EIGENMODE MATRIKS ATAS ALJABAR MAX-PLUS

Skripsi

diajukan untuk memenuhi salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

Ida Fitria

4111414010

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2019

PERNYATAAN

Dengan ini, saya

nama : Ida Fitria

NIM : 4111414010

program studi : Matematika S1

menyatakan bahwa skripsi berjudul *Eigenmode Matriks atas Aljabar Max-Plus* ini benar-benar karya saya sendiri bukan jiplakan dari karya orang lain atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan kode etika keilmuan yang berlaku baik sebagian atau seluruhnya. Pendapat atau temuan orang atau pihak lain yang terdapat dalam skripsi ini telah dikutip atau dirujuk berdasarkan kode etik ilmiah. Atas pernyataan ini, saya secara pribadi siap menanggung resiko/sanksi hukum yang dijatuhkan apabila ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya ini.

Semarang, 29 Juli 2019

Ida Fitria
NIM. 4111414010

PENGESAHAN

Skripsi berjudul *Eigenmode Matriks atas Aljabar Max-Plus* karya Ida Fitria 4111414010 ini telah dipertahankan dalam Ujian Skripsi Universitas Negeri Semarang pada tanggal 29 Juli 2019 dan disahkan oleh Panitia Ujian.

Semarang, 29 Juli 2019

Panitia

Ketua	Sekretaris
Dr. Sugianto, M.Si	Drs. Arief Agoestanto, M.Si
NIP. 196102191993031001	NIP. 196807221993031005

Ketua Penguji

Dra. Rahayu Budhiati Veronica, M.Si
NIP. 196406131988032002

Anggota Penguji/ Pembimbing I	Anggota Penguji/ Pembimbing II
Dra. Kristina Wijayanti, MS.	Drs. Mashuri, M.Si.
NIP. 196012171986012001	NIP. 196708101992031003

MOTTO

Kegagalan hanya terjadi bila kita menyerah (Lessing)

Jangan menunggu. Takkan pernah ada waktu yang tepat (Napoleon Hill)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

(1) Kedua orang tua saya yang selalu memberikan do’a dan motivasi.

(2) Rekan Jurusan Matematika, khusunya Program Studi Matematika Angkatan 2014.

(3) Universitas Negeri Semarang.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan nikmat-Nya yang senantiasa tercurah sehingga penyusunan skripsi berjudul *Eigenmode Matriks atas Aljabar Max-Plus* sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains Matemtika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang ini dapat terselesaikan dengan baik.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak berupa saran, bimbingan maupun petunjuk. Oleh karena itu, dengan penuh kerendahan hati penulis mengucapkan terimakasih kepada:

(1) Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum, Rektor Universitas Negeri Semarang;

(2) Dr. Sugianto, M.Si, Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang;

(3) Drs. Arief Agoestanto, M.Si, Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang;

(4) Dra. Kristina Wijayanti, MS., Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, motivasi, saran, arahan dan dukungan selama penyusunan skripsi;

(5) Drs. Mashuri, M.Si., Dosen Pembimbing II sekaligus Ketua Prodi Matematika yang telah memberikan motivasi, bimbingan, saran, arahan dan dukungan selama penyusunan skripsi;

(6) Dra. Rahayu Budhiati Veronica, M.Si, Dosen penguji yang telah memberikan arahan, kritik dan saran dalam perbaikan penyelesaian skripsi;

(7) Dr. Scolastika Mariani, M.Si, Dosen Wali yang telah memberikan arahan selama penulis menempuh studi di Universitas Negeri Semarang;

(8) Seluruh dosen dan staf karyawan di lingkungan Universitas Negeri Semarang khususnya di Jurusan Matematika, yang telah berkenan mendidik, memberikan ilmu, pengalaman dan inspirasi selama penulis belajar di kampus;

(9) Bapak Suharjito dan Ibu Luluk Khumaedah, kedua orang tua saya yang selalu memberikan do’a, bimbingan, kasih sayang dan motivasi;

(10) Rekan Jurusan Matematika, khususnya Program Studi Matematika Angkatan 2014 yang selalu memberikan semangat;

(11) Semua pihak yang telah membantu dan mendukung penulis dalam penyusunan skripsi yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan agar dapat menghasilkan karya yang lebih baik lagi. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan para pembaca.

Semarang, 29 Juli 2019

Penulis

ABSTRAK

Fitria, Ida. (2019). *Eigenmode Matriks atas Aljabar Max-Plus*. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang. Pembimbing I Dra. Kristina Wijayanti, MS. Pembimbing II Drs. Mashuri, M.Si.

Kata Kunci: *eigenmode*, matriks tereduksi reguler, aljabar max-plus.

Penelitian ini membahas mengenai *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus. *Eigenmode* dari matriks reguler A adalah suatu pasangan vektor $(\eta, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sedemikian hingga untuk setiap $k \geq 0$ memenuhi persamaan $A \otimes (k \times \eta + v) = (k+1) \times \eta + v$. Vektor η pada *eigenmode* dari matriks reguler berkaitan erat dengan vektor waktu sikel. Elemen-elemen vektor η pada *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus bernilai dua kemungkinan, yaitu semua elemennya bernilai konstan sama atau beberapa elemennya bernilai berbeda dengan nilai elemen lainnya.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menjelaskan langkah-langkah menentukan *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus dan sifat-sifatnya. Penelitian ini menggunakan metode studi pustaka yaitu dengan mengumpulkan referensi yang berkaitan dengan *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus.

Dari penelitian ini diperoleh: (1) langkah-langkah menentukan *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus yaitu i) mengambil matriks tereduksi reguler $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$, ii) menentukkan matriks blok segitiga atas dari A. Misalkan terdapat sebanyak q blok matriks $A_{i,i}$, $i \in \underline{q}$ pada diagonal utamanya, iii) menghitung nilai eigen dari blok matriks terakhir pada diagonal utamanya yaitu $\lambda_q = \lambda(A_{q,q})$ dengan vektor eigen v_q. Ambil $\xi_q = \lambda_q$ dan v_q adalah vektor eigen v_q, iv) menghitung nilai ξ_i dan v_i untuk setiap blok matriks $A_{i,i}$, $i \in \underline{q-1}$ secara berurutan, mulai dari $i = q-1$ sampai $i = 1$ dimana $\xi_i = \bigoplus_{j \in \mathcal{H}_i} \xi_j \oplus \lambda_i$ dan $v_i = \left(-\xi_i \otimes A_{i,i}\right)^* \otimes \left(\bigoplus_{j \in \mathcal{H}_i} -\xi_i \otimes A_{i,j} \otimes v_j\right)$ dengan $\lambda_i = \lambda(A_{i,i})$, $i \in \underline{q-1}$ dan $\mathcal{H}_i = \left\{ j \in \underline{q} : j > i,\ A_{i,j} \neq \mathcal{E} \right\}$, v) menentukan vektor η_i untuk setiap blok matriks $A_{i,i}$, $i \in \underline{q}$, yaitu vektor yang semua elemennya bernilai ξ_i dan ukurannya sesuai dengan ukuran vektor v_i pada masing-masing blok matriks $A_{i,i}$, $i \in \underline{q}$, vi) membentuk vektor η dan v yang urutan elemen-elemennya sesuai urutan baris dan kolom pada matriks blok segitiga atas dari A, yaitu dengan menyusun semua elemen pada vektor η_i dan v_i, $i \in \underline{q}$ secara berurutan dari atas ke bawah, mulai dari $i = 1$ sampai $i = q$, vii) mengurutkan kembali urutan elemen pada vektor η dan v sesuai dengan urutan baris dan kolom pada matriks tereduksi reguler A, sehingga diperoleh *eigenmode* dari matriks tereduksi regular A yaitu pasangan vektor (η, v); (2) sifat *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus adalah tidak tunggal dan berupa pasangan vektor dengan semua elemen vektor merupakan bilangan real.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar merupakan salah satu cabang ilmu dari matematika yang mempelajari tentang struktur dan simbol-simbol dalam matematika, serta aturan untuk memanipulasi simbol-simbol tersebut. Salah satu topik dari aljabar yang dapat diterapkan dalam bidang kehidupan sehari-sehari adalah aljabar max-plus, misalnya penerapan aljabar max-plus pada sistem transportasi yang dibahas oleh Fahim, Subchan, & Subiono (2013).

Aljabar max-plus yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}$, didefinisikan sebagai himpunan $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ yang dilengkapi dengan operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$, dimana $\varepsilon = -\infty$ dan $e = 0$ (Heidergott, Olsder & Woude, 2006). Seperti halnya aljabar linier, pada aljabar max-plus juga mempelajari tentang matriks dan vektor. Suatu matriks persegi pada aljabar max-plus dapat dimodelkan dalam bentuk graf yang disebut graf *precendence*.

Suatu graf *precendence* dari matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ dinotasikan dengan $G(A) = \big(\mathcal{N}(A), \mathcal{D}(A)\big)$ adalah graf berarah terboboti dimana $\mathcal{N}(A) = \{1, \dots, n\}$ merupakan himpunan titik di $G(A)$ dan $\mathcal{D}(A) = \big\{(i,j): i,j \in \mathcal{N}(A), a_{j,i} \neq \varepsilon \text{ di } A\big\}$ merupakan himpunan busur di $G(A)$. Misalnya $B = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix}$, graf *precendence* dari matriks $B \in \mathbb{R}_{max}^{2 \times 2}$ adalah $G(B) = \big(\mathcal{N}(B), \mathcal{D}(B)\big)$ dimana $\mathcal{N}(B) = \{1,2\}$ dan $\mathcal{D}(B) = \{(1,1), (1,2)\}$. Suatu matriks persegi yang graf *precendence*nya merupakan graf terhubung kuat disebut matriks tak tereduksi. Sedangkan, matriks persegi yang graf *precendence*nya merupakan graf terhubung lemah disebut matriks tereduksi.

Dalam penerapan aljabar max-plus, terdapat tiga komponen penting yang berhubungan dengan matriks persegi. Ketiga komponen tersebut adalah nilai eigen, vektor eigen, dan *eigenmode* (Subiono, 2015). Masalah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks yang reguler sudah banyak dibahas pada penelitian sebelumnya, seperti pada penelitian Tunisa, Wijayanti, & Veronica (2017) yang membahas nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tak tereduksi atas aljabar max-plus, penelitian Musthofa dan Binatari (2013) yang membahas sifat-sifat nilai eigen dan vektor eigen dari matriks atas aljabar max-plus, dan penelitian Wibowo, Wijayanti, & Veronica (2018) yang membahas penerapan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks atas aljabar max-plus pada pengaturan sistem antrian *traffic light*.

Pada penelitian ini dibahas mengenai *eigenmode* dari matriks reguler atas aljabar max-plus. Matriks reguler adalah suatu matriks yang disetiap baris setidaknya memuat satu elemen yang tidak sama dengan ε. *Eigenmode* dari matriks reguler A adalah suatu pasangan vektor $(\eta, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sedemikian hingga untuk setiap $k \geq 0$ memenuhi persamaan

$$A \otimes (k \times \eta + v) = (k + 1) \times \eta + v.$$

Menurut Subiono (2015), hasil dari vektor η pada *eigenmode* dari matriks reguler erat hubungannya dengan vektor waktu sikel. Matriks tak tereduksi merupakan bagian dari matriks reguler dengan nilai eigen tunggal, sehingga matriks tak tereduksi sama dengan matriks tak tereduksi reguler. Semua elemen vektor η dari matriks tak tereduksi bernilai konstan sama yaitu nilai eigen dari matriks tak tereduksi. Misalnya matriks tak tereduksi $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix}$ dengan nilai eigen dari A adalah 3 dan *eigenmode* dari A adalah $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, diperoleh semua elemen dari vektor η bernilai konstan sama yaitu 3. Sedangkan matriks tereduksi reguler memiliki dua kemungkinan hasil dari vektor η, yaitu semua elemennya bernilai konstan sama atau beberapa elemennya bernilai berbeda. Misalnya matriks tereduksi reguler $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix}$ dengan *eigenmode* dari B adalah $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, diperoleh semua elemen dari vektor η bernilai konstan sama yaitu 2. Sedangkan untuk matriks tereduksi reguler $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$ dengan *eigenmode* dari C adalah $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, diperoleh elemen-elemen dari vektor η bernilai berbeda yaitu 2 dan 1.

Masalah *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari, seperti pada sistem antrian yang dibahas oleh Subiono dan

Himmatul Mursyidah (2017). Selain itu, pada penelitian Zvi Retchkiman K. (2008) membahas tentang penerapan algoritma *eigenmode* tergeneralisasi untuk matriks tereduksi reguler dalam sistem transportasi Metro-bus di kota Meksiko. Berdasarkan uraian-uraian di atas, penulis tertarik untuk membahas dan mengkaji kembali tentang bagaimana cara menentukan *eigenmode* dari matriks reguler dalam aljabar max-plus dan karakterisasinya.

1.2 Batasan Masalah

Masalah dalam penelitian ini hanya dibatasi pada matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus.

1.3 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang penelitian ini, diperoleh rumusan masalah sebagai berikut

(1) Bagaimana menentukan *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus?
(2) Bagaimana sifat *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus?

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah disusun, diperoleh tujuan dari penelitian ini adalah

(1) menjelaskan langkah-langkah menentukan *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus, dan
(2) menganalisis sifat *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat teoritis dari penelitian ini adalah untuk membantu pembaca, mengetahui langkah-langkah menentukan *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus dan sifatnya. Sedangkan, manfaat praktis dari penelitian ini adalah untuk membantu penelitian selanjutnya mengenai penerapan *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus di bidang kehidupan sehari-hari.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini dijelaskan teori-teori yang berkaitan dengan *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus.

2.1 Teori Graf

Definisi 2.1 (Budayasa, 2007)

Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari obyek-obyek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$.

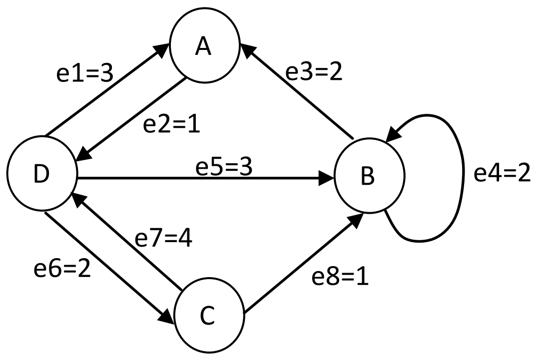
Definisi 2.2 (Budayasa, 2007)

Sebuah graf G yang setiap sisinya dikaitkan dengan suatu bilangan real disebut graf bobot G. Bilangan real yang dikaitkan ke suatu sisi di graf G disebut bobot sisi tersebut, yang dinotasikan oleh $w(e)$ untuk setiap $e \in E(G)$. Sedangkan, bobot graf G dilambangkan $w(G)$ adalah jumlah bobot semua sisi di graf G.

Definisi 2.3 (Budayasa, 2007)

Graf berarah G adalah graf yang setiap sisinya merupakan pasangan berurutan dari dua titik di $V(G)$ dan memiliki arah. Setiap sisi dalam suatu graf berarah disebut dengan busur. Misalkan i dan j adalah dua titik di $V(G)$ dan $e = (i, j)$ sebuah busur di $E(G)$, maka e disebut busur keluar dari titik i dan busur masuk ke titik j.

Contoh 2.1



Gambar 2.1 Graf G Berarah dan Berbobot

Keterangan:

(1) Himpunan $V(G) = \{A, B, C, D\}$ merupakan himpunan titik di graf G.

(2) Himpunan $E(G) = \{e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8\}$ merupakan himpunan busur di graf G.

(3) $e1 = (D, A)$ disebut busur keluar dari titik D dan busur masuk ke titik A.
$e2 = (A, D)$ disebut busur keluar dari titik A dan busur masuk ke titik D.
$e3 = (B, A)$ disebut busur keluar dari titik B dan busur masuk ke titik A.
$e4 = (B, B)$ disebut busur keluar dari titik B dan busur masuk ke titik B.
$e5 = (D, B)$ disebut busur keluar dari titik D dan busur masuk ke titik B.
$e6 = (D, C)$ disebut busur keluar dari titik D dan busur masuk ke titik C.
$e7 = (C, D)$ disebut busur keluar dari titik C dan busur masuk ke titik D.
$e8 = (C, B)$ disebut busur keluar dari titik C dan busur masuk ke titik B.

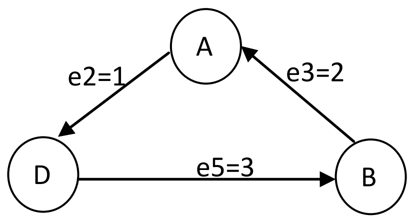
(4) Bobot dari busur $e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8$ di graf G berturut-turut adalah 3,1,2,2,3,2,4,1.

(5) Bobot graf G adalah $w(G) = w(e1) + w(e2) + w(e3) + w(e4) + w(e5) + w(e6) + w(e7) + w(e8) = 3 + 1 + 2 + 2 + 3 + 2 + 4 + 1 = 18$.

Definisi 2.4 (Budayasa, 2007)

Sebuah graf H disebut graf bagian (subgraf) dari graf G, ditulis $H \subset G$ jika $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$.

Contoh 2.2



Gambar 2.2 Graf Bagian H

Graf H merupakan graf bagian dari graf G pada Gambar 2.1, hal itu dikarenakan $V(H) = \{A, B, D\} \subset V(G)$ dan $E(H) = \{e2, e3, e5\} \subset E(G)$.

Definisi 2.5 (Barcelli, Choen, Olsder, & Quadrat, 2001)

Lintasan ρ adalah suatu barisan dari titik-titik $(i_1, i_2, \dots, i_p)$, $p > 1$ sehingga $i_j \in \pi(i_{1+j})$, $j = 1, \dots, p-1$ dengan $\pi(i_{1+j})$ merupakan himpunan titik-titik yang terhubung langsung menuju titik i_{1+j}. Titik i_1 sebagai titik awal dan i_p titik akhir dari lintasan ρ.

Definisi 2.6 (Baccelli dkk, 2001)

Lintasan ρ dikatakan elementer jika tidak ada titik yang muncul lebih dari satu kali di lintasan tersebut.

Contoh 2.3

Perhatikan Gambar 2.1

Barisan $\rho = (A, D, C, B)$ merupakan lintasan.

Lintasan $\rho = (A, D, C, B)$ merupakan lintasan elementer.

Lintasan $\mu = (A, D, C, D)$ bukan lintasan elementer karena titik D muncul lebih dari satu kali.

Definisi 2.7 (Baccelli dkk, 2001)

Suatu lintasan yang titik awal dan titik akhirnya sama disebut sirkuit.

Definisi 2.8 (Baccelli dkk, 2001)

Suatu sirkuit $(i_1, i_2, \dots, i_p = i_1)$ dikatakan elementer jika lintasannya elementer. Suatu sirkuit yang elementer disebut sikel (siklik).

Contoh 2.4

Perhatikan Gambar 2.1

Lintasan $\rho = (A, D, C, B)$ bukan sirkuit karena titik awal dan akhirnya berbeda.

Lintasan $\pi = (A, D, C, B, A)$ merupakan sirkuit.

Sirkuit $\pi = (A, D, C, B, A)$ merupakan sirkuit elementer karena lintasan (A, D, C, B) elementer.

Definisi 2.9 (Baccelli dkk, 2001)

Loop adalah suatu sirkuit (i, i) yang terdiri dari satu titik i, dimana titik i sebagai titik awal dan akhir.

Contoh 2.5

Perhatikan Gambar 2.1, sirkuit (B, B) merupakan loop.

Definisi 2.10 (Baccelli dkk, 2001)

Panjang lintasan $\rho = (i_1, i_2, \dots, i_p)$ pada suatu graf adalah banyaknya busur pada lintasan tersebut yang dinotasikan dengan $|\rho|_l$.

Definisi 2.11 (Baccelli dkk, 2001)

Bobot lintasan $\rho = \left(i_1, i_2, \ldots, i_p\right)$ pada suatu graf adalah jumlah semua bobot busur pada lintasan tersebut yang dinotasikan oleh $|\rho|_w = w(i_1, i_2) + w(i_2, i_3) + \cdots + w\left(i_{p-1}, i_p\right)$. Bobot rata-rata lintasan $\rho = \left(i_1, i_2, \ldots, i_p\right)$ pada suatu graf didefinisikan sebagai $\frac{|\rho|_w}{|\rho|_l}$.

Contoh 2.6

Perhatikan Gambar 2.1

Panjang lintasan $\rho = (A, D, C, B)$ adalah $|\rho|_l = 3$.

Panjang lintasan $\pi = (A, D, C, B, A)$ adalah $|\rho|_l = 4$.

Bobot lintasan $\rho = (A, D, C, B)$ adalah

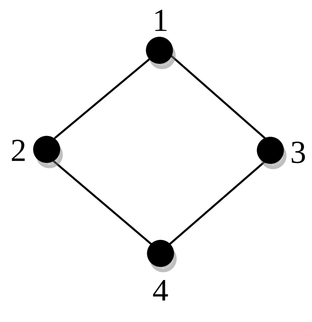
$$|\rho|_w = w(A, D) + w(D, C) + \ w(C, B) = \ w(e2) + w(e6) + \ w(e8)$$
$$= 1 + 2 + 1 = 4.$$

Bobot rata-rata lintasan $\rho = (A, D, C, B)$ adalah $\frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} = \frac{4}{3}$.

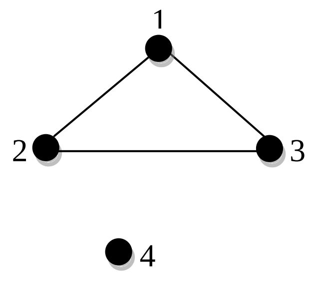
Definisi 2.12 (Budayasa, 2007)

Sebuah garf G dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik di G yang berbeda terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut.

Contoh 2.7



Gambar 2.3 Graf Terhubung



Gambar 2.4 Graf Tak Terhubung

Definisi 2.13 (Subiono, 2015)

Suatu graf $G = (V, E)$ dan $i, j \in V$. Titik j dikatakan *reachable* dari titik i, dinotasikan dengan $i\mathcal{R}j$ jika terdapat suatu lintasan dari i ke j. Sedangkan, titik i dikatakan *communicate* dengan titik j, dinotasikan dengan $j\mathcal{C}i$ jika dan hanya jika $i = j$ atau titik i *reachable* dari titik j dan titik j *reachable* dari titik i.

Contoh 2.8

Perhatikan Gambar 2.2

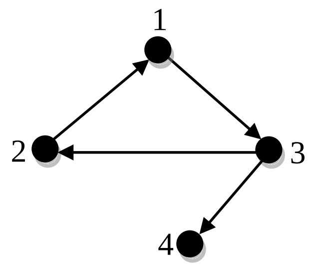
Titik B *reachable* dari titik A, karena terdapat lintasan dari A ke B.

Titik A *communicate* dengan titik D, karena $A = D$ atau titik A *reachable* dari titik D dan titik D *reachable* dari titik A.

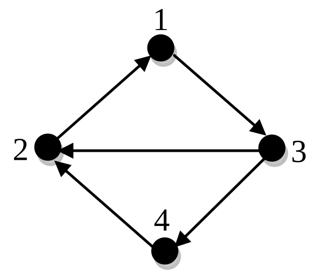
Definisi 2.14 (Subiono, 2015)

Suatu graf G disebut graf *strongly connected* (terhubung kuat) jika graf G terhubung dan seluruh titik pada graf G *communicate* satu sama lain, yaitu untuk setiap $i, j \in V$ memenuhi $j\mathcal{C}i$. Jika graf G terhubung dan ada titik yang tidak *communicate* dengan titik lain dalam graf G, maka graf G disebut graf tidak *strongly connected* (terhubung lemah).

Contoh 2.9



Gambar 2.5 Graf terhubung Lemah



Gambar 2.6 Graf terhubung Kuat

Definisi 2.15 (Fraleigh, 2003)

Suatu relasi ekivalensi $\mathcal{R}$ pada himpunan S didefinisikan $\forall\, x, y, z \in S$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ dan y berada dalam satu himpunan bagian yang sama dari S dan memenuhi

1. $x\mathcal{R}x$ (Refleksif)
2. Jika $x\mathcal{R}y$, maka $y\mathcal{R}x$ (Simetris)
3. Jika $x\mathcal{R}y$ dan $y\mathcal{R}z$, maka $x\mathcal{R}z$ (Transitif)

Berikut ditunjukkan bahwa relasi *communicate* atau relasi $\mathcal{C}$ pada V merupakan relasi ekivalensi pada V.

(1) Relasi $\mathcal{C}$ refleksif

Ambil sebarang $i \in V$

Karena $i = i$, akibatnya $i\mathcal{C}i$. Jadi, untuk setiap $i \in V$ maka $i\mathcal{C}i$.

(2) Relasi $\mathcal{C}$ simetris

Ambil $i, j \in V$ dengan $i\mathcal{C}j$

Berarti titik i *reachable* dari titik j dan titik j *reachable* dari titik i, akibatnya $j\mathcal{C}i$. Jadi, untuk $i, j \in V$ dengan $i\mathcal{C}j$ maka $j\mathcal{C}i$.

(3) Relasi $\mathcal{C}$ transitif

Ambil $i, j, k \in V$ dengan $i\mathcal{C}j$ dan $j\mathcal{C}k$

Titik $i, j \in V$ dengan $i\mathcal{C}j$ berarti titik i *reachable* dari titik j dan titik j *reachable* dari titik i. Titik $j, k \in V$ dengan $j\mathcal{C}k$ berarti titik j *reachable* dari titik k dan titik k *reachable* dari titik j.

Karena titik i *reachable* dari titik j dan titik j *reachable* dari titik k, akibatnya titik i *reachable* dari titik k ... (a)

Karena titik k *reachable* dari titik j dan titik j *reachable* dari titik i, akibatnya titik k *reachable* dari titik i ... (b)

Berdasarkan (a) dan (b) diperoleh $i\mathcal{C}k$.

Jadi, untuk $i, j, k \in V$ dengan $i\mathcal{C}j$ dan $j\mathcal{C}k$ maka $i\mathcal{C}k$.

Dari (1), (2) dan (3) diperoleh bahwa relasi *communicate* atau relasi $\mathcal{C}$ merupakan relasi ekivalensi pada V.

Definisi 2.16 (Baccelli dkk, 2001)

Relasi ekivalensi $\mathcal{C}$ didefinisikan $i, j \in V$ merupakan dua titik dari suatu graf G. Relasi $\mathcal{C}$ ditulis $j\mathcal{C}i$ jika dan hanya jika $i = j$ atau terdapat lintasan dari i ke j dan lintasan dari j ke i.

Berdasarkan Definisi 2.16, akibatnya relasi $\mathcal{C}$ dapat mempartisi V ke dalam kelas-kelas ekivalensi yang saling asing. Kelas ekivalensi dari $i \in V$ didefinisikan sebagai $[i] = \{j \in V : i\mathcal{C}j\}$ dengan $V = \bigcup_{i \in V}[i]$. Karena V berhingga akibatnya $V = \bigcup_{i \in V}[i] = [i_1] \cup [i_2] \cup \ldots \cup [i_q]$, sehingga himpunan V dipartisi menjadi q himpunan bagian yang saling asing yaitu V_r, $r \in \underline{q}$ dengan $\left(\bigcup_{t \in \underline{q}} V_t\right) \bigcap_{s \in \underline{q}} V_s = \emptyset$ untuk semua $V_t \neq V_s$. Jika kondisi $x\mathcal{R}y$ terjadi maka kondisi $y\mathcal{R}x$ tidak terjadi untuk $x \in V_t$ dan $y \in V_s$ dengan $t, s \in \underline{q}$, karena V_t dan V_s tidak *communicate*. Berdasarkan partisi dari V diperoleh subgraf dari G yaitu $G_r = (V_r, E_r)$, $r \in \underline{q}$ dengan $E_r \subset E$ adalah himpunan busur yang memiliki titik awal dan titik akhir elemen di V_r.

Contoh 2.10

Perhatikan Gambar 2.5

Graf $G = (V, E)$ dengan $V = \{1,2,3,4\}$ dan $E = \{(1,3), (2,1), (3,2), (3,4)\}$.

Berdasarkan definisi kelas ekivalensi dari $i \in V$, diperoleh dua kelas ekivalensi dari V yaitu $[1] = \{1,2,3\}$ dan $[4] = \{4\}$.

Berdasarkan dua kelas ekivalensi tersebut, diperoleh dua himpunan bagian yang saling asing dari V yaitu $V_1 = [1]$ dan $V_2 = [4]$.

Definisi 2.17 (Baccelli dkk, 2001)

Suatu subgraf $G_r = (V_r, E_r)$ dari kelas ekivalensi yang ditentukan oleh relasi ekivalensi C pada himpunan V disebut subgraf *strongly connected* maksimal.

Catatan: Meskipun subgraf $G_r = (V_r, E_r)$ dengan $E_r = \emptyset$ merupakan graf terhubung lemah, tetap dianggap *strongly connected* maksimal (B. Heidergott dkk, 2006). Hal ini dikarenakan definisi kelas ekivalensi dari $i \in V$.

Contoh 2.11

Berdasarkan dua kelas ekivalensi pada Contoh 2.10, diperoleh dua subgraf *strongly connected* maksimal $G_r = (V_r, E_r),\ r \in \underline{2}$ yaitu

1. Subgraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dengan $V_1 = [1],\ E_1 = \{(1,3), (3,2), (2,1)\}$
2. Subgraf $G_2 = (V_2, E_2)$ dengan $V_2 = [4],\ E_2 = \emptyset$.

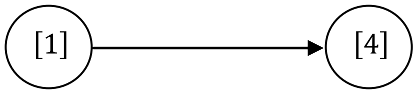
Definisi 2.18 (Konigsberg, 2008)

Suatu graf tereduksi $\tilde{G} = \left(\tilde{V}, \tilde{E}\right)$ dari G didefinisikan oleh $\tilde{V} = \{[i_1], [i_2], \dots, [i_q]\}$ dan $([i_r], [i_s]) \in \tilde{E}$ jika $r \neq s$ dan terdapat busur $(k, l) \in E$ untuk suatu $k \in [i_r]$ dan $l \in [i_s]$.

Contoh 2.12

Perhatikan Gambar 2.5

Graf $G = (V, E)$ dengan $V = \{1,2,3,4\}$ dan $E = \{(1,3), (2,1), (3,2), (3,4)\}$. Berdasarkan Contoh 2.10 diperoleh dua kelas ekivalensi dari $i \in V$ pada graf G yaitu $[1] = \{1,2,3\}$ dan $[4] = \{4\}$. Dari kelas-kelas ekivalensi tersebut dan Definisi 2.17, diperoleh graf tereduksi dari $G(A)$ yaitu graf $\tilde{G} = \left(\tilde{V}, \tilde{E}\right)$ dengan $\tilde{V} = \{[1], [4]\}$ dan $([1], [4]) \in \tilde{E}$ dimana $(3,4) \in E$ untuk $3 \in [1]$ dan $4 \in [4]$.



Gambar 2.7 Graf Tereduksi $\tilde{G}$

Lemma 2.1 (Baccelli dkk, 2001)

Graf tereduksi tidak siklik.

Bukti: Misalkan $[i_r], [i_s] \in \tilde{V}$. Karena $[i_r]$ dan $[i_s]$ merupakan kelas-kelas ekivalensi dari $i \in V$, akibatnya $[i_r] \neq [i_s]$. Andaikan graf tereduksi siklik, artinya terdapat lintasan dari $[i_r]$ ke $[i_s]$ dan lintasan dari $[i_s]$ ke $[i_r]$, berdasarkan definisi kelas ekivalensi dari $i \in V$ diperoleh $[i_r] = [i_s]$. Hal ini kontradiksi dengan $[i_r] \neq [i_s]$. Jadi, haruslah graf tereduksi tidak siklik.

2.2 Aljabar Max-Plus

2.2.1 Definisi, Struktur dan Sifat Dasar Aljabar Max-Plus

Aljabar max-plus adalah suatu himpunan tak kosong $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dimana $\mathbb{R}$ himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$ yang dilengkapi dengan opersai biner $\oplus$ dan $\otimes$, sehingga $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_\varepsilon$ berlaku

$$x \oplus y = max(x, y) \quad \text{dan} \quad x \otimes y = x + y.$$

Selanjutnya aljabar max-plus dinotasikan oleh $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ yang ditulis dengan $\mathbb{R}_{max}$. Elemen $\varepsilon = -\infty$ merupakan elemen netral terhadap operasi $\oplus$ dan elemen $e = 0$ merupakan elemen satuan terhadap operasi $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{max}$. Elemen-elemen di $\mathbb{R}_{max}$ disebut skalar dan prioritas urutan operasi $\otimes$ lebih dulu atas operasi $\oplus$. Namun jika dalam bentuk $(a \oplus b) \otimes c$ dengan $a, b, c \in \mathbb{R}_{max}$, maka prioritas urutan operasi $\oplus$ lebih dulu atas operasi $\otimes$.

Operasi pangkat dalam aljabar max-plus didefinisikan untuk $x \in \mathbb{R}_{max}$

$$x^{\otimes^k} = \underbrace{x \otimes x \otimes \ldots \otimes x}_{k} = \underbrace{x + x \ldots + x}_{k} = k \times x, \qquad k \in \mathbb{N} \ \text{ dan } \ x^{\otimes^0} = e.$$

Dalam aljabar max-plus, relasi $\leq_{max}$ didefinisikan jika $x, y \in \mathbb{R}_{max}$, maka $x \leq_{max} y \Leftrightarrow x \oplus y = y$. Penulisan $x \leq_{max} y$ dapat ditulis dengan $y \geq_{max} x$. Relasi $\leq_{max}$ pada $\mathbb{R}_{max}$ ekivalen dengan relasi $\leq$ pada $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, sebab $x \leq_{max} y \Leftrightarrow x \oplus y = y \Leftrightarrow max(x, y) = y \Leftrightarrow x \leq y$.

Selanjutnya, dijelaskan sifat-sifat aljabar max-plus dalam lemma berikut ini.

Lemma 2.2 (Farlow, 2009)

Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}_{max}$ berlaku

(1) Sifat assosiatif pada operasi $\oplus$ dan $\otimes$, yaitu

a. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, dan

b. $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$

(2) Sifat komutatif pada operasi $\oplus$ dan $\otimes$, yaitu

a. $x \oplus y = y \oplus x$, dan

b. $x \otimes y = y \otimes x$

(3) Sifat distributif pada operasi $\otimes$ terhadap $\oplus$, yaitu

$(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$ .... (Distributif Kanan)

$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$ .... (Distributif Kiri)

(4) Memiliki elemen netral $\varepsilon = -\infty$, yaitu $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$

(5) Memiliki elemen satuan $e = 0$, yaitu $x \otimes e = e \otimes x = x$

(6) Untuk setiap elemen $x \neq \varepsilon$ terdapat invers elemen pada operasi $\otimes$, yaitu

$$x \otimes x^{-1} = x^{-1} \otimes x = e$$

(7) Memiliki elemen penyerap pada operasi $\otimes$ yaitu elemen netral ε, yaitu

$$x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$$

(8) Sifat idempoten pada operasi $\oplus$, sehingga $x \oplus x = x$.

Bukti:

Berdasarkan definisi operasi biner pada $\mathbb{R}_{max}$ di atas, maka $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}_{max}$ dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ pada operasi $\oplus$ dan elemen satuan $e = 0$ pada operasi $\otimes$ memenuhi sifat $(1)a, (1)b, (2)a, (2)b, (3), (4), (5)$ dan (7).

(6) Ambil sebarang $x \in \mathbb{R}_{max} - \{\varepsilon\}$

Karena $x \in \mathbb{R}$ maka terdapat $x^{-1} \in \mathbb{R}_{max} - \{\varepsilon\}$ sehingga

$$x \otimes x^{-1} = x + (-x) = 0 = e$$

Jadi $\forall\, x \in \mathbb{R}_{max} - \{\varepsilon\}\ \exists\, x^{-1} \in \mathbb{R}_{max} - \{\varepsilon\} \ni x \otimes x^{-1} = x^{-1} \otimes x = e$

(8) Jelas $\forall\, x \in \mathbb{R}_{max}$ berlaku $x \oplus x = max(x, x) = x$.

Definisi 2.19 (Rudhito, 2016)

Suatu semiring $(S,+,\times)$ adalah suatu himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan dua operasi biner $+$ dan $\times$, yang memenuhi aksioma berikut.

(1) $(S,+)$ adalah semigrup komutatif dengan elemen netral 0, yaitu $\forall\, a,b,c \in S$ memenuhi

$(a+b)+c = a+(b+c)$ .... (Assosiatif)

$a+b = b+a$ .... (Komutatif)

$a+0 = 0+a = a$ .... (Elemen netral 0)

(2) $(S,\times)$ adalah semigrup dengan elemen satuan 1, yaitu $\forall\, a,b,c \in S$ memenuhi

$(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$ .... (Assosiatif)

$a\times 1 = 1\times a = a$ .... (Elemen Identitas 1)

(3) Elemen netral 0 merupakan elemen penyerap terhadap operasi $\times$, yaitu $\forall\, a \in S$ memenuhi $a\times 0 = 0\times a = 0$

(4) Operasi $\times$ distributif terhadap $+$, yaitu $\forall\, a,b,c \in S$ memenuhi

$(a+b)\times c = (a\times c)+(b\times c)$ .... (Distributif Kanan)

$a\times(b+c) = (a\times b)+(a\times c)$ .... (Distributif Kiri)

Contoh 2.13

Berdasarkan Lemma 2.2 (1)a,(1)b,(2)a,(3),(4),(5) dan (7), diperoleh bahwa $\mathbb{R}_{max}$ merupakan semiring.

Definisi 2.20 (Rudhito, 2016)

Suatu semiring $(S,+,\times)$ dikatakan komutatif jika operasi $\times$ bersifat komutatif, yaitu $\forall\, a,b \in S$ berlaku $a\times b = b\times a$.

Contoh 2.14

Semiring $\mathbb{R}_{max}$ dengan Lemma 2.2 (2)b, diperoleh bahwa $\mathbb{R}_{max}$ merupakan semiring komutatif.

Definisi 2.21 (Rudhito, 2016)

Suatu semiring $(S,+,\times)$ dikatakan idempoten jika operasi $+$ bersifat idempoten, yaitu $\forall\, a \in S$ berlaku $a+a = a$.

Contoh 2.15

Semiring $\mathbb{R}_{max}$ dengan Lemma 2.2 (8), diperoleh semiring $\mathbb{R}_{max}$ idempoten.

Lemma 2.3 (Farlow, 2009)

Idempoten dari $\oplus$ pada semiring $\mathbb{R}_{max}$ menunjukkan bahwa $\forall\, x \in \mathbb{R}_{max} - \{\varepsilon\}$ tidak mempunyai invers elemen pada operasi $\oplus$.

Bukti: Misalkan b merupakan invers elemen dari $a \neq \varepsilon$ pada operasi $\oplus$, sehingga $a \oplus b = \varepsilon$. Tambahkan tiap ruas dengan a, diperoleh

$$a \oplus (a \oplus b) = a \oplus \varepsilon \Leftrightarrow (a \oplus a) \oplus b = a \Leftrightarrow a \oplus b = a$$

Hal ini kontradiksi dengan $a \oplus b = \varepsilon$. Jadi, haruslah $\forall\, x \in \mathbb{R}_{max} - \{\varepsilon\}$ tidak mempunyai invers elemen pada operasi $\oplus$.

Definisi 2.22 (Fraleigh, 2003)

Suatu ring $(R, +, \times)$ adalah suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi biner $+$ dan $\times$, yang memenuhi aksioma berikut.

(1) $(R, +)$ adalah grup komutatif dengan elemen netral 0, yaitu $\forall\, a, b, c \in R$ memenuhi

$(a + b) + c = a + (b + c)$ .... (Assosiatif)

$a + b = b + a$ .... (Komutatif)

$a + 0 = 0 + a = a$ .... (Elemen netral 0)

$a + (-a) = (-a) + a = 0$ …… ($\forall\, a \neq 0$ mempunyai invers elemen)

(2) Perkalian pada R bersifat assosiatif, yaitu $\forall\, a, b, c \in R$ memenuhi

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

(3) Operasi $\times$ distributif terhadap $+$, yaitu $\forall\, a, b, c \in R$ memenuhi

$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ .... (Distributif Kanan)

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ .... (Distributif Kiri)

Definisi 2.23 (Fraleigh, 2003)

Suatu ring $(R, +, \times)$ yang operasi perkaliannya bersifat komutatif disebut ring komutatif. Suatu ring $(R, +, \times)$ yang mempunyai elemen satuan pada operasi perkaliannya disebut ring dengan elemen satuan. Suatu ring $(R, +, \times)$ dengan elemen satuan dan setiap elemen tak nolnya mempunyai invers pada operasi perkalian disebut division ring. Division ring yang komutatif disebut field.

Berdasarkan Definisi 2.22, Definisi 2.23 dan karena Lemma 2.3, diperoleh bahwa $\mathbb{R}_{max}$ bukan field.

Definisi 2.24 (Subiono, 2015)

Suatu semiring komutatif $(S,+,\times)$ dinamakan semifield bila setiap elemen x di $S-\{0\}$ mempunyai invers terhadap operasi $\times$, yaitu untuk setiap x di $S-\{0\}$ ada x^{-1} di $S-\{0\}$ sehingga $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$.

Contoh 2.16

Semiring komutatif $\mathbb{R}_{max}$ dengan Lemma 2.2 (6), diperoleh bahwa $\mathbb{R}_{max}$ merupakan semifield.

2.2.2 Vektor atas Aljabar Max-Plus

Himpunan $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ dimana $x_i\in\mathbb{R}_{max}$ dengan $i=1,2,\dots,n$ disebut himpunan vektor atas aljabar max-plus, yang dinotasikan oleh $\mathbb{R}^n_{max}$, $n\in\mathbb{N}$ dengan $n\neq 0$, didefinisikan $\underline{n}=\{1,2,\dots,n\}$. Elemen ke-$j$ dari suatu vektor $x\in\mathbb{R}^n_{max}$, dinotasikan oleh $[x]_j=x_j$ dengan $j\in\underline{n}$. Vektor $\vec{\varepsilon}=(\varepsilon,\varepsilon,\dots,\varepsilon)$ merupakan elemen netral pada operasi $\oplus$ di $\mathbb{R}^n_{max}$. Vektor $\vec{e}=(e,e,\dots,e)$ dinamakan vektor satuan di $\mathbb{R}^n_{max}$ yang dinotasikan oleh u ditulis sebagai $[u]_j=e$ untuk semua $j\in\underline{n}$. Untuk setiap $\alpha\in\mathbb{R}_{max}$, vektor $\alpha\otimes u=u[\alpha]$ yaitu vektor yang semua elemennya sama dengan α.

Operasi $\oplus$ pada $\mathbb{R}^n_{max}$ didefinisikan $\forall\, x,y\in\mathbb{R}^n_{max}$ berlaku

$$x\oplus y=(x_1\oplus y_1,x_2\oplus y_2\dots,x_n\oplus y_n).$$

Sedangkan operasi $\otimes$ dengan skalar pada $\mathbb{R}^n_{max}$ didefinisikan $\forall\, x\in\mathbb{R}^n_{max}$, $\alpha\in\mathbb{R}_{max}$ berlaku $\alpha\otimes x=(\alpha\otimes x_1,\alpha\otimes x_2,\dots,\alpha\otimes x_n)$. Relasi $\leq_{max}$ pada $\mathbb{R}^n_{max}$ didefinisikan untuk $x,y\in\mathbb{R}^n_{max}$ berlaku

$$x\leq_{max} y\Leftrightarrow x\oplus y=y\Leftrightarrow [x\oplus y]_j=[y]_j\Leftrightarrow [x]_j\leq_{max}[y]_j,\ \ \forall\, j\in\underline{n}.$$

Penulisan $x\leq_{max} y$ dapat ditulis dengan $y\geq_{max} x$. Karena relasi $\leq_{max}$ pada $\mathbb{R}_{max}$ ekivalen dengan relasi $\leq$ pada $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, akibatnya $x\leq_{max} y=x\leq y$ untuk $x,y\in\mathbb{R}^n_{max}$.

Definisi 2.25 (Subiono, 2015)

Diberikan semiring komutatif $(S,+,\times)$ dengan elemen netral 0 dan elemen identitas 1. Semimodul M atas S adalah semigrup komutatif $(M,+)$ bersama operasi perkalian skalar $\bullet: S\times M\to M$, yang dituliskan dengan $(\alpha,x)\mapsto\alpha\bullet x$, yang memenuhi aksioma berikut. $\forall\,\alpha,\beta\in S$ dan $\forall\, x,y\in M$ berlaku:

(1) $\alpha \bullet (x + y) = \alpha \bullet x + \alpha \bullet y$

(2) $(\alpha + \beta) \bullet x = \alpha \bullet x + \beta \bullet x$

(3) $\alpha \bullet (\beta \bullet x) = (\alpha \bullet \beta) \bullet x$

(4) $1 \bullet x = x$

(5) $0 \bullet x = 0$

Contoh 2.17

Berdasarkan Definisi 2.22 akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}_{max}^n$ merupakan semimodul atas $\mathbb{R}_{max}$.

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}_{max}^n$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{max}$

Berarti $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dimana $x_i, y_i \in \mathbb{R}_{max}$ dengan $i = 1,2, \dots, n$, akibatnya definisi operasi dan sifat-sifat operasi di $\mathbb{R}_{max}$ berlaku juga pada $\mathbb{R}_{max}^n$, sehingga

(1) $\mathbb{R}_{max}^n$ merupakan semigrup komutatif dengan elemen netral $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$ yang memenuhi sifat berikut.

a. Asosiatif sehingga $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}_{max}^n$ berlaku

$$\begin{aligned}(x \oplus y) \oplus z &= \big((x_1 \oplus y_1) \oplus z_1, (x_2 \oplus y_2) \oplus z_2, \dots, (x_n \oplus y_n) \oplus z_n\big)\\ &= \big(x_1 \oplus (y_1 \oplus z_1), x_2 \oplus (y_2 \oplus z_2), \dots, x_n \oplus (y_n \oplus z_n)\big)\\ &= x \oplus (y \oplus z)\end{aligned}$$

b. Komutatif sehingga $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_{max}^n$ berlaku

$$\begin{aligned}x \oplus y &= (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \dots, x_n \oplus y_n)\\ &= (y_1 \oplus x_1, y_2 \oplus x_2, \dots, y_n \oplus x_n) = y \oplus x\end{aligned}$$

c. Memiliki elemen netral $\vec{\varepsilon}$, maka $\forall\, x \in \mathbb{R}_{max}^n$ berlaku

$$\begin{aligned}x \oplus \vec{\varepsilon} &= (x_1 \oplus \varepsilon, x_2 \oplus \varepsilon, \dots, x_n \oplus \varepsilon)\\ &= (\varepsilon \oplus x_1, \varepsilon \oplus x_2, \dots, \varepsilon \oplus x_n) = \vec{\varepsilon} \oplus x = x.\end{aligned}$$

(2) Berdasarkan definisi operasi $\otimes$ dengan skalar, maka $\mathbb{R}_{max} \otimes \mathbb{R}_{max}^n \to \mathbb{R}_{max}^n$ ditulis dengan $(\alpha, x) = \alpha \otimes x$ memenuhi

a. $\alpha \otimes (x \oplus y) = \big(\alpha \otimes (x_1 \oplus y_1), \alpha \otimes (x_2 \oplus y_2), \dots, \alpha \otimes (x_n \oplus y_n)\big)$

$$\begin{aligned}&= \big((\alpha \otimes x_1) \oplus (\alpha \otimes y_1), (\alpha \otimes x_2) \oplus (\alpha \otimes y_2), \dots, (\alpha \otimes x_n) \oplus (\alpha \otimes y_n)\big)\\ &= (\alpha \otimes x_1, \alpha \otimes x_2, \dots, \alpha \otimes x_n) \oplus (\alpha \otimes y_1, \alpha \otimes y_2, \dots, \alpha \otimes y_n)\\ &= (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y),\end{aligned}$$

b. $(\alpha \oplus \beta) \otimes x = \big((\alpha \oplus \beta) \otimes x_1, (\alpha \oplus \beta) \otimes x_2, \ldots, (\alpha \oplus \beta) \otimes x_n\big)$

$= \big((\alpha \otimes x_1) \oplus (\beta \otimes x_1), (\alpha \otimes x_2) \oplus (\beta \otimes x_2), \ldots, (\alpha \otimes x_n) \oplus (\beta \otimes x_n)\big)$

$= \big(\alpha \otimes x_1, \alpha \otimes x_{2,} \ldots, \alpha \otimes x_n\big) \oplus (\beta \otimes x_1, \beta \otimes x_2, \ldots, \beta \otimes x_n)$

$= (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x),$

c. $\alpha \otimes (\beta \otimes x) = \alpha \otimes (\beta \otimes x_1, \beta \otimes x_2, \ldots, \beta \otimes x_n)$

$= (\alpha \otimes \beta \otimes x_1, \alpha \otimes \beta \otimes x_2, \ldots, \alpha \otimes \beta \otimes x_n)$

$= \big((\alpha \otimes \beta) \otimes x_1, (\alpha \otimes \beta) \otimes x_2, \ldots, (\alpha \otimes \beta) \otimes x_n\big)$

$= (\alpha \otimes \beta) \otimes x,$

d. $\vec{e} \otimes x = (e \otimes x_1, e \otimes x_2, \ldots, e \otimes x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$

e. $\vec{\varepsilon} \otimes x = (\varepsilon \otimes x_1, \varepsilon \otimes x_2, \ldots, \varepsilon \otimes x_n) = (\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon) = \vec{\varepsilon}.$

Jadi, $\mathbb{R}_{max}^n$ merupakan semimodul atas $\mathbb{R}_{max}$.

2.2.3 Matriks atas Aljabar Max-Plus

Himpunan matriks ukuran $n \times m$ dengan $n, m \in \mathbb{N}$, dalam aljabar max-plus dinotasikan oleh $\mathbb{R}_{max}^{n\times m}$. Elemen baris ke-$i$ dan kolom ke-j dari suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times m}$, dinotasikan oleh $[A]_{i,j} = a_{i,j}$ dengan $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$. Dalam aljabar max-plus terdapat dua matriks khusus, yaitu:

(1) Matriks nol max-plus yang dinotasikan dengan $\mathcal{E}$, didefinisikan matriks $\mathcal{E} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times m}$ dengan $[\mathcal{E}]_{i,j} = e$ untuk setiap i dan j

(2) Matriks identitas max-plus yang dinotasikan dengan E, didefinisikan matriks $E \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dengan $[E]_{i,j} = \begin{cases} e & \text{jika } i = j \\ \varepsilon & \text{jika } i \neq j \end{cases}$

Relasi $\leq_{max}$ pada $\mathbb{R}_{max}^{n\times m}$ didefinisikan untuk $A, B \in \mathbb{R}_{max}^{n\times m}$, $\forall\, i \in \underline{n}$, $\forall j \in \underline{m}$

$$A \leq_{max} B \Leftrightarrow A \oplus B = B \Leftrightarrow [A \oplus B]_{i,j} = [B]_{i,j} \Leftrightarrow [A]_{i,j} \leq_{max} [B]_{i,j}.$$

Penulisan $A \leq_{max} B$ dapat ditulis dengan $B \geq_{max} A$. Karena relasi $\leq_{max}$ pada $\mathbb{R}_{max}$ ekivalen dengan relasi $\leq$ pada $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, akibatnya $A \leq_{max} B = A \leq B$ untuk $A, B \in \mathbb{R}_{max}^{n\times m}$.

Definisi 2.26 (Rudhito, 2016)

Diberikan $\mathbb{R}_{max}^{n\times m} = \left\{A = \big([A]_{i,j}\big) \,\middle|\, [A]_{i,j} \in \mathbb{R}_{max},\ i = 1,2, \ldots, n,\quad j = 1,2, \ldots, m\right\}$.

(1) Diketahui $\alpha \in \mathbb{R}_{max}$, $A, B \in \mathbb{R}_{max}^{n\times m}$

$\alpha \otimes A$ adalah perkalian matriks dengan skalar, didefinisikan

$[\alpha \otimes A]_{i,j} = \alpha \otimes [A]_{i,j}$ untuk $i = 1,2,\dots,n$ dan $j = 1,2,\dots,m$

$A \oplus B$ adalah penjumlahan matriks, didefinisikan

$[A \oplus B]_{i,j} = [A]_{i,j} \oplus [B]_{i,j}$ untuk $i = 1,2,\dots,n$ dan $j = 1,2,\dots,m$.

(2) Diketahui $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times p}$ dan $B \in \mathbb{R}_{max}^{p\times m}$

$A \otimes B$ adalah perkalian matriks, didefinisikan

$[A \otimes B]_{i,j} = \bigoplus_{k=1}^{p} ([A]_{i,k} \otimes [B]_{k,j})$ untuk $i = 1,2,\dots,n$ dan $j = 1,2,\dots,m$.

Contoh 2.18

1. Perkalian matriks dengan skalar

$$4 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & \varepsilon \\ 0{,}5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \otimes 0 & 4 \otimes 6 \\ 4 \otimes 1 & 4 \otimes \varepsilon \\ 4 \otimes 0{,}5 & 4 \otimes -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 & 4+6 \\ 4+1 & 4+\varepsilon \\ 4+0{,}5 & 4+-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 5 & \varepsilon \\ 4{,}5 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Penjumlahan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \varepsilon & -3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \oplus 0 & 2 \oplus -5 \\ \varepsilon \oplus 1 & -3 \oplus 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(1,0) & \max(2,-5) \\ \max(\varepsilon,1) & \max(-3,7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

3. Perkalian matriks

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ \varepsilon & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 6 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1 \otimes \varepsilon) \oplus (0 \otimes 6) \oplus (8 \otimes -2) & (-1 \otimes 1) \oplus (0 \otimes 0) \oplus (8 \otimes 4) \\ (\varepsilon \otimes \varepsilon) \oplus (3 \otimes 6) \oplus (2 \otimes -2) & (\varepsilon \otimes 1) \oplus (3 \otimes 0) \oplus (2 \otimes 4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(\varepsilon,6,6) & \max(0,0,12) \\ \max(\varepsilon,9,0) & \max(\varepsilon,3,6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.27 (Subiono, 2015)

Operasi pangkat ke-k dari $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dinotasikan oleh $A^{\otimes^k}$ didefinisikan sebagai

$$A^{\otimes^k} = \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{k}, \quad k = 1,2,3,\dots \ \text{dan} \ A^{\otimes^0} = E.$$

Untuk setiap $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, trace dari matriks A dinotasikan oleh $\operatorname{trace}(A)$ didefinisikan sebagai $\operatorname{trace}(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} [A]_{i,i} = \bigoplus_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Contoh 2.19

Diberikan $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix}$. Tentukan hasil dari $A^{\otimes^3}$, $\operatorname{trace}(A)$ dan $\operatorname{trace}\left(A^{\otimes^3}\right)$.

$A^{\otimes^3} = A \otimes A \otimes A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$.

$\text{trace}(A) = \bigoplus_{i=1}^{2} [A]_{i,i} = [A]_{1,1} \oplus [A]_{2,2} = 1 \oplus \varepsilon = 1.$

$\text{trace}\left(A^{\otimes^3}\right) = \bigoplus_{i=1}^{2} \left[A^{\otimes^3}\right]_{i,i} = \left[A^{\otimes^3}\right]_{1,1} \oplus \left[A^{\otimes^3}\right]_{2,2} = 7 \oplus 7 = 7.$

Definisi 2.28 (Farlow, 2009)

Transpose dari matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ dinotasikan oleh A^T didefinisikan sebagai $[A^T]_{i,j} = [A]_{j,i}$.

Contoh 2.20

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix}$, transpose dari matriks A adalah $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & \varepsilon \end{bmatrix}$.

Definisi 2.29 (B. Heidergott dkk, 2006)

Suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ dikatakan matriks segitiga bawah bila $a_{ij} = \varepsilon$ untuk $1 \leq i \leq j \leq n$. Matriks A dikatakan matriks segitiga atas bila matriks transpose A^T merupakan matriks segitiga bawah.

Contoh 2.21

Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \varepsilon & 1 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{bmatrix}$ merupakan matriks segitiga atas, karena matriks transpose $A^T = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ merupakan matriks segitiga bawah.

Definisi 2.30 (B. Heidergott dkk, 2006)

Suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times m}$ dikatakan reguler bila disetiap baris A setidaknya memuat satu elemen yang tidak sama dengan ε.

Contoh 2.22

Matriks $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix}$ merupakan matriks reguler.

Selanjutnya, suatu matriks persegi pada aljabar max-plus dapat dimodelkan dalam bentuk graf yang disebut graf *precendence*.

Definisi 2.31 (Baccelli dkk, 2001)

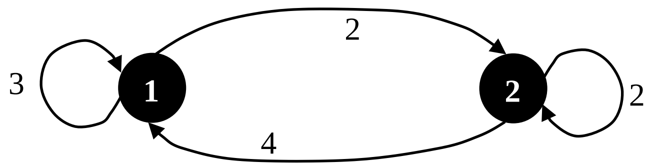
Graf *precendence* dari matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ dinotasikan dengan $G(A)$ adalah graf berarah terboboti yang memiliki titik sebanyak n dan busur (j, i) dengan bobot busur bilangan real $[A]_{i,j}$ jika $[A]_{i,j} \neq \varepsilon$.

Himpunan titik dan busur pada graf *precendence* dari matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ berturut-turut dinotasikan oleh $\mathcal{N}(A)$ dan $\mathcal{D}(A)$. Sirkuit dalam graf *precendence* merupakan sirkuit elementer (sikel). Sedangkan, sirkuit rata-rata adalah bobot rata-rata dari suatu sirkuit. Sebarang sirkuit dengan sirkuit rata-rata maksimum dinamakan sirkuit kritis.

Contoh 2.23

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Graf *precendence* dari A adalah $G(A) = \big(\mathcal{N}(A), \mathcal{D}(A)\big)$ dengan $\mathcal{N}(A) = \{1,2\}$ dan $\mathcal{D}(A) = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$.



Gambar 2.8 Graf $G(A)$

Sirkuit kritis dari graf $G(A)$ ada dua yaitu

1. Sirkuit $(1,2,1)$, karena merupakan sirkuit elementer dengan bobot rata-rata maksimum yaitu $\frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} = \frac{w(1,2)+w(2,1)}{2} = \frac{a_{2,1}+a_{1,2}}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$.
2. Sirkuit $(1,1)$, karena merupakan sirkuit elementer dengan bobot rata-rata maksimum yaitu $\frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} = \frac{w(1,1)}{1} = \frac{a_{1,1}}{1} = \frac{3}{1} = 3$.

Definisi 2.32 (Farlow, 2009)

Setiap $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$, didefinisikan $A^+ = \bigoplus_{k=1}^{\infty} A^{\otimes^k}$ dan $A^* = E \oplus A^+$.

Elemen $[A^+]_{ij}$ merupakan bobot maksimum dari lintasan-lintasan dengan panjang sebarang di graf $G(A)$ dari titik j ke titik i. Sedangkan elemen $\left[A^{\otimes^k}\right]_{ij}$ adalah bobot maksimum dari semua lintasan dengan panjang k dari titik j ke titik i pada graf $G(A)$. Hal ini mengakibatkan trace $\left(A^{\otimes^k}\right)$ merupakan maksimum dari bobot maksimum semua lintasan dengan panjang k, sehingga sirkuit kritis dari $G(A)$ dengan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ dinotasikan oleh $\lambda(A)$ yang didefinisikan

$$\lambda(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} \frac{\text{trace}\left(A^{\otimes^k}\right)}{k}.$$

Lemma 2.4 (Baccelli dkk, 2001)

Misalkan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$. Jika $G(A)$ tidak mempunyai sirkuit dengan bobot positif, maka terdapat $A^* = \bigoplus_{k=0}^{n-1} A^{\otimes^k}$.

Bukti: $A^* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^{\otimes^k} \geq \bigoplus_{k=0}^{n-1} A^{\otimes^k}$

Karena A berukuran $n \times n$, semua lintasan dengan panjang lebih dari atau sama dengan n dari titik i ke titik j akan terjadi paling sedikit satu kali pengulangan titik. Sehingga, terdapat setidaknya satu lintasan dari titik i ke titik j dengan panjang kurang dari n dan sirkuit dengan panjang tidak lebih dari n. Karena $G(A)$ tidak mempunyai sirkuit dengan bobot positif, akibatnya setiap pengulangan titik pada suatu lintasan tidak menambah bobot lintasan tersebut, Sehingga $\bigoplus_{k=0}^{n-1} A^{\otimes^k} \geq \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^{\otimes^k} \Leftrightarrow \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^{\otimes^k} \leq \bigoplus_{k=0}^{n-1} A^{\otimes^k}$.

Karena $\bigoplus_{k=0}^{\infty} A^{\otimes^k} \geq \bigoplus_{k=0}^{n-1} A^{\otimes^k}$ dan $\bigoplus_{k=0}^{\infty} A^{\otimes^k} \leq \bigoplus_{k=0}^{n-1} A^{\otimes^k}$, akibatnya

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} A^{\otimes^k} = \bigoplus_{k=0}^{n-1} A^{\otimes^k}$$

Jadi $A^* = \bigoplus_{k=0}^{n-1} A^{\otimes^k}$.

Definisi 2.33 (Rudhito, 2016)

Setiap $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dengan semua sirkuit dalam $G(A)$ berbobot tak positif, didefinisikan $A^+ = A \otimes A^*$.

Berdasarkan Lemma 2.4 dan Definisi 2.33 diperoleh

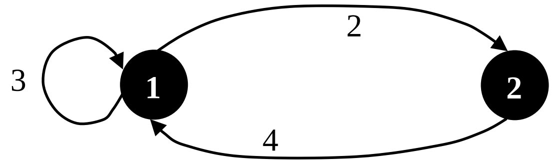
$$A^+ = A \otimes A^* = A \otimes \left(\bigoplus_{k=0}^{n-1} A^{\otimes^k}\right) = \bigoplus_{k=1}^{n} A^{\otimes^k} = A \oplus A^{\otimes^2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^n}$$

Definisi 2.34 (Subiono, 2015)

Graf kritis dari $G(A)$ dinotasikan dengan $G^c(A) = \left(\mathcal{N}^c(A), \mathcal{D}^c(A)\right)$ adalah graf yang terdiri dari himpunan titik dan busur yang berada pada sirkuit kritis dari graf $G(A)$. Suatu titik $i \in \mathcal{N}^c(A)$ disebut sebagai titik kritis dan lintasan dari sirkuit kritis disebut lintasan kritis dari graf $G(A)$.

Contoh 2.24

Berdasarkan Contoh 2.23, graf kritis dari $G(A)$ yaitu $G^c(A) = \left(\mathcal{N}^c(A), \mathcal{D}^c(A)\right)$ dengan $1,2 \in \mathcal{N}^c(A)$, $\mathcal{D}_1^c(A) = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$.



Gambar 2.9 Graf Kritis $G^c(A)$

Definisi 2.35 (Farlow, 2009)

Suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ disebut *irreducible* atau matriks tak tereduksi jika graf $G(A)$ dari matriks tersebut merupakan graf terhubung kuat.

Contoh 2.25

Perhatikan Contoh 2.23, matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ adalah matriks tak tereduksi karena graf *precendence* dari matriks A pada Gambar 2.8 merupakan graf terhubung kuat.

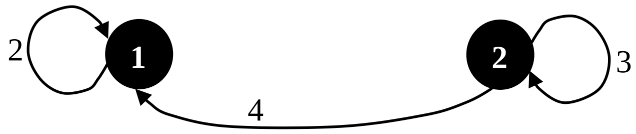
Definisi 2.36 (Subiono, 2015)

Suatu matriks di $\mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ disebut matriks tereduksi jika graf *precendence* dari matriks tersebut merupakan graf terhubung lemah.

Contoh 2.26

Diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 \end{bmatrix}$.

Graf *precendence* dari B adalah $G(B) = \big(\mathcal{N}(B), \mathcal{D}(B)\big)$ dengan $\mathcal{N}(B) = \{1,2\}$ dan $\mathcal{D}(B) = \{(1,1), (2,1), (2,2)\}$.



Gambar 2.10 Graf $G(B)$

Matriks B adalah matriks tereduksi karena graf *precendence* dari matriks B merupakan graf terhubung lemah.

Teorema 2.1 (Rudhito, 2016)

Matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ tak tereduksi jika dan hanya jika $\left(\bigoplus_{k=1}^{n-1} A^{\otimes^k}\right)_{i,j} \neq \varepsilon$ untuk setiap i, j dengan $i \neq j$.

Bukti: ($\Longrightarrow$) Jika A tak tereduksi, maka $G(A) = \big(\mathcal{N}(A), \mathcal{D}(A)\big) = \big(\mathcal{N}(A), \mathcal{D}(A)\big)$ dengan $\mathcal{N}(A) = \underline{n}$ terhubung kuat, yaitu untuk setiap $i, j \in \mathcal{N}(A)$, $i \neq j$ terdapat suatu lintasan dari i ke j. Hal ini menunjukkan bahwa setiap $i, j \in \mathcal{N}(A)$, $i \neq j$ terdapat k dengan $1 \leq k \leq n-1$, sehingga $\left(A^{\otimes^k}\right)_{i,j} \neq \varepsilon$, akibatnya $\left(\bigoplus_{k=1}^{n-1} A^{\otimes^k}\right)_{i,j} \neq \varepsilon$ untuk setiap i, j dengan $i \neq j$.

($\Leftarrow$) Jika $\left(\bigoplus_{k=1}^{n-1} A^{\otimes^k}\right)_{i,j} \neq \varepsilon$ untuk setiap i, j dengan $i \neq j$, maka terdapat k dengan $1 \leq k \leq n-1$, sehingga $\left(A^{\otimes^k}\right)_{i,j} \neq \varepsilon$. Hal ini menunjukkan bahwa setiap $i, j \in \mathcal{N}(A)$ dengan $i \neq j$ terdapat suatu lintasan dari i ke j pada graf $G(A) = \left(\mathcal{N}(A), \mathcal{D}(A)\right)$, sehingga $G(A)$ terhubung kuat yang berarti A adalah matriks tak tereduksi.

Jadi, matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ tak tereduksi jika dan hanya jika $\left(\bigoplus_{k=1}^{n-1} A^{\otimes^k}\right)_{i,j} \neq \varepsilon$ untuk setiap i, j dengan $i \neq j$.

Contoh 2.27

Contoh 2.25, A merupakan matriks tak tereduksi karena $\left(\bigoplus_{k=1}^{2-1} A^{\otimes^k}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ dengan $\left(\bigoplus_{k=1}^{n-1} A^{\otimes^k}\right)_{i,j} \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \neq j$.

Contoh 2.26, B merupakan matriks tereduksi karena $\left(\bigoplus_{k=1}^{2-1} B^{\otimes^k}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 \end{bmatrix}$ terdapat $\left(\bigoplus_{k=1}^{n-1} B^{\otimes^k}\right)_{i,j} = \varepsilon$ untu suatu $i \neq j$, yaitu $\left(\bigoplus_{k=1}^{2-1} B^{\otimes^k}\right)_{2,1} = \varepsilon$.

2.2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.37 (Rudhito, 2016)

Diberikan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$. Skalar $\lambda \in \mathbb{R}_{max}$ disebut nilai eigen max-plus matriks A jika terdapat suatu vektor $v \in \mathbb{R}_{max}^{n}$ dengan $v \neq \varepsilon$, sehingga $A \otimes v = \lambda \otimes v$. Vektor v tersebut disebut vektor eigen max-plus matriks A yang bersesuaian dengan λ.

Teorema 2.2 (Rudhito, 2016)

Diberikan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$. Skalar $\lambda_{max}(A)$, yaitu bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $G(A)$, merupakan suatu nilai eigen max-plus matriks A.

Bukti: Didefinisikan matriks $B = -\lambda_{max}(A) \otimes A$ maka

$$\lambda_{max}(B) = \lambda(B) = \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \text{trace} \left(B^{\otimes^k} \right) \right)$$
$$= \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \text{trace} \left((-\lambda_{max}(A) \otimes A)^{\otimes^k} \right) \right)$$
$$= \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \text{trace} \left((-\lambda(A))^{\otimes^k} \otimes A^{\otimes^k} \right) \right)$$
$$= \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \left((-\lambda(A))^{\otimes^k} \right) \otimes \frac{1}{k} \text{trace} \left(A^{\otimes^k} \right) \right)$$
$$= \bigoplus_{k=1}^{n} \left((-\lambda(A)) \otimes \lambda(A) \right)$$
$$= \bigoplus_{k=1}^{n} (0) = 0$$

Karena $G(B)$ tidak mempunyai sirkuit dengan bobot positif, berdasarkan Lemma 2.4 dan Definisi 2.33 diperoleh $B^{+} = \bigoplus_{k=1}^{n} B^{\otimes^k}$ dan $B^{*} = \bigoplus_{k=0}^{n-1} B^{\otimes^k}$. Karena $\lambda_{max}(B) = 0$, maka terdapat $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ dan suatu $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ sehingga $\left(B^{\otimes^k}\right)_{ss} = 0$. Karena $\left(B^{\otimes^k}\right)_{ss} = 0$, maka sirkuit elementer sepanjang k di $G(B)$ dengan titik awal dan akhir di s merupakan sirkuit kritis. Berdasarkan Definisi 2.32 dan 2.33 diperoleh $B^{+} = B \otimes B^{*}$ dan $B^{*} = E \oplus B^{+}$ dengan $(E)_{ss} = 0$, akibatnya

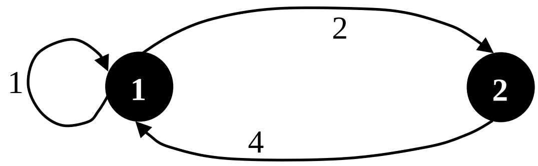
$$B_{.s}^{+} = B_{.s}^{*}$$
$$\Leftrightarrow B \otimes B_{.s}^{*} = B_{.s}^{*}$$
$$\Leftrightarrow \left(-\lambda_{max}(A) \otimes A\right) \otimes B_{.s}^{*} = B_{.s}^{*}$$
$$\Leftrightarrow A \otimes B_{.s}^{*} = \lambda_{max}(A) \otimes B_{.s}^{*}.$$

Jadi, $\lambda_{max}(A)$ merupakan suatu nilai eigen aljabar max-plus matriks A dan $B_{.s}^{*}$ merupakan vektor eigen aljabar max-plus matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_{max}(A)$.

Contoh 2.28

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix}$.

Graf *precendence* dari A adalah $G(A) = \left(\mathcal{N}(A), \mathcal{D}(A)\right)$ dengan $\mathcal{N}(A) = \{1,2\}$ dan $\mathcal{D}(A) = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$.



Gambar 2.11 Graf Terhubung Kuat $G(A)$

$A^{\otimes^2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Nilai eigen dari A adalah

$$\lambda_{max}(A) = \bigoplus_{k=1}^{2} \frac{\text{trace}\left(A^{\otimes^k}\right)}{k} = \frac{\text{trace}(A)}{1} \oplus \frac{\text{trace}\left(A^{\otimes^2}\right)}{2} = \frac{1}{1} \oplus \frac{6}{2} = 3.$$

Vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan $\lambda_{max}(A)$ adalah

$$B = -\lambda_{max}(A) \otimes A = -3 \otimes \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Karena $G(B)$ tidak mempunyai sirkuit dengan bobot positif, maka terdapat

$$B^* = \bigoplus_{k=0}^{n-1} B^{\otimes^k} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena sirkuit $(1,2,1)$ dan $(2,1,2)$ merupakan sirkuit kritis dari $G(A)$, diperoleh vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan $\lambda_{max}(A)$ adalah kolom 1 dan 2 dari matriks B^* yaitu $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Teorema 2.3 (Subiono, 2015)

Jila $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ matriks tak tereduksi, maka ada $\lambda(A)$ yang diberikan oleh

$$\lambda(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} \frac{\text{trace}\left(A^{\otimes^k}\right)}{k}.$$

Bukti: Karena trace $\left(A^{\otimes^k}\right) = \bigoplus_{k=1}^{n} \left[A^{\otimes^k}\right]_{i,i}$ menyatakan bobot sirkuit maksimum dari semua sirkuit dengan panjang k dalam $G(A)$, dengan demikian bila dibagi oleh k merupakan bobot rata-rata maksimum dari sirkuit dengan panjang k. Oleh karena itu, untuk $k = 1,2,\ldots,n$ dan bila $\mathcal{C}(A)$ adalah himpunan semua sirkuit elementer dari graf $G(A)$ didapat

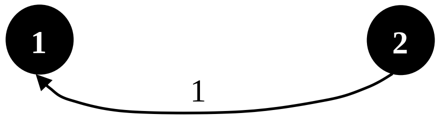
$$\lambda(A) = \max_{\rho \in \mathcal{C}(A)} \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} = \bigoplus_{k=1}^{n} \frac{\text{trace}\left(A^{\otimes^k}\right)}{k}.$$

Berdasarkan definisi matriks tereduksi $B \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ dan definisi sirkuit kritis, diperoleh bahwa graf *precendence* dari matriks tereduksi $B \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ belum tentu mempunyai sirkuit kritis atau $\lambda(B)$. Hal ini ditunjukkan oleh contoh berikut.

Contoh 2.29

Diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$.

Graf *precendence* dari B adalah $G(B) = \big(\mathcal{N}(B), \mathcal{D}(B)\big)$ dengan $\mathcal{N}(B) = \{1,2\}$ dan $\mathcal{D}(A) = \{(2,1)\}$.



Gambar 2.12 Graf Terhubung Lemah $G(B)$

Dari Gambar 2.12 dapat dilihat bahwa $G(B)$ merupakan graf terhubung lemah, akibatnya B matriks tereduksi. Jelas $G(B)$ tidak mempunyai sirkuit elementer yang artinya $\mathcal{C}(B) = \emptyset$, akibatnya tidak ada sirkuit kritis dari $G(B)$, sehingga $B^{\otimes^k} = \mathcal{E}$ untuk setiap $k \geq 2$ diperoleh

$$\lambda(B) = \max_{\rho \in \mathcal{C}(B)} \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} = \bigoplus_{k=1}^{2} \frac{\text{trace}\left(B^{\otimes^k}\right)}{k} = \varepsilon.$$

Berdasarkan Teorema 2.2 dengan $\lambda(B) = \varepsilon$ yang artinya tidak ada $\lambda(B)$, akibatnya matriks tereduksi B tidak memiliki nilai eigen.

Jadi, matriks tereduksi belum tentu memiliki nilai eigen.

Teorema 2.4 (Subiono, 2015)

Jika $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ matriks tak tereduksi, maka A mempunyai nilai eigen tunggal.

Bukti: Misalkan λ_1 dan λ_2 adalah nilai eigen dari A, artinya $A \otimes v = \lambda_1 \otimes v$ dan $A \otimes v = \lambda_2 \otimes v$.

Karena $\lambda_1 = \max_{\rho \in \mathcal{C}(A)} \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l}$ dan $\lambda_2 = \max_{\rho \in \mathcal{C}(A)} \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l}$ dengan $\mathcal{C}(A)$ adalah himpunan semua sirkuit elementer dari graf $G(A)$, diperoleh

$A \otimes v = \lambda_1 \otimes v \Leftrightarrow \max\big(a_{i_{k+1}, i_k} + v_{i_k}\big) = \lambda_1 + v_{i_{k+1}}, \quad k \in \underline{l}$ ... (1)

$A \otimes v = \lambda_2 \otimes v \Leftrightarrow \max\big(a_{i_{k+1}, i_k} + v_{i_k}\big) = \lambda_2 + v_{i_{k+1}}, \quad k \in \underline{l}$ ... (2)

Dari pengurangan ruas kanan persamaan (1) dengan (2) dan ruas kiri persamaan (1) dengan (2) diperoleh $0 = \lambda_1 - \lambda_2$, akibatnya $\lambda_1 = \lambda_2$ yang artinya nilai eigen dari A tunggal. Jadi, nilai eigen dari matriks tak tereduksi tunggal.

Meskipun nilai eigen dari matriks tak tereduksi adalah tunggal, tetapi sirkuit kritis dari graf *precendence* matriks tak tereduksi belum tentu tunggal. Hal ini ditunjukkan oleh Contoh 2.23 dengan A matriks tak tereduksi yang memiliki dua sirkuit kritis.

Suatu matriks tereduksi $B \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ belum tentu memiliki nilai eigen tunggal. Hal ini ditunjukkan oleh contoh berikut.

Contoh 2.30

Perhatikan Contoh 2.26, matriks tereduksi $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 \end{bmatrix}$ dengan nilai eigen dari B adalah $\lambda(B) = \bigoplus_{k=1}^{2} \frac{\text{trace}\left(B^{\otimes k}\right)}{k} = \frac{\text{trace}(B)}{1} \oplus \frac{\text{trace}\left(B^{\otimes 2}\right)}{2} = \frac{3}{1} \oplus \frac{6}{2} = 3$ dan vektor eigen dari B yang bersesuaian dengan $\lambda(B) = 3$ adalah

$$C = -\lambda(B) \otimes B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^* = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$$

Karena sirkuit $(3,3)$ merupakan sirkuit kritis dari graf $G(B)$ pada Gambar 2.10, diperoleh vektor eigen dari B yang bersesuaian dengan $\lambda(B)$ adalah kolom 1 dari matriks C^* yaitu $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dari graf $G(B)$ pada Gambar 2.10 terdapat satu sirkuit lagi selain sirkuit kritis yaitu sirkuit $(1,1)$. Sirkuit $(1,1)$ dengan bobot rata-rata sirkuit 2 juga merupakan nilai eigen dari matriks tereduksi B dengan vektor eigen yang bersesuaian adalah kolom 2 dari matriks C^* yaitu $\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$. Hal ini dapat diselidiki dengan

$$B \otimes v = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 2 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \lambda \otimes v.$$

Jadi, matriks tereduksi B memiliki nilai eigen tidak tunggal.

Jadi, nilai eigen dari matriks tereduksi belum tentu tunggal.

Berdasarkan Contoh 2.30 diperoleh bahwa terdapat elemen yang sama dengan ε pada vektor eigen dari matriks tereduksi B. Berdasarkan hal tersebut dan Definisi 2.37, diperoleh bahwa setiap matriks tereduksi yang memiliki nilai eigen, maka vektor eigen dari matriks tereduksi setidaknya memuat satu elemen yang tidak sama dengan ε.

Teorema 2.5 (Rudhito, 2016)

Jika matriks tak tereduksi $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ mempunyai nilai eigen aljabar max-plus λ dengan vektor eigen aljabar max-plus x yang bersesuaian dengan λ, maka $x_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \in \underline{n}$.

Bukti: Misalkan terdapat dengan tunggal $s \in \underline{n}$ sehingga $x_s = \varepsilon$, akibatnya $(A \otimes x)_s = \lambda \otimes x_s = \varepsilon$ atau $A_{s,i} \otimes x_i = \varepsilon$ untuk setiap $i \in \underline{n}$. Karena $x_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \neq s$, maka $A_{s,i} = \varepsilon$. Hal ini berarti tidak ada busur dari setiap titik $i \neq s$ ke titik s, akibatnya $G(A)$ tidak terhubung kuat yang berarti A matriks tereduksi. Hal ini kontradiksi dengan A matriks tak tereduksi. Jadi, haruslah $x_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \in \underline{n}$.

Teorema 2.6 (Subiono, 2015)

Jika $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ matriks tak tereduksi, maka A memiliki vektor eigen tidak tunggal.

Bukti: Misalnya λ adalah nilai eigen dari A dan $v \in \mathbb{R}_{max}^{n}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ, akibatnya $A \otimes v = \lambda \otimes v$.

Ambil sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$, diperoleh

$$\alpha \otimes A \otimes v = \alpha \otimes \lambda \otimes v \Leftrightarrow A \otimes \alpha \otimes v = \lambda \otimes \alpha \otimes v$$
$$\Leftrightarrow A \otimes (\alpha \otimes v) = \lambda \otimes (\alpha \otimes v)$$

Jadi, $(\alpha \otimes v) \in \mathbb{R}_{max}^{n}$ dengan $\alpha \in \mathbb{R}$ juga merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. Jadi, vektor eigen dari matriks tak tereduksi tidak tunggal.

Teorema 2.7 (Subiono dan Mursyidah, 2017)

Setiap matriks tereduksi $B \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ yang memiliki nilai eigen, maka vektor eigen dari B tidak tunggal.

Bukti: Misalnya λ adalah nilai eigen dari B dan $v \in \mathbb{R}_{max}^{n}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ, akibatnya $B \otimes v = \lambda \otimes v$.

Ambil sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$, diperoleh

$$\alpha \otimes B \otimes v = \alpha \otimes \lambda \otimes v \Leftrightarrow B \otimes \alpha \otimes v = \lambda \otimes \alpha \otimes v$$
$$\Leftrightarrow B \otimes (\alpha \otimes v) = \lambda \otimes (\alpha \otimes v)$$

Jadi, $(\alpha \otimes v) \in \mathbb{R}_{max}^{n}$ dengan $\alpha \in \mathbb{R}$ juga merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. Jadi, vektor eigen dari matriks tereduksi tidak tunggal.

Nilai eigen dan vektor eigen dari matriks reguler yang tereduksi maupun tak tereduksi, berhubungan erat dengan perulangan persamaan berikut

$$x(k+1) = A \otimes x(k),\ \ k = 0,1,2,\dots \qquad (2.1)$$

Perilaku periodik dari persamaan (2.1) berkaitan dengan barisan $\{x(k)|k \in \mathbb{N}\}$ dan untuk keadaan awal $x(0) \in \mathbb{R}^n$, sehingga diperoleh

$$x(k) = A^{\otimes^k} \otimes x(0)\,, \qquad \forall\, k \geq 0$$

Definisi 2.38 (Subiono, 2015)

Misalkan $\{x(k)|k \in \mathbb{N}\}$ adalah suatu barisan di $\mathbb{R}^n_{max}$ dan diasumsikan bahwa untuk semua $j \in \underline{n}$ limit berikut

$$\eta_j \overline{\overline{def}} \lim_{k\to\infty} \frac{x_j(k)}{k}$$

ada. Vektor $\eta = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]^T$ dinamakan vektor waktu-sikel dari barisan $x(k)$. Bila semua nilai η_j sama, maka nilai ini dinamakan rata-rata pertumbuhan asimtotik dari barisan $x(k)$.

Contoh 2.31

Diberikan matriks reguler $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix}$ dan vektor $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Berdasarkan perilaku periodik dari persamaan (2.1), diperoleh

$$\begin{matrix} x(0) & x(1) & x(2) & x(3) & x(4) & x(5) & x(6) & x(7) & x(8) & x(9) & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 15 \\ 14 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 17 \\ 16 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 19 \\ 18 \end{bmatrix} & \dots \end{matrix}$$

Barisan $x(k) \in \mathbb{R}^2_{max}$ dan untuk semua $j \in \underline{2}$, terdapat $\eta_j = \lim_{k\to\infty} \frac{x_j(k)}{k}$.

Untuk $x_1(k)$ diperoleh

$$\eta_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{x_1(k)}{k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{x_1(1)}{1}, \frac{x_1(2)}{2}, \frac{x_1(3)}{3}, \frac{x_1(4)}{4}, \dots \right) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \dots \right)$$

Rumus U_n untuk barisan $\frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{13}{6}$ ... yaitu $\frac{2n+1}{n}$, maka

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_1(k)}{k} = \lim_{n\to\infty} (U_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{n}{n}} \right) = \lim_{n\to\infty} (2+0) = 2.$$

Untuk $x_2(k)$ diperoleh

$$\eta_2 = \lim_{k\to\infty} \frac{x_2(k)}{k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{x_2(1)}{1}, \frac{x_2(2)}{2}, \frac{x_2(3)}{3}, \frac{x_2(4)}{4}, \dots \right) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \dots \right)$$

Rumus U_n untuk barisan $\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{12}{6}, \ldots$ yaitu $\frac{2n}{n}$, maka

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_2(k)}{k} = \lim_{n\to\infty} (U_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{2n}{n}}{\frac{n}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} (2) = 2.$$

Dari uraian di atas, diperoleh vektor waktu sikel dari barisan $x(k)$ adalah

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Karena semua nilai elemen vektor η sama, diperoleh rata-rata pertumbuhan asimtotik dari barisan $x(k)$ adalah 2.

2.2.5 Eigenmode Matriks Reguler

Definisi 2.39 (Subiono, 2015)

Suatu pasangan vektor $(\eta, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ disebut *eigenmode* tergeneralisasi dari matriks reguler A jika untuk setiap $k \geq 0$ memenuhi

$$A \otimes (k \times \eta + v) = (k+1) \times \eta + v \qquad (2.2)$$

Eigenmode tergeneralisasi disebut juga dengan *eigenmode*.

Dalam persamaan (2.2) bila $k = 0$, maka diperoleh $A \otimes v = \eta + v$ dan bila semua elemen vektor η adalah konstan bernilai $\lambda \in \mathbb{R}$, maka persamaan (2.2) menjadi $A \otimes v = \lambda \otimes v$.

Contoh 2.32

Diberikan matriks reguler $A = \begin{bmatrix} a & b \\ \varepsilon & c \end{bmatrix}$ dengan $a, c \in \mathbb{R}$ dan $b \in \mathbb{R}_{max}$.

Jika $b = \varepsilon$, maka *eigenmode* dari A adalah $\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e \\ e \end{bmatrix}\right)$.

Jika $b \neq \varepsilon$, maka terdapat dua kasus yaitu $a \geq c$ dan $a \leq c$.

Kasus $a \geq c$, diperoleh *eigenmode* dari A adalah $\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b-c \\ e \end{bmatrix}\right)$.

Kasus $a \leq c$, diperoleh *eigenmode* dari A adalah $\left(\begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b-c \\ e \end{bmatrix}\right)$.

BAB V
PENUTUP

5.1 Simpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh simpulan sebagai berikut

1. Langkah-langkah menentukan *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus adalah
   (1) Mengambil matriks tereduksi reguler $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$
   (2) Menentukkan matriks blok segitiga atas dari A, dengan langkah-langkah:
      (a) Menentukan graf *precendence* dari A yaitu $\mathcal{G}(A) = \big(\mathcal{N}(A), \mathcal{D}(A)\big)$, dengan $\mathcal{N}(A) = \underline{n}$ dan $\mathcal{D}(A) = \big\{(x, y) : x, y \in \mathcal{N}(A),\ a_{y,x} \neq \varepsilon \text{ di } A\big\}$.
      (b) Menentukan kelas ekivalensi dari $x \in \mathcal{N}(A)$ berdasarkan definisi relasi ekivalensi *communicate* pada $\mathcal{N}(A)$, yaitu $[x] = \{y \in \mathcal{N}(A) : x\mathcal{C}y\}$. Misalkan terdapat sebanyak q kelas ekivalensi dari $\mathcal{N}(A)$.
      (c) Menentukan himpunan bagian dari $\mathcal{N}(A)$ yaitu $\mathcal{N}_i(A) = [x_i]$, $i \in \underline{q}$, untuk setiap $[x_i]$ merupakan kelas ekivalensi dari $x_i \in \mathcal{N}(A)$.
      (d) Menentukan subgraf *strongly connected* maksimal dari $\mathcal{G}(A)$ yaitu $\mathcal{G}_i(A) = \big(\mathcal{N}_i(A), \mathcal{D}_i(A)\big),\ i \in \underline{q}; \mathcal{D}_i(A) = \{(x, y) \in \mathcal{D}(A) : x, y \in \mathcal{N}_i(A)\}$.
      (e) Menentukan graf tereduksi dari $\mathcal{G}(A)$ yaitu $\widetilde{\mathcal{G}(A)} = \big(\widetilde{\mathcal{N}(A)}, \widetilde{\mathcal{D}(A)}\big)$, dengan $\widetilde{\mathcal{N}(A)} = \big\{\mathcal{N}_1(A), \dots, \mathcal{N}_q(A)\big\}$ dan $\widetilde{\mathcal{D}(A)} = \big\{\big(\mathcal{N}_s(A), \mathcal{N}_t(A)\big) : s \neq t, (x, y) \in \mathcal{D}(A),\ x \in \mathcal{N}_s(A),\ y \in \mathcal{N}_t(A)\big\}$.
      (f) Menentukan matriks blok dari A berdasarkan graf tereduksi $\widetilde{\mathcal{G}(A)}$, dimana diagonal utamanya terdiri sebanyak q blok matriks $A_{i,i},\ i \in \underline{q}$ yang merupakan representasi dari subgraf $\mathcal{G}_i(A),\ i \in \underline{q}$ dan setiap elemen bilangan real dari blok matriks $A_{s,t},\ s \neq t$ merupakan bobot busur dari suatu titik di $\mathcal{N}_t(A)$ ke suatu titik di $\mathcal{N}_s(A)$. Jika matriks blok dari A merupakan matriks blok segitiga atas dari A, maka lanjut ke langkah (3).

(g) Melabeli setiap $i \in \underline{q}$ dengan huruf abjad yang berbeda pada setiap titik $\mathcal{N}_i(A),\ i \in \underline{q}$, sehingga diperoleh $\underbrace{\mathcal{N}_a(A), \mathcal{N}_b(A), \ldots}_{q}$ dengan $\underbrace{a, b, \ldots}_{q} \in \underline{q}$.

(h) Melabeli ulang untuk setiap titik di $\widetilde{G(A)}$ berdasarkan relasi *reachable* pada $\widetilde{\mathcal{N}(A)}$, yaitu jika $\mathcal{N}_s(A)$ *reachable* dari $\mathcal{N}_t(A)$, maka $t > s$ dengan $t, s \in \underline{q}$.

(i) Menentukan matriks blok segitiga atas dari A berdasarkan graf tereduksi $\widetilde{G(A)}$ yang sudah dilabeli ulang untuk setiap titiknya, dimana diagonal utamanya terdiri sebanyak q blok matriks $A_{i,i},\ i \in \underline{q}$ yang merupakan representasi dari subgraf $G_i(A),\ i \in \underline{q}$ dengan $\mathcal{N}_i(A)$ sudah dilabeli ulang dan setiap elemen bilangan real dari blok matriks $A_{s,t},\ 1 \le s < t \le q$ merupakan bobot busur dari suatu titik di $\mathcal{N}_t(A)$ ke suatu titik di $\mathcal{N}_s(A)$.

(3) Menghitung nilai eigen dari blok matriks terakhir pada diagonal utama matriks blok segitiga atas dari A, yaitu $\lambda_q = \lambda(A_{q,q})$ dengan vektor eigen v_q. Ambil $\xi_q = \lambda_q$ dan v_q adalah vektor eigen v_q.

(4) Menghitung nilai ξ_i dan v_i untuk setiap blok matriks $A_{i,i},\ i \in \underline{q-1}$ secara berurutan, mulai dari $i = q - 1$ sampai $i = 1$ dimana $\xi_i = \bigoplus_{j \in \mathcal{H}_i} \xi_j \oplus \lambda_i$ dan $v_i = \left(-\xi_i \otimes A_{i,i}\right)^* \otimes \left(\bigoplus_{j \in \mathcal{H}_i} -\xi_i \otimes A_{i,j} \otimes v_j\right)$ dengan $\lambda_i = \lambda(A_{i,i})$, $i \in \underline{q-1}$ dan $\mathcal{H}_i = \left\{ j \in \underline{q} : j > i,\ A_{i,j} \neq \mathcal{E} \right\}$.

(5) Menentukan vektor η_i untuk setiap blok matriks $A_{i,i},\ i \in \underline{q}$, yaitu vektor yang semua elemennya bernilai ξ_i dan ukurannya sesuai dengan ukuran vektor v_i pada masing-masing blok matriks $A_{i,i}$, $i \in \underline{q}$.

(6) Membentuk vektor η dan v yang urutan elemen-elemennya sesuai urutan baris dan kolom pada matriks blok segitiga atas dari A, yaitu dengan menyusun semua elemen pada vektor η_i dan v_i, $i \in \underline{q}$ secara berurutan dari atas ke bawah, mulai dari $i = 1$ sampai $i = q$.

(7) Mengurutkan kembali urutan elemen pada vektor η dan v sesuai dengan urutan baris dan kolom pada matriks tereduksi reguler A, sehingga diperoleh *eigenmode* dari matriks tereduksi regular A yaitu pasangan vektor (η, v).

2. Sifat-sifat *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus yaitu tidak tunggal dan berupa pasangan vektor dengan semua elemen vektor merupakan bilangan real.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil pembahasan, penelitian ini hanya menjelaskan mengenai langkah-langkah menentukan *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus dan sifat-sifatnya berdasarkan teorema yang sudah ada. Oleh karena itu, penulis menyarankan untuk penelitian selanjutnya dapat mengkaji tentang sifat lain *eigenmode* dari matriks tereduksi reguler dalam aljabar max-plus yang belum pernah diteliti sebelumnya, atau mengkaji tentang *eigenmode* dari matriks lainnya, atau dapat mengkaji tentang penerapan *eigenmode* dari suatu matriks dalam aljabar max-plus.

DAFTAR PUSTAKA

Barcelli, F., Choen, G., Olsder, G.J. & Quadrat, J.P. 2001. *Synchronization and Linearity: an algebra for discrete event system*. New York: Wiley-Interscience.

Budayasa, K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Fahim, K., Subchan & Subiono. 2013. Aplikasi Aljabar Max-Plus Pada Pemodelan dan Penjadwalan Busway yang Diintegrasikan dengan Kereta Api Komuter. *JURNAL TEKNIK POMITS* 1(1): 1-6.

Farlow, K.G. 2009. *Max-Plus Algebra*. Master's Thesis Polytechnic Institute and State University. Virginia: Polytechnic Institute and State University.

Fraleigh, John B. 2003. *A First Course in Abstract Algebra* (7^{th} ed.). New Jersey: Addison-Wesley.

Heidergott, B., Olsder, G.J. & Woude, J. van der. 2006. *Max Plus at Work*. New Jersey: Princeton University Press.

Konigsberg, Z.V. 2008. A generalized eigenmode algorithm for reducible regular matrices over the max-plus algebra with applications to the Metro-bus public transport system in Mexico city. *Journal of Nonlinier Analysis Hibrid Systems* 2: 1205-1216.

Mursyidah, H. & Subiono. 2017. Eigenvalue, Eigenvector, Eigenmode of Reducible Matrix and Its Application. *Journal of AIP Conference Proccedings* 020044: 1-14.

Musthofa & Binatari, N. 2013. Sifat-sifat Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks atas Aljabar Max-Plus. *Jurnal Sains Dasar* 2(1): 25-31.

Rudhito, M.A. 2016. *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Subiono. 2015. *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya* (versi 3). Surabaya: ITS.

Tunisa, K., Wijayanti, K. & Veronica, R.B. 2017. Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Atas Aljabar Max-Plus. *Unnes Journal of Mathematics* 6(2): 189-197.

Wibowo, A., Wijayanti, K. & Veronica, R.B. 2018. Penerapan Aljabar Max-Plus pada Pengaturan Sistem Antrian *Trffic light*. *Unnes Journal of Mathematics* 7(2): 192-205.