NILAI KETAKTERATURAN SISI TOTAL PADA GRAF DOVETAIL DENGAN TITIK PENDAN DAN GRAF-GRAF TERKAIT

Skripsi

Disusun sebagai salah satu syarat

Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

Oleh
Eka Nurdini
4111414021

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2018

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi yang berjudul "Nilai Ketakteraturan Sisi Total pada Graf Dovetail dengan Titik Pendan dan Graf-Graf Terkait" bebas plagiat dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan yang berlaku.

Semarang, 23 Januari 2019

Eka Nurdini

NIM 4111414021

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Nilai Ketakteraturan Sisi Total pada Graf Dovetail dengan Titik Pendan dan Graf-Graf Terkait

disusun oleh

Eka Nurdini

4111414021

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES pada tanggal 23 Januari 2019.

Panitia

Ketua

Prof. Dr. Sudarmin, M.Si.
NIP196601231992031003

Sekretaris

Drs. Arief Agoestanto, M.Si
NIP 196807221993031005

Ketua Penguji

Dr. Tri Sri Noor Asih S.Si., M.Si.
NIP 197706142008122002

Anggota Penguji
Pembimbing I

Dr. Isnaini Rosyida, S.Si, M.Si.
NIP 197302191998022001

Anggota Penguji
Pembimbing II

Dr. Mulyono, M.Si.
NIP 197009021997021001

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

"Man Jadda Wa Jada, Man Shobaro Zafiro".

PERSEMBAHAN

Dengan penuh rasa syukur kepada Allah SWT, skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ibu Suciatin, Ayah Abdur Rochim, Ibu Ervin, Bapak Riyadi. Orang tua sekaligus motivasi terbesar saya yang senantiasa memberi dukungan dan doa.
2. Adik-adikku Achmad Reza Fahlevi, Dinda Sekar Rahmi, Novia Dewi Afifi Khayana dan Muhammad Bagus Narayan yang menjadi penggugah kesadaran.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan nikmat serta hidayah-Nya dan tak lupa sholawat serta salam senantiasa tercurah kepada Rasulullah Muhammad SAW, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Nilai Ketakteraturan Sisi Total pada Graf Dovetail dengan Titik Pendan dan Graf-Graf Terkait”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Pendidikan Progam Studi Pendidikan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan serta dukungan dari berbagai pihak, oleh sebab itu penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih kepada :

1. Rektor Universitas Negeri Semarang yang telah memberikan kesempatan pada peneliti untuk menuntut ilmu di Universitas Negeri Semarang.
2. Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang yang telah memberikan ijin untuk melaksanakan penelitian.
3. Ketua Jurusan Matematika yang telah memberikan izin untuk melaksanakan penelitian.
4. Dr. Isnaini Rosyida, S.Si, M.Si. dan Dr. Mulyono, M.Si. selaku dosen pembimbing yang telah tulus dan sabar membimbing dan memberikan pengarahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Dr. Tri Sri Noor Asih S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang sabar memberi pengarahan.
6. Bapak/ Ibu dosen Jurusan Matematika atas seluruh ilmu yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyusun skripsi ini.
7. Teman-teman Matematika angkatan 2014 yang telah memberikan masukan-masukan dalam menyusun skripsi ini.
8. Semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu-persatu.

Semoga skripsi ini senantiasa dapat memberikan manfaat kepada penulis maupun kepada para pembaca, serta dapat memberikan manfaat pula bagi perkembangan dunia pendidikan.

Semarang, 23 Januari 2019

Penulis

ABSTRAK

Nurdini, E. 2019. *Nilai Ketakteraturan Sisi Total pada Graf Dovetail dengan Titik Pendan dan Graf-Graf Terkait.* Skripsi, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang, Pembimbing: Dr. Isnaini Rosyida, S.Si, M.Si. & Dr. Mulyono, M.Si.

Kata Kunci : *Irregular total labeling, Graph labeling, irregularity strength, total edge irregularity strength, dovetail graphs.*

Misal sebuah graf $G(V,E)$ dengan himpunan titik V tak kosong dan himpunan sisi E. Pelabelan total $\lambda: \mathrm{V} \cup \mathrm{E} \rightarrow \{1,2,\dots,\mathrm{k}\}$ disebut pelabelan total tak teratur sisi jika untuk setiap sisi berbeda maka bobot sisinya berbeda. Bobot sisi e pada pelabelan total λ adalah jumlah dari label sisi e dan semua label titik yang incident dengan e. Dengan kata lain, $\mathrm{w(xy)} = \lambda(\mathrm{xy}) + \lambda(\mathrm{x}) + \lambda(\mathrm{y})$. Nilai ketakteraturan sisi total pada graf G, dinotasikan dengan $\mathrm{tes}(G)$ adalah minimum label terbesar yang digunakan untuk melabeli titik dan sisi graf G dengan pelabelan total tak teratur sisi. Pada skripsi ini, penulis menyelidiki nilai ketakteraturan sisi total pada graf dovetail dengan titik pendan yang dinotasikan dengan D_n^n dan dua graf terkait graf tersebut yaitu subdivisi dari graf dovetail dengan titik pendan yang dinotasikan dengan SD_n^n dan graf amalgamasi subdivisi graf dovetail dengan titik pendan dan graf sikel $(SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)$. Hasil dari penelitian ini adalah $\mathrm{tes}(D_n^n) = \left\lceil \frac{3n+1}{3} \right\rceil$, $\mathrm{tes}(SD_n^n) = \left\lceil \frac{6n}{3} \right\rceil$ dan $\mathrm{tes}((SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)) = \left\lceil \frac{9n-3}{3} \right\rceil$.

ABSTRACT

Nurdini, E. 2019. *On Total Edge Irregularity Strengh of Dovetail Grapgh with Pendant Vertices and Its Related Graphs.* Final Project, Departement of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Universitas Negeri Semarang, Advisor : Dr. Isnaini Rosyida, S.Si, M.Si. & Dr. Mulyono, M.Si.

Keywords : *Irregular total labeling, Graph labeling, irregularity strength, total edge irregularity strength, dovetail graphs.*

Given a graph $G(V, E)$ with a non-empty set V of vertices and a set E of edges. A total labelling $\lambda: \mathrm{V} \cup \mathrm{E} \rightarrow \{1,2, \ldots, \mathrm{k}\}$ is called an edge irregular total labelling if the weight of every edge is distinct. The weight of an edge e, under the total labelling λ, is the sum of label of edge e and all labels of vertices that are incident to e. In other words, $\mathrm{w(xy)} = \lambda(\mathrm{xy}) + \lambda(\mathrm{x}) + \lambda(\mathrm{y})$. The total edge irregularity strength of G, denoted by $\operatorname{tes}(G)$ is the minimum k used to label graph G with the edge irregular total labelling. In this final project, authors investigate the total edge irregularity strength of dovetail graph with pendant vertices D_n^n, subdivision of dovetail graph with pendant vertices SD_n^n and Amalgamation between Subdivision of Dovetail graph with pendant vertices and cycle graph which is denoted as $(SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)$. The results of this research are $\operatorname{tes}(D_n^n) = \left\lceil \frac{3n+1}{3} \right\rceil$, $\operatorname{tes}(SD_n^n) = \left\lceil \frac{6n}{3} \right\rceil$ and $\operatorname{tes}((SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)) = \left\lceil \frac{9n-3}{3} \right\rceil$.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Gambar

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Banyak situasi dunia nyata dapat digambarkan dengan mudah melalui diagram yang terdiri dari sekumpulan titik dan garis yang menghubungkan pasangan tertentu dari titik-titik ini. Misalnya, titik-titik dapat mewakili orang, dan garis mewakili hubungan antar teman; atau titik-titiknya mungkin pusat komunikasi, dengan garis yang mewakili hubungan komunikasi. Perhatikan bahwa dalam diagram semacam itu dua titik yang diberikan belum tentu terhubung dengan garis. Abstraksi matematis situasi semacam ini memunculkan konsep graf (Bondy & Murty, 1976).

Makalah yang ditulis oleh Leonhard Euler tentang tujuh Jembatan Königsberg yang berjudul *Solutio Problematis Ad Geometriam Situs Pertinentis* dan diterbitkan pada 1736 dianggap sebagai tulisan pertama dalam sejarah teori graf. Rumus Euler yang berhubungan dengan jumlah sisi, titik, dan permukaan dari *polyhedron convex* dipelajari dan digeneralisasikan oleh Cauchy dan L'Huillier dan mewakili awal dari cabang matematika yang dikenal sebagai topologi.

Pelabelan pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàčk pada tahun 1964, Sadlàčk mendefinisikan pelabelan *magic* pada graf adalah pelabelan sisi dengan daerah hasil bilangan real, sehingga jumlah label sisi yang terkait pada titik yang lain, meskipun setiap titik pada graf tersebut derajatnya berbeda. Gagasan pelabelan total *magic* sisi diperkenalkan kembali oleh Kotzig dan Rosa pada tahun 1970 dengan nama berbeda yaitu graf dengan bobot *magic*. Pada tahun 1996, Ringel dan Llado mendefinisikan kembali jenis pelabelan ini dengan nama pelabelan *magic* sisi. Setelah itu Wallis dkk. menemukan konsep baru untuk membedakan dengan pelabelan *magic* sebelumnya (Nurdin, dkk., 2018).

Menurut Wallis (2001), pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf (titik/sisi) dengan bilangan bulat positif atau bilangan bulat non negatif. Jika domain dari fungsi (pemetaan) adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), jika domainnya adalah sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), jika domainnya titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling*). Ada beberapa jenis pelabelan, diantaranya pelabelan gracefull, pelabelan harmoni, pelabelan tak teratur, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib.

Pelabelan total tak teratur diperkenalkan oleh Martin Ba˘ca dkk.(2007). Mereka memperkenalkan dua jenis pelabelan total tak teratur, yaitu pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi. Pelabelan total tak teratur sisi sudah banyak diteliti oleh para ilmuwan sebelumnya yang tertera di buku Gallian (2011). Diantaranya Marzuki dkk. (2013) yang meneliti tentang nilai ketakteraturan total graf sikel dan graf *path*. Indriati dkk. (2015) yang meneliti tentang nilai ketakteraturan sisi total graf web dan graf-graf terkait. Ivančo dan Jendroˇl (2006) yang meneliti tentang nilai ketakteraturan sisi total graf pohon. Nurdin, Baskoro, M, & Gaos. (2010) yang meneliti tentang nilai ketakteraturan titik total graf pohon. Rosyida, Widodo, & Indriati (2018) yang meneliti tentang nilai ketakteraturan graf *caterpillar* dengan dua titik pendan pada setiap titik internal.

Seiring perkembangan zaman, kajian terhadap pelabelan mengalami perkembangan yang pesat. Salah satu perkembangan dari pelabelan adalah pelabelan total tak teratur total yang diperkenalkan oleh Marzuki, Salman dan Miller dalam makalahnya yang berjudul *On Total Irregularity Strength on Cycles and Paths*.

Pada skripsi ini akan dibahas pelabelan total tak teratur sisi, khususnya menentukan nilai ketakteraturan sisi total dari graf dovetail dengan *n* titik pendan yang dinotasikan dengan D_n^n dan dua graf terkait graf tersebut yaitu subdivisi dari graf dovetail dengan *n* titik pendan yang dinotasikan dengan SD_n^n dan graf amalgamasi subdivisi graf dovetail dengan titik pendan dan graf sikel $(SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, diperoleh beberapa rumusan masalah, antara lain sebagai berikut.

1. Bagaimana mengonstruksi fungsi pelabelan-k total tak teratur sisi pada graf dovetail dengan titik pendan, subdivisi graf dovetail dengan titik pendan serta graf amalgamasi subdivisi graf dovetail dengan titik pendan dan graf sikel?

2. Bagaimana nilai ketakteraturan sisi total pada graf dovetail dengan titik pendan, subdivisi graf dovetail dengan titik pendan serta graf amalgamasi subdivisi graf dovetail dengan titik pendan dan graf sikel?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka batasan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Graf berhingga, sederhana dan tidak berarah.
2. Pelabelannya adalah pelabelan-k total tak teratur sisi.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini antara lain sebagai berikut.

1. Dapat mengonstruksi fungsi pelabelan-k total tak teratur sisi pada graf dovetail dengan titik pendan, subdivisi graf dovetail dengan titik pendan serta graf amalgamasi subdivisi graf dovetail dengan titik pendan dan graf sikel.
2. Dapat menentukan nilai ketakteraturan sisi total pada graf dovetail dengan titik pendan, subdivisi graf dovetail dengan titik pendan serta graf amalgamasi subdivisi graf dovetail dengan titik pendan dan graf sikel.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Memperdalam pengetahuan tentang pelabelan, khususnya pelabelan-k total tak teratur sisi pada graf dovetail dengan titik pendan, subdivisi graf dovetail dengan titik pendan serta graf amalgamasi subdivisi graf dovetail dengan titik pendan dan graf sikel.

2. Mengetahui penentuan nilai ketakteraturan sisi total dari suatu graf, khususnya graf dovetail dengan titik pendan, subdivisi graf dovetail dengan titik pendan serta graf amalgamasi subdivisi graf dovetail dengan titik pendan dan graf sikel.

1.6 Sistematika Penyusunan Skripsi

Secara garis besar penulisan skripsi ini dibagi menjadi tiga bagian, yaitu bagian awal, bagian pokok dan bagian akhir dengan penjelasan masing-masing bagian berikut.

1. Bagian awal

   Bagian awal skripsi meliputi halaman judul, halaman kosong, pernyataan keaslian tulisan, halaman pengesahan, motto dan persembahan, kata pengantar, abstrak, daftar isi, daftar tabel, daftar gambar dan daftar lampiran.

2. Bagian pokok

   Secara garis besar bagian pokok skripsi terdiri atas lima bab, yaitu:

   BAB 1 PENDAHULUAN

   Bab ini memuat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penyusunan skripsi.

   BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

   Bab ini memuat konsep-konsep yang dijadikan landasan teori yang mendasari pemecahan masalah dalam penelitian ini yaitu konsep dasar graf, jenis-jenis graf dan pelabelan graf.

BAB 3 METODE PENELITIAN

Bab ini berisi tentang metode-metode yang digunakan dalam penulisan skripsi.

BAB 4 HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Bab ini mengemukakan hasil penelitian dan pembahasan terkait pelabelan-k total tak teratur sisi dan nilai ketakteraturan sisi total pada graf dovetail.

BAB 5 PENUTUP

Bab ini mengemukakan simpulan yang diperoleh dari hasil telaah dan saran yang berkaitan dengan simpulan.

3. Bagian akhir

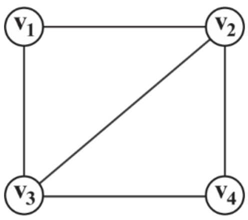
Bagian akhir berisi daftar pustaka dan lampiran yang mendukung penulisan skripsi.

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Menurut Bondy dan Murty (1976) graf G adalah tiga urutan himpunan $(V\ (G), E\ (G), \psi_G)$ yang terdiri dari himpunan titik tak kosong $V(G)$, himpunan sisi $E(G)$ dan fungsi *insidence* (keterkaitan) setiap sisi di G, yang merupakan pasangan tak beraturan (tidak harus berbeda) setiap titik di G. Jika e adalah sisi dan u, v adalah titik sehingga $\psi_G(e) = uv$, maka e dikatakan *incident* dengan u dan v; titik u dan v disebut ujung-ujung e.

Jumlah titik dari graf G disebut *order* yang dinotasikan dengan $|V|$, sedangkan jumlah sisi dari graf G disebut *size* yang dinotasikan dengan $|E|$. Sebagai contoh, Gambar 2.1 menunjukkan sebuah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E, yaitu $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$. Dengan demikian *order* graf G adalah $|V| = 4$ dan *size* graf G adalah $|E| = 5$.



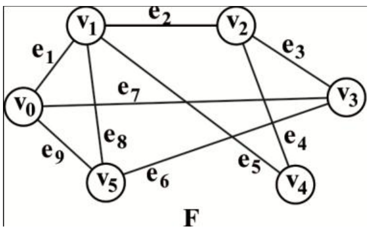
Gambar 2.1. Graf G

Dua titik u dan v dikatakan *adjacent* jika $uv \in E(G)$. Jika $e = uv \in E(G)$, maka u dan v masing-masing dikatakan *incident* dengan e (Chartrand, 1986).

Pada Gambar 2.1 dapat dilihat bahwa titik v_1 *adjacent* dengan titik v_2 dan v_4, tetapi tidak *adjacent* dengan titik v_3. Pada Gambar 2.1 dapat dilihat juga bahwa sisi v_2v_3 *incident* dengan titik v_2 dan v_3, sisi v_2v_4 *incident* dengan titik v_2 dan v_4, tetapi sisi v_1v_2 tidak *incident* dengan titik v_3 maupun titik v_4.

Menurut Bondy dan Murty (1997) sebuah jalan (walk) dalam graf G adalah barisan $W = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_kv_k$, yang suku-sukunya bergantian antara titik dan sisi sedemikian hingga $1 \leq i \leq k$, ujung dari e_i adalah v_{i-1} dan v_i. Titik v_0 disebut titik awal (titik asal), titik v_k disebut titik akhir (titik terminus) dan titik $v_i, 1 < i < k$, disebut titik internal. Panjang sebuah jalan adalah banyaknya sisi dalam jalan tersebut.

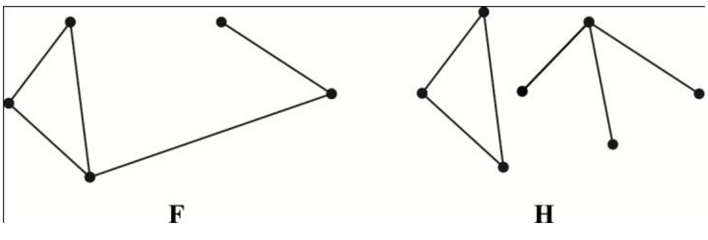
Jika semua sisi pada sebuah jalan berlainan, maka jalan tersebut disebut jejak (*trail*). Jejak yang titik awal dan titik akhirnya sama disebut jejak tertutup. Jika titik-titik dari $v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_iv_i \dots e_kv_k$ dari jalan W berlainan, maka W disebut lintasan (*path*). Lintasan tertutup dinamakan sikel, atau dengan kata lain sikel adalah jejak tertutup yang titik awal dan titik internalnya berlainan. Sikel dengan banyaknya titik n, dinotasikan dengan C_n (Bondy and Murty, 1976).



Gambar 2.2 Graf F

Gambar 2.2 adalah contoh graf yang didalamnya terdapat beberapa jalan, jejak, lintasan dan sikel. Salah satu jalan pada graf tersebut adalah $v_0e_9v_5e_6v_3e_7v_0e_9v_5e_8v_1$. Contoh jejak pada graf F adalah $v_0e_1v_1e_2v_2e_4v_4e_5v_1e_8v_5$. Contoh lintasan pada graf F adalah $v_3e_3v_2e_4v_4e_5v_1e_8v_5e_9v_0$. Contoh sikel pada graf F adalah $v_1e_5v_4e_4v_2e_2v_1$.

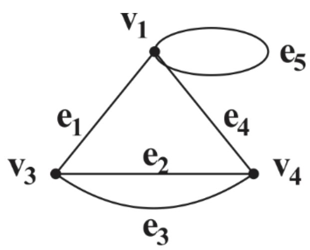
Sebuah Graf G dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap dua titik G yang berbeda terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sebaliknya, jika hal tersebut tidak dipenuhi maka graf G disebut tak terhubung. Sebuah komponen graf G adalah sebuah graf bagian terhubung maksimal (titik dan sisi) dari G. Graf H dikatakan graf bagian terhubung maksimal dari graf G, jika tidak ada graf bagian lain dari graf G yang terhubung dan memuat H (Chartrand dan Lesniak, 1986). Gambar 2.3 merupakan contoh graf terhubung dan graf tak terhubung. Graf F memiliki satu komponen dan graf H memiliki dua komponen.



Gambar 2.3. (a) Graf F graf terhubung (b) Graf G graf tak terhubung

2.2 Jenis-jenis Graf

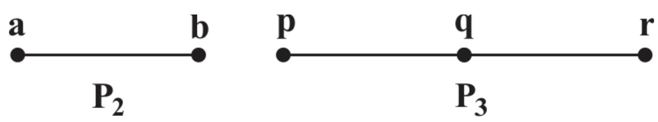
Menurut Johnsonbaugh (2001) Suatu graf tanpa *loop* dan sisi rangkap *(parallel edge)* disebut graf sederhana *(simple graf)*. Graf G pada Gambar 2.1 merupakan graf sederhana.



Gambar 2.4. Graf dengan *loop* dan sisi rangkap

Sebuah *loop* merupakan sebuah sisi yang terhubung pada suatu titik yang sama. Sisi rangkap adalah dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama. Graf pada Gambar 2.4 bukan graf sederhana karena mengandung *loop* dan sisi rangkap. Sisi e_2 dan e_3 merupakan sisi rangkap karena menghubungkan dua titik yang sama yaitu v_3 dan v_4. Sedangkan sisi e_5 merupakan *loop* karena masing-masing terhubung pada titik v_1 itu sendiri.

Graf *path* adalah graf sederhana yang terdiri dari lintasan tunggal. Graf *path* dengan n titik dinotasikan dengan P_n yang memiliki $n-1$ sisi. Suatu titik berderajat satu disebut titik daun *(pendant vertex)* (Budayasa, 2007). Gambar 2.5 merupakan contoh graf *path*. Titik a, b, p dan r adalah contoh titik-titik pendan.

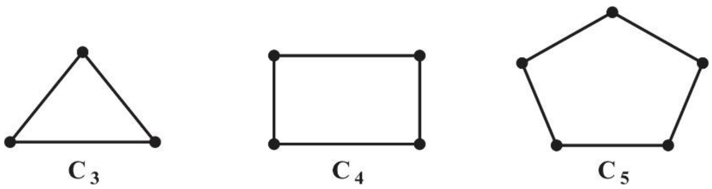


Gambar 2.5. Graf *Path*

Suatu graf G dikatakan berhingga jika banyaknya titik maupun sisi pada G jumlahnya berhingga dan dikatakan tak berhingga apabila sebaliknya (Vasudev, 2006).

Graf berarah atau digraph $G(V, E)$ memiliki himpunan titik tak kosong dan himpunan sisi berarah (busur). Sisi berarah terkait dengan pasangan berurutan titik. Sisi berarah yang terkait dengan pasangan titik (u, v) dimulai di titik u dan berakhir di titik v. Sedangkan graf tak berarah adalah graf yang rusuknya tidak mempunyai orientasi arah (Rosen K. H., 2012).

Graf sikel merupakan barisan titik-titik $u_0,\ u_1,\ldots,u_n$ dengan $n \geq 3, u_0 = u_n$ dan $u_0,\ u_1,\ldots,u_n$ adalah titik-titik yang berbeda. Suatu graf sikel dengan panjang n atau mempunyai sejumlah n titik dilambangkan dengan C_n atau $n - cycle$ (Chartrand dan Oellermann, 1993). Gambar 2.6 merupakan contoh graf sikel.

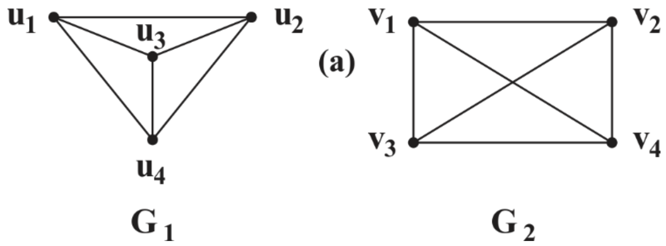


Gambar 2.6. Graf Sikel

Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik $(G_1 \cong G_2)$ jika terdapat pemetaan satu-satu $\phi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$, sedemikian sehingga dua titik v_i dan

v_j *adjacent* dalam graf G_1 jika dan hanya jika titik $\phi(v_i)$ dan $\phi(v_j)$ *adjacent* dalam graf G_2 (Chartrand, 1986).

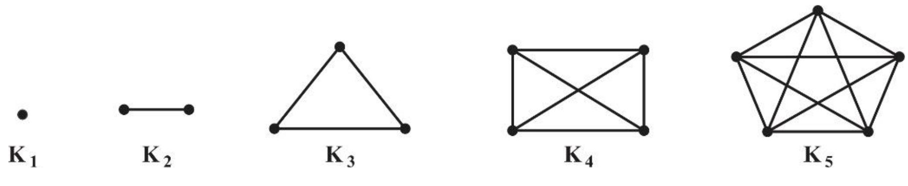
Graf G_1 dan G_2 pada Gambar 2.6 merupakan contoh dua buah graf yang isomorfik. Pemetaannya adalah $\phi: V(G_1) \to V(G_2)$, dengan $\phi(u_i) = v_i, (i = 1,2,3,4)$.



Gambar 2.7. Dua graf yang isomorfik ($G_1 \cong G_2$)

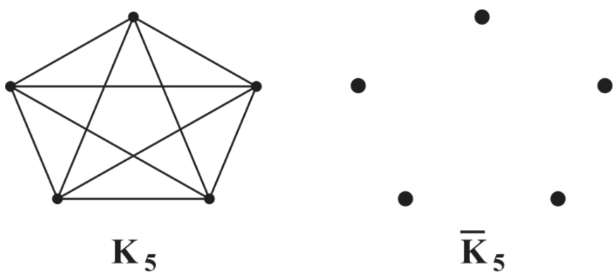
Graf sederhana yang setiap titiknya terhubung membentuk sebuah sisi disebut graf lengkap. Berdasarkan isomorfisma, hanya ada satu graf lengkap untuk suatu n titik; graf lengkap dilambangkan dengan K_n (Bondy and Murty, 1976).

Gambar 2.8 merupakan contoh lima graf lengkap. Terlihat bahwa setiap titik pada masing-masing graf tersebut *adjacent*.



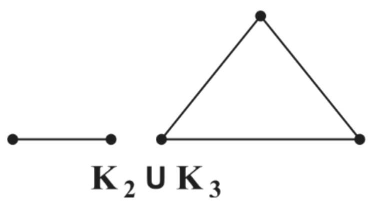
Gambar 2.8. Graf Lengkap

Komplemen graf G yang dinotasikan dengan $\overline{G}$, adalah graf dengan $V(\overline{G}) = V(G)$ dan uv merupakan sisi dari $\overline{G}$ jika dan hanya jika sisi tersebut bukan sisi dari G (Chartrand dan Oellermann, 1993). Gambar 2.9 merupakan contoh graf K_5 dan $\overline{K_5}$.



Gambar 2.9. Graf dan komplemennya

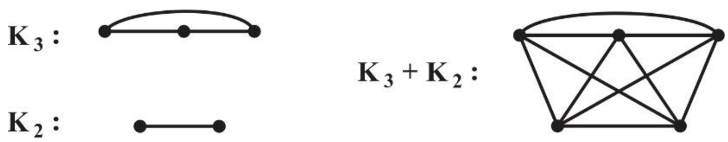
Gabungan dari dua graf sederhana $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_1 = (V_2, E_2)$ adalah graf sederhana dengan himpunan titik $V_1 \cup V_2$ dan himpunan sisi $E_1 \cup E_2$. Gabungan dari G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$ (Rosen K. H., 2012). Gambar 2.10 merupakan contoh gabungan graf K_2 dan K_3



Gambar 2.10. Gabungan dari graf K_2 dan K_3

Join dari dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G_1 + G_2$, adalah graf yang terdiri dari perpaduan $G_1 \cup G_2$ dan $E_1 \cup E_2 \cup \{uv | u \in V_1, v \in V_2$ (Chartrand dan Oellermann, 1993).

Graf $K_3 + K_2$ ditunjukkan oleh Gambar 2.5. Setiap titik dari masing-masing graf saling dihubungkan oleh sebuah sisi baru sehingga kedua graf terhubung.



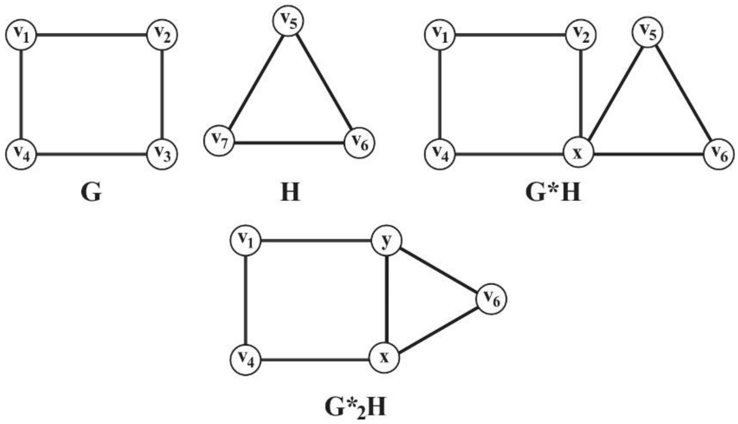
Gambar 2.11. *Join* dari K_3 dan K_2

Operasi amalgamasi titik dari pasangan titik graf (G, u) bersama (H, v) adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan titik u dan v menjadi satu titik. Sedangkan operasi amalgamasi sisi apabila diambil dua titik yang saling *adjacent* dari masing-masing graf. Notasi yang digunakan untuk menyatakan operasi amalgamasi adalah ”$*$” untuk amalgamasi titik karena hanya diambil satu titik dari masing-masing graf sedangkan ”$*_2$” untuk amalgamasi sisi karena diambil dua titik dari masing-masing graf (Khan, Poshni, & Gross, 2010).

Selanjutnya, diberikan graf G dan H sebagaimana pada Gambar 2.6., jika dilakukan amalgamasi dari titik v_3 dan v_7, maka operasi amalgamasi dinotasikan dengan

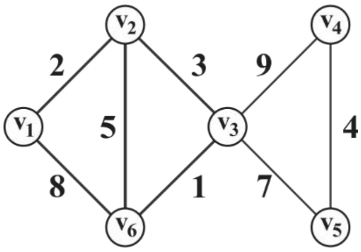
$$(G, v_3) * (H, v_7) = (R, x),$$

dengan R adalah graf baru yang terbentuk dan $x \in V(R)$ yang diperoleh dari hasil amalgamasi titik. Gambar 2.11 merupakan contoh amalgamasi titik dan amalgamasi sisi graf G dengan graf G.



Gambar 2.12. Operasi amalgamasi titik $G * H$ dan operasi amalgamasi sisi $G *_2 H$

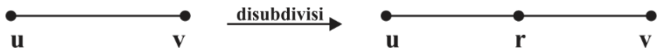
Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah bilangan yang disebut bobot (Bondy & Murty, 1976). Gambar 2.13 merupakan contoh graf berbobot.



Gambar 2.13. Contoh graf berbobot

Gambar tersebut menunjukkan bahwa bobot masing-masing sisinya, dinotasikan dengan $w(v_i v_j)$, adalah $w(v_1 v_2) = 2, w(v_1 v_6) = 8, w(v_2 v_3) = 3, w(v_2 v_6) = 5, w(v_3 v_6) = 1, w(v_3 v_4) = 9, w(v_3 v_5) = 7$ dan $w(v_4 v_5) = 4$.

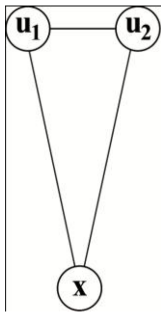
Jika $e = uv$ adalah garis G, dan r bukan titik G, maka e dibagi lagi ketika e diganti dengan garis ur dan rv. Jika setiap baris G disubdivisi, graf yang dihasilkan adalah graf subdivisi $S(G)$ (Harary, 1994). Gambar 2.14 merupakan contoh subdivisi graf.



Gambar 2.14. Graf Subdivisi

Definisi 2.1

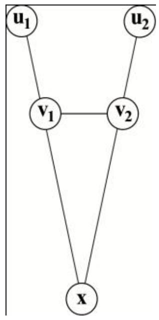
Menurut Arockiamary (2016), graf dovetail D_n adalah graf $P_n + K_1, n \geq 2$. Graf dovetail memiliki $n + 1$ titik dan $2n - 1$ sisi. Gambar 2.15 merupakan contoh graf dovetail.



Gambar 2.15 Graf D_2

Definisi 2.2

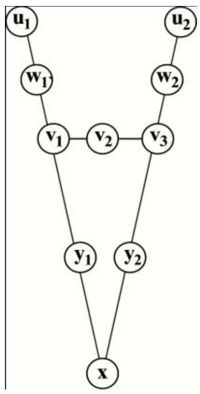
Berdasarkan definisi tersebut graf dovetail dengan titik pendan D_n^n didefinisikan sebagai graf dovetail yang memiliki himpunan n titik pendan pada setiap titik di P_n. Graf dovetail dengan titik pendan memiliki $2n + 1$ titik dan $3n - 1$ sisi. Gambar 2.16 merupakan contoh graf dovetail dengan titik pendan.



Gambar 2.16. Graf D_2^2

Definisi 2.3

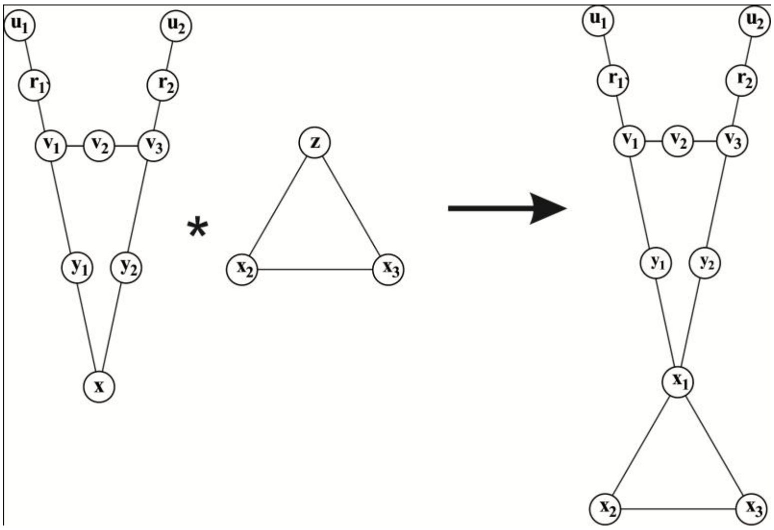
Subdivisi graf dovetail dengan titik pendan SD_n^n merupakan subdivisi pada setiap sisi D_n^n dari graf dovetail dengan titik pendan. Graf subdivisi dovetail dengan titik pendan memiliki $3n + 1$ titik dan $4n - 1$ sisi. Gambar 2.17 merupakan contoh subdivisi graf dovetail dengan titik pendan.



Gambar 2.17. Graf SD_2^2

Definisi 2.4

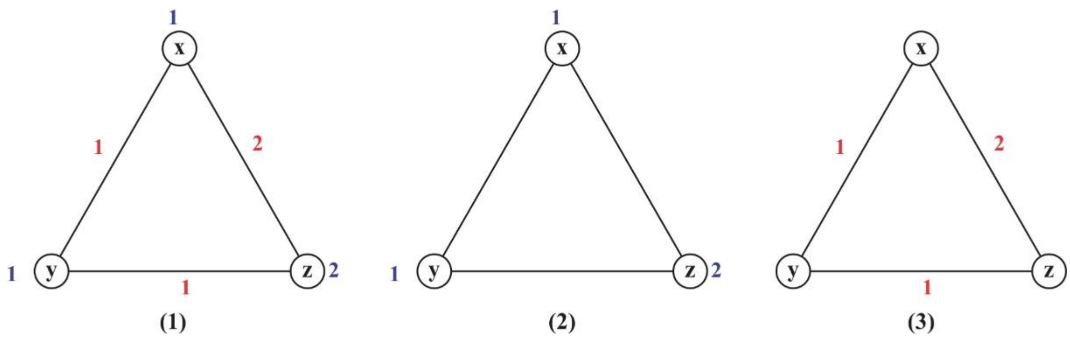
Graf amalgamasi subdivisi graf dovetail dengan titik pendan SD_n^n dan graf sikel C_{3n-3}, disimbolkan dengan $(SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)$, $n \geq 2$. Graf amalgamasi subdivisi graf dovetail dengan titik pendan dan graf sikel mempunyai $8n - 4$ titik dan $9n - 5$ sisi. Gambar 2.18 merupakan contoh graf amalgamasi subdivisi graf dovetail dengan titik pendan SD_n^n dan graf sikel C_{3n-3}.



Gambar 2.18. Graf $(SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)$

2.3 Pelabelan Graf

Menurut Wallis (2001) Pelabelan suatu graf adalah suatu pemetaan yang membawa elemen-elemen graf ke bilangan-bilangan bulat positif atau non negatif. Berdasarkan domain dari pemetaan ini ada tiga jenis pelabelan yaitu pelabelan total jika domainnya himpunan titik dan sisi, pelabelan titik jika domainnya himpunan titik, atau pelabelan sisi jika domainnya himpunan sisi. Wallis juga menjelaskan bobot (*weight*) dari graf adalah jumlah dari semua label yang berhubungan dengan elemen graf tersebut. Bobot dari titik v dengan pelabelan λ adalah $w(v) = \lambda(v) + \sum_{uv \in E} \lambda(uv)$, dan bobot dari sisi uv adalah $w(uv) = \lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v)$. Gambar 2.19 merupakan contoh pelabelan total, pelabelan titik dan pelabelan sisi.



Gambar 2.19. (1) Pelabelan total (2) Pelabelan titik (3) Pelabelan sisi

Berdasarkan definisi bobot sisi, Martin Baˇca dkk. mendefinisikan suatu jenis pelabelan yang disebut pelabelan-k total tak teratur sisi dengan domain himpunan titik dan sisi sebagai berikut:

Definisi 2.3.1

Suatu pelabelan $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1,2,\dots,k\}$ dikatakan pelabelan$-k$ total tak teratur sisi jika setiap dua sisi $e = u_1v_1$ dan $f = u_2v_2$ yang berbeda di G memenuhi $w(e) \neq w(f)$, dengan $w(e) = \lambda(u_1) + \lambda(e) + \lambda(v_1)$ dan $w(f) = \lambda(u_2) + \lambda(f) + \lambda(v_2)$.

Definisi 2.3.2

Nilai ketakteraturan sisi total *(total edge irregularity strength)* graf G yang dinotasikan dengan $\text{tes}(G)$ adalah minimum label terbesar yang digunakan untuk melabeli titik dan sisi graf G dengan pelabelan total tak teratur sisi (Baca, Jendrol, Miller, & Ryan, 2007).

Teorema 2.3.1

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ graf dengan himpunan titik V dan himpunan tak kosong E, maka

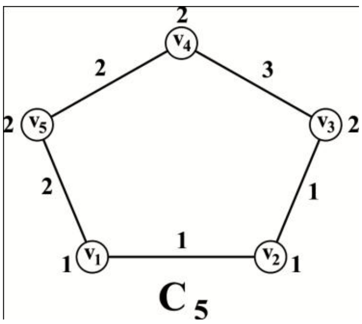
$$\left\lceil \frac{|E(G)|+2}{3} \right\rceil \leq \text{tes}(G) \leq |E(G)| \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

(Baca, Jendrol, Miller, & Ryan, 2007)

Bukti

Untuk menentukan batas atas, setiap titik di G diberi label 1 dan setiap sisi dari G secara terurut diberi label $1,2,3,\ldots|E|$. Dengan menggunakan label tersebut akan diperoleh $w(e) \neq w(f)$ untuk sembarang dua sisi e dan f yang berbeda dari G. Hal ini menunjukkan bahwa pelabelan tersebut adalah pelabelan total tak teratur sisi dengan label terbesar $|E|$, sehingga batas atas nilai ketakteraturan sisi total yang dinotasikan dengan tes(G), adalah $|E|$.

Untuk batas bawah, dimisalkan φ adalah pelabelan total tak teratur sisi yang optimal dari G. Bobot terbesar sisi e dari G, yaitu $w(e) \geq |E| + 2$. Bobot tersebut merupakan jumlah dari tiga label, sehingga setidaknya terdapat paling sedikit satu sisi atau titik yang diberi label $\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa batas bawah tes(G) adalah $\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil$.



Gambar 2.20. Pelabelan-3 total tak teratur sisi pada C_5

Gambar 2.13 merupakan contoh graf yang titik dan sisinya diberi label bilangan bulat positif sehingga disebut pelabelan total. Berdasarkan batas bawah (1), diperoleh batas bawah tes$(C_5) \geq \left\lceil\frac{|E(C_5)|+2}{3}\right\rceil = \left\lceil\frac{7}{3}\right\rceil = 3$. Pelabelan setiap titik pada C_5 yaitu

$$\lambda(v_1) = 1, \lambda(v_2) = 1, \lambda(v_3) = 2, \lambda(v_4) = 2, \lambda(v_5) = 2,$$

sedangkan label setiap sisinya yaitu

$$\lambda(v_1v_2) = 1, \lambda(v_2v_3) = 1, \lambda(v_3v_4) = 3, \lambda(v_4v_5) = 2, \lambda(v_5v_1) = 2.$$

Bobot setiap sisi pada Gambar 2.13 dapat ditentukan dengan menjumlahkan label sisi dengan label titik yang *incident* dengan sisi tersebut. Bobot setiap sisi graf C_5 tersebut yaitu

$$w(v_1v_2) = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$w(v_2v_3) = 1 + 1 + 2 = 4,$$

$$w(v_3v_4) = 2 + 3 + 2 = 7,$$

$$w(v_4v_5) = 2 + 2 + 2 = 6,$$

$$w(v_5v_1) = 2 + 2 + 1 = 5.$$

Berdasarkan pelabelan yang diberikan seperti pada Gambar 2.13 terlihat bahwa bobot setiap sisi berbeda, yaitu $w(v_1v_2) \neq w(v_2v_3) \neq w(v_3v_4) \neq w(v_4v_5) \neq w(v_5v_1)$. Inilah yang disebut pelabelan total tak teratur sisi. Pelabelan yang dilakukan menghasilkan nilai minimum dari label terbesar untuk titik dan sisi pada graf C_5 adalah $k = 3$, jadi tes$(C_5) = 3$.

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dalam penelitian ini diperoleh dua kesimpulan, yaitu:

1. Pelabelan-k total tak teratur sisi dapat diberikan pada graf dovetail dengan titik pendan, subdivisi graf dovetail dengan titik pendan serta graf amalgamasi subdivisi graf dovetail dengan titik pendan dan graf sikel, dengan aturan pelabelan tertentu, seperti disajikan pada teorema 1, 2 dan 3.
2. Nilai ketakteraturan sisi total dari beberapa graf dovetail, untuk suatu bilangan bulat positif $n \geq 2$, dapat ditentukan sebagai berikut :
   a. Nilai ketakteraturan sisi total pada graf dovetail dengan titik pendan adalah tes$(D_n^n) = \left\lceil \frac{3n+1}{3} \right\rceil$.
   b. Nilai ketakteraturan sisi total dari subdivisi graf dovetail dengan titik pendan adalah tes$(SD_n^n) = \left\lceil \frac{6n}{3} \right\rceil$.
   c. Nilai ketakteraturan sisi total dari graf amalgamasi subdivisi graf dovetail dengan titik pendan dan graf sikel adalah tes$((SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)) = \left\lceil \frac{9n-3}{3} \right\rceil$.

5.2 Saran

Pelabelan total tak teratur (*irregular total labelling*) merupakan pelabelan yang memberikan kebebasan terhadap peneliti dalam hal pola pelabelan. Pola pelabelan disusun sebagai salah satu langkah awal untuk menentukan nilai ketakteraturan graf. Sebuah graf sederhana dapat memiliki lebih dari satu pola pelabelan. Pola pelabelan yang efektif menghasilkan nilai ketakteraturan graf tersebut, sehingga untuk menemukan nilai ketakteraturan sebuah graf sederhana cukup sulit. Penelitian ini masih terbatas pada graf dovetail dengan titik pendan dan dapat dikembangkan untuk graf dovetail yang lebih kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

Arockiamary, S. T. (2016). Total edge irregularity strength of diamond snake and dove. *IJPAM*(109), 125-132.

Baca, M., Jendrol, S., Miller, M., & Ryan, J. (2007). On Irregular Total Labellings. *Discrete Mathematics 307*, 1378-1388.

Bondy, J. A., & Murty, U. S. (1976). *Graph Theory with Applications.* Ontario: Departement of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo.

Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graf dan Aplikasinya.* Surabaya: Unesa University Press.

Chartrand, G. (1986). *Introductory Graph Theory.* New York: Dover Publications Inc.

Chartrand, G., & Lesniak, L. (1996). *Graph and Digraph Third Edition.* Florida: Chapman and Hall/CRC.

Chartrand, G., & Oellermann, O. R. (1993). *Applied and Algorithmic Graph Theory.* New York: McGraw-Hill Inc.

Gallian, J. A. (2011). *A Dynamic Survey of Graph Labeling.* Minnesota: Department of Mathematics and Statistics, University of Minnesota Duluth.

Harary, F. (1994). *Graph Theory.* Michigan: Addison-Wesley Publishing Company.

Indriati, D., Widodo, Wijayanti, I. E., Sugeng, K. A., & Baˇca, M. (2015). On To tal Edge Irregularity Strength o f Generalized Web Graphs and Related Graphs. *Mathematics in Computer Science*.

Ivančo, J., & Jendroˇl, S. (2006). Total edge irregularity strength of trees. *Discussiones Math. Graph Theory*(26), 449-456.

Johnsonbaugh, R. (2001). *Discrete Mathematics. Fifth edition.* New Jersey: Prentice Hall.

Khan, I. F., Poshni, M. I., & Gross, J. L. (2010). Genus distribution of graph amalgamations: Pasting when one root has arbitrary degree. *ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA 3*, 121-138.

Marzuki, C. C., Salman, A. N., & Miller, M. (2013). On The Total Irregularity Strength of Cycles and Paths. *Far East J. Math. Sci.*, 1-21.

Nurdin, Baskoro, E. T., M, A. N., & Gaos, N. N. (2010). On the total vertex irregularity strength of trees. *Discrete Math 310*, 3043-3048.

Nurdin, Ungko, T. S., Gormantara, J., Abdullah, A., Aulyah, S., & Nikita. (2018). On Super Edge-magic Total Labeling of Modified Watermill. *IOP Conf. Series: Journal of Physics*, 1.

Rosen, K. H. (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications* (sevent ed.). New York: McGraw-Hill.

Rosen, K. H. (2013). *Global Edition Discrete Mathematics and Its Applications Seventh Edition.* New York: McGraw-Hill.

Rosyida, I., Widodo, & Indriati, D. (2018). On total irregularity strength of caterpillar graphs with two leaves on each internal vertex. *J of Phys: Conference Series 1008*(1), 12046.

Vasudev, C. (2006). *Graph Theory with Applications.* New Delhi: New age international publisher.

Wallis, W. D. (2001). *Magic Graph.* Boston: Birkhauser.