga

Menurut Kusumadewi (2003), fungsi keanggotaan segitiga adalah pemetaan input data ke derajat keanggotaan berupa kurva segitiga atau gabungan 2 garis linear dengan fungsi sebagai berikut.

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & , b \leq x \leq c \\ 0 & , c \leq x \end{cases}$$

Grafik fungsi keanggotaan segitiga ditunjukkan pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Grafik Fungsi Keanggotaan Segitiga

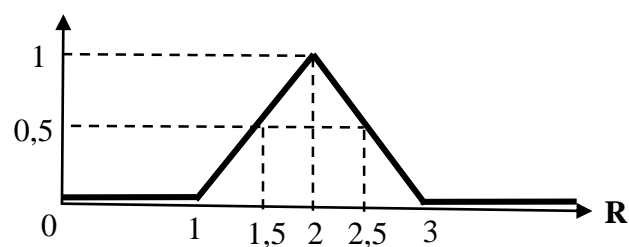
Contoh 2.6

Dipunyai himpunan fuzzy \tilde{A} = "bilangan real yang dekat dengan 2"

dapat dinyatakan dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x-1 & , 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x & , 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & , x \leq 1 \text{ dan } 3 \leq x \end{cases}$$

Grafik fungsi keanggotaan himpunan fuzzy \tilde{A} pada Gambar 2.9.



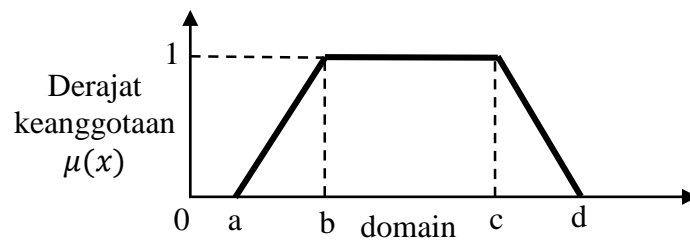
Gambar 2.9 Grafik Fungsi Keanggotaan Himpunan Fuzzy \tilde{A}

c. Fungsi keanggotaan trapesium

Fungsi keanggotaan trapesium merupakan pemetaan input data ke derajat keanggotaan berupa kurva trapesium dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut.

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 1 & , b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & , c \leq x \leq d \\ 0 & , d \leq x \end{cases}$$

Grafik fungsi keanggotaan trapesium ditunjukkan pada Gambar 2.10.



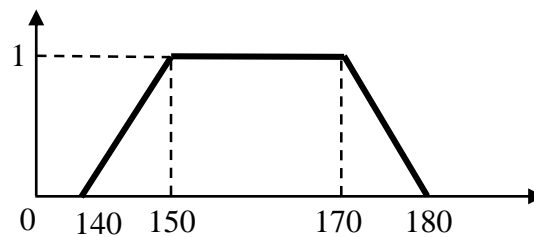
Gambar 2.10 Grafik Fungsi Keanggotaan Trapesium

Contoh 2.7

Dipunyai himpunan fuzzy TINGGI IDEAL = “tinggi badan ideal untuk orang berumur 17 tahun ke atas” dapat dinyatakan sebagai fungsi berikut.

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 140 \\ \frac{x-140}{150-140} & , 140 \leq x \leq 150 \\ 1 & , 150 \leq x \leq 170 \\ \frac{170-x}{180-170} & , 170 \leq x \leq 180 \\ 0 & , 180 \leq x \end{cases}$$

Grafik fungsi keanggotaan himpunan fuzzy TINGGI IDEAL dapat dilihat pada Gambar 2.11.



Gambar 2.11 Grafik Fungsi Keanggotaan TINGGI IDEAL

d. Fungsi keanggotaan singleton

Misalkan \tilde{A} adalah himpunan fuzzy dengan himpunan semesta tak kosong X . Himpunan fuzzy \tilde{A}' dikatakan fuzzy singleton jika,

$$\mu_{\tilde{A}'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x = a \\ 0 & \text{jika } x \neq a \end{cases}$$

dengan a merupakan beberapa bilangan pada X (Wang,1996). Fungsi keanggotaan singleton memetakan beberapa nilai tegas $a \in \mathbb{R}$ ke himpunan fuzzy \tilde{A} (Susilo, 2006).

Contoh 2.8

Perhatikan fungsi keanggotaan himpunan fuzzy \tilde{A} pada Gambar 2.4.

Fungsi tersebut memetakan beberapa bilangan ke himpunan fuzzy \tilde{A} .

Sehingga fungsi tersebut merupakan fungsi keanggotaan singleton.

2.3.2. Relasi Fuzzy

Misalkan \tilde{A} dan \tilde{B} merupakan himpunan fuzzy dari X dan Y dengan fungsi keanggotaannya berupa σ dan μ . Relasi fuzzy ρ dari himpunan fuzzy \tilde{A} ke himpunan fuzzy \tilde{B} adalah himpunan fuzzy pada $X \times Y$ sedemikian hingga $\rho(x, y) \leq \sigma(x) \wedge \mu(y), \forall x \in X$ dan $y \in Y$. Menurut (Mordeson dan Nair, 2000) terdapat tiga kasus spesial pada relasi fuzzy.

a. $X = Y$ dan $\sigma = \mu$. Pada kasus ini, ρ merupakan relasi fuzzy pada \tilde{A} .

Relasi fuzzy ρ dari himpunan fuzzy \tilde{A} merupakan himpunan pada $X \times X$ sedemikian hingga $\rho(x, y) \leq \sigma(x) \wedge \sigma(y), \forall x \in X$.

b. $\sigma(x) = 1$ untuk semua $x \in X$ dan $\mu(y) = 1$ untuk semua $y \in Y$. Pada kasus ini, ρ merupakan relasi fuzzy dari X dan Y .

- c. $X = Y$, $\sigma(x) = 1$ untuk semua $x \in X$ dan $\mu(y) = 1$ untuk semua $y \in Y$. Pada kasus ini, ρ merupakan relasi fuzzy pada X .

2.3.3. Operasi pada Himpunan Fuzzy

Zimmermann (2010) menyebutkan, pada paper pertama milik Zadeh tahun 1965 mendefinisikan bahwa operasi pada himpunan fuzzy merupakan generalisasi dari himpunan tegas. Sehingga pada himpunan fuzzy terdapat 3 operasi dasar yaitu *intersection*, *union*, dan *complement*.

a. *Intersection (AND)*

Operasi *intersection* pada himpunan fuzzy berhubungan dengan *operator AND*, diperoleh dengan mengambil derajat keanggotaan terkecil antar elemen pada himpunan-himpunan yang bersangkutan. Misalkan himpunan \tilde{C} adalah *intersection* dari himpunan fuzzy \tilde{A} dan himpunan fuzzy \tilde{B} yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\tilde{C} = (\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = \min\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)\}, \forall x \in X$$

Berikut derajat keanggotaan *intersection* himpunan fuzzy \tilde{A} dan \tilde{B} .

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \text{ untuk semua } x \in X.$$

b. *Union (OR)*

Operasi *union* pada himpunan fuzzy berhubungan dengan *operator OR*, diperoleh dengan mengambil derajat keanggotaan terbesar antar elemen pada himpunan-himpunan yang bersangkutan. Misalkan himpunan \tilde{C} adalah *union* dari himpunan fuzzy \tilde{A} dan himpunan fuzzy \tilde{B} yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\tilde{C} = (\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = \max\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)\}, \forall x \in X$$

Berikut derajat keanggotaan hasil *union* dari himpunan fuzzy \tilde{A} dan \tilde{B} .

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \text{ untuk semua } x \in X.$$

c. *Complement (NOT)*

Operasi *complement* himpunan fuzzy berhubungan dengan *operator NOT*, diperoleh dengan mengurangkan derajat keanggotaan elemen himpunan yang bersangkutan dari 1. Misalkan himpunan \tilde{C} adalah komplemen himpunan fuzzy \tilde{A} yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\tilde{C} = \tilde{A}' = 1 - \tilde{A}$$

Berikut derajat keanggotaan komplemen dari himpunan fuzzy \tilde{A} .

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}'}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \text{ untuk semua } x \in X.$$

Contoh 2.9

Diberikan himpunan fuzzy jenis buah-buahan yang banyak diminati masyarakat di kota A dan B yaitu $\tilde{A} = \{(\text{apel}; 0,9), (\text{jeruk}; 0,3)\}$ dan $\tilde{B} = \{(\text{apel}; 0,5), (\text{salak}; 0,8)\}$.

a. *Intersection* himpunan fuzzy \tilde{A} dan \tilde{B}

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(\text{apel}) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(\text{apel}), \mu_{\tilde{B}}(\text{apel})\} = \min\{0,9; 0,5\} = 0,5$$

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(\text{jeruk}) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(\text{jeruk}), \mu_{\tilde{B}}(\text{jeruk})\} = \min\{0,3; 0\} = 0$$

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(\text{salak}) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(\text{salak}), \mu_{\tilde{B}}(\text{salak})\} = \min\{0; 0,8\} = 0$$

Diperoleh $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(\text{apel}; 0,5)\}$.

b. *Union* himpunan fuzzy \tilde{A} dan \tilde{B}

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(\text{apel}) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(\text{apel}), \mu_{\tilde{B}}(\text{apel})\} = \max\{0,9; 0,5\} = 0,9$$

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(\text{jeruk}) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(\text{jeruk}), \mu_{\tilde{B}}(\text{jeruk})\} = \max\{0,3; 0\} = 0,3$$

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(\text{salak}) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(\text{salak}), \mu_{\tilde{B}}(\text{salak})\} = \max\{0; 0,8\} = 0,8$$

Diperoleh $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(\text{apel}; 0,9), (\text{jeruk}; 0,3), (\text{salak}; 0,8)\}$.

c. Komplemen himpunan fuzzy \tilde{A}

$$\mu_{\tilde{A}'}(\text{apel}) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(\text{apel}) = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$\mu_{\tilde{A}'}(\text{jeruk}) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(\text{jeruk}) = 1 - 0,3 = 0,7$$

Diperoleh $\tilde{A}' = \{(\text{apel}; 0,1), (\text{jeruk}; 0,7)\}$.

2.4. Graf Fuzzy

Sebuah graf terdiri dari himpunan simpul dan himpunan sisi. Fuzzifikasi dalam graf dapat terjadi pada himpunan simpul, himpunan sisi, himpunan simpul dan sisi atau pada bobot sisinya. Menurut Blue, dkk (2002), serta Eslahchi dan Onagh (2005), graf fuzzy merupakan Graf \tilde{G} yang memenuhi salah satu tipe fuzzifikasi berikut:

- a. $\tilde{G}_1 = \{V, \tilde{E}\}$ dengan himpunan sisinya fuzzy.
- b. $\tilde{G}_2 = \{V, E(\tilde{t}, \tilde{h})\}$ dengan kedua simpul dan sisi merupakan himpunan tegas, tetapi mempunyai keterhubungan sisi fuzzy.
- c. $\tilde{G}_3 = \{\tilde{V}, E\}$ dengan himpunan simpulnya fuzzy.
- d. $\tilde{G}_4 = \{V, E(\tilde{w})\}$ dengan kedua simpul dan sisi merupakan himpunan tegas, tetapi sisinya mempunyai bobot fuzzy.
- e. $\tilde{G}_5 = \tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ dengan himpunan simpul dan sisi keduanya fuzzy.

Pada penelitian ini akan menggunakan graf $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$.

Menurut Rosenfeld (1975) seperti yang dikutip dalam Mordeson dan Nair (2000) mendefinisikan graf fuzzy menggunakan derajat keanggotaan simpul dan sisi. Graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ adalah graf yang terdiri dari himpunan

simpul fuzzy \tilde{V} dengan fungsi keanggotaan $\sigma: V \rightarrow [0,1]$ dan himpunan sisi fuzzy \tilde{E} dengan fungsi keanggotaan $\mu: V \times V \rightarrow [0,1]$ sedemikian hingga:

$$\mu(u, v) \leq \min\{\sigma(u), \sigma(v)\}, \forall u, v \in V.$$

Sebagai catatan bahwa graf fuzzy merupakan generalisasi dari graf tegas yang mana $\sigma(v) = 1$ untuk semua $v \in V$ dan $\sigma(v) = 0$ untuk yang lain, serta $\mu(e) = 1$ jika $e = (u, v) \in E$ dan $\mu(e) = 0$ untuk yang lain. Jadi semua graf tegas merupakan kasus khusus dari graf fuzzy.

Jika pada himpunan fuzzy, himpunan yang memuat derajat keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha$ yang digunakan untuk proses *cut- α* disebut himpunan level, maka pada graf fuzzy terdapat istilah himpunan fundamental. Himpunan fundamental pada graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ didefinisikan sebagai $L = L_{\tilde{V}} \cup L_{\tilde{E}}$ (Kishore dan Sunitha, 2013). Himpunan $L_{\tilde{V}}$ disebut himpunan level pada himpunan fuzzy \tilde{V} yang memuat nilai $\sigma_{\tilde{V}}(v) = \alpha$ pada interval $[0,1]$ dan didefinisikan sebagai berikut.

$$L_{\tilde{V}} = \{\alpha | \sigma_{\tilde{V}}(v) = \alpha, \alpha \geq 0, v \in V\}$$

Himpunan $L_{\tilde{E}}$ disebut himpunan level pada himpunan fuzzy \tilde{E} yang memuat nilai $\mu_{\tilde{E}}(e) = \alpha$ pada interval $[0,1]$ dan didefinisikan sebagai berikut.

$$L_{\tilde{E}} = \{\alpha | \mu_{\tilde{E}}(e) = \alpha, \alpha \geq 0, e \in E\}$$

Contoh 2.10

Diberikan graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ dengan himpunan simpul

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_1, v_4)\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

Derajat keanggotaan dari himpunan simpulnya ialah,

$$\sigma(v_1) = 0,5 \quad \sigma(v_2) = 0,5 \quad \sigma(v_3) = 0,8 \quad \sigma(v_4) = 0,4$$

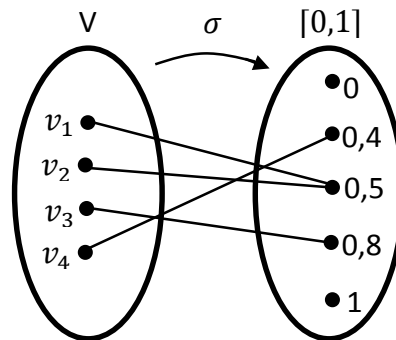
Derajat keanggotaan himpunan sisinya sebagai berikut.

$$\mu(e_1) = 0,3 \quad \mu(e_3) = 0,5 \quad \mu(e_5) = 0,1$$

$$\mu(e_2) = 0,2 \quad \mu(e_4) = 0,2$$

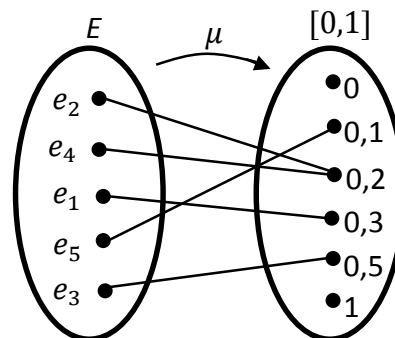
- a. Relasi μ dan σ memenuhi syarat fungsi sebagai berikut.

Relasi $\sigma: V \rightarrow [0,1]$



Relasi σ merupakan fungsi karena mengawankan setiap himpunan simpul secara tunggal dengan himpunan derajat keanggotaan simpul.

Relasi $\mu: E \rightarrow [0,1]$



Relasi μ mengawankan setiap himpunan sisi secara tunggal dengan himpunan derajat keanggotaan sisi maka relasi μ merupakan fungsi.

b. Memenuhi $\mu(u, v) \leq \min\{\sigma(u), \sigma(v)\}, \forall u, v \in V$

$$1. \mu(e_1) \leq \min\{\sigma(v_1), \sigma(v_2)\}$$

$$0,3 \leq \min\{0,5, 0,5\}$$

$$0,3 \leq 0,5$$

$$2. \mu(e_3) \leq \min\{\sigma(v_2), \sigma(v_3)\}$$

$$0,5 \leq 0,5$$

$$3. \mu(e_4) \leq \min\{\sigma(v_4), \sigma(v_3)\}$$

$$0,1 \leq 0,4$$

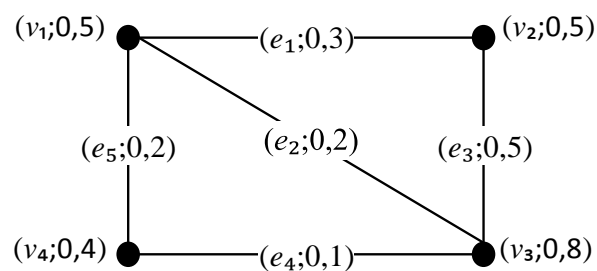
$$4. \mu(e_5) \leq \min\{\sigma(v_1), \sigma(v_4)\}$$

$$0,2 \leq 0,4$$

$$5. \mu(e_2) \leq \min\{\sigma(v_1), \sigma(v_3)\}$$

$$0,2 \leq 0,5$$

Graf fuzzy \tilde{G} tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.12 berikut:



Gambar 2.12 Graf Fuzzy \tilde{G}

Himpunan level pada himpunan fuzzy \tilde{V} yaitu $L_{\tilde{V}} = \{0,4; 0,5; 0,8\}$.

Himpunan level pada himpunan fuzzy \tilde{E} yaitu $L_{\tilde{E}} = \{0,1; 0,2; 0,3; 0,5\}$.

Sehingga himpunan fundamental pada graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ sebagai berikut.

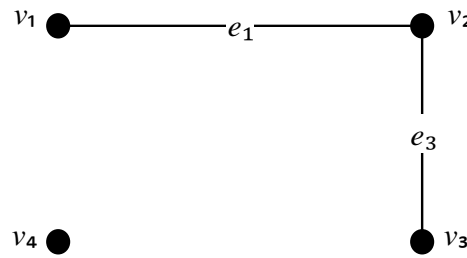
$$L = L_{\tilde{V}} \cup L_{\tilde{E}} = \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,8\}$$

Konsep $cut-\alpha$ pada graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ dikonstruksikan melalui konsep $cut-\alpha$ pada himpunan simpul fuzzy dan himpunan sisi fuzzy. Menurut Dey dan Anita (2012), $Cut-\alpha$ pada graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ didefinisikan sebagai $G_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$ dimana $V_\alpha = \{v \in V | \sigma(v) \geq \alpha\}$ dan $E_\alpha = \{e \in E | \mu(e) \geq \alpha\}$.

Contoh 2.11

$Cut-\alpha$ dari graf fuzzy \tilde{G} pada Gambar 2.12 untuk $\alpha = 0,3$ adalah $G_{0,3} = (V_{0,3}, E_{0,3})$ dimana $V_{0,3} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E_{0,3} = \{e_1, e_3\}$.

Hasil $cut-0,3$ dari graf fuzzy \tilde{G} yaitu $G_{0,3}$ disajikan pada Gambar 2.13.



Gambar 2.13 Graf $G_{0,3}$

2.5 Pewarnaan Simpul Graf Fuzzy Menggunakan $Cut-\alpha$

Dipunyai graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$, bilangan kromatik berupa bilangan fuzzy didefinisikan sebagai $\chi(\tilde{G}) = \{(\chi_\alpha, \alpha)\}$, dimana χ_α merupakan bilangan kromatik pada graf tegas G_α dan nilai α merupakan derajat keanggotaan simpul dan sisi pada graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ (Dey dan Anita, 2012). Dey dan Anita menggunakan nilai α untuk semua derajat keanggotaan simpul dan sisi pada graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ untuk mencari semua graf tegas G_α dan warna minimum untuk mewarnai graf tegas G_α . Tahun 2013, Kishore dan Sunitha mengembangkan bilangan kromatik hasil pewarnaan graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ yang didefinisikan sebagai $\chi(\tilde{G}) = \max\{\chi_\alpha | \alpha \in L\}$ di mana $\chi_\alpha = \chi(G_\alpha)$.

Contoh 2.12

Diberikan graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ dengan himpunan simpul

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

dengan derajat keanggotaan setiap simpulnya sebagai berikut.

$$\sigma(V) = \{0,9; 0,7; 0,8; 0,7; 1\}$$

Dan himpunan sisi

$$\begin{aligned} E &= \{(v_1, v_5), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_1, v_4), \\ &\quad (v_2, v_4), (v_1, v_3), (v_2, v_5), (v_2, v_3), (v_1, v_2)\} \\ &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\} \end{aligned}$$

dengan derajat keanggotaan setiap sisinya sebagai berikut.

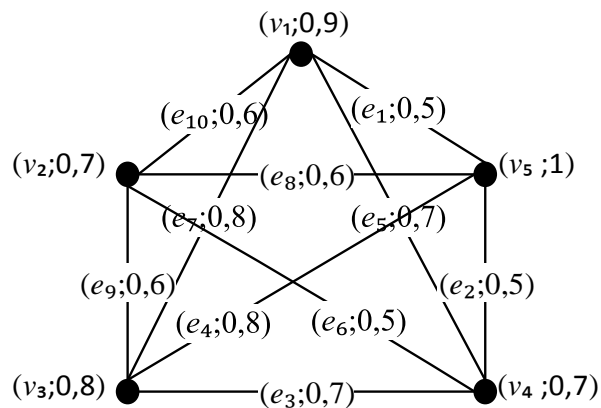
$$\mu(E) = \{0,5; 0,5; 0,7; 0,8; 0,7; 0,5; 0,8; 0,6; 0,6; 0,6\}$$

Sehingga diperoleh himpunan simpul dan sisi fuzzy sebagai berikut.

$$\tilde{V} = \{(v_1, 0,9), (v_2, 0,7), (v_3, 0,8), (v_4, 0,7), (v_5, 1)\}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \{(e_1, 0,5), (e_2, 0,5), (e_3, 0,7), (e_4, 0,8), (e_5, 0,7), \\ &\quad (e_6, 0,5), (e_7, 0,8), (e_8, 0,6), (e_9, 0,6), (e_{10}, 0,6)\} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh graf $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ diperlihatkan pada Gambar 2.14.



Gambar 2.14 $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$

Berdasarkan himpunan level $L_{\tilde{V}} = \{1; 0,9; 0,8; 0,7\}$ dan himpunan level $L_{\tilde{E}} = \{0,8; 0,7; 0,6; 0,5\}$ diperoleh himpunan fundamental graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ yaitu $L = L_{\tilde{V}} \cup L_{\tilde{E}} = \{1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5\}$.

Untuk $\alpha = 1$, pewarnaan graf $G_1(V_1, E_1)$ dapat dilihat pada Gambar 2.15 dengan bilangan $\chi_1 = 1$.



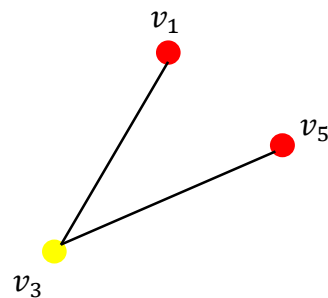
Gambar 2.15 G_1

Untuk $\alpha = 0,9$, pewarnaan graf $G_{0,9}(V_{0,9}, E_{0,9})$ dapat dilihat pada Gambar 2.16 dengan bilangan $\chi_{0,9} = 1$.



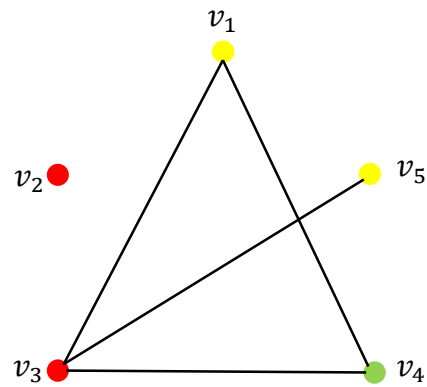
Gambar 2.16 $G_{0,9}$

Untuk $\alpha = 0,8$, pewarnaan graf $G_{0,8}(V_{0,8}, E_{0,8})$ dapat dilihat pada Gambar 2.17 dengan bilangan $\chi_{0,8} = 2$.

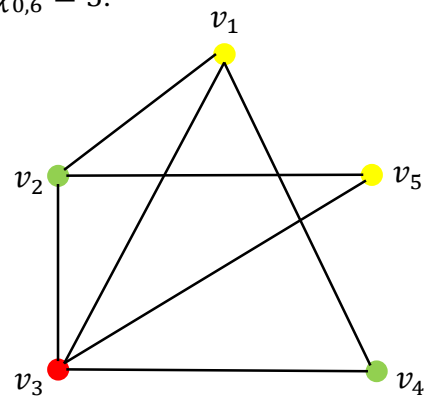


Gambar 2.17 $G_{0,8}$

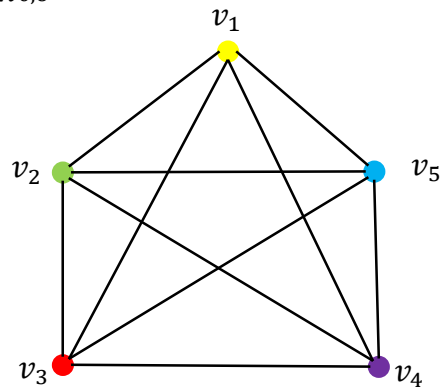
Untuk $\alpha = 0,7$, pewarnaan graf $G_{0,7}(V_{0,7}, E_{0,7})$ dapat dilihat pada Gambar 2.18 dengan bilangan $\chi_{0,7} = 3$.

Gambar 2.18 $G_{0.7}$

Untuk $\alpha = 0.6$, pewarnaan graf $G_{0.6}(V_{0.6}, E_{0.6})$ dapat dilihat pada Gambar 2.19 dengan bilangan $\chi_{0.6} = 3$.

Gambar 2.19 $G_{0.6}$

Untuk $\alpha = 0.5$, pewarnaan graf $G_{0.5}(V_{0.5}, E_{0.5})$ dapat dilihat pada Gambar 2.20 dengan bilangan $\chi_{0.6} = 5$.

Gambar 2.20 $G_{0.5}$

Diperoleh $\chi_{0,5} = 5, \chi_{0,6} = 3, \chi_{0,7} = 3, \chi_{0,8} = 2, \chi_{0,9} = 1, \chi_1 = 1$. Sehingga $\chi(\tilde{G}) = \max\{5,3,3,2,1,1\} = 5$. Jadi bilangan kromatik pada graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ adalah $\chi(\tilde{G}) = 5$.

2.6 Logika Fuzzy

Logika fuzzy merupakan salah satu komponen yang pertama kali diperkenalkan oleh Dr. Lotfi Zadeh pada tahun 1965 dari Universitas California. Secara umum, logika fuzzy adalah sebuah metodologi “berhitung” dengan variabel kata-kata (*linguistic variable*) sebagai pengganti bilangan (Naba, 2009). Kata-kata yang digunakan memang tidak sepresisi bilangan, namun kata-kata jauh lebih dekat dengan pemahaman manusia. Dengan logika fuzzy sistem kepakaran manusia bisa diimplementasikan ke dalam bahasa mesin secara mudah dan efisien seperti ilustrasi berikut.

“Anda mengatakan kepada saya tentang seberapa bagus pelayanan yang diberikan seorang pelayan restoran, maka saya akan memberitahu anda seberapa besar tip yang pantas diberikan kepada pelayan restoran itu (Naba, 2009).”

Dalam ilustrasi tersebut, semua informasi hanya berupa variabel kata-kata. Kemudian berdasarkan pelayanan yang didapatkan, penilai memberikan respon sesuai dengan yang penanya katakan. Dalam hal ini, penilai bertindak sebagai sistem fuzzy karena hanya dengan variabel kata-kata yang tidak presisi bisa merespon dengan variabel jawaban sesuai yang penanya katakan.



Gambar 2.21 Pemetaan Hubungan Input dan Output

Ilustrasi di atas merupakan pemetaan input dan output yang dilakukan oleh system *black box*. Ada banyak alternatif yang dapat dipakai untuk menggantikan system *black box* salah satunya logika fuzzy. Menurut Agus Naba (2009), alasan beberapa orang menggunakan logika fuzzy, antara lain:

- a. Rancangan bangun sistem lebih cepat dan efisien.
- b. Konsep logika fuzzy sangat sederhana sehingga mudah dimengerti.
- c. Kelebihannya dari konsep lain bukan pada kompleksitasnya, tetapi pada *naturalness* pendekatannya dalam memecahkan masalah.
- d. Logika fuzzy adalah fleksibel, dalam arti dapat dibangun dan dikembangkan dengan mudah tanpa harus memulainya dari nol.
- e. Logika Fuzzy memberikan toleransi terhadap ketidakpresisian data.
- f. Pemetaan untuk mencari hubungan data input-output dari sembarang system *black-box* bisa dilakukan dengan memakai sistem fuzzy.
- g. Pengetahuan manusia bisa lebih mudah dilibatkan dalam pemodelan sistem fuzzy.
- h. Logika fuzzy berdasarkan pada bahasa manusia.
- i. Logika fuzzy dapat diterapkan dalam desain sistem kontrol tanpa harus menghilangkan teknik desain sistem control konvensional yang sudah terlebih dahulu ada.

Beberapa hal yang perlu diketahui dalam memahami logika fuzzy yaitu:

- a. Variabel fuzzy

Variabel fuzzy merupakan suatu lambang atau kata yang menunjuk kepada suatu yang tidak tertentu dalam sistem fuzzy.

Contoh: tinggi badan, umur, temperatur, dan sebagainya.

b. Semesta pembicaraan

Keseluruhan nilai yang diperbolehkan untuk dioperasikan dalam suatu variabel fuzzy.

Contoh: Semesta pembicaraan untuk variabel tinggi badan yaitu $X = [0, 200]$.

c. Himpunan fuzzy

Himpunan fuzzy merupakan suatu kumpulan yang mewakili suatu kondisi atau keadaan tertentu dalam suatu variabel fuzzy. Menurut Kusumadewi (2003) himpunan fuzzy memiliki 2 atribut.

1. Linguistik yaitu persamaan suatu grup yang mewakili suatu keadaan atau kondisi tertentu dengan menggunakan bahasa alami.
2. Numeris yaitu suatu nilai (angka) yang menunjukkan suatu ukuran dari suatu variabel.

Contoh 2.13

Diberikan variabel tinggi badan yang terbagi menjadi 3 himpunan fuzzy yaitu himpunan fuzzy PENDEK, SEDANG, dan TINGGI dengan masing-masing domainnya sebagai berikut:

Domain himpunan fuzzy PENDEK = $[0,80]$

Domain himpunan fuzzy SEDANG = $[60,140]$

Domain himpunan fuzzy TINGGI = $[120,200]$

Nilai 0, 60, 80, 120, 140, dan 200 merupakan atribut numeris.

Sedangkan sebutan PENDEK, SEDANG, dan TINGGI merupakan atribut linguistik.

d. Domain himpunan fuzzy

Keseluruhan nilai yang diijinkan dalam semesta pembicaraan dan boleh dioperasikan dalam suatu himpunan fuzzy.

Contoh: Himpunan fuzzy TINGGI mempunyai domain [120-200] artinya seseorang dapat dikatakan TINGGI jika tinggi badannya mulai dari 120 cm sampai dengan 200 cm.

2.61. *Fuzzy Inference System (FIS)*

Salah satu aplikasi logika fuzzy yang telah berkembang adalah *Fuzzy Inference System (FIS)*, yaitu sistem komputasi yang bekerja atas dasar prinsip logika atau penalaran fuzzy, seperti halnya penalaran manusia. Salah satu tipe pada FIS yaitu tipe sugeno. Tipe ini diperkenalkan oleh Takagi-Sugeno Kang pada tahun 1985, sehingga tipe ini sering juga dikenal dengan **Takagi-Sugeno-Kang (TSK)**. Pembahasan model FIS tipe sugeno akan lebih mudah dapat dipahami dengan *rule* ke-*i* sebagai berikut.

$$R_i : IF x_1 is A_{i1} and \dots and x_n is A_{in} THEN$$

$$z_i = a_{i0} + a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$$

Dimana a_{ij} adalah koefisien real untuk $i = 1, 2, \dots, m$ (dengan m adalah banyaknya *rule* dalam sistem) dan $j = 0, 1, \dots, n$ (dengan n adalah banyaknya input) (Susilo, 2006). Nilai A_{ij} adalah predikat-predikat fuzzy yang merupakan nilai linguistik dari masing-masing variabel input dan dikaitkan dengan himpunan fuzzy \tilde{A} . Setiap input $x = (x_1, \dots, x_n)$ akan

menghasilkan output tegas z_i dan predikat fuzzy untuk z_i yaitu w_i untuk *rule* ke- i . Banyaknya *rule* ditentukan oleh banyaknya nilai linguistik untuk masing-masing variabel input (Susilo, 2006).

Pernyataan " x_j is A_{ij} " disebut *antecedent* (premis) dan pernyataan " $z_i = a_{i0} + a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$ " disebut *consequent* (kesimpulan). Jika $a_{ij} = 0, i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$ maka FIS ini dikatakan berorde nol karena outputnya berupa sebuah bilangan konstan, yaitu $z_i = a_{i0}$. Sedangkan FIS tipe sugeno yang outputnya berupa persamaan linear

$$z_i = a_{i0} + a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$$

disebut FIS tipe sugeno orde-satu. FIS tipe sugeno orde-nol dipilih karena sistem ini dapat menekan banyaknya *rule* yang diperlukan untuk mengatur inferensinya (terutama sistem dengan banyak variabel input). Selain itu, outputnya bukan berupa himpunan fuzzy tetapi fuzzy singleton sehingga mempermudah komputasi karena tidak memerlukan fungsi penegasan.

Pada dasarnya FIS terdiri dari empat tahap yaitu fuzzifikasi, implikasi, agregasi, dan defuzzifikasi.

a. Fuzzifikasi

Fuzzifikasi adalah suatu proses perubahan nilai input (tegas) ke dalam input fuzzy menggunakan fungsi keanggotaan (Setiadji, 2009). Fuzzifikasi mengambil nilai input secara real time dan membandingkan dengan informasi fungsi keanggotaan yang tersimpan untuk menghasilkan nilai input fuzzy.

b. Implikasi

Implikasi adalah proses mendapatkan *consequent* sebuah IF-THEN *rule* berdasarkan derajat kebenaran *antecedent* (Naba, 2009). Input dari implikasi adalah predikat fuzzy bagian *antecedent* dan outputnya elemen tunggal pada bagian *consequent*. Umumnya *rule* diberi bobot 1 sehingga tidak mempunyai pengaruh sama sekali pada proses implikasi. Namun sebuah *rule* bisa diboboti dengan bilangan antara 0 dan 1. Pada proses implikasi FIS tipe sugeno orde-nol, operator yang digunakan adalah *AND* menggunakan fungsi *min*.

c. Agregasi

Proses agregasi adalah proses mengkombinasikan output semua IF-THEN *rule* menjadi himpunan fuzzy tunggal. Jika *consequent* lebih dari satu pernyataan maka proses agregasi dilakukan secara terpisah untuk setiap variabel output dari IF-THEN *rule*. Pada dasarnya agregasi adalah operasi logika fuzzy *OR* menggunakan fungsi *max* dengan inputnya adalah semua output dari IF-THEN *rule* yang dikombinasikan dan diagregasikan menjadi himpunan fuzzy tunggal.

d. Defuzzifikasi

Input defuzzifikasi adalah himpunan fuzzy dari hasil agregasi, sedangkan outputnya berupa bilangan tunggal. Pada tipe sugeno orde-nol, proses defuzzifikasi diperoleh dengan menghitung rata-rata terbobot (*weighted average*) menggunakan rumus berikut ini:

$$z = \frac{\sum_{i=1}^m w_i z_i}{\sum_{i=1}^m w_i} = \frac{(w_1 * z_1) + \dots + (w_m * z_m)}{w_1 + \dots + w_m}$$

Menurut Setiadji (2009) yang dikutip dari Li-Xin Wang (1996), pemilihan defuzzifikasi ditentukan oleh beberapa kriteria yaitu masuk akal, perhitungan sederhana, dan kontinuitas. Menurut Susilo (2006) defuzzifikasi menggunakan *weighted average* merupakan fungsi yang banyak dipakai pada proses FIS karena memenuhi ketiga kriteria tadi.

Contoh 2.14 (Meimaharani dan Listyorini, 2014)

Setiap tahun semakin banyak minimarket yang didirikan sehingga harga tanah semakin meningkat. Nilai penjualan harga tanah tergantung pada luas tanah dan jarak dari minimarket lainnya. Oleh karena itu, dibutuhkan analisa untuk menentukan harga terbaik dalam pemilihan tanah. Penentuan harga tanah terbaik menggunakan tipe sugeno order-nol sebagai berikut.

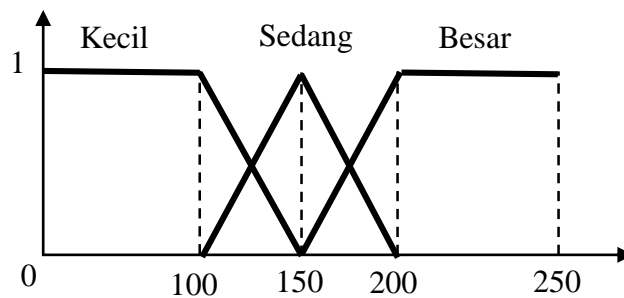
- a. Ada dua variabel input yang terkait yaitu luas dan jarak tanah dengan minimarket lainnya. Sedangkan variabel output berupa harga tanah.
 1. Variabel luas tanah terdiri atas 3 himpunan fuzzy, yaitu KECIL, SEDANG, dan BESAR. Fungsi keanggotaan untuk setiap himpunan fuzzy pada variable luas tanah sebagai berikut.

$$\mu_{KECIL}(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 100 \\ \frac{150 - x}{150 - 100} & , 100 \leq x \leq 150 \\ 0 & , x \geq 150 \end{cases}$$

$$\mu_{SEDANG}(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 100 \\ \frac{x - 100}{150 - 100} & , 100 \leq x \leq 150 \\ \frac{200 - x}{200 - 150} & , 150 \leq x \leq 200 \\ 0 & , x \geq 200 \end{cases}$$

$$\mu_{BESAR}(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 200 \\ \frac{x - 150}{200 - 150} & , 150 \leq x \leq 200 \\ 0 & , x \leq 150 \end{cases}$$

Grafik Fungsi keanggotaan untuk variabel luas tanah diperlihatkan pada Gambar 2.22.



Gambar 2.22 Domain Luas Tanah (m²)

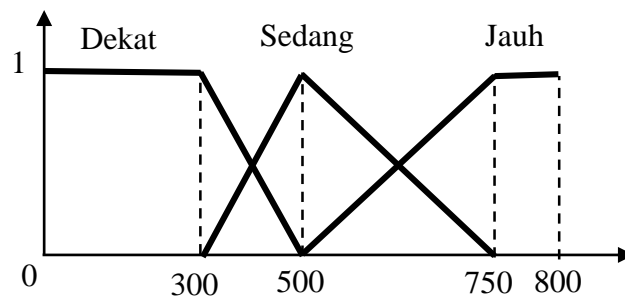
2. Variabel jarak tanah terdiri atas 3 himpunan fuzzy yaitu DEKAT, SEDANG, dan JAUH. Sehingga fungsi keanggotaan setiap himpunan fuzzy pada variabel jarak tanah sebagai berikut.

$$\mu_{DEKAT}(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 300 \\ \frac{500 - x}{500 - 300} & , 300 \leq x \leq 500 \\ 0 & , x \geq 500 \end{cases}$$

$$\mu_{SEDANG}(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 300 \\ \frac{x - 300}{500 - 300} & , 300 \leq x \leq 500 \\ \frac{750 - x}{750 - 500} & , 500 \leq x \leq 750 \\ 0 & , x \geq 750 \end{cases}$$

$$\mu_{JAUH}(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 750 \\ \frac{x - 500}{750 - 500} & , 500 \leq x \leq 750 \\ 0 & , x \leq 500 \end{cases}$$

Grafik Fungsi keanggotaan variabel luas tanah diperlihatkan pada Gambar 2.23.



Gambar 2.23 Domain Jarak Tanah (m)

3. Karena proses penentuan harga tanah menggunakan FIS tipe sugeno orde-nol sehingga outputnya berupa konstanta. Terdapat 7 konstanta yang digunakan yaitu $z_1 = 360.000.000$, $z_2 = 340.000.000$, $z_3 = 270.000.000$, $z_4 = 255.000.000$, $z_5 = 180.000.000$, $z_6 = 170.000.000$, $z_7 = 162.000.000$.

Jika luas dan jarak tanah adalah 180 m^2 dan 700 m maka proses fuzzifikasi untuk menentukan predikat fuzzy sebagai berikut.

1. Predikat fuzzy untuk luas tanah 180 m^2 pada setiap fungsi keanggotaan sebagai berikut.

$$\mu_{KECIL}(180) = 0$$

$$\mu_{SEDANG}(180) = \frac{200 - 180}{200 - 150} = \frac{20}{50} = 0,4$$

$$\mu_{BESAR}(180) = \frac{180 - 150}{200 - 150} = \frac{30}{50} = 0,6$$

2. Jika diketahui jarak tanah yang akan dibangun minimarket dengan minimarket lainnya adalah 700 m , maka predikat fuzzy untuk jarak tanah pada setiap fungsi keanggotaan sebagai berikut.

$$\mu_{DEKAT}(700) = 0$$

$$\mu_{SEDANG}(700) = \frac{750 - 700}{750 - 500} = \frac{50}{250} = 0,2$$

$$\mu_{JAUH}(700) = \frac{700 - 500}{750 - 500} = \frac{200}{250} = 0,8$$

- b. Meimaharani dan Listyorini (2014) membuat kriteria daftar harga tanah berdasarkan luas tanah dan jarak tanah dengan minimarket lainnya yang disajikan pada Tabel 2.3.

Tabel 2.3 Daftar Harga Tanah

No	L Tanah (m ²)	Jarak (m)	Harga Tanah
1	[150,250]	[500,800]	360.000.000
2	[150,250]	[300,750]	340.000.000
3	[100,200]	[500,800]	270.000.000
4	[100,200]	[300,750]	255.000.000
5	[0,150]	[500,800]	180.000.000
6	[0,150]	[300,750]	170.000.000
7	[0,150]	[0,500]	162.000.000

Berdasarkan kriteria tersebut terbentuk 7 *rule* dalam proses implikasi yang disajikan pada Tabel 2.4.

Tabel 2.4. *Rule*

Rule	Luas	Jarak	Harga
1	Besar	Jauh	360.000.000
2	Besar	Sedang	340.000.000
3	Sedang	Jauh	270.000.000
4	Sedang	Sedang	255.000.000
5	Kecil	Jauh	180.000.000
6	Kecil	Sedang	170.000.000
7	Kecil	Dekat	162.000.000

Mencari predikat-predikat z untuk setiap *rule* dari hasil fuzzifikasi.

[R1] IF (Luas is BESAR) and (Jarak is JAUH) then HARGA =
360.000.000

$$w_1 = \min\{\mu_{BESAR}, \mu_{JAUH}\} = \min\{0.6, 0.8\} = 0.6$$

$$z_1 = 360.000.000$$

[R2] IF (Luas is BESAR) and (Jarak is SEDANG) then HARGA
= 340.000.000

$$w_2 = \min\{\mu_{BESAR}, \mu_{SEDANG}\} = \min\{0.6, 0.2\} = 0.2$$

$$z_2 = 340.000.000$$

[R3] IF (Luas is SEDANG) and (Jarak is JAUH) then HARGA =
270.000.000

$$w_3 = \min\{\mu_{SEDANG}, \mu_{JAUH}\} = \min\{0.4, 0.8\} = 0.4$$

$$z_3 = 270.000.000$$

[R4] IF (Luas is SEDANG) and (Jarak is SEDANG) then
HARGA = 255.000.000

$$w_4 = \min\{\mu_{SEDANG}, \mu_{SEDANG}\} = \min\{0.4, 0.2\} = 0.2$$

$$z_4 = 255.000.000$$

[R5] IF (Luas is KECIL) and (Jarak is JAUH) then HARGA =
180.000.000

$$w_5 = \min\{\mu_{KECIL}, \mu_{JAUH}\} = \min\{0, 0.8\} = 0$$

$$z_5 = 180.000.000$$

[R6] IF (Luas is KECIL) and (Jarak is SEDANG) then HARGA
= 170.000.000

$$w_6 = \min\{\mu_{KECIL}, \mu_{SEDANG}\} = \min\{0, 0.2\} = 0$$

$$z_6 = 170.000.000$$

[R7] IF (Luas is KECIL) and (Jarak is DEKAT) then HARGA = 162.000.000

$$w_7 = \min\{\mu_{KECIL}, \mu_{DEKAT}\} = \min\{0,0\} = 0$$

$$z_7 = 162.000.000$$

- c. Karena d\ketujuh *rule* tersebut tidak terdapat *consequent* yang sama, sehingga proses agregasi tidak perlu dilakukan. Hal ini dikarenakan, hanya terdapat satu predikat fuzzy untuk setiap fungsi.
- d. Proses defuzzifikasi untuk memperoleh kesimpulan menggunakan metode *weighted average* sebagai berikut.

$$z = \frac{\sum_{i=1}^7 w_i z_i}{\sum_{i=1}^7 w_i} = \frac{2.387.000.000}{1,4} = 316.428.571$$

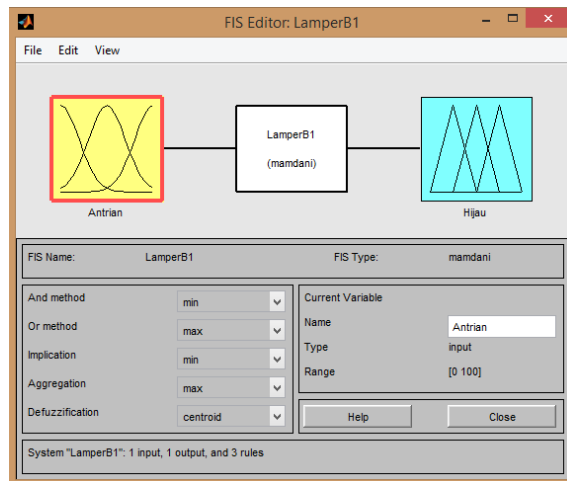
Jadi, jika luas tanah 180 m² dan jarak tanah 700 m maka harga tanah terbaik untuk pembangunan minimarket adalah Rp316.428.571.

2.62. Fuzzy Logic Toolbox MATLAB R2014a

Fuzzy Logic Toolbox adalah sekumpulan *tool* yang membantu merancang sistem fuzzy dan terbagi menjadi tiga kategori, yakni *command lines*, *graphical user infarce* (GUI), *simulink block*. *Fuzzy logic toolbox* lebih banyak mengandalkan GUI untuk penyelesaian kerja dalam rancang bangun FIS (Naba, 2009). *Fuzzy logic toolbox* menyediakan 5 jenis GUI untuk keperluan rancang bangun FIS yakni, *FIS editor*, *membership function editor*, *rule editor*, *rule viewer*, dan *surface viewer*.

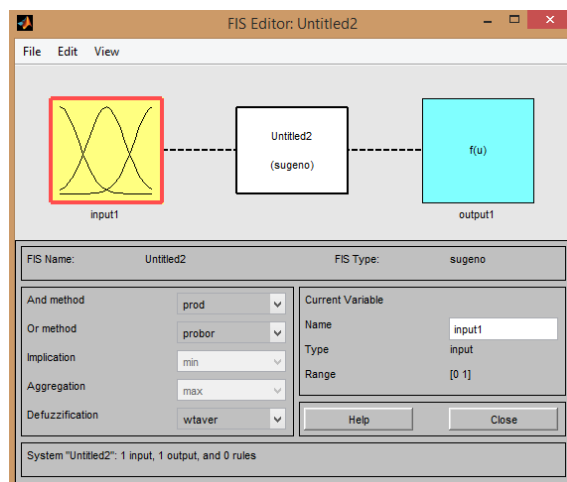
a. *Fuzzy inference system editor*

Pada halaman perintah MATLAB, ketik fuzzy muncul FIS editor seperti pada Gambar 2.24 berupa satu variabel input dengan label **input1** dan sebuah output dengan label **output1**.



Gambar 2.24 FIS Editor

Untuk mengubah FIS menjadi tipe sugeno klik *file* → *add FIS editor* → *sugeno type* sehingga muncul *FIS editor* seperti pada Gambar 2.25.

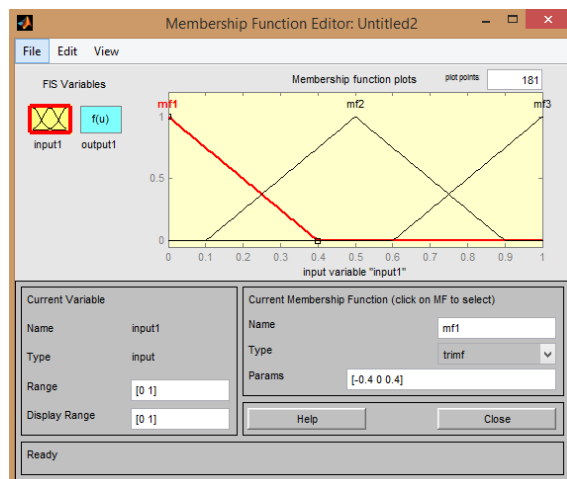


Gambar 2.25 FIS Editor Tipe Sugeno

Langkah membangun FIS pada FIS editor sebagai berikut.

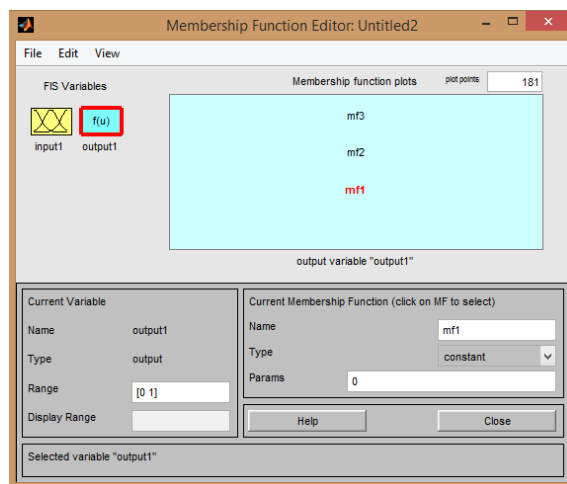
1. Pilih menu *edit* → *add variable* → *add input*, muncul kotak kuning berlabel **Input2** yang akan menjadi input kedua dari FIS.
 2. Ubah label **Input1** dengan mengklik kotak berwarna kuning berlabel **Input1**, lalu pada *current variable* di sebelah kanan bawah pada kolom nama, ganti label variabel **Input1**.
 3. Ubah label **Output1** dengan mengklik kotak berwarna biru berlabel **Output1**, lalu pada *current variable* di sebelah kanan bawah pada kolom nama, ganti label variabel.
 4. Pilih *file* → *export* → *workspace*, ketik nama *workspace* klik OK.
 5. Pilih *file* → *export* → *to disk*, masukkan nama file untuk FIS sehingga file akan tersimpan secara langsung di harddisk.
- b. *Membership function editor*

Fungsi keanggotaan variabel input dan output didefinisikan melalui *membership function editor* seperti Gambar 2.26.



Gambar 2.26 *Membership Function Editor* Variabel Input

Membuka *membership function editor* bisa dari *FIS editor*, *edit* → *membership function* atau dengan klik ganda ikon variabel input atau output. *Membership function editor* untuk variabel input dapat dilihat pada Gambar 2.26 dan variabel output dapat dilihat pada Gambar 2.27.



Gambar 2.27 *Membership Function Editor* Variabel Output

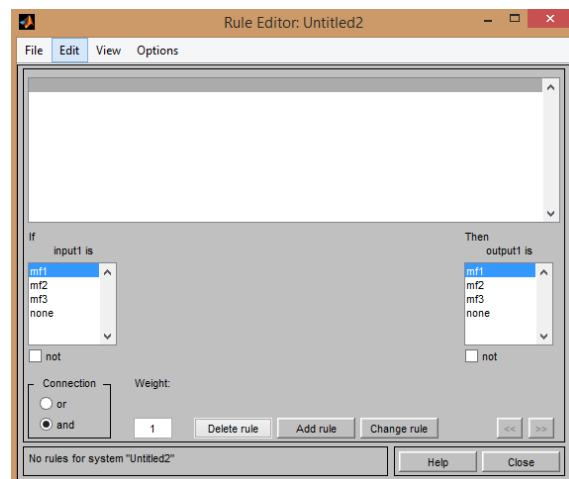
Membership function editor dapat menampilkan dan mengedit semua fungsi keanggotaan dari variabel FIS input dan output dengan mengklik salah satu ikon variabel sehingga kurva-kurva fungsi keanggotaan akan tampil di sebelah kanan.

Langkah-langkah mendefinisikan harga-harga linguistik untuk variabel FIS sebagai berikut.

1. Klik Ikon variabel FIS.
2. Pada *field range* bagian kiri bawah, ubah *range* sesuai dengan himpunan semesta variabel FIS.
3. Klik kurva yang berlabel **mf1**.

4. Pada bagian kanan bawah, ubah nama **mf1** dan tipe kurva pada *field type* sesuai dengan yang dibutuhkan.
 5. Ubah parameter setiap fungsi pada *field params*.
 6. Lakukan tiga langkah terakhir di atas pada kurva yang lain.
- c. *Rule editor*

Dengan GUI *rule editor* dapat mudah mendefinisikan IF-THEN *rule*. Gambar 2.28 merupakan *rule editor window* ketika belum ada IF-THEN yang didefinisikan.



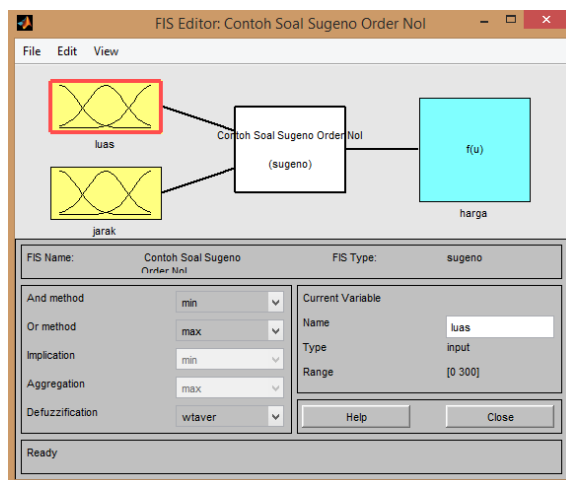
Gambar 2.28 *Rule Editor Window*

Memasukkan *rule* secara otomatis yakni klik **Input1** untuk *IF* dan **Ouput1** untuk *THEN* kemudian klik *add rule*. Selanjutnya dilakukan evaluasi apakah FIS akan bekerja sesuai yang diinginkan.

- d. *Rule viewer*

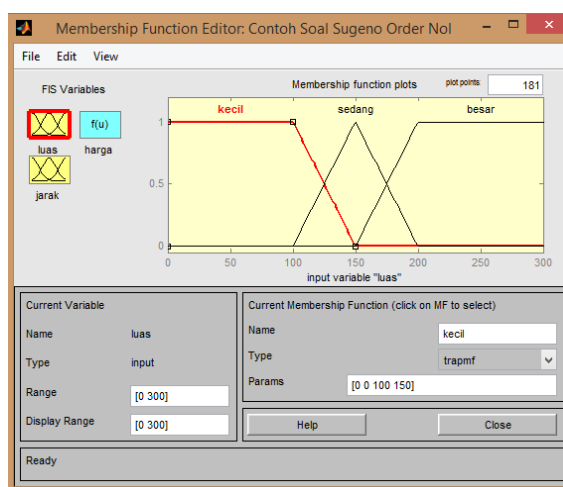
Rule viewer menampilkan proses keseluruhan yang terjadi pada FIS dengan klik *view* → *rule*. Harga input dapat diubah dengan mengetik langsung pada *field input* di blok pojok kiri bawah.

Penentuan harga tanah pada Contoh 2.14 dapat diselesaikan menggunakan MATLAB R2014a dengan bantuan GUI *fuzzy logic toolbox*. Berdasarkan Contoh 2.14 dibangun FIS dengan dua input yaitu luas dan jarak tanah serta sebuah output berupa harga tanah seperti Gambar 2.29.



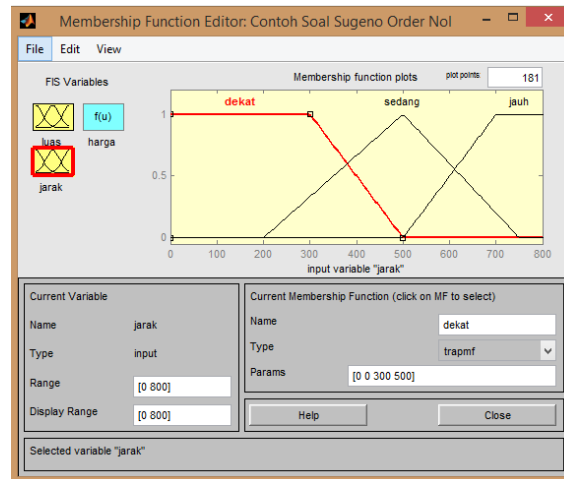
Gambar 2.29 *FIS Editor* “Contoh Soal Sugeno Orde-Nol”

Variabel input luas terdiri dari dua fungsi yaitu fungsi trapesium untuk menyatakan himpunan fuzzy KECIL dan BESAR serta fungsi segitiga menyatakan himpunan fuzzy SEDANG seperti pada Gambar 2.30.



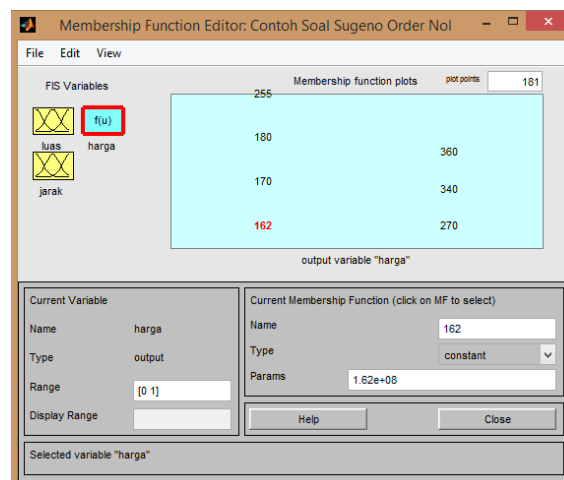
Gambar 2.30 *Membership Function Editor* Input Variabel Luas

Seperti halnya variabel input luas, variabel input jarak terdiri dari dua fungsi yaitu fungsi trapesium untuk menyatakan himpunan fuzzy DEKAT dan himpunan fuzzy JAUH serta fungsi segitiga menyatakan himpunan fuzzy SEDANG seperti pada Gambar 2.31.



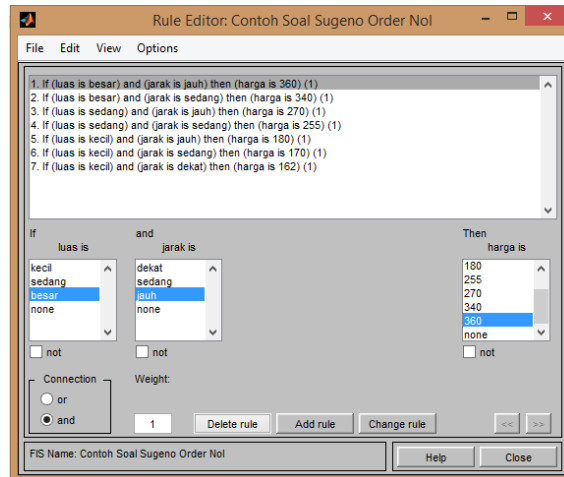
Gambar 2.31 *Membership Function Editor* Input Variabel Jarak

Karena proses FIS menggunakan tipe Sugeno Orde-Nol maka variabel output bukan berupa himpunan fuzzy melainkan berupa konstanta atau persamaan linear $Z = k$ seperti pada Gambar 2.32.



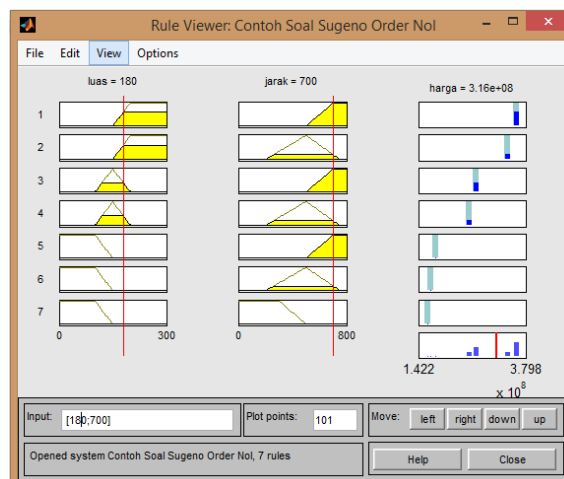
Gambar 2.32 *Membership Function Editor* Output Variabel Harga

Rule yang sudah terbentuk seperti pada Contoh 2.14 menggunakan program MATLAB R2014a dapat dilihat pada Gambar 2.33.



Gambar 2.33 Rule Editor “Sugeno Orde-Nol”

Hasil *fuzzy inference system* harga tanah yang terbaik untuk pembangunan minimarket yaitu Rp316.000.000 jika diketahui luas tanah 180 m² dan jarak tanah minimarket dengan minimarket lainnya 700 m seperti yang diperlihatkan pada Gambar 2.34.



Gambar 2.34 Rule Viewer “Sugeno Orde-Nol”

2.7 Pengaturan Lampu Lalu Lintas

Persimpangan menurut MKJI (1997) adalah dua buah ruas jalan atau lebih yang saling bertemu, saling berpotongan, atau saling bersilangan. Terdapat dua macam persimpangan yaitu simpang bersinyal dan simpang tak bersinyal. Persimpangan yang arus lalu lintasnya diatur menggunakan lampu lalu lintas dinamakan simpang bersinyal. Sedangkan persimpangan yang arus lalu lintasnya tidak diatur menggunakan lampu lalu lintas dinamakan simpang tak bersinyal.

Masalah yang ada di persimpangan seperti terjadinya kemacetan dapat diatasi dengan meningkatkan kapasitas persimpangan, mengurangi volume arus lalu lintas atau mengatur arus lalu lintas yang ada. Cara yang lebih mudah dan lebih ekonomis adalah mengatur arus lalu lintas menggunakan lampu lalu lintas. Lampu lalu lintas ialah peralatan yang dioperasikan secara mekanis atau elektrik yang berfungsi mengatur kendaraan-kendaraan agar berhenti atau berjalan. Menurut MKJI (1997), karakteristik dan parameter yang digunakan dalam pengaturan lampu lalu lintas sebagai berikut.

a. Arus lalu lintas

Jumlah arus lalu lintas yang melalui titik tak terganggu di hulu dengan satuan kendaraan/jam dan dikonversi menjadi satuan mobil penumpang per-jam (smp/jam) dengan rumus berikut. (MKJI,1997).

$$Q = Q_{LV} + Q_{HV} \times emp_{HV} + Q_{MC} \times emp_{MC}$$

Keterangan :

Q : arus lalu lintas

Q_{LV} : arus lalu lintas kendaraan ringan

Q_{HV} : arus lalu lintas kendaraan berat

Q_{MC} : arus lalu lintas sepeda motor

emp_{HV} : ekuivalensi mobil penumpang untuk kendaraan berat

emp_{MC} : ekuivalensi mobil penumpang untuk sepeda motor

b. Ekuivalensi mobil penumpang

Faktor dari berbagai tipe kendaraan sehubungan dengan keperluan waktu hijau untuk keluar dari antrian apabila dibandingkan dengan sebuah kendaraan ringan. Ekuivalensi mobil penumpang untuk pendekat terlindung diperlihatkan pada Tabel 2.5.

Tabel 2.5 Ekuivalensi Mobil Penumpang untuk Pendekat Terlindung

Klasifikasi ^{Emp}	Jenis kendaraan	Emp
Kendaraan ringan (LV)	Mobil, pick up, mobil box,	1,0
	truk, truk tangki, truk box, mini bus, bis kecil	
Kendaraan Berat (HV)	Bus besar, truk lebih dari 2 as	1,3
Sepeda Motor (MC)	Sepeda motor roda 2 dan 3	0,2

c. Fase

Satu tahapan sinyal lalu lintas dengan satu atau lebih pergerakan lalu lintas mendapat kesempatan bergerak.

d. Siklus

Waktu diantara lampu hijau mulai menyala sampai waktu hijau kembali menyala di dalam simpang yang sama. Waktu siklus yang layak menurut MKJI (1997) disajikan pada Tabel 2.6.

Tabel 2.6 Waktu Siklus yang Layak

Tipe Pengaturan	Waktu siklus yang layak (detik)
Pengaturan dua-fase	40 - 80
Pengaturan tiga-fase	50 - 100
Pengaturan empat-fase	80 - 130

Nilai-nilai yang lebih rendah dipakai untuk simpang dengan lebar < 10 m, nilai yang lebih tinggi untuk jalan yang lebih lebar. Waktu siklus yang melebihi 130 detik harus dihindari kecuali pada kasus yang sangat khusus (simpang sangat besar).

e. Waktu antar Hijau

Waktu antar hijau adalah periode waktu lampu menyala merah semua antara dua fase yang berurutan. Hal ini dimaksudkan supaya akhir rombongan kendaraan pada fase sebelumnya tidak berbenturan dengan awal rombongan kendaraan pada fase berikutnya. Nilai normal waktu antar hijau yang layak disajikan pada Tabel 2.7.

Tabel 2.7 Nilai Normal Waktu Antar Hijau

Ukuran Simpang	Lebar jalan rata-rata	Nilai normal waktu antar hijau
Kecil	6 - 9 m	4 detik per fase
Sedang	10 - 14 m	5 detik per fase
Besar	≥ 15 m	≥ 6 detik per fase

BAB V

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Simpang Lamper Gajah direpresentasikan ke dalam graf fuzzy dengan menyatakan arus sebagai simpul dan arus lalu lintas sebagai derajat keanggotaan simpul. Sedangkan, arus yang bersilangan atau menyatu sebagai sisi dan tingkat konflik dari kedua arus sebagai derajat keanggotaan sisi. Derajat keanggotaan simpul dan sisi dapat dicari menggunakan fungsi keanggotaan simpul dan sisi menggunakan metode *trial and error* dengan memilih nilai 2884 yaitu arus lalu lintas terbesar dan memilih nilai $1891 < 2884$ karena derajat keanggotaan sisinya memenuhi definisi graf fuzzy.

- a. Pengaturan lampu lalu lintas di simpang Lamper Gajah saat kondisi sibuk pagi terdiri dari 8 arus dan 21 pasang arus yang dimungkinkan menimbulkan konflik, artinya terdapat 8 simpul dan 21 sisi seperti Tabel 4.1 dan 4.3. Sedangkan derajat keanggotaan simpul dan sisi disajikan pada Tabel 4.10 dan Tabel 4.11. Dengan demikian diperoleh graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ pada Gambar 4.14 yang merupakan konstruksi simpang Lamper Gajah saat kondisi sibuk pagi.
- b. Pengaturan lampu lalu lintas di simpang Lamper Gajah saat kondisi sibuk sore terdiri dari 8 arus dan 20 pasang arus yang dimungkinkan menimbulkan konflik, artinya terdapat 8 simpul dan 20 sisi seperti Tabel 4.1 dan 4.2. Sedangkan derajat keanggotaan simpul dan sisi disajikan pada Tabel 4.17 dan Tabel 4.18. Dengan demikian diperoleh

graf fuzzy $\tilde{H}(\tilde{V}, \tilde{E})$ pada Gambar 4.34 yang merupakan konstruksi simpang Lamper Gajah saat kondisi sibuk sore.

Hasil pewarnaan graf fuzzy menggunakan $cut-\alpha$ berupa bilangan kromatik yang merupakan fase lampu lalu lintas hasil penelitian.

- a. Hasil pewarnaan graf fuzzy $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ berupa bilangan kromatik $\chi(\tilde{G}) = 4$ yang menyatakan fase lampu lalu lintas hasil penelitian di simpang Lamper Gajah saat kondisi sibuk pagi sebagai berikut.
 1. Fase 1 yaitu arus dari Jl. Brigjen Sudharto (barat) menuju selatan dan arus dari Jl. Brigjen Sudharto (timur) menuju utara.
 2. Fase 2 yaitu arus dari Jl. Brigjen Sudharto (barat) menuju timur dan arus dari Jl. Brigjen Sudharto (timur) menuju barat.
 3. Fase 3 yaitu arus dari Jl. Lamper menuju timur dan arus dari Jl. Gajah menuju barat.
 4. Fase 4 yaitu arus dari Jl. Lamper menuju utara dan arus dari Jl. Gajah menuju selatan.
- b. Hasil pewarnaan graf fuzzy $\tilde{H}(\tilde{V}, \tilde{E})$ berupa bilangan kromatik $\chi(\tilde{H}) = 4$ yang menyatakan fase lampu lalu lintas hasil penelitian di simpang Lamper Gajah saat kondisi sibuk sore sebagai berikut.
 1. Fase 1 yaitu arus dari Jl. Brigjen Sudharto (barat) menuju selatan dan Jl. Brigjen Sudharto (timur) menuju utara.
 2. Fase 2 yaitu arus dari Jl. Brigjen Sudharto (barat) menuju timur dan arus dari Jl. Brigjen Sudharto (timur) menuju barat.
 3. Fase 3 yaitu arus dari Jl. Lamper menuju timur dan utara.

4. Fase 4 yaitu arus dari Gajah menuju barat dan utara.

Durasi lampu hijau untuk setiap fase diperoleh menggunakan FIS tipe sugeno orde-nol dengan bantuan Matlab R2014a. Panjang antrian untuk setiap fase dijadikan dasar dalam membangun fungsi keanggotaan input yang diklasifikasikan ke dalam lima himpunan fuzzy yaitu *Null*, *Low*, *Medium*, *High*, dan *Total*. Dengan demikian, banyaknya *rule* yang digunakan pada FIS tipe sugeno orde-nol berbantu Matlab R2014a yaitu $5^4 = 625$ *rule*. Sedangkan fungsi keanggotaan output berupa durasi lampu hijau.

- a. Durasi lampu hijau hasil penelitian di simpang Lamper Gajah Kota Semarang saat kondisi sibuk pagi.
 1. Fase 1 sebesar 12 detik.
 2. Fase 2 sebesar 56 detik.
 3. Fase 3 sebesar 25 detik.
 4. Fase 4 sebesar 25 detik.
- b. Durasi lampu hijau hasil penelitian di simpang Lamper Gajah Kota Semarang saat kondisi sibuk sore.
 1. Fase 1 sebesar 19 detik.
 2. Fase 2 sebesar 70 detik.
 3. Fase 3 sebesar 22 detik.
 4. Fase 4 sebesar 17 detik.

Waktu siklus yang layak dengan pengaturan empat fase sebesar 80-130 detik. Hasil penelitian menunjukkan, pengaturan lampu lalu lintas di simpang Lamper Gajah saat kondisi sibuk pagi lebih mendekati optimal karena

siklusnya mendekati layak sebesar 138 detik. Begitupun pengaturan lampu lalu lintas hasil penelitian di simpang Lamper Gajah saat kondisi sibuk sore lebih mendekati optimal karena siklusnya mendekati layak sebesar 148 detik.

5.2. Saran

Penentuan arus lalu lintas dan panjang antrian pada penelitian ini masih menggunakan perhitungan manual sehingga untuk penelitian selanjutnya dapat dibuat aplikasi yang dapat menghitung arus lalu lintas dan panjang antrian secara otomatis. Dengan demikian, fase dan durasi lampu lalu lintas secara otomatis dapat berubah sesuai dengan arus lalu lintas dan panjang antrian di persimpangan. Belum ada cara pasti membangun fungsi keanggotaan simpul dan sisi sehingga peneliti menggunakan metode *trial and error* untuk membangun fungsi keanggotaan simpul dan sisi. selain itu, ditemukan kasus pengklasifikasian derajat keanggotaan sisi linguistik yang tidak sesuai dengan definisi graf fuzzy. Akan tetapi pengklasifikasian tersebut dapat digunakan untuk menyelesaikan kasus pengklasifikasian derajat keanggotaan sisi yang menyatakan tingkat konflik dari dua arus di simpang Lamper Gajah Kota Semarang. Dengan demikian untuk peneliti selanjutnya dapat mencari cara membangun fungsi keanggotaan simpul dan sisi yang dapat digunakan untuk semua kasus serta dapat mengupas pengklasifikasian derajat keanggotaan sisi linguistik yang sesuai dengan definisi graf fuzzy.

DAFTAR PUSTAKA

- Bershtein, L.S. dan Bozhenuk, A. V. 2001. Maghout Method for Determination of Fuzzy Independent, Dominating Vertex Set and Fuzzy Graph Kernels. *International Journal of General Systems*. Vol 1, Issue 30.
- Blej, M. dan Azizi, M. 2016. Comparison of Mamdani-Type and Sugeno-Type Fuzzy inference System for Fuzzy Real Time Secheduling. *International Journal of Applied Engineering Research*. ISSN 0973-4562 Volume 11, Nomer 22.
- Blue, M. B. Bush dan J. Puckett. 2002. Unified Approach to Fuzzy Graph Problems. *Journal of Fuzzy Sets and Systems* 125:355-368.
- Budayasa, I. K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa Universitas Press.
- Chartrand, G. dan P. Zhang. 2005. *Introduction to Graph Theory*. Mc Graw Hill International edition.
- Cioban, V. 2007. On Independent Set of Vertices of Graph. *Studia Univ Babes-Bolyai Informatica LII 1*.
- Dey, A. dan P. Anita. 2012. Vertex Coloring of Fuzzy Graph Using Alpa Cut. *International Journal of Management, IT and Enggineering*. Volume 2, Issue 8, ISSN 2249-0558.
- Dey, A. dan P. Anita. 2013. An Application of Fuzzy Graph in Traffict Light Control. *Mathematic Science Internatioanl Research Journal*, Volume 2, Issue 2, ISSN 2278-8697.
- Direktorat Jenderal Bina Marga. 1997. *Manual Kapasitas Jalan Indonesia (MKJI)*. Jakarta: PT. Bina Karya (Persero).
- Eslahchi, C. dan B. N. Onagh. 2005. Vertex Strength of Fuzzy Gaphs. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 436:1-9.

- Fadhillah, M. R. 2016. Simulasi Pengaturan Lampu Lalu Lintas Menggunakan Fuzzy Inference System Metode Mamdani pada MATLAB. *Prosiding Matematika*, ISSN 2460-6464. Universitas Islam Bandung.
- Firouzian, S. dan M. N. Jouybari. 2011. Coloring Fuzzy Graph and Traffic Light Problem. *The Journal of Mathematics and Computer Science*. Volume 3, No 2.
- Kishore, A. dan M. S. Sunitha. 2013. Chromatic Number of Fuzzy Graph. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*. ISSN 2093-9310.
- Kurniawan, A. P. 2017. Aplikasi Graf Fuzzy dan Aljabar Max-Plus untuk Pengaturan Lampu Lalu Lintas di Simpang Empat Beran. *Jurnal Matematika*. Volume 6, No 2.
- Kusumadewi, S. 2003. *Artificial Intelligence (Teknik dan Aplikasinya)*. Yogyakarta : Graha Ilmu.
- Lee K. H. 2005. *First Course on Fuzzy Theory and Application*. NewYork: Springerling Berlin Heidelberg New York.
- Meilani, S. Yurika Permanasari dan Ichi Sukarsih. 2016. Pewarnaan Titik Pada Graf Menggunakan Algoritma Baris dan Implementasinya dalam Matlab. *Prosiding Matematika*. Vol. 2, No. 10.
- Meimaharani, R dan T. Listyorini. 2014. Analisis Sistem Inference Fuzzy Sugeno dalam Menentukan Harga Penjualan Tanah untuk Pembangunan Minimarket. *Jurnal Simetris*. Vol 5 No. 1.
- Mordeson, dan Nair. 2000. *Fuzzy Graph and Fuzzy Hypergraphs*. New York: Physica-Verlag Heidelberg, ISSN 1434-9922.
- Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.
- Munoz, S. M. Teresa Ortuna, Javier Ramirez, dan Javier yanez. 2005. Coloring Fuzzy Graph. *Omega: The International Journal of Management Science* 33: 211-221.

- Myna, R. 2015. Application of Fuzzy Graph in Traffic. *International Journal of Scientific & Engineering Research*. Volume 6, Issue 2.
- Naba, A. 2009. *Belajar Cepat Fuzzy Logic Menggunakan MATLAB*. Yogyakarta : Andi Offset.
- Prasetyo, E. E. Oyas Wahyunggoro, dan Selo Sulisty. 2015. Design and Simulation of Adaptive Traffic Light Controller Using Fuzzy Logic Control Sugeno Method. *International Journal of Scientific and Research Publication*. Volume 5, Issue 4.
- Prasetyo, E.E. 2016. Perbandingan Kinerja Lampu Lalu lintas Metode Fuzzy Tipe Sugeno dengan Metode Waktu Tetap. *Seminar Nasional Teknologi Informasi dan Multimedia*. ISSN 2302-2803.
- Rosenfeld, A. 1975. Fuzzy Graphs, In Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes. New York : Academic Press.
- Rosyida, dkk. 2015. A New Approach for Determining Fuzzy Chromatic Number of Fuzzy graph. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* 28.
- Rosyida, I. 2016. Pengembangan Metode Pewarnaan Titik dan Bilangan Kromatik pada Graf Tak Deterministik. Universitas Gajah Mada.
- Setiadji. 2009. *Himpunan & Logika Samar serta Aplikasinya*. Graha Ilmu: Yogyakarta.
- Sulastri, Darmaji, dan Mohammad Isa Irawan. 2014. Aplikasi Pewarnaan Graf Fuzzy untuk mengklasifikasikan Jalur Lalu Lintas di Persimpangan Jalan Insinyur Soekarno Surabaya. *Jurnal Sains dan Seni pomits*, Volume 3, No 2.
- Susilo, Franc. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur Serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha ilmu.
- Wang, L.X. 1996. *A Course In Fuzzy Systems and Control*. Prentice Hall, Paperback.
- Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy Sets, Inform and Control. Vol. 8.
- Zimmermann. 2010. *Fuzzy Set theory*. Volume 2.