



**NILAI KETAKTERATURAN SISI TOTAL PADA
GRAF HASIL KALI COMB P_m DAN C_5 , SERTA
SUBDIVISI PADA HASIL KALI COMB P_m DAN C_7**

Skripsi

**Disusun sebagai salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika**

**Oleh
Kholifa Septia Ulfa
4111414023**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
2019**

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi yang berjudul “Nilai Ketakteraturan Sisi Total pada Graf Hasil Kali Comb P_m dan C_5 , serta Subdivisi pada Hasil Kali Comb P_m dan C_7 ” bebas plagiat dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan yang berlaku.

Semarang, Juli 2019



Kholifa Septia Ulfa

NIM 4111414023

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Nilai Ketakteraturan Sisi Total pada Graf Hasil Kali Comb P_m dan C_5 , serta Subdivisi pada Hasil Kali Comb P_m dan C_7

Disusun oleh

Kholifa Septia Ulfa

4111414023

Telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES pada tanggal 17 Juli 2019.

Panitia,



Dr. Mulyono, M.Si.

NIP 197009021997021001

Sekretaris

Dr. Arief Agoestanto, M.Si.

NIP 196807221993031005

Ketua Penguji

Dr. Mulyono, M.Si.

NIP 197009021997021001

Anggota Penguji

Penguji II

Dr. Tri Sri Noor Asih, S.Si., M.Si.

NIP 197706142008122002

Anggota Penguji

Pembimbing I

Dr. Isnaini Rosyida, S.Si, M.Si.

NIP 197302191998022001

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

“Surpass your limit. Right here, right now.” (Yami Sukehiro)

PERSEMBAHAN

Dengan penuh rasa syukur kepada Allah SWT, skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Orang tua saya yang telah memberikan doa dan dukungan
2. Adik-adik saya yang selalu memberikan semangat, motivasi dan dukungan.
3. Rekan jurusan Matematika Angkatan 2014 yang selalu memberikan semangat.
4. Almamaterku tercinta.

PRAKATA

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan nikmat serta hidayah-Nya dan tak lupa sholawat serta salam senantiasa tercurah kepada Rasulullah Muhammad SAW, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Nilai Ketakteraturan Sisi Total pada Graf Hasil Kali Comb P_m dan C_5 , serta Subdivisi pada Hasil Kali Comb P_m dan C_7 ”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Program Studi Matematika Universitas Negeri Semarang.

Penyusun skripsi ini tidak lepas dari bimbingan serta dukungan dari berbagai pihak, oleh sebab itu penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih kepada:

1. Rektor Universitas Negeri Semarang yang telah memberikan kesempatan pada peneliti untuk menuntut ilmu di Universitas Negeri Semarang.
2. Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang yang telah memberikan izin untuk melaksanakan penelitian.
3. Ketua Jurusan Matematika yang telah memberikan izin untuk melaksanakan penelitian.
4. Dr. Isnaini Rosyida, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing yang telah tulus dan sabar membimbing dan memberikan pengarahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Dr. Mulyono, M.Si. dan Dr. Tri Sri Noor Asih, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang sabar memberi pengarahan.
6. Bapak/Ibu dosen Jurusan Matematika atas seluruh ilmu yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyusun skripsi ini.
7. Teman-teman Matematika angkatan 2014 yang telah memberikan masukan-masukan dalam menyusun skripsi ini.
8. Semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu-persatu.

Semoga skripsi ini senantiasa dapat memberikan manfaat kepada penulis maupun kepada para pembaca, serta dapat memberikan manfaat pula bagi perkembangan dunia pendidikan.

Semarang, Juli 2019

Penulis

ABSTRAK

Ulfa, Kholifa Septia. 2019. *Nilai Ketakteraturan Sisi Total Pada Graf Hasil Kali Comb P_m dan C_5 , serta Subdivisi pada Hasil Kali Comb P_m dan C_7* . Skripsi, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang, Pembimbing: Dr. Isnaini Rosyida, S.Si, M.Si.

Kata Kunci: Pelabelan tak teratur sisi total, hasil kali comb, nilai ketakteraturan sisi total, graf lintasan, graf cycle.

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf dan k adalah bilangan bulat positif. Pelabelan $-k$ total pada graf G adalah suatu pemetaan $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. Bobot titik a dinyatakan $wt(a) = \lambda(a) + \sum_{ab \in E} \lambda(ab)$ dan bobot sisi ab dinyatakan dengan $wt(ab) = \lambda(a) + \lambda(ab) + \lambda(b)$. Suatu pelabelan $-k$ total dikatakan tak teratur sisi total, jika bobot setiap sisi berbeda. Nilai ketakteraturan sisi total dari graf G dinotasikan dengan $tes(G)$ adalah nilai k minimum atau label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan tak teratur sisi total. Pada penelitian ini diselidiki nilai ketakteraturan sisi total pada graf hasil kali comb P_m dan C_5 yang dinotasikan dengan $P_m \triangleright C_5$ serta subdivisi pada hasil kali comb P_m dan C_7 yang dinotasikan dengan $S(P_m \triangleright C_7)$. Hasil dari penelitian ini adalah $tes(P_m \triangleright C_5) = \left\lceil \frac{6m+1}{3} \right\rceil$ dan $tes(S(P_m \triangleright C_7)) = \lceil 3m \rceil$.

ABSTRACT

Ulfa, Kholifa Septia. 2019. *On Total Edge Irregularity Strength of Comb Product Graph P_m and C_5 and Subdivision of Comb Product Graph P_m and C_7* . Final Project, Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Universitas Negeri Semarang, Advisor: Dr. Isnaini Rosyida, S.Si, M.Si.

Keywords : *Total edge irregular labelling, comb product, total edge irregularity strength, path graph and cycle graph.*

Let $G = (V, E)$ be a graph and k be a positive integer. Total k –labelling on graph G is a mapping $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. The weight of vertex a is represented by $wt(a) = \lambda(a) + \sum_{ab \in E} \lambda(ab)$ and the weight of edge ab is represented by $wt(ab) = \lambda(a) + \lambda(ab) + \lambda(b)$. A total k –labelling of G is called edge irregular total k –labelling, if the weight of every two distinct edges are different. The total edge irregularity strength of G , denoted by $tes(G)$ is the minimum positive integer k for which G has a total edge irregular k –labelling . This research is investigated on the total edge irregularity strength of the comb product graph P_m and C_5 ($P_m \triangleright C_5$) and subdivision of comb product graph P_m and C_7 ($S(P_m \triangleright C_7)$). The result of this research are $tes(P_m \triangleright C_5) = \left\lceil \frac{6m+1}{3} \right\rceil$ and $tes(S(P_m \triangleright C_7)) = \lceil 3m \rceil$.

DAFTAR ISI

PERNYATAAN.....	ii
PENGESAHAN.....	iii
MOTTO DAN PERSEMBAHAN.....	iv
PRAKATA.....	v
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT.....	viii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR GAMBAR.....	x
DAFTAR LAMPIRAN.....	xi
BAB 1 PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang Masalah.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Batasan Masalah.....	4
1.4 Tujuan Penelitian.....	5
1.5 Manfaat Penelitian.....	5
1.6 Sistematika Penyusunan Skripsi.....	5
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA.....	8
2.1 Konsep Dasar Graf.....	8
2.2 Jenis-Jenis Graf.....	11
2.3 Pelabelan Graf.....	20
BAB 3 METODE PENELITIAN.....	29
BAB 4 HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN.....	31
4.1 Graf Hasil Kali Comb P_m dan $C_5(P_m \triangleright C_5)$	31
4.2 Subdivisi pada Graf Hasil Kali Comb P_m dan $C_7(S(P_m \triangleright C_7))$	33

BAB 5 PENUTUP.....	36
5.1 Simpulan.....	36
5.2 Saran.....	36
DAFTAR PUSTAKA.....	37
LAMPIRAN.....	40

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
2.1. Graf G.....	8
2.2. Graf F.....	10
2.3. Graf H.....	10
2.4. (a) Graf sederhana; (b) Bukan graf sederhana.....	11
2.5. Graf kosong N_5	12
2.6. Graf berarah.....	13
2.7 Graf K_5 dan komplemennya $\overline{K_5}$	13
2.8. (a) dan (b) graf terhubung; (c) bukan graf terhubung.....	14
2.9. Graf lengkap.....	15
2.10. Graf <i>path</i>	15
2.11. Graf <i>cycle</i>	15
2.12. Graf berbobot.....	16
2.13. Graf subdivisi.....	16
2.14. (a) Graf C_4 ; (b) Graf S_3 ; (c) Graf $C_4 \triangleright S_3$	17
2.15. (a) Graf C_5 ; (b) Graf P_3 ; (c) Graf $P_3 \triangleright C_5$	18
2.16. (a) Graf C_7 ; (b) Graf P_3 ; (c) Graf $P_3 \triangleright C_7$	19
2.17. (a) Graf C_7 ; (b) Graf $S(P_3)$; (c) Graf $S(P_3 \triangleright C_7)$	20
2.18. (1) pelabelan titik (2) pelabelan sisi (3) pelabelan total.....	21
2.19. Pelabelan-3 total tak teratur sisi pada C_7	22
2.20. Pelabelan total graf <i>path</i> P_1	24
2.21. Pelabelan total graf <i>path</i> P_k	25
2.22. Pelabelan total graf <i>path</i> P_{k+1}	25
2.23. Pelabelan total graf C_3, C_4 , dan C_5	26

2.24. Pelabelan total graf <i>cycle</i> C_k	26
2.25. Pelabelan total graf <i>cycle</i> C_{k+1}	27
3.1. Desain Penelitian.....	30

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
1. Contoh pelabelan-11 total tak teratur sisi dari graf $P_5 \triangleright C_5$	40
2. Contoh pelabelan-15 total tak teratur sisi graf $S(P_5 \triangleright C_7)$	41
3. Pelabelan pada graf hasil kali comb P_m dan C_5 ($P_m \triangleright C_5$).....	42
4. Pelabelan dari subdivisi pada graf hasil kali comb P_m dan C_7 ($S(P_m \triangleright C_7)$).....	45

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Teori graf sebagai salah satu cabang Matematika yang sudah ada sejak lebih dari dua ratus tahun yang lalu pada tahun 1736, oleh matematikawan terkenal asal Swiss, Euler. Teori graf mengalami perkembangan yang sangat pesat dengan aplikasinya yang sangat luas dalam berbagai bidang ilmu seperti: Ilmu Komputer, Teknik, Sains, bahkan Bisnis dan Ilmu Sosial. (Budayasa, 2007) Teori graf merupakan salah satu cabang aplikasi matematika yang banyak dipakai dalam kehidupan sehari-hari. Graf adalah bentuk representasi dari beberapa objek beserta hubungannya, dengan memisalkan objek-objek tersebut sebagai suatu titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan sisi. Teori graf dapat digunakan untuk menggambarkan suatu keadaan, sehingga dapat mengetahui pola dan memperhitungkan hal penting yang dibutuhkan untuk menyelesaikan masalah.

Sampai saat ini berbagai macam topik penelitian terkait graf telah banyak ditemukan. Salah satu dari topik tersebut adalah pelabelan. Ada berbagai macam jenis pelabelan yang telah diperkenalkan, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan total. Jika domain dari fungsi (pemetaan) adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), jika domainnya adalah sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), jika domainnya titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling*).

Pelabelan tak teratur sisi total (*total edge irregularity strength*), yaitu pemberian label bilangan bulat positif (label ini boleh dipakai berulang) pada setiap elemen suatu graf dengan memperhatikan bobot sisi (jumlah label dari sisi dan 2 titik yang bertetangga) yang harus berbeda. Wallis (2001) menyatakan bahwa bobot (*weight*) dari elemen graf adalah jumlah dari semua label yang berhubungan dengan elemen graf tersebut. Nilai ketakteraturan sisi total (*total edge irregularity strength*) graf G yang dinotasikan dengan $tes(G)$ adalah minimum label terbesar yang digunakan untuk melabeli titik dan sisi graf G dengan pelabelan tak teratur sisi total (Baca, dkk, 2003).

Misalkan pelabelan $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, bobot sebuah titik a dengan pelabelan λ dari elemen graf $G = (V, E)$ adalah

$$wt(a) = \lambda(a) + \sum_{ab \in E} \lambda(ab)$$

dan bobot sebuah sisi ab dengan pelabelan λ adalah

$$wt(ab) = \lambda(a) + \lambda(ab) + \lambda(b).$$

Pelabelan tak teratur total diperkenalkan oleh Martin Baca, dkk. (2003). Mereka memperkenalkan dua jenis pelabelan tak teratur total, yaitu pelabelan tak teratur titik total dan pelabelan tak teratur sisi total. Baca, dkk. (2003) menyatakan bahwa pelabelan- k tak teratur sisi total pada graf $G(V, E)$ dengan himpunan titik tak kosong V dan himpunan sisi E adalah pelabelan $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga untuk setiap dua sisi yang berbeda $c = a_i b_j$ dan $d = a_k b_l$ berlaku

$$wt(c) \neq wt(d).$$

Pelabelan tak teratur sisi total tampak mudah diterapkan pada berbagai macam graf karena label yang diberikan boleh berulang meski bobotnya harus berbeda. Namun, permasalahan yang perlu dikaji dalam pelabelan tak teratur sisi total ini, yaitu bagaimana melabeli graf tersebut sedemikian hingga nilai bilangan bulat positif terbesar yang dijadikan label adalah seminimum mungkin. Nilai minimum dari bilangan bulat positif terbesar ini dinamakan nilai ketakteraturan sisi total (*total edge irregularity strength*) dan dinotasikan dengan $tes(G)$.

Hingga kini dikenal beberapa operasi pada graf, diantaranya operasi join, gabungan, kartesian, korona dan comb. Dengan mengoperasikan dua/lebih graf, akan dihasilkan graf yang baru. Misalkan G dan H dua graf terhubung, o titik dari H . Hasil kali comb antara graf G dan H , dinotasikan dengan $G \triangleright H$ adalah graf yang didapat dengan mengambil satu kopian dari G dan $|V(G)|$ kopian dari H dan melekatkan kopian ke- i dari H pada titik o ke titik ke- i dari G . Dari definisi hasil kali comb, $V(G \triangleright H) = \{(a, v) | a \in V(G), v \in V(H)\}$ dan $(a, v)(b, w) \in E(G \triangleright H)$ dengan $a = b$ dan $vw \in E(H)$ atau $ab \in E(G)$ dan $v = w = o$ (Saputro, S., dkk, 2013)

Pelabelan tak teratur sisi total sudah banyak diteliti oleh para ilmuwan sebelumnya diantaranya Marzuki dkk. (2013) meneliti tentang nilai ketakteraturan total graf sikel dan graf path. Indriati dkk. (2015) meneliti tentang nilai ketakteraturan sisi total graf web dan graf-graf terkait. Ivanco dan Jendrol (2006) meneliti tentang nilai ketakteraturan sisi total graf pohon. Rosyida (2019) meneliti tentang nilai ketakteraturan sisi total dari beberapa graf rantai kaktus

dengan titik pendaan. Corazon dan Riyanti (2016) meneliti tentang nilai ketakteraturan titik total pada graf hasil kali comb P_m dan C_5 dengan m bilangan ganjil. Corazon dan Febrinanda (2017) meneliti tentang nilai ketakteraturan total dari graf hasil kali comb P_m dan C_4 . Siddiqui dan Afzal (2011) meneliti tentang nilai ketakteraturan titik total pada subdivisi graf bintang S_n . Tarawneh dkk. (2016) meneliti tentang nilai ketakteraturan sisi total dari graf hasil kali *corona* dengan *paths*. Jayanthi (2016) meneliti tentang nilai ketakteraturan sisi total dari graf gabungan disjoint (*disjoint union*) pada graf roda rangkap (*double wheel*). Siddiqui dkk. (2013) meneliti tentang nilai ketakteraturan sisi total dari graf gabungan disjoint (*disjoint union*) pada graf helm (*helm graphs*).

Penelitian ini akan fokus pada nilai tes graf hasil kali comb dari P_m dan C_5 , serta subdivisi pada hasil kali comb P_m dan C_7 .

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, diperoleh beberapa rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana nilai ketakteraturan sisi total dari graf hasil kali comb P_m dan C_5 ?
2. Bagaimana nilai ketakteraturan sisi total dari graf subdivisi pada hasil kali comb P_m dan C_7 ?

1.3. Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka batasan masalah pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Graf berhingga, sederhana dan tidak berarah.

2. Pelabelannya adalah pelabelan- k tak teratur sisi total.

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Dapat menentukan nilai ketakaturan sisi total dari graf hasil kali comb P_m dan C_5 .
2. Dapat menentukan nilai ketakaturan sisi total dari graf subdivisi pada hasil kali comb P_m dan C_7 .

1.5. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Memperdalam pengetahuan tentang pelabelan, khususnya pelabelan- k tak teratur sisi total pada graf hasil kali comb P_m dan C_5 serta subdivisi dari hasil kali comb P_m dan C_7 .
2. Mengetahui penentuan nilai ketakaturan sisi total dari suatu graf, khususnya graf hasil kali comb P_m dan C_5 serta subdivisi dari hasil kali comb P_m dan C_7 .

1.6. Sistematika Penyusunan Skripsi

Secara garis besar penulisan skripsi ini dibagi menjadi tiga bagian, yaitu bagian awal, bagian pokok dan bagian akhir dengan penjelasan masing-masing bagian berikut.

1. Bagian Awal

Bagian awal skripsi meliputi halaman judul, halaman kosong, pernyataan keaslian tulisan, halaman pengesahan, motto dan

persembahan, kata pengantar, abstrak, daftar isi, daftar tabel, daftar gambar dan daftar lampiran.

2. Bagian Pokok

Secara garis besar bagian pokok skripsi terdiri atas lima bab, yaitu:

BAB 1 PENDAHULUAN

Bab ini memuat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penyusunan skripsi.

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini memuat konsep-konsep yang dijadikan landasan teori yang mendasari pemecahan masalah dalam penelitian ini seperti graf, pelabelan graf, .

BAB 3 METODE PENELITIAN

Bab ini berisi tentang metode-metode yang digunakan dalam penulisan skripsi.

BAB 4 HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Bab ini mengemukakan hasil penelitian dan pembahasan terkait pelabelan- k total tak teratur sisi dan nilai ketakteraturan sisi total pada graf dovetail.

BAB 5 PENUTUP

Bab ini mengemukakan simpulan yang diperoleh dari hasil telaah dan saran yang berkaitan dengan simpulan.

3. Bagian akhir

Bagian akhir berisi daftar pustaka dan lampiran yang mendukung penulisan skripsi.

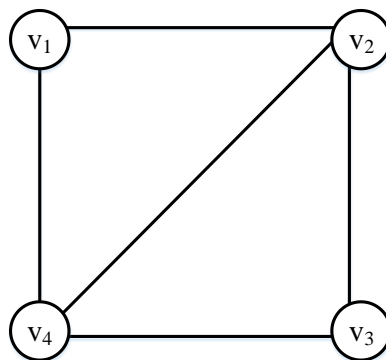
BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi boleh kosong (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang titik. (Munir, 2005)

Jumlah titik dari graf G disebut *order* yang dinotasikan dengan $|V|$, sedangkan jumlah sisi dari graf G disebut *size* yang dinotasikan dengan $|E|$. Gambar 2.1 menunjukkan sebuah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E , yaitu $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$. Dengan demikian *order* graf G adalah $|V| = 4$ dan *size* graf G adalah $|E| = 5$.



Gambar 2.1. Graf G

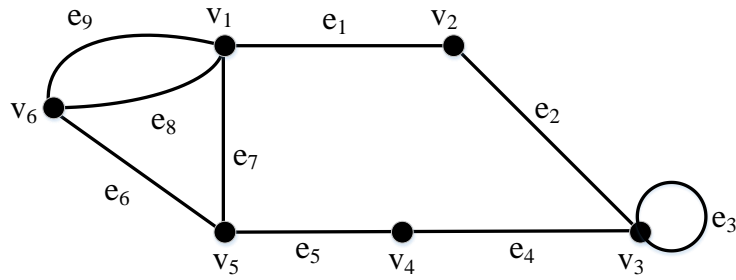
Dua titik u dan v dikatakan *adjacent* jika $uv \in E(G)$. Jika $e = uv \in E(G)$, maka u dan v masing-masing dikatakan *incident* dengan e (Chartrand, 1986).

Pada Gambar 2.1. dapat dilihat bahwa titik v_1 *adjacent* dengan titik v_2 dan v_4 , tetapi tidak *adjacent* dengan titik v_3 . Pada Gambar 2.1 dapat dilihat juga bahwa sisi v_2v_3 *incident* dengan titik v_2 dan v_3 , sisi v_2v_4 *incident* dengan titik v_2 dan v_4 , tetapi sisi v_1v_2 tidak *incident* dengan titik v_3 maupun titik v_4 .

Misal G adalah sebuah graf. Sebuah jalan (*walk*) di G adalah sebuah barisan berhingga (tak kosong) $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir sisi e_i untuk $1 \leq i \leq k$. Hal tersebut dikatakan sebuah jalan dari titik v_0 ke titik v_k atau jalan- (v_0, v_k) . Jika semua sisi e dalam jalan W berbeda, maka W disebut sebuah jejak (*trail*). (Budayasa, 2007:6)

Jika semua titik $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ dalam jalan $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$ berbeda, maka W disebut lintasan (*path*). (Budayasa, 2007)

Cycle adalah sebuah jejak tertutup (*closed trail*) yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda. Banyaknya sisi dalam suatu *cycle* disebut panjang dari *cycle* tersebut. (Budayasa, 2007)



Gambar 2.2. Graf F

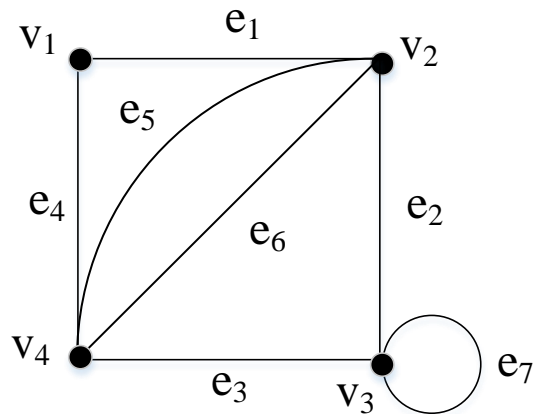
Walk : $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_3, e_4, v_4$

Trail : $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_3, e_4, v_4$

Path : $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_4, v_4$

Cycle : $v_1, e_7, v_5, e_6, v_6, e_8, v_1$

Sebuah *loop* merupakan sebuah sisi yang terhubung pada suatu titik yang sama. Sisi rangkap adalah dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama.



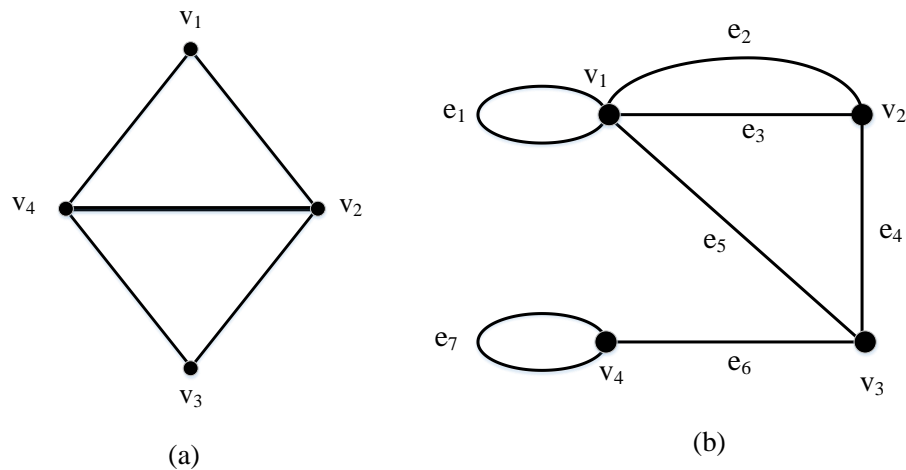
Gambar 2.3. Graf H

Pada Gambar 2.3 terlihat jelas bahwa sisi e_5 dan e_6 merupakan sisi rangkap, karena sisi e_5 dan sisi e_6 menghubungkan pasangan titik yang

sama yaitu titik v_2 dan v_4 , sedangkan sisi e_7 merupakan *loop* karena sisi e_7 terhubung dengan titik v_3 .

2.2 Jenis-jenis Graf

Menurut Johnsonbaugh (2001) suatu graf tanpa *loop* dan sisi rangkap (*parallel edge*) disebut graf sederhana (*simple graph*). Graf G pada Gambar 2.4 merupakan graf sederhana karena tidak memuat sisi *loop* maupun sisi rangkap.

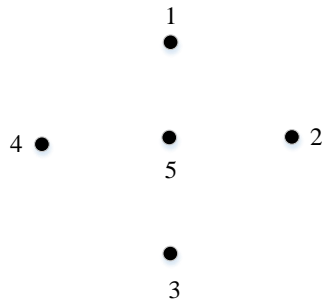


Gambar 2.4. (a) Graf sederhana ; (b) Bukan graf sederhana

Graf G pada Gambar 2.4 (a) merupakan graf sederhana, sedangkan graf pada Gambar 2.4 (b) bukan graf sederhana karena mengandung *loop* dan sisi rangkap. Sisi e_2 dan e_3 merupakan sisi rangkap karena menghubungkan dua titik yang sama yaitu v_1 dan v_2 . Sedangkan sisi e_1 dan e_7 merupakan *loop* karena masing-masing terhubung pada titik v_1 dan v_4

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong disebut sebagai graf kosong dan ditulis dengan N_m yang dalam hal ini m adalah

jumlah titik. Gambar 2.5 merupakan graf kosong dengan lima titik, dinotasikan dengan N_5 . (Munir, 2005)

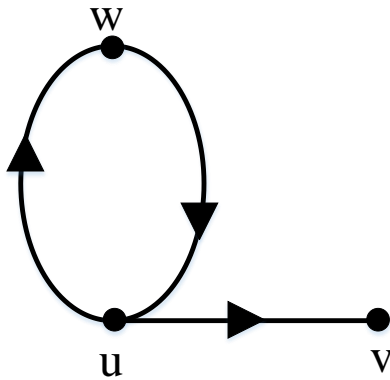


Gambar 2.5. Graf kosong N_5

Suatu graf G dikatakan berhingga jika banyaknya titik maupun sisi pada graf G jumlahnya berhingga. (Bondy and Murty, 1976).

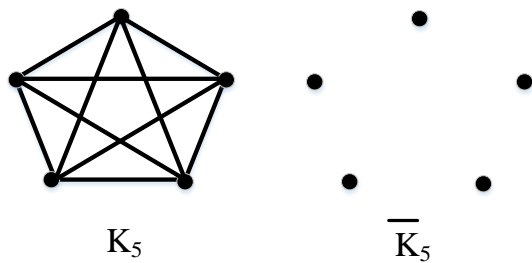
Graf tak berarah adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi $uv = vu$ adalah sisi yang sama. (Munir, 2005)

Graf berarah G adalah himpunan berhingga tak kosong dari objek yang disebut titik-titik dan suatu himpunan (bisa kosong) dari pasangan berurutan dari titik-titik di graf G yang disebut busur atau sisi berarah. Himpunan titik dari graf G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan busur dinotasikan dengan $E(G)$, Suatu graf berarah G dengan $V(G) = \{u, v, w\}$ dan $E(G) = \{uw, wu, uv\}$ diilustrasikan pada Gambar 2.6, arah dari setiap sisi digambarkan dengan tanda panah. (Chartrand, 1986)



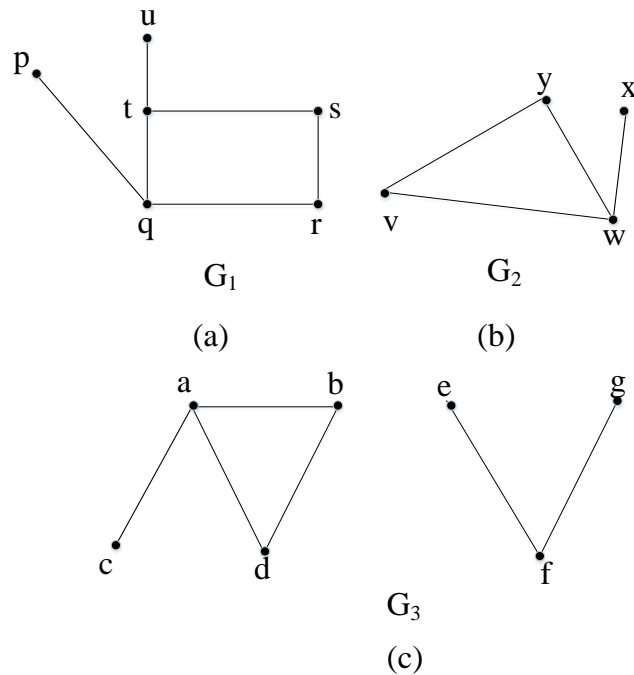
Gambar 2.6 Graf berarah

Komplemen graf G yang dinotasikan dengan \bar{G} , adalah graf dengan $V(\bar{G}) = V(G)$ dan uv merupakan sisi dari \bar{G} jika dan hanya jika sisi tersebut bukan sisi dari G (Chartrand dan Oellermann, 1993). Gambar 2.7. merupakan contoh graf K_5 dan \bar{K}_5 .



Gambar 2.7 Graf K_5 dan komplemennya \bar{K}_5

Graf tak berarah G disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang titik u dan v di dalam himpunan V terdapat lintasan dari u ke v (yang juga harus berarti ada lintasan dari v ke u). Jika tidak, maka G disebut graf tak-terhubung (*disconnected graph*) (Munir, 2005:371)

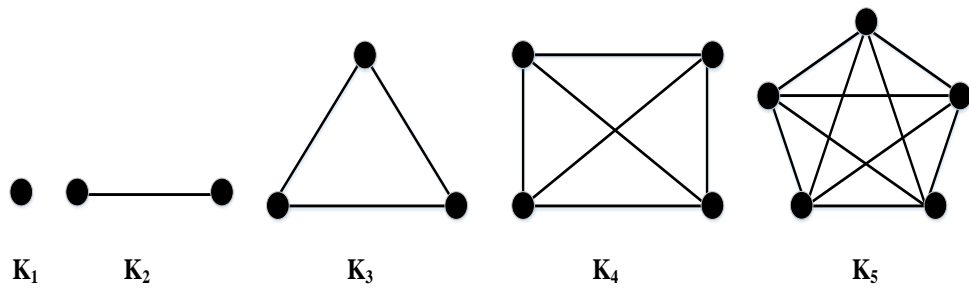


Gambar 2.8. (a) dan (b) graf terhubung; (c) bukan graf terhubung

Graf pada Gambar 2.8. (c) ini terdiri dari himpunan titik $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ dan himpunan sisi $E = \{ab, ac, ad, bd, ef, fg\}$. Graf ini merupakan graf tak terhubung karena tidak terdapat jalan dari a ke e , yang dihubungkan oleh sisi, sehingga terpisah menjadi dua komponen. Bagian-bagian dari susunan graf yang menyebabkan grafnya tidak terhubung maka bagian tersebut dinamakan komponen graf.

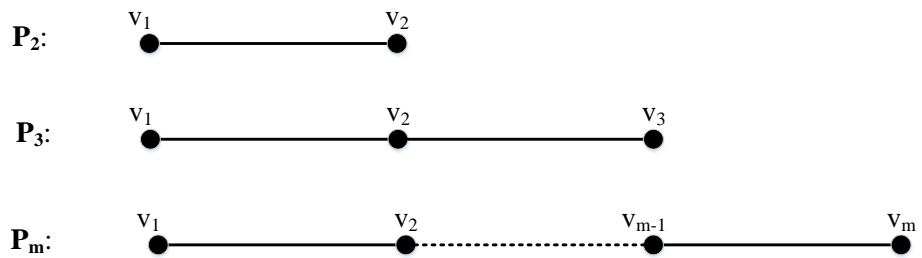
Graf lengkap (*complete graph*) dengan m titik yang dinotasikan dengan K_m , adalah graf sederhana yang setiap titiknya *adjacent* (Fletcher et al., 1991).

Gambar 2.9. merupakan contoh lima graf lengkap. Terlihat bahwa setiap titik pada masing-masing graf tersebut *adjacent*.



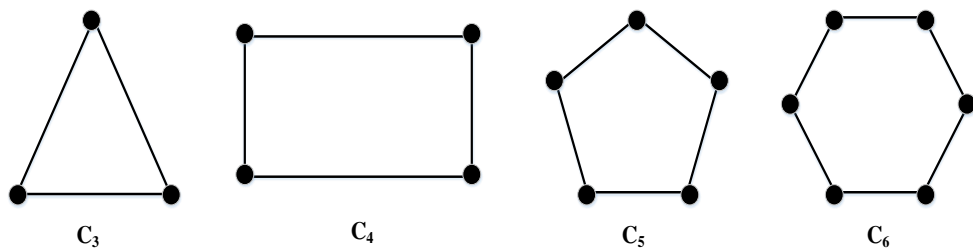
Gambar 2.9. Graf lengkap

Graf lintasan (*path graph*) yang dinotasikan dengan P_m merupakan graf terhubung sederhana yang membentuk lintasan yang terdiri dari m titik dan $m - 1$ sisi dengan $m \geq 2$. Kedua titik ujung pada graf ini merupakan *pendant*, yaitu titik dengan derajat sama dengan satu, sedangkan titik yang lain berderajat dua (Umilasari, 2015).



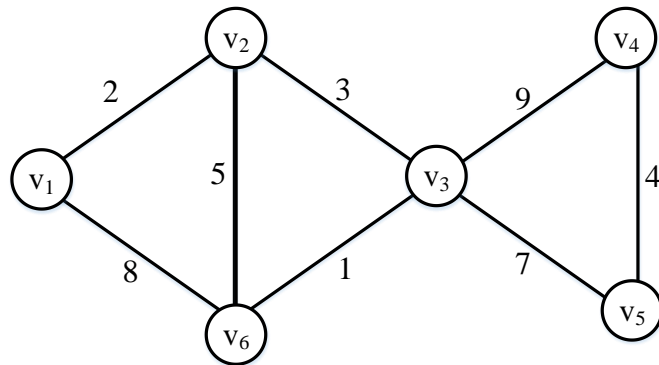
Gambar 2.10. Graf *path*

Graf *cycle* adalah graf terhubung sederhana yang memiliki n titik dengan setiap titiknya berderajat dua. Graf *cycle* dinotasikan dengan C_n dengan $n \geq 3$ (Umilasari, 2015).



Gambar 2.11. Graf *cycle*

Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah bilangan yang disebut bobot (Boundy and Murty, 1976).

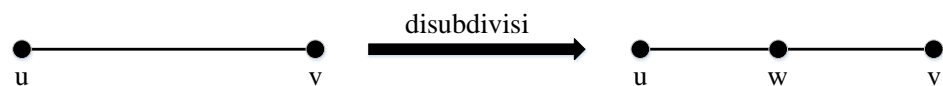


Gambar 2.12. Graf berbobot

Gambar tersebut menunjukkan bahwa bobot masing-masing sisinya, dinotasikan dengan $wt(v_i v_j)$, adalah $wt(v_1 v_2) = 2, wt(v_1 v_6) = 8, wt(v_2 v_3) = 3, wt(v_2 v_6) = 5, wt(v_3 v_6) = 1, wt(v_3 v_4) = 9, wt(v_3 v_5) = 7$ dan $wt(v_4 v_5) = 4$.

Graf subdivisi (*subdivision graph*) dari graf G dinotasikan dengan $S(G)$ adalah suatu graf baru yang diperoleh dari subdivisi pada sisi e di G . Subdivisi dari sisi e dengan titik ujung u dan v menghasilkan sebuah graf yang mengandung satu titik baru w , dan menghasilkan dua sisi baru uw dan wv . (Harray, 1994)

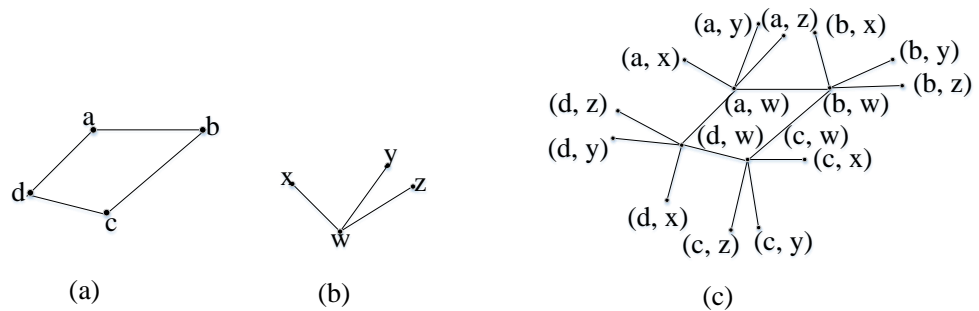
Gambar 2.13 adalah contoh graf subdivisi pada graf P_2 .



Gambar 2.13. Graf subdivisi

Misalkan G dan H masing-masing adalah graf terhubung dan o adalah sebuah titik pada graf H . Hasil kali comb antara graf G dan H , dinotasikan dengan $G \triangleright H$ adalah graf yang didapat dengan mengambil satu kopian dari G dan $|V(G)|$ kopian dari H dan melekatkan kopian ke- i dari H pada titik o ke titik ke- i dari G . Dari definisi hasil kali comb, $V(G \triangleright H) = \{(a, v) | a \in V(G), v \in V(H)\}$ dan $(a, v)(b, w) \in E(G \triangleright H)$ dengan $a = b$ dan $vw \in E(H)$ atau $ab \in E(G)$ dan $v = w = o$ (Saputro, S., dkk, 2013)

Gambar 2.14 adalah contoh graf dengan operasi comb.



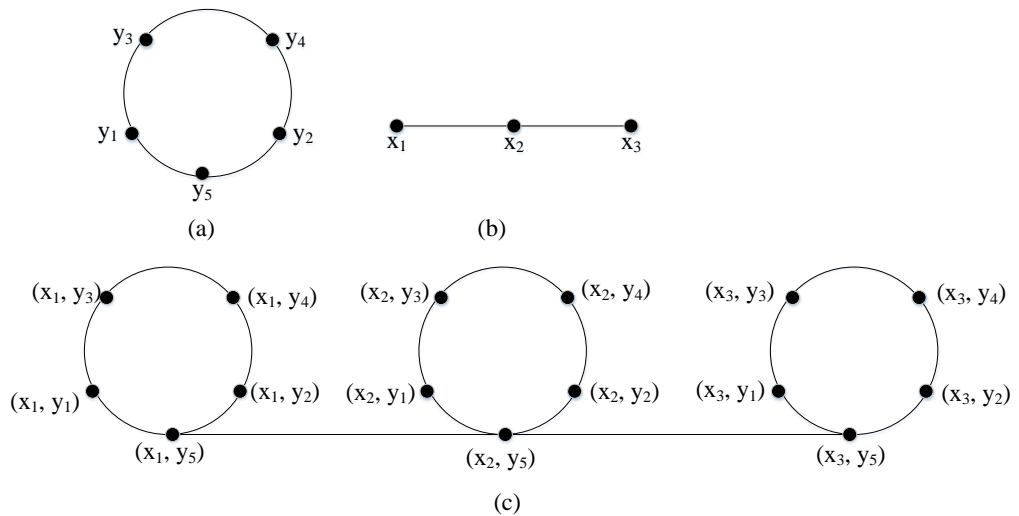
Gambar 2.14. (a) Graf C_4 ; (b) Graf S_3 ; (c) Graf $C_4 \triangleright S_3$

Definisi 2.2.1

Misalkan P_m dan C_5 masing-masing adalah graf terhubung dan y_i adalah sebuah titik pada graf C_5 . Hasil kali comb antara graf P_m dan C_5 , dinotasikan dengan $P_m \triangleright C_5$ adalah graf yang didapat dengan mengambil satu kopian dari P_m dan $|V(P_m)|$ kopian dari C_5 dan melekatkan kopian ke- i dari C_5 pada titik y_i ke titik ke- i dari P_m . Dari definisi hasil kali comb, $V(P_m \triangleright C_5) = \{(x_m, y_n) | x_m \in V(P_m), y_n \in V(C_5)\}$ dan $E(P_m \triangleright C_5) = \{(x_m, y_n)(x_s, y_r) | x_m = x_s \text{ dan } y_n y_r \in E(C_5) \text{ atau } x_m x_s \in E(P_m) \text{ dan } y_n = y_r = y_i\}$. Karena $|E(P_m)| = m - 1$ dan $|E(C_5)| = 5$ maka $|E(P_m \triangleright$

$|C_5| = m - 1 + 5m = 6m - 1$. Dengan $|V(P_m)| = m, |V(C_5)| = 5$ dan $|V(P_m \triangleright C_5)| = 5m$.

Gambar 2.15 adalah contoh hasil kali comb P_m dan C_5 dengan $m = 3$, dan $y_i = y_5$.



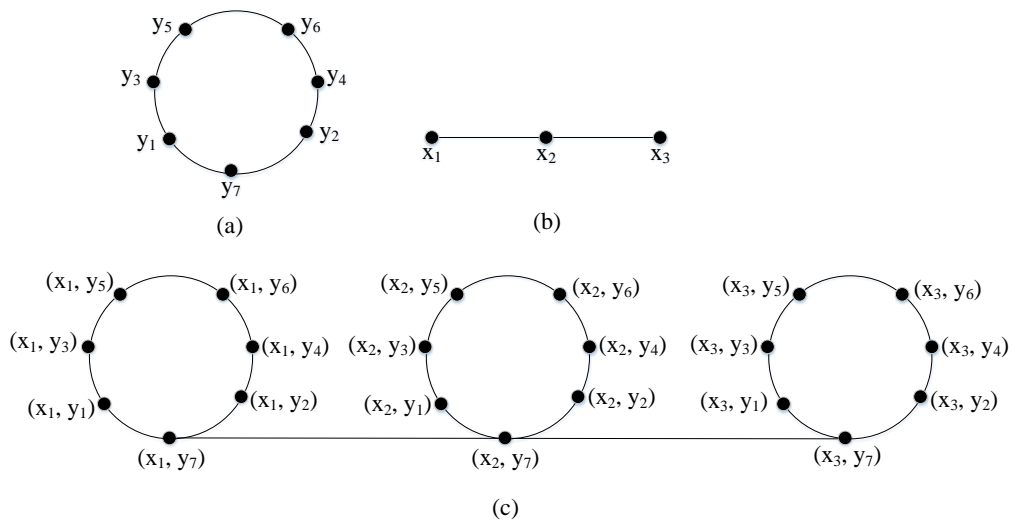
Gambar 2.15. (a) Graf C_5 ; (b) Graf P_3 ; (c) Graf $P_3 \triangleright C_5$

Definisi 2.2.2

Misalkan P_m dan C_7 masing-masing adalah graf terhubung dan y_i adalah sebuah titik pada graf C_7 . Hasil kali comb antara graf P_m dan C_7 , dinotasikan dengan $P_m \triangleright C_7$ adalah graf yang didapat dengan mengambil satu kopian dari P_m dan $|V(P_m)|$ kopian dari C_7 dan melekatkan kopian ke- i dari C_7 pada titik y_i ke titik ke- i dari P_m . Dari definisi hasil kali comb, $V(P_m \triangleright C_7) = \{(x_m, y_n) | x_m \in V(P_m), y_n \in V(C_7)\}$ dan $E(P_m \triangleright C_7) = \{(x_m, y_n)(x_s, y_r) | x_m = x_s \text{ dan } y_n y_r \in E(C_7) \text{ atau } x_m x_s \in E(P_m) \text{ dan } y_n = y_r = y_i\}$. Karena $|E(P_m)| = m - 1$ dan $|E(C_7)| = 7$ maka $|E(P_m \triangleright C_7)| = (m - 1) \cdot 7 + 7 = 7m$.

$|C_7| = m - 1 + 7m = 8m - 1$. Dengan $|V(P_m)| = m, |V(C_7)| = 7$ dan $|V(P_m \triangleright C_7)| = 7m$.

Gambar 2.16 adalah contoh hasil kali comb P_m dan C_7 dengan $m = 3$, dan $y_i = y_7$.



Gambar 2.16. (a) Graf C_7 ; (b) Graf P_3 ; (c) Graf $P_3 \triangleright C_7$

Definisi 2.2.3

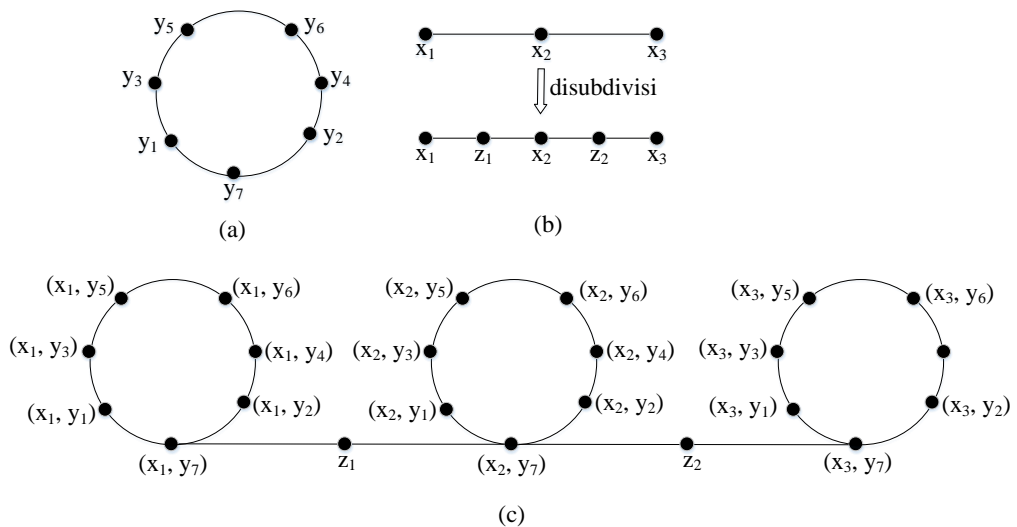
Subdivisi pada Graf Hasil Kali Comb P_m dan C_7 ($S(P_m \triangleright C_7)$) adalah suatu graf baru yang diperoleh dari subdivisi pada setiap sisi $x_i x_{i+1}$ di P_m .

Subdivisi dari sisi $x_i x_{i+1}$ dengan titik ujung x_i dan x_{i+1} menghasilkan sebuah graf yang mengandung satu titik baru z_i , dan menghasilkan dua sisi baru yaitu $x_i z_i$ dan $z_i x_{i+1}$. Dari definisi subdivisi pada hasil kali comb,

$V(S(P_m \triangleright C_7)) = \{z_i, (x_i, y_s) \mid x_i, z_i \in V(S(P_m)), y_s \in V(C_7), i = 1, \dots, m - 1\}$ dan $E((S(P_m \triangleright C_7))) = \{(x_i, y_s)z_i, z_i(x_{i+1}, y_s), (x_i, y_s)(x_i, y_r) \mid y_n y_r \in E(C_7), i = 1, 2, \dots, m - 1, s \in \{1, 2, \dots, 7\}\}$. Karena $|E(S(P_m))| = 2(m - 1)$ dan $|E(C_7)| = 7$ maka $|E(S(P_m \triangleright C_7))| = 2(m - 1) + 7m = 2m - 2 +$

$7m = 9m - 2$. Dengan $|V(S(P_m))| = 2m - 1$, $|V(C_7)| = 7$ dan $|V(S(P_m \triangleright C_7))| = 8m - 1$.

Gambar 2.17 adalah contoh subdivisi pada graf hasil kali comb P_m dan C_7 dengan $m = 3$, $y_i = y_7$, dan titik subdivisi z_1 dan z_2 .

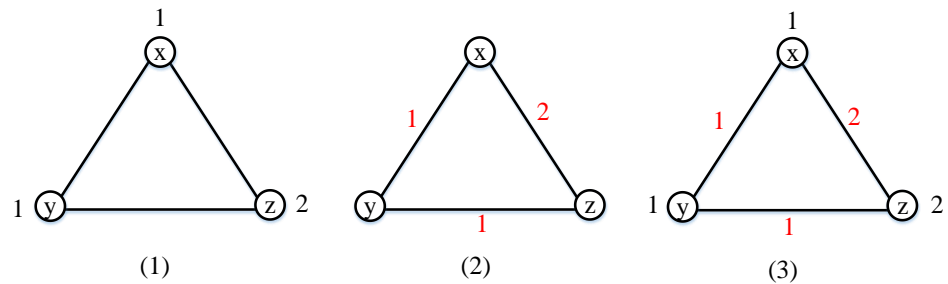


Gambar 2.17. (a) Graf C_7 ; (b) Graf P_3 dan graf $S(P_3)$; (c) Graf $S(P_3 \triangleright C_7)$

2.3 Pelabelan Graf

Menurut Wallis (2001), pelabelan suatu graf adalah suatu pemetaan yang membawa elemen-elemen graf ke bilangan-bilangan bulat positif atau non negatif. Berdasarkan domain dari pemetaan ini ada tiga jenis pelabelan yaitu pelabelan titik jika domainnya himpunan titik, pelabelan sisi jika domainnya himpunan sisi atau pelabelan total jika domainnya himpunan titik dan sisi. Pada pelabelan total Wallis juga menjelaskan bobot (*weight*) dari graf adalah jumlah dari semua label yang berhubungan dengan elemen graf tersebut. Bobot dari titik v dengan pelabelan λ adalah $wt(v) = \lambda(v) +$

$\sum_{uv \in E} \lambda(uv)$, dan bobot dari sisi uv adalah $wt(uv) = \lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v)$.



Gambar 2.18. (1) pelabelan titik (2) pelabelan sisi (3) pelabelan total

Berdasarkan definisi bobot sisi, Baca dkk. (2003) mendefinisikan suatu jenis pelabelan yang disebut pelabelan- k tak teratur sisi total dengan domain himpunan titik dan sisi sebagai berikut:

Definisi 2.3.1

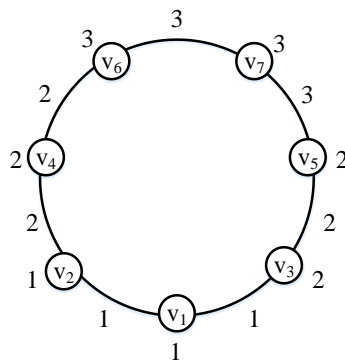
Suatu pelabelan $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dikatakan pelabelan- k tak teratur sisi total jika setiap dua sisi $e = u_1v_1$ dan $f = u_2v_2$ yang berbeda di G memenuhi $wt(e) \neq wt(f)$, dengan $wt(e) = \lambda(u_1) + \lambda(e) + \lambda(v_1)$ dan $wt(f) = \lambda(u_2) + \lambda(f) + \lambda(v_2)$. Nilai k minimum sehingga G memiliki pelabelan- k tak teratur sisi total disebut dengan nilai ketakteraturan sisi total graf G , disimbolkan dengan $tes(G) = k$.

Teorema 2.3.1 (Baca, 2003)

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan tak kosong $E(G)$, maka

$$\left\lceil \frac{|E(G)| + 2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E(G)|.$$

Bukti. Untuk menentukan batas atas, setiap titik di G diberi label 1 dan setiap sisi dari G secara terurut diberi label $1, 2, 3, \dots, |E|$. Dengan menggunakan label tersebut akan diperoleh $w(k) \neq w(l)$ untuk sembarang dua sisi k dan l yang berbeda dari G . Hal ini menunjukkan bahwa pelabelan tersebut adalah pelabelan tak teratur sisi total dengan label terbesar $|E|$, sehingga batas atas nilai ketakteraturan sisi total yang dinotasikan dengan $tes(G)$, adalah $|E|$. Untuk batas bawah, dimisalkan φ adalah pelabelan tak teratur sisi total yang optimal dari G . Bobot terbesar sisi k dari G , yaitu $w(e) \geq |E(G)| + 2$. Bobot tersebut merupakan jumlah dari tiga label, sehingga setidaknya terdapat paling sedikit satu sisi atau titik yang diberi label $\lceil \frac{|E(G)|+2}{3} \rceil$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa batas bawah $tes(G)$ adalah $\lceil \frac{|E(G)|+2}{3} \rceil$.



Gambar 2.19. Pelabelan-3 total tak teratur sisi pada C_7

Gambar 2.19 merupakan contoh graf yang titik dan sisinya diberi label bilangan bulat positif sehingga disebut pelabelan total. Berdasarkan batas bawah (1), diperoleh batas bawah $\text{tes}(C_7) \geq \left\lceil \frac{|E(C_7)|+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{9}{3} \right\rceil = 3$. Pelabelan setiap titik pada C_7 yaitu

$$\lambda(v_1) = 1, \lambda(v_2) = 1, \lambda(v_3) = 2, \lambda(v_4) = 2, \lambda(v_5) = 2, \lambda(v_6) = 3,$$

$$\lambda(v_7) = 3.$$

Sedangkan label setiap sisinya yaitu

$$\lambda(v_1v_2) = 1, \lambda(v_1v_3) = 1, \lambda(v_2v_4) = 2, \lambda(v_3v_5) = 2,$$

$$\lambda(v_4v_6) = 2, \lambda(v_5v_7) = 3, \lambda(v_6v_7) = 3.$$

Bobot setiap sisi pada Gambar 2.18 dapat ditentukan dengan menjumlahkan label sisi dengan label titik yang incident dengan sisi tersebut. Bobot setiap sisi graf C_7 tersebut yaitu

$$w(v_1v_2) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$w(v_1v_3) = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$w(v_2v_4) = 1 + 2 + 2 = 5$$

$$w(v_3v_5) = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$w(v_4v_6) = 2 + 2 + 3 = 7$$

$$w(v_5v_7) = 2 + 3 + 3 = 8$$

$$w(v_6v_7) = 3 + 3 + 3 = 9$$

Berdasarkan pelabelan yang diberikan seperti pada Gambar 2.18 terlihat bahwa bobot setiap sisi berbeda, yaitu $w(v_1v_2) \neq w(v_1v_3) \neq w(v_2v_4) \neq w(v_3v_5) \neq w(v_4v_6) \neq w(v_5v_7) \neq w(v_6v_7)$. Inilah yang disebut pelabelan tak teratur sisi total. Pelabelan yang dilakukan menghasilkan nilai minimum dari label terbesar untuk titik dan sisi pada graf C_5 adalah $k = 3$, jadi $\text{tes}(C_5) = 3$.

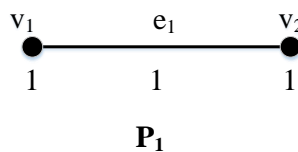
Teorema 2.3.2 (Baca,2003)

Misalkan P_r dan C_r adalah Path dan Cycle, dengan $r \geq 1$ sisi, maka

$$\text{tes}(P_r) = \text{tes}(C_r) = \left\lceil \frac{r+2}{3} \right\rceil.$$

Bukti. Misal $f: V \cup E \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$ pada pelabelan k total P_r dan C_r . Berdasarkan Teorema 2.3.1, $\text{tes}(G) \geq \left\lceil \frac{r+2}{3} \right\rceil$, $r \geq 1$ dimana $G \in \{P_r, C_r\}$.

Teorema diatas akan dibuktikan dengan induksi matematika untuk nilai r dasar yaitu $r = 1$ maka label dari P_1 adalah satu untuk ketiga elemennya (satu sisi dan dua titik diujungnya) seperti pada Gambar 2.19.



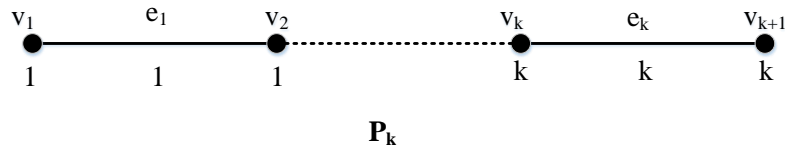
Gambar 2.20. Pelabelan total graf *path* P_1

Diperoleh label sebagai berikut:

$$f(v_1) = f(e_1) = f(v_2) = 1. \text{ Sehingga } \text{tes}(P_1) = \left\lceil \frac{1+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3}{3} \right\rceil = \lceil 1 \rceil = 1.$$

Jadi P_1 benar untuk $n = 1$(i)

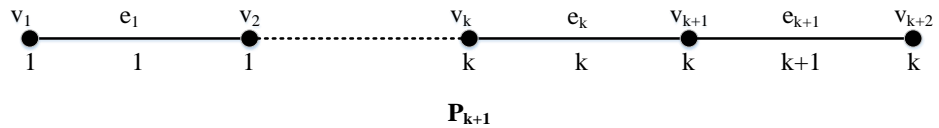
Asumsikan untuk $r = k$ dengan banyak sisi pada P_k adalah $r = 3(k - 1) + 1, k \geq 1$ benar.



Gambar 2.21. Pelabelan total graf *path* P_k

Sehingga sisi $e_k = v_k v_{k+1}$ di P_k seperti pada Gambar 2.21 dilabeli dengan $f(v_k) = f(e_k) = f(v_{k+1}) = k$, maka tes $(P_k) = \left\lceil \frac{3(k-1)+1+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3(k-1)+3}{3} \right\rceil = [k - 1 + 1] = [k] = k$ benar.

Akan dibuktikan untuk $r = k + 1$, tes(P_{k+1}) = $k + 1$.



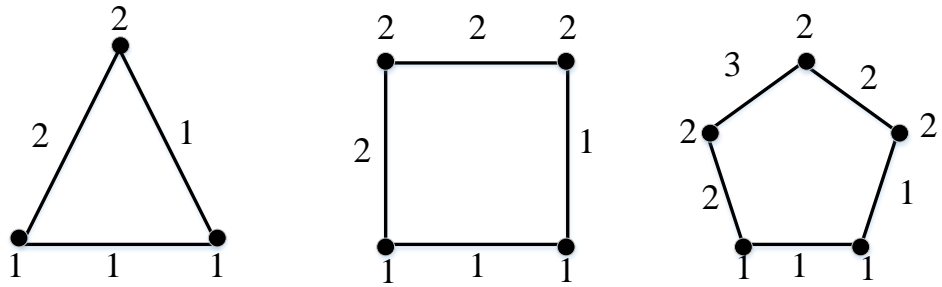
Gambar 2.22. Pelabelan total graf *path* P_{k+1}

Untuk langkah-langkah induksi sisi-sisi e_1, \dots, e_k dan titik-titik v_1, \dots, v_{k+1} diberi label seperti pada P_k seperti pada Gambar 2.22, maka diperoleh label untuk sisi $e_{k+1} = v_{k+1} v_{k+2}$ sebagai berikut:

$$f(v_{k+1}) = k, f(e_{k+1}) = k + 1, f(v_{k+2}) = k, \text{ sehingga tes } (P_{k+1}) = \left\lceil \frac{3(k+1-1)+1+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3k+3}{3} \right\rceil = [k + 1] = k + 1.$$

Jadi jika P_k benar maka P_{k+1} benar.....(ii)

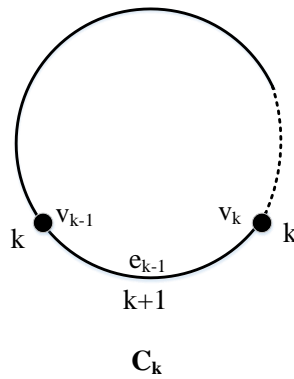
Dari (i) dan (ii) diperoleh tes(P_r) = $\left\lceil \frac{r+2}{3} \right\rceil$ dengan $r \geq 1$ sisi.....(iii)



Gambar 2.23. Pelabelan total graf $C_3, C_4,$ dan C_5

Misalkan C_r adalah cycle $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_r, e_r, v_1$. Pada Gambar 2.23 pelabelan optimal tak teratur dari $C_3, C_4,$ dan C_5 dengan label dari himpunan $\{1, 2, 3\}$. Untuk nilai r dasar karena cycle banyaknya sisi paling sedikit tiga ($r \geq 3$ sisi) maka pangkal induksi- r dari cycle adalah $r = 3$. Dengan label sebagai berikut $f(v_1) = f(e_1) = f(v_2) = f(e_2) = 1, f(v_3) = f(e_3) = 2$, sedemikian hingga $tes(C_3) = \left\lfloor \frac{3+2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor = 2$.

Jadi C_r benar untuk $r = 3$(iv)



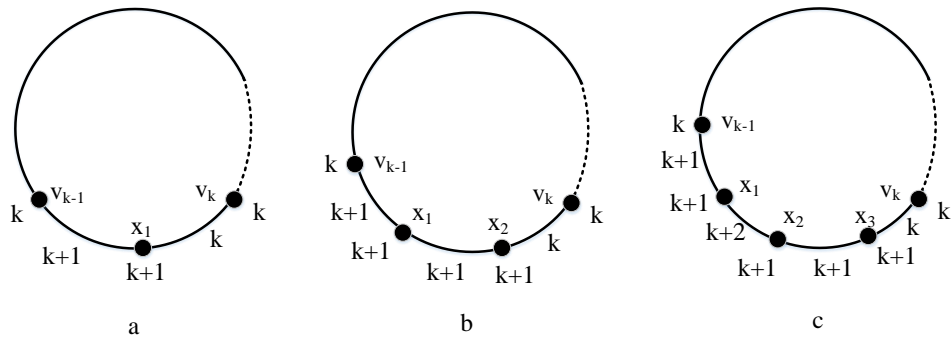
Gambar 2.24. Pelabelan total graf cycle C_k

Asumsikan untuk $r = k$ dengan banyak sisi pada C_k adalah $r = 3(k - 1) + 2$, $k \geq 2$, dengan $e_{k-1} = v_{k-1}v_k$ diberi label seperti pada Gambar 2.24, maka diperoleh label sebagai berikut:

$$f(v_{k-1}) = f(v_k) = k, f(e_{k-1}) = k + 1.$$

Sehingga tes $(C_k) = \left\lceil \frac{3(k-1)+2+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3(k-1)+4}{3} \right\rceil = \left\lceil k - 1 + \frac{4}{3} \right\rceil = k - 1 + 2 = k + 1$ benar.

Akan dibuktikan untuk $r = k + 1$, tes $(C_{k+1}) = (k + 1) + 1 = k + 2$.



Gambar 2.25. Pelabelan total graf cycle C_{k+1}

Untuk mendapatkan pelabelan optimal dari C_{k+1} sisi $e_{k-1} = v_{k-1}v_k$ dibagi menjadi dua (tiga atau empat, berturut-turut) sisi dengan menambahkan satu titik baru yaitu x_1 (dua titik baru yaitu x_1 dan x_2 , atau tiga titik baru yaitu x_1, x_2 dan x_3 , berturut-turut) diberi label seperti pada Gambar 2.25, maka diperoleh label sebagai berikut:

- a) Jika menambahkan satu titik baru yaitu x_1 seperti pada Gambar 2.25 a, maka $f(v_{k-1}x_1) = f(x_1) = k + 1, f(v_{k-1}) = f(v_k) = f(x_1v_k) = k$.
- b) Jika menambahkan dua titik baru yaitu x_1 dan x_2 seperti pada Gambar 2.25 b, maka $f(x_1) = f(x_2) = f(v_{k-1}x_1) = f(x_1x_2) = k + 1, f(x_2v_k) = f(v_{k-1}) = f(v_k) = k$.
- c) Jika menambahkan tiga titik baru yaitu x_1, x_2 dan x_3 seperti pada Gambar 2.25 c, maka $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(v_{k-1}x_1) = f(x_2x_3) = k + 1, f(x_1x_2) = k + 2, f(x_3v_k) = f(v_{k-1}) = f(v_k) = k$.

Sedemikian hingga,

$$\text{tes}(C_{k+1}) = \left\lceil \frac{3(k+1-1)+2+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3k+4}{3} \right\rceil = \left\lceil k + \frac{4}{3} \right\rceil = k + 2.$$

Jadi jika C_k benar maka C_{k+1} benar.....(v)

Dari (iv) dan (v) diperoleh $\text{tes}(C_r) = \left\lceil \frac{r+2}{3} \right\rceil$ dengan $r \geq 1$ sisi.....(vi)

Dari (iii) dan (vi) diperoleh $\text{tes}(P_r) = \text{tes}(C_r) = \left\lceil \frac{r+2}{3} \right\rceil$, dengan $r \geq 1$ sisi.

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Dalam penelitian ini diperoleh dua kesimpulan, yaitu:

1. Nilai ketakteraturan sisi total dari graf hasil kali comb P_m dan C_5 untuk suatu bilangan bulat positif $m \geq 2$ adalah $tes(P_m \triangleright C_5) = \left\lceil \frac{6m+1}{3} \right\rceil$.
2. Nilai ketakteraturan sisi total dari subdivisi pada graf hasil kali comb P_m dan C_7 untuk suatu bilangan bulat positif $m \geq 2$ adalah $tes(S(P_m \triangleright C_7)) = \lceil 3m \rceil$.

5.2. Saran

Penelitian ini masih terbatas pada graf hasil kali comb P_m dan C_5 serta subdivisi pada graf hasil kali comb P_m dan C_7 . Penelitian ini dapat dikembangkan untuk graf hasil kali comb P_m dan C_5 serta graf hasil kali comb P_m dan C_7 yang lebih kompleks lagi, misal $P_m \triangleright C_6, P_m \triangleright C_7, P_m \triangleright C_8, \dots$, dan seterusnya sampai $P_m \triangleright C_n$.

DAFTAR PUSTAKA

- Baca M., Jendrol, S., Miller, M., & Ryan, J. 2007. *On Irregular Total Labeling*.
Discrete Math (307):1378-1388.
- Bundy, J. A., & Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Applications*. Ontario:
Departement of Combinatorics and Optization, University of Waterloo.
- Budayasa, I. K. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University
Press.
- Chartrand, Gary & O. R. Oellermann. 1993. *Applied and Algorithmic Graph
Theory*. New York: McGraw-Hill Inc.
- Chartrand, Gary. 1986. *Introductory Graph Theory*. New York: Dover
Publications Inc.
- Corazon, C. M., & Riyanti, R. 2016. *Nilai Total Ketakteraturan Titik Pada Graf
Hasil kali Comb P_m Dan C_5 Dengan m Bilangan Ganjil*. Jurnal Sanis
Matematika dan Statistika. Vol. 2 No. 2: 39-47.
- Fletcher, P., Hoyle, H., & Patty, C. W. 1991. *Foundation of Discrete
Mathematics*. Boston: PWS Kent Publishing Company.
- Harary, F. 1994. *Graph Theory*. Michigan: Addison-Wesley Publishing Company.
- Indriati, D., Widodo, Wijayanti, I. E., Sugeng, K. A., & Bača, M. 2015. *On Total
Edge Irregularity Strength of Generalized Web Graphs and Related
Graphs*. Mathematics in Computer Science (9):161-167
- Ivančo, J., & Jendrořl, S. 2006. *Total Edge Irregularity Strength of
Trees* *Discussiones Math. Graph Theory* (26): 449-456.

- Jayanthi, P. 2016. *Total Edge Irregularity Strength Of Disjoint Union Of Double Wheel Graphs*. *Proyecciones Journal Of Mathematics* (35): 251-262.
- Johnsonbaugh, R. 2001. *Discrete Mathematics*. Fifth edition. New Jersey : Prentice Hall.
- Marzuki, C. C., Salman, A., & Miller, M. 2013. *On Total Irregularity Strength of Cycles and Path*. *Far East Journal of Mathematical Sciences(FJMS)* 1(82):1-21.
- Marzuki, C. C., & Febrinanda, Y. 2017. *Nilai Ketakteraturan Total dari Graf Hasil Kali Comb P_m dan C_4* . *Jurnal Sains Matematika dan Statistika* Vol 3 No 2: 8-15
- Rosyida, I., & Indriati, D. (2019). *On Total Edge Irregularity Strength of Some Cactus Chain Graphs With Pendant Vertices*. *Journal Of Physics* (1211):1-10
- Saputro, S. W., Mardiana, N., & Purwasi, I. A. 2013. *The Metric Dimension of Comb Product Graph*. *Graph Theory Conference in Honor of Egawa 60th Birthday*. Artikel ini didapat dari:
http://www.rs.tus.ac.jp/egawa_60th_birthday/abstract/contributed_talk/suhadi_wido_saputro.pdf.
- Siddiqui, M. K., & Afzal, D. 2011. *On tvs of Subdivision of Star S_n* . *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*. 5 (11): 2146-2156.
- Siddiqui, M. K., & Afzal, D. 2013. *On tes of Disjoint Union of Helm Graphs*. *J. Math. Fund. Sci.*, (45): 163-171.

Tarawneh, I., Hasni, R., & Ahmad, A. 2016. *On The Edge Irregularity Strength Of Corona Product Of Graphs With Paths*. Applied Mathematics E-Notes (16):80-87.

Umilasari, R. 2015. *Bilangan Dominasi Jarak Dua Pada Graf-Graf Hasil Operasi Korona dan Comb*. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Wallis, W. D. 2001. *Magic Graph*. Boston: Birkhauser.