BEBERAPA SIFAT GRUP *BRAID*

SKRIPSI

disusun sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika

oleh

Dwi Andriyani Khoirunnisak
4111414032

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2018

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan perundang-undangan.

Semarang, Agustus 2018

Dwi Andriyani Khoirunnisak
4111414032

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Beberapa Sifat Grup *Braid*

disusun oleh

Dwi Andriyani Khoirunnisak

4111414032

Telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA Unnes pada tanggal 10 Agustus 2018.

Ketua

Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si., Akt
NIP 196412231988031001

Sekretaris

Drs. Arief Agoestanto, M.Si.
NIP 196807221993031005

Ketua Penguji

Dra. Rahayu B. V., M.Si.
NIP 196406131988032002

Anggota Penguji/
Pembimbing I

Dra. Kristina Wijayanti, MS.
NIP 196012171986012001

Anggota Penguji/
Pembimbing II

Drs. Mashuri, M.Si.
NIP 196708101992031003

MOTTO

- Hidup adalah seni menggambar tanpa menghapus.

  (John W. Gardner)
- Bekerja keras dan bersikap baiklah. Hal luar biasa akan terjadi.

  (Conan O' Brien)
- Balas dendam terbaik adalah dengan memperbaiki dirimu.

  (Ali Bin Abi Thalib)

PERSEMBAHAN

- Untuk keluarga yang selalu memberikan semangat.
- Untuk teman diskusi dan teman-teman yang sudah memberikan tempat untuk menginap.
- Tetangga yang sudah membantu membuatkan alat peraga.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas berkat dan limpahan rahmat sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"BEBERAPA SIFAT GRUP *BRAID*"**

Penulis menyadari dalam menyelesaikan skripsi ini memperoleh banyak bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum., Rektor Universitas Negeri Semarang
2. Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si., Akt., Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si., Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.
4. Dra. Kristina Wijayanti, MS., Dosen Pembimbing 1 yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, nasehat, dan saran selama proses penyusunan skripsi ini.
5. Drs. Mashuri, M.Si., Dosen Pembimbing 2 yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, nasehat, dan saran selama proses penyusunan skripsi ini.
6. Dra. Rahayu Budhiati Veronica, M.Si., Dosen Penguji yang telah memberikan penilaian dan saran dalam perbaikan skripsi ini.
7. Muhammad Kharis, S.Si., M.Sc., Dosen Wali yang telah memberikan saran dan bimbingan selama masa studi.

8. Staf Dosen Matematika dan Staf Tata Usaha Universitas Negeri Semarang yang telah membekali dengan berbagai ilmu selama mengikuti perkuliahan sampai akhir penulisan skripsi ini.
9. Orang tua yang selalu mendoakan, menasihati, dan menyemangati.
10. Kakak dan Adik yang selalu mendoakan dan memberi dukungan.
11. Teman-teman Prodi Matematika 2014 yang saling memberikan semangat.
12. Pihak lain yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menyadari dalam penyusunan skripsi ini terdapat banyak kekurangan dan kesalahan. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Semarang, 2018
Penulis

Dwi Andriyani K
4111414032

ABSTRAK

Khoirunnisak, Dwi Andriyani. 2014. *Beberapa Sifat Grup Braid*. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang. Pembimbing Utama Dra. Kristina Wijayanti, MS., dan Pembimbing Pendamping Drs. Mashuri, M.Si.

Kata kunci: Grup, Subgrup, *Braid*, Homomorfisma.

Suatu n-*braid* adalah susunan dari *braid* $d_1, d_2, \dots, d_n$ yang menghubungkan titik $A_1, A_2, \dots, A_n$ (pada sisi atas kubus) dan titik $B_1, B_2, \dots, B_n$ (pada alas kubus) apabila memenuhi beberapa syarat. Salah satu syaratnya yaitu *braid* $d_1, d_2, \dots, d_n$ harus saling lepas satu sama lain (*braid* hanya melintas di atas atau di bawah *braid* yang lain, bukan menembus). Hal ini dapat mengakibatkan (semacam) lilitan atau putaran antara *braid* satu dengan *braid* yang lain. Kemungkinan-kemungkinan susunan *braid* berikut lilitannya dapat dihimpun dalam suatu himpunan, dinamakan himpunan n-*braid*.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui (1) bagaimana membangun himpunan n-*braid* menjadi suatu grup n-*braid* (grup *braid*), (2) sifat apa saja yang berlaku pada grup *braid*, dan (3) sifat yang berlaku pada grup faktor dari grup *braid*.

Metode penelitian yang digunakan meliputi beberapa tahap, yaitu studi pustaka, penemuan masalah, perumusan masalah, analisis dan pemecahan masalah, serta penarikan kesimpulan.

Dari hasil pengkajian diperoleh bahwa (1) himpunan n-*braid* yang dilengkapi dengan operasi biner komposisi dapat menjadi suatu grup n-*braid*. Selanjutnya disebut grup *braid*. (2) sifat-sifat grup *braid*, yaitu; (i) Grup *braid* merupakan grup non abelian, (ii) Pusat grup B_n adalah $Z(B_n) = \{b \in B_n | ab = ba \ \forall a \in B_n\}$ dengan $b = \left(\sigma_{i_1}\sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}\right)^n, 1 \leq i_k \leq n-1, i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k$, (iii) untuk $1 \leq m \leq n$, fungsi $\psi: B_m \longrightarrow B_n$ didefinisikan oleh $\psi(\sigma_i) = \sigma_i$, untuk $i = 1,2, \dots, m-1$, adalah suatu homomorfisa injektif dari B_m ke B_n. Jadi B_m dapat dipandang sebagai subgrup dari B_n, (iv) order generator grup *braid* tak hingga, (v) jika $P_n, n \geq 1$, menotasikan himpunan dari semua *pure* n-*braid* maka P_n adalah subgrup normal dari B_n, (3) grup faktor B_n/P_n isomorfik terhadap grup simetri S_n, dan $[B_n : P_n] = n!$.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN iii
HALAMAN PENGESAHAN iv
MOTTO DAN PERSEMBAHAN v
PRAKATA vi
ABSTRAK viii
DAFTAR ISI ix
DAFTAR GAMBAR xi
BAB 1 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Batasan Masalah 2
1.3 Perumusan Masalah 3
1.4 Tujuan Penelitian 3
1.5 Manfaat Penelitian 3
BAB 2 4
2.1 Fungsi 4
2.2 Komposisi Fungsi 5
2.3 Operasi Biner 6
2.4 Grup 7
2.5 Himpunan n-*braid* 16
2.6 Permutasi *braid* 21
BAB 3 23
3.1 Studi Pustaka 23
3.2 Penemuan Masalah 23
3.3 Perumusan Masalah 23
3.4 Analisis dan Pemecahan Masalah 24
3.5 Penarikan Kesimpulan 24

BAB 4 25
4.1 Grup *Braid* 25
4.2 Sifat-sifat Grup *Braid* 28
4.2.1 Kekomutatifan 28
4.2.2 Pusat Grup 29
4.2.3 Subgrup *Braid* 36
4.2.4 Order Generator Grup Braid 37
4.2.5 Subgrup normal 38
4.3 Grup faktor 41
BAB 5 43
5.1 Simpulan 43
5.2 Saran 44
DAFTAR PUSTAKA 45

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

2.5.1. (a) Kondisi yang benar 17
2.5.1. (a) Kondisi yang salah 17
2.5.2. (a) Kondisi yang benar 17
2.5.2. (a) Kondisi yang salah 17
2.5.3. *n-braid* 18
2.5.4. Interpretasi σ_i dan σ_i^{-1} 19
2.5.5. 3-*braid* 20
2.5.6. Permutasi 3-*braid* 20
2.6.1. Permutasi pada *braid* 21
2.6.2. (a) *Pure Braid* 22
2.6.2. (b) *Trivial Braid* (1_n) 22
2.6.3. Permutasi pada 3-*braid* 22

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Geometri adalah cabang matematika yang berkaitan dengan sifat dan relasi dari titik, garis, bidang (benda dua dimensi), bangun ruang (benda tiga dimensi), dan hal lain di dimensi yang lebih tinggi. Salah satu contoh bangun ruang adalah kubus. Kubus merupakan bangun ruang tiga dimensi yang dibatasi oleh enam daerah persegi yang kongruen.

Setiap sisi kubus pasti memuat suatu titik. Seperti yang diketahui bahwa melalui dua buah titik hanya dapat dilukis satu garis. Jadi apabila terdapat titik-titik pada sisi atas dan sisi bawah suatu kubus maka dapat dilukis beberapa garis vertikal. Hal ini yang mendasari pengertian n-*braid*.

Suatu n-*braid* adalah susunan dari *braid* $d_1, d_2, \dots, d_n$ yang menghubungkan titik $A_1, A_2, \dots, A_n$ (pada sisi atas kubus) dan titik $B_1, B_2, \dots, B_n$ (pada alas kubus) apabila memenuhi beberapa syarat. Salah satu syaratnya yaitu *braid* $d_1, d_2, \dots, d_n$ harus saling lepas satu sama lain (*braid* hanya melintas di atas atau di bawah *braid* yang lain, bukan menembus). Hal ini dapat mengakibatkan (semacam) lilitan atau putaran antara *braid* satu dengan *braid* yang lain. Kemungkinan-kemungkinan susunan *braid* berikut lilitannya dapat dihimpun dalam suatu himpunan, dinamakan himpunan n-*braid*.

Selain geometri, cabang matematika lainnya adalah aljabar. Aljabar merupakan ilmu yang mempelajari simbol-simbol matematika dan aturan untuk

memanipulasinya. Aljabar juga mempelajari sesuatu yang abstrak seperti grup, *ring*, dan *field*.

Grup merupakan pasangan berurutan $(G,*)$. G himpunan tak kosong dan $*$ operasi biner pada G, sehingga G memenuhi ketiga aksioma (hukum asosiatif, eksistensi elemen identitas, dan eksistensi invers elemen) (Malik, D. S. *et al*, 2007: 36). Jika suatu grup G tidak memiliki sifat $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$ maka grup G merupakan grup nonkomutatif. Sebaliknya jika memenuhi sifat tersebut maka grup G disebut grup komutatif. Jenis grup dilihat dari banyaknya elemen dibagi menjadi dua macam, yaitu grup berhingga dan grup tak hingga. Contoh grup yang familier, yaitu himpunan bilangan bulat dengan operasi biner penjumlahan, himpunan bilangan real dengan operasi biner perkalian, dan grup permutasi.

Berdasarkan pengertian *n-braid* dan grup, bagaimana membangun himpunan *n-braid* menjadi suatu grup *n-braid* yang selanjutnya disebut sebagai grup *braid*?

1.2 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini antara lain:

1.2.1 Teori *braid* yang dikaji pada penelitian ini adalah teori yang ditemukan oleh Emil Artin.

1.2.2 Medium untuk menggambarkan *n-braid* yaitu kubus.

1.2.3 Sifat-sifat yang akan dibahas pada penelitian ini adalah sifat grup non komutatif, pusat grup, order generator, subgrup, dan grup faktor.

1.3 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

1.3.1 Bagaimana membangun himpunan *n-braid* menjadi suatu grup *n-braid* (grup *braid*)?

1.3.2 Sifat apa saja yang berlaku pada grup *braid*?

1.3.3 Sifat apa yang berlaku pada grup faktor dari grup *braid*?

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah disusun, tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1.4.1 mengkaji bagaimana membangun himpunan *n-braid* menjadi suatu grup *n-braid* (grup *braid*),

1.4.2 menganalisis sifat apa saja yang berlaku pada grup *braid*, dan

1.4.3 menganalisis sifat apa yang berlaku pada grup faktor dari grup *braid*.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian, manfaat dari penelitian ini adalah:

1.5.1 mengetahui bagaimana membangun himpunan *n-braid* menjadi suatu grup *n-braid* (grup *braid*),

1.5.2 mengetahui sifat apa saja yang berlaku pada grup *braid*, dan

1.5.3 mengetahui sifat apa yang berlaku pada grup faktor dari grup *braid*.

BAB 2

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini dibahas mengenai beberapa pengertian serta penjelasan tentang hal-hal yang berkaitan dengan grup *braid*.

2.1 Fungsi

Definisi 2.1.1.

Dipunyai dua himpunan tak kosong A dan B. Pemetaan (atau suatu fungsi) dari himpunan A ke himpunan B adalah aturan yang mengawankan setiap elemen di A dengan tepat satu elemen di B. Ditulis $f: A \to B$ (f adalah fungsi dari A ke B).

(Mahindroo, 2005: 12)

Fungsi f disebut fungsi injektif jika tidak ada dua elemen berbeda pada A yang petanya sama di B.

$x_1, x_2 \in A$, jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$.

Fungsi f disebut fungsi pada jika dan hanya jika untuk setiap elemen di B adalah peta dari beberapa elemen A.

$\forall y_1 \in B, \exists x_1 \in A$ sehingga $y_1 = f(x_1)$.

(Andrilli & Hecker, 2010: 654-655)

Contoh 2.1.1

Dipunyai $S = \{w, x, y, z\}$ dan $T = \{1,2,3,4\}$. Didefinisikan fungsi $\alpha: S \to T$ dengan $\alpha(w) = 2, \alpha(x) = 4, \alpha(y) = 1, \alpha(z) = 2$.

Apakah α fungsi injektif?

Penyelesaian 2.1.1.:

Diketahui bahwa $\alpha(w) = 2$ dan $\alpha(z) = 2$.

Jelas $\alpha(w) = 2 = \alpha(z)$ akan tetapi $w \neq z$.

Jadi α bukan fungsi injektif.

(Durbin, J.R., 2009: 14)

2.2 Komposisi Fungsi

Definisi 2.2.1.

Dipunyai himpunan tak kosong A, B, dan C. Didefinisikan fungsi $f: A \to B$ dan fungsi $g: B \to C$. Komposisi ($\circ$) dari f dan g ditulis $g \circ f$ merupakan relasi dari A ke C yang didefinisikan sebagai berikut:

$$g \circ f = \{(x, z) | x \in A, z \in C, \exists y \in B \ni f(x) = y \; dan \; g(y) = z\}.$$

Misalkan fungsi $f: A \to B$ dan fungsi $g: B \to C$ serta $(x, z) \in g \circ f$. Dengan kata lain $(g \circ f)(x) = z$. Berdasarkan definisi komposisi fungsi, terdapat $y \in B$ sehingga $f(x) = y$ dan $g(y) = z$.

Diperoleh

$$z = g(y) = g\big(f(x)\big).$$

Jadi $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

(Malik, *et al.*, 2007: 25)

Contoh 2.2.1.

Fungsi f dan g keduanya merupakan permutasi pada himpunan A. Didefinisikan $f: A \to A, g: A \to A$ sehingga $g \circ f: A \to A$. Misalkan $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dan $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Tentukan nilai $g \circ f$.

Penyelesaian 2.2.1.:

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Jadi nilai $g \circ f$ adalah $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(Mahindroo, 2005: 86)

2.3 Operasi Biner

Definisi 2.3.1.

Operasi biner $*$ pada himpunan A merupakan fungsi dari $A \times A$ ke A. Untuk setiap $(a, b) \in A \times A$, elemen $*\big((a, b)\big)$ dari A dinotasikan oleh $a * b$.

(Fraleigh, 1989: 20)

Contoh 2.3.1.

Fungsi f dan g keduanya merupakan permutasi pada himpunan A. Didefinisikan $f: A \to A, g: A \to A$ sehingga $g \circ f: A \to A$. Misalkan $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dan $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Jelas $g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ merupakan anggota permutasi pada himpunan A. Jadi operasi komposisi merupakan operasi biner.

2.4 Grup

Definisi 2.4.1.

Suatu grup $\langle G,*\rangle$ adalah suatu himpunan G, dengan operasi biner $*$. Sehingga yang memenuhi aksioma berikut:

(i) Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku

$a * (b * c) = (a * b) * c$. **Operasi biner $*$ asosiatif**

(ii) Terdapat suatu elemen $e \in G$ sehingga untuk setiap $x \in G$,

$e * x = x * e = x$. **Elemen e disebut elemen identias untuk $*$**

(iii) Untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu elemen $a' \in G$ sehingga

$a * a' = a' * a = e$. **Elemen a' disebut elemen invers dari a**

(Fraleigh, 2002: 38)

Definisi 2.4.2.

Himpunan permutasi pada A adalah fungsi $\phi: A \to A$ yang bijektif.

(Fraleigh, 2002: 76)

Contoh 2.4.1.

Dipunyai A himpunan tak kosong dan S_A himpunan dari semua permutasi di A. Tunjukkan S_A suatu grup dengan operasi komposisi.

Penyelesaian 2.4.1.:

Ambil $\sigma, \pi, \mu \in S_A$ dan $a \in A$ sebarang.

Jelas $\big(\sigma(\pi\mu)\big)(a) = \sigma\big((\pi\mu)(a)\big) = \sigma(\pi\big(\mu(a)\big) = (\sigma\pi)\big(\mu(a)\big) = \big((\sigma\pi)\mu\big)(a)$.

Jadi operasi komposisi bersifat asosiatif.

Pilih $\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_A$.

Ambil $\sigma \in S_A$ dan $a \in A$ sebarang.

Jelas $(\iota\sigma)(a) = \iota\big(\sigma(a)\big) = \sigma(a)$ dan $(\sigma\iota)(a) = \sigma\big(i(a)\big) = \sigma(a)$.

Jadi terdapat elemen identitas untuk setiap elemen di S_A.

Ambil $\sigma \in S_A$ sebarang.

Pilih $\sigma^{-1} \in S_A$ dengan $\sigma^{-1}(a) = a'$, $a' \in A$, sehingga $\sigma(a') = a$.

Jelas

$\iota(a) = a = \sigma(a') = \sigma\big(\sigma^{-1}(a)\big) = (\sigma\sigma^{-1})(a)$ dan

$\iota(a) = a' = \sigma^{-1}(a) = \sigma^{-1}\big(\sigma(a')\big) = (\sigma^{-1}\sigma)(a)$.

Jadi untuk setiap elemen di S_A memiliki invers di S_A.

Karena ketiga aksioma suatu grup terpenuhi maka S_A dengan operasi komposisi adalah suatu grup.

Definisi 2.4.3.

Dipunyai himpunan berhingga $A = \{1,2,\dots,n\}$. Grup dari semua permutasi pada A disebut grup simetri pada n unsur, dinotasikan S_n.

Contoh 2.4.3.

Dipunyai himpunan $A = \{1,2,3\}$. Permutasi dari himpunan A adalah sebagai berikut:

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jadi grup simetri S_3 mempunyai 6 anggota, yaitu $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2$, dan μ_3.

(Fraleigh, 2002: 77-79)

Definisi 2.4.4.

Misalkan $\langle G,*\rangle$ grup dan S himpunan bagian tak kosong dari G. $\langle S,*\rangle$ disebut subgrup dari G jika $\langle S,*\rangle$ adalah grup.

Contoh 2.4.4.

Dipunyai grup $S_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ dengan operasi komposisi fungsi. $K = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$ dengan operasi komposisi fungsi merupakan subgrup dari grup S_3.

(Malik, *et al.*, 2007: 71)

Teorema 2.4.5.

Misalkan G grup dan S himpunan tak kosong dari G. S subgrup dari G jika dan hanya jika (1) S tertutup terhadap operasi biner pada G, (2) untuk setiap $a \in S \; \exists a^{-1} \in S \ni aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Bukti 2.4.5.:

($\Longrightarrow$) Karena dipunyai fakta bahwa $S \leq G$ maka kondisi 1,2, dan 3 pasti terpenuhi.

($\Longleftarrow$) Jelas bahwa aksioma grup ke-(ii) dan ke-(iii) terpenuhi. Karena S tertutup terhadap operasi biner pada G maka aksioma grup ke-(i) terpenuhi. Jadi S suatu grup. Akibatnya $S \leq G$.

(Fraleigh, 2002: 52)

Definisi 2.4.6.

Grup G disebut siklik apabila terdapat elemen $a \in G$ sehingga $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$. Elemen a disebut generator G, ditulis $G = \langle a \rangle$.

(Ayres, 2004: 100)

Contoh 2.4.6.

Elemen ρ_1 dan μ_1 pada Contoh 2.4.3 adalah generator dari grup simetri S_3.

Definisi 2.4.7.

Misalkan G grup. $Z(G) = \{b \in G | ab = ba \ \ \forall a \in G\}$ disebut pusat dari G.

(Malik, 2002: 73)

Definisi 2.4.8.

Misalkan G grup, $a \in G$, dan $H \leq G$. Himpunan $aH = \{ah | h \in H\}$ adalah koset kiri H di G dan himpunan $Ha = \{ha | h \in H\}$ adalah koset kanan H di G.

Contoh 2.4.8.

Misalkan $H \leq G$, dengan $H = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$ dan $G = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$. Koset kiri dari H di G adalah

$$\rho_0 H = \rho_1 H = \rho_2 H = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$$

$$\mu_1 H = \mu_2 H = \mu_3 H = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}.$$

(Malik, 2002: 81-82)

Definisi 2.4.9.

Fungsi $\phi: G \to G'$ adalah suatu homomorfisma jika

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \ \forall a, b \in G.$$

Teorema 2.4.10.

Misalkan $\phi: G \to G'$ homomorfisma grup.

1. Jika e elemen identitas di G maka $\phi(e) = e'$ adalah elemen identitas di G'.
2. Jika $a \in G$ maka $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$.

Bukti 2.4.10.

1. Diketahui $ee = e$. Jadi $\varphi(e)\varphi(e) = \varphi(e)$

   Berakibat $\varphi(e) = e'$
2. $\forall a \in G$ berlaku $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Diketahui

$\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1})\varphi(a) = \varphi(e) = e'$.

Karena invers dari $\varphi(a)$ di G tunggal.

Maka $\varphi(a^{-1}) = \big(\varphi(a)\big)^{-1}$.

(Fraleigh, 2002: 128-129)

Definisi 2.4.11.

Misalkan $\phi: G \to G'$ homomorfisma grup. Subgrup $\phi^{-1}[\{e'\}] = \{x \in G | \phi(x) = e'\}$ adalah kernel ϕ, dinotasikan $Ker(\phi)$.

(Fraleigh, 2002: 129)

Teorema 2.4.12.

Misalkan $\phi: G \to G'$ homomorfisma grup, dan misalkan $H = Ker(\phi)$. Dipunyai $a \in G$. Maka himpunan

$$\phi^{-1}[\{\phi(a)\}] = \{x \in G | \phi(x) = \phi(a)\}$$

Adalah koset kiri dari aH pada H, dan juga koset kanan Ha pada H. Akibatnya $aH = Ha$.

Bukti 2.4.12.:

Akan ditunjukkan $\{x \in G | \phi(x) = \phi(a)\} = aH$.

Misalkan $\phi(x) = \phi(a)$ maka $\phi(a^{-1})\phi(x) = e'$ dimana e' elemen identitas di G'.

Berdasarkan Teorema 2.4.8 bahwa $\phi(a)^{-1} = \phi(a^{-1})$ diperoleh $\phi(a^{-1})\phi(x) = e'$.

Karena ϕ homomorfisma maka $\phi(a^{-1})\phi(x) = \phi(a^{-1}x)$.

Diperoleh $\phi(a^{-1}x) = e'$.

Berarti $a^{-1}x \in H = Ker(\phi)$.

Jadi $a^{-1}x = h$ untuk suatu $h \in H$ dan $x = ah \in aH$.

Diperoleh $\{x \in G | \phi(x) = \phi(a)\} \subseteq aH$

Akan ditunjukkan $\{x \in G | \phi(x) = \phi(a)\} = Ha$

Karena $\phi(x) = \phi(a)$ maka $\phi(x)\phi(a)^{-1} = e'$ dimana e' elemen identitas G'.

Berdasarkan Teorema 2.4.8 bahwa $\phi(a)^{-1} = \phi(a^{-1})$ diperoleh $\phi(x)\phi(a^{-1}) = e'$.

Karena ϕ homomorfisma maka $\phi(x)\phi(a^{-1}) = \phi(xa^{-1})$.

Diperoleh $\phi(xa^{-1}) = e'$.

Berarti $xa^{-1} \in H = Ker(\phi)$.

Jadi $xa^{-1} = h$ untuk suatu $h \in H$ dan $x = ha \in Ha$.

Diperoleh $\{x \in G | \phi(x) = \phi(a)\} \subseteq Ha$.

Karena $\{x \in G | \phi(x) = \phi(a)\} \subseteq aH$ dan $\{x \in G | \phi(x) = \phi(a)\} \subseteq Ha$ maka $aH = Ha$.

(Fraleigh, 2002: 130)

Definisi 2.4.13.

Misalkan G grup dan H subgrup G. H subgrup normal dari G jika koset kiri sama dengan koset kanan,

$$aH = Ha \quad \forall a \in G.$$

(Fraleigh, 2002: 132)

Berdasarkan Teorema 2.4.12. diperoleh bahwa kernel dari suatu homomorfisma grup $\phi: G \to G'$ adalah subgrup normal dari G.

Definisi 2.4.14.

Suatu isomorfisma $\phi: G \to G'$ adalah suatu homomorfisma yang bijektif. Dinotasikan $G \cong G'$.

(Malik, 2002: 142)

Teorema 2.4.15.

Misalkan S subgrup normal dari grup G. Maka koset-koset dari S membentuk suatu grup $G/S = \{aS | a \in G\}$ dengan operasi biner $(aS)(bS) = (ab)S \ \forall aS, bS \in G/S$.

Bukti 2.4.15.

(1) Karena $\forall aS, bS, cS \in G/S$ berlaku $(aS)[(bS)(cS)] = aS[(bc)S] = [a(bc)]S = [(ab)c]S = [(ab)S](cS) = [(aS)(bS)](cS)$, maka operasi biner pada G/S bersifat asosiatif.

(2) Karena $\forall aS \in G/S$ berlaku $(aS)(eS) = (ae)S = aS = (ea)S = (eS)(aS)$ maka jelas bahwa $eS = S$ merupakan elemen identitas di G/S.

(3) Jelas $(a^{-1}S)(aS) = (a^{-1}a)S = eS = (aa^{-1})S = (aS)(a^{-1}S)$ menunjukkan bahwa $a^{-1}S = (aS)^{-1}$ (elemen $a^{-1}S$ merupakan elemen invers di G/S).

Jadi $\forall aS \in G/S \ \exists a^{-1}S \in G/S \ \ni (a^{-1}S)(aS) = eS = (aS)(a^{-1}S)$.

Dari (1), (2), dan (3) diperoleh bahwa G/S adalah grup.

Selanjutnya grup G/S disebut grup faktor.

(Fraleigh, 2002: 138-139)

Definisi 2.4.16.

Dipunyai H subgrup normal dari grup G. Kumpulan koset kanan atau kiri dari H ditulis

$$G/H = \{xH | x \in G\} \text{ atau } G/H = \{Hx | x \in G\}.$$

Banyaknya elemen di G/H disebut indeks H di G dengan notasi $[G:H]$.

(Robert, 2001: 226)

Contoh 2.4.16.

Dipunyai grup S_3 dengan operasi komposisi. Misalkan $H = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$ adalah subgrup dari S_3. Koset kiri dan koset kanan H di G yaitu

$$\rho_0 H = \rho_1 H = \rho_2 H = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\} = H\rho_0 = H\rho_1 = H\rho_2$$

$$\mu_1 H = \mu_2 H = \mu_3 H = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\} = H\mu_1 = H\mu_2 = H\mu_3.$$

Jadi $[G:H] = 2$.

(Malik, 2002: 83)

Teorema 2.4.17.

Dipunyai fungsi $\phi: G \to G'$ suatu homomorfisma dengan $Ker(\phi) = K$ dan homomorfisma natural $\gamma: G \to G/K$ maka terdapat isomorfisma $\mu: G/K \to \phi(G)$.

(Fraleigh, 2002: 140)

Bukti 2.4.17.:

Bentuk fungsi $\mu: G/K \to \phi(G)$ yang didefinisikan oleh $\mu(gK) = \phi(g)$.

Akan ditunjukkan μ terdefinisi dengan baik.

Ambil $g_1K, g_2K \in G/K$ dengan $g_1K = g_2K$.

Jelas

$g_1K = g_2K$

$\Leftrightarrow g_1 g_2^{-1} \in K$

$\Leftrightarrow \mu(g_1 g_2^{-1}) = e_{G'}$

$\Leftrightarrow \mu(g_1)\mu(g_2)^{-1} = e_{G'}$

$\Leftrightarrow \mu(g_1) = \mu(g_2)$

$\Leftrightarrow \mu(g_1K) = \mu(g_2K)$.

Karena $\mu(g_1K) = \mu(g_2K)$ maka μ terdefinisi dengan baik.

Akan ditunjukkan μ suatu homomorfisma.

Ambil $g_1K, g_2K \in G/K$.

Jelas

$$\begin{aligned}\mu\big((g_1K)(g_2K)\big) &= \mu\big((g_1g_2)K\big)\\ &= \phi(g_1g_2)\\ &= \phi(g_1)\phi(g_2)\\ &= \mu(g_1K)\mu(g_2K).\end{aligned}$$

Karena $\mu\big((g_1K)(g_2K)\big) = \mu(g_1K)\mu(g_2K)$ maka μ suatu homomorfisma.

Akan ditunjukkan μ isomorfisma.

Akan ditunjukkan μ injektif.

Ambil $g_1K, g_2K \in G/K$ dengan $\mu(g_1K) = \mu(g_2K)$.

Jelas

$\mu(g_1K) = \mu(g_2K)$

$\Leftrightarrow \phi(g_1) = \phi(g_2)$

$\Leftrightarrow \phi(g_1)\phi(g_2)^{-1} = e_{G'}$

$\Leftrightarrow \phi(g_1g_2^{-1}) = e_{G'}$

Berarti $g_1g_2^{-1} \in K$.

Karena $g_1g_2^{-1} \in K$ maka

$g_1g_2^{-1} = k \in K$

$\Leftrightarrow g_1 = g_2k \in g_2K$.

Diperoleh $g_1 \in g_2K \cap g_1K$.

Akibatnya $g_1K = g_2K$.

Jadi apabila mengambil $g_1K, g_2K \in G/K$ dengan $\mu(g_1K) = \mu(g_2K)$ maka $g_1K = g_2K$.

Jadi μ injektif.

Akan ditunjukkan μ surjektif.

Ambil $y \in \phi(G)$ sebarang.

Karena $y \in \phi(G)$ maka terdapat $x \in G$ sedemikian sehingga $y = \phi(x)$.

Pilih $xK \in G/K$.

Jelas

$$\begin{aligned}\mu(xK) &= \phi(x)\\ &= y.\end{aligned}$$

Jadi $\forall y \in \phi(G)\ \exists xK \in G/K$ sehingga $\mu(xK) = y$.

Jadi μ surjektif.

Karena μ injektif dan surjektif serta homomorfisma maka μ isomorfisma.

2.5 Himpunan n-*braid*

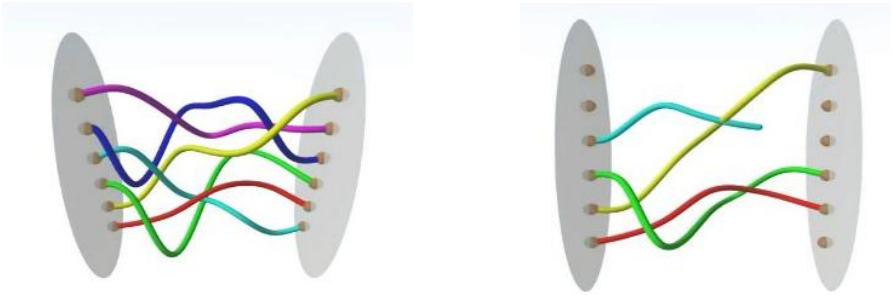
Definisi 2.5.1.

Misalkan D suatu unit kubus, $D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}$. Bagian atas kubus ditempatkan n titik $A_1, A_2, \dots, A_n$, begitu juga pada bagian bawah kubus ditempatkan n titik $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Didefinisikan $A_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 1\right), A_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{n+1}, 1\right), \dots, A_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 1\right)$ dan $B_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 0\right), B_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{n+1}, 0\right), \dots, B_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 0\right)$. Hubungkan titik $A_1, A_2, \dots, A_n$

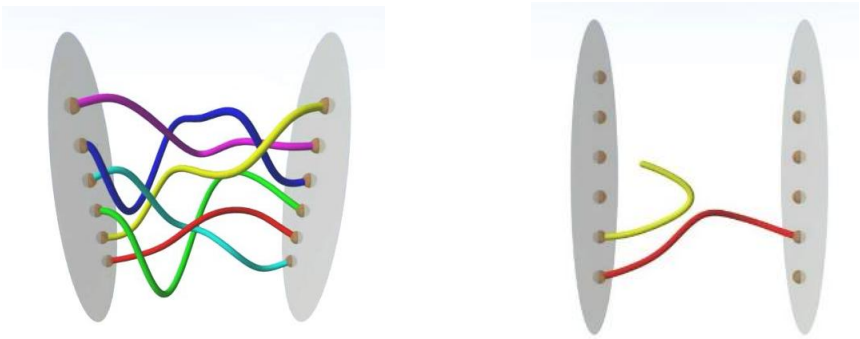
dengan $B_1, B_2, \dots, B_n$. Garis yang menghubungkan titik tersebut dinamakan *braid*, dinotasikan $d_1, d_2, \dots, d_n$. *Braid* dapat menghubungkan kedua titik tersebut jika memenuhi ketiga kondisi berikut:

(i) $d_1, d_2, \dots, d_n$, saling lepas satu sama lain.



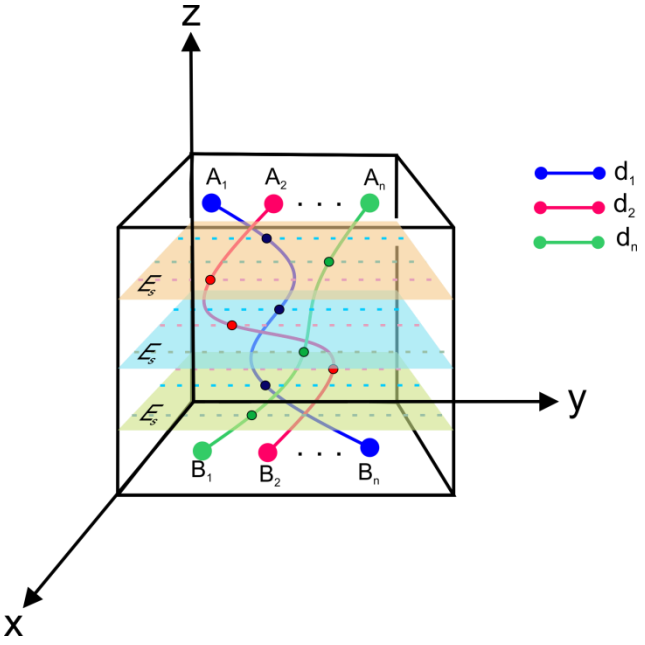
Gambar 2.5.1.
(a) *Braid* saling lepas. (b) *Braid* tidak saling lepas.

(ii) Setiap d_i menghubungkan suatu A_j ke suatu B_k dengan nilai j dan k bisa jadi sama. Akan tetapi d_i tidak boleh menghubungkan suatu A_j ke suatu A_k atau B_j ke suatu B_k.



Gambar 2.5.2.
(a) Kondisi yang benar. (b) kondisi yang salah.

(iii) Setiap bidang E_s (disebut tingkat bidang) sehingga $z = s$ dan $0 \leq s \leq 1$ (dengan kata lain sejajar terhadap bidang xy) memotong setiap *braid* d_i tepat satu titik.



Gambar 2.5.3. *n-braid*

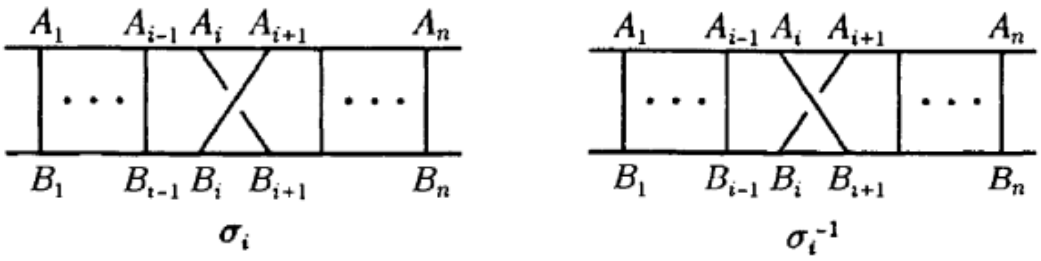
Susunan dari $d_1, d_2, \dots, d_n$ (dengan titik ujung $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$) disebut suatu *n-braid* atau suatu *braid* dengan *n braid*.

Berdasarkan kondisi (iii) dan fakta bahwa titik $A_1, A_2, \dots, A_n$ terletak di atas titik $B_1, B_2, \dots, B_n$, *braid* bergerak dari atas ke bawah.

Himpunan dari semua *n-braid* dinotasikan dengan B_n.

(Murasugi, *et al.*, 1999: 3)

Suatu σ_i selalu membawa *braid* yang menghubungkan titik ke-i menuju titik ke-$(i+1)$ yang melintas di bawah *braid* yang menghubungkan titik ke-$(i+1)$ menuju titik ke-i dan *braid* lainnya vertikal. Invers dari σ_i, dinotasikan σ_i^{-1}, selalu membawa *braid* yang menghubungkan titik ke-i menuju titik ke-$(i+1)$ yang melintas di atas *braid* yang menghubungkan titik ke-$(i+1)$ menuju titik ke-i dan *braid* lainnya vertikal.



Gambar 2.5.4. interpretasi σ_i dan σ_i^{-1}.

Proposisi 2.5.2.

Setiap *n-braid* β (di B_n) dapat ditulis sebagai hasil kali elemen-elemen dari himpunan $\{\sigma_i^{\pm 1}\}$ dengan $i = 1,2,\dots,n-1$, yaitu

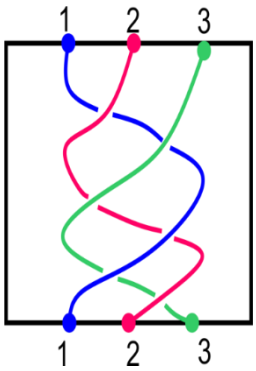
$$\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1}\sigma_{i_2}^{\varepsilon_2}\dots\sigma_{i_k}^{\varepsilon_k},$$

dimana $1 \le i_1, i_2, \dots, i_k \le n-1$ dan $\varepsilon_i = +1$ atau -1 untuk $i = 1,2,\dots,k$.

(Murasugi, *et al.*, 1999: 17)

Bukti 2.5.2.

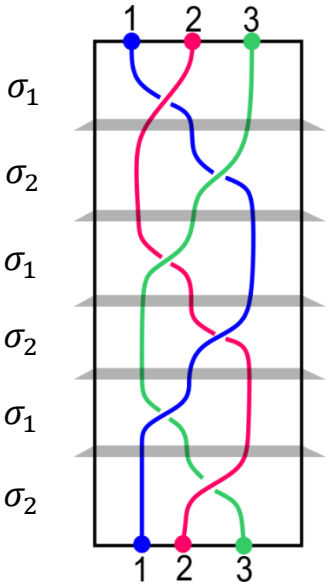
Ambil sebarang *braid* di B_3.



Gambar 2.5.5. 3-*braid*.

Kemudian partisi *braid* tersebut sehingga setiap partisi memiliki tepat satu dua *braid* yang bersilangan dan *braid* sisanya lurus ke bawah.

Diperoleh



Gambar 2.5.6. Permutasi 3-*braid*.

Jadi partisi dari suatu elemen B_3 dapat ditulis sebagai

$$\beta = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2.$$

Definisi 2.5.3.

Didefinisikan himpunan n-*braid*, B_n, $(n \geq 3)$ dengan operasi komposisi yang dibangun oleh $n-1$ generator, ditulis

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \middle| \begin{matrix} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \text{ untuk } i = 1,2,\dots,n-2 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ untuk } 1 \leq i < j \leq n-1 \text{ dan } j-i \geq 2 \end{matrix} \right\rangle.$$

(Kassel, 2008: 1)

Contoh 2.5.3.

$B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 | \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle$.

$$B_4 = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \middle| \begin{matrix} \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3 \\ \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 \end{matrix} \right\rangle.$$

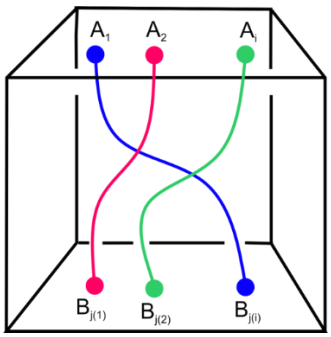
2.6 Permutasi *braid*

Misalkan β suatu n-*braid*. *Braid* d_i menghubungkan titik A_i ke titik $B_{j(i)}$ untuk suatu $i = 1,2,\dots,n$. Jika dibentuk fungsi $f: B_n \longrightarrow S_n$ (himpunan dari semua permutasi dari $\{1,2,\dots,n\}$) yang didefinisikan

$$f(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j(1) & j(2) & \dots & j(n) \end{pmatrix}$$

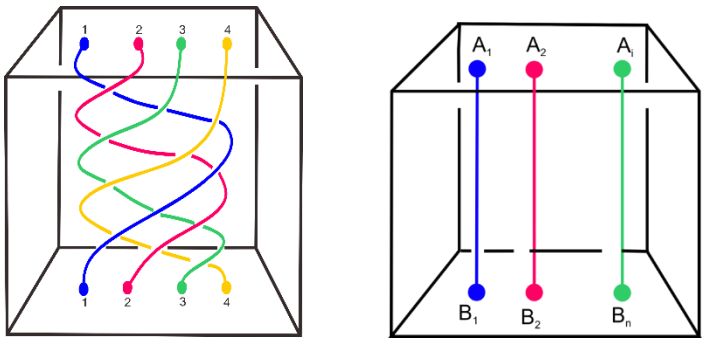
maka f adalah suatu *braid* invarian.

Bentuk dari $f(\beta)$ disebut permutasi *braid* dan dinotasikan oleh $\pi(\beta)$.



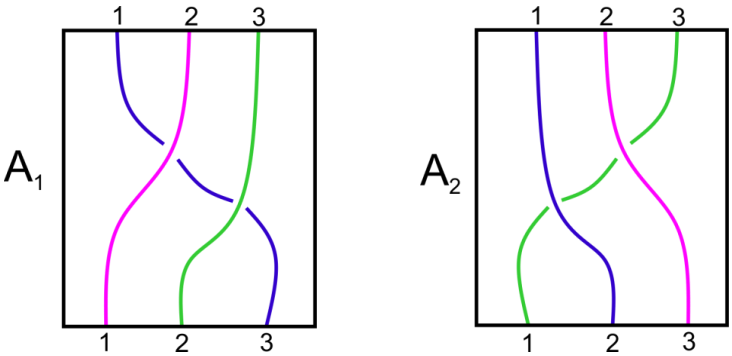
Gambar 2.6.1. Permutasi pada *braid*.

Jika d_i selalu menghubungkan A_i ke B_i untuk setiap $i = 1,2,\dots,n$ maka n-*braid* β disebut *pure* n-*braid*.



Gambar 2.6.2. (a) *Pure* n-*braid*, (b) Trivial n-*braid* (1_n).

Contoh 2.6.1.



Gambar 2.6.3. Permutasi pada 3-*braid*

Diberikan 3-*braid* A_1 dan A_2 pada Gambar 2.6.3. Permutasi *braid* dapat ditulis sebagai berikut

$$\pi(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } \pi(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Murasugi, *et al.*, 1999: 9)

BAB 5

PENUTUP

5.1 Simpulan

1. Himpunan n-*braid* yang dilengkapi dengan operasi biner komposisi dapat membangun suatu grup n-*braid*. Selanjutnya disebut grup *braid*.
2. Sifat-sifat yang berlaku pada grup *braid*, yaitu
   (i) Grup braid bersifat non abelian.
   (ii) Pusat Grup B_n adalah $Z(B_n) = \{b \in B_n | ab = ba \ \ \forall a \in B_n\}$ dengan
   $$b = \left(\sigma_{i_1}\sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}\right)^n, 1 \leq i_k \leq n-1, i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k.$$
   (iii) Untuk $1 \leq m \leq n$, fungsi $\psi: B_m \longrightarrow B_n$ didefinisikan oleh
   $$\psi(\sigma_i) = \sigma_i,$$
   untuk $i = 1,2, \dots, m-1$, adalah suatu homomorfisa injektif dari B_m ke B_n. Jadi B_m dapat dipandang sebagai subgrup dari B_n.
   (iv) Untuk setiap $i = \{1,2, \dots, n-1\}$, generator σ_i mempunyai order tak hingga. Atau dapat dikatakan untuk setiap bilangan bulat positif k, $\sigma_i^k \neq 1_n$.
   (v) Jika P_n, $n \geq 1$, menotasikan himpunan dari semua *pure* n-*braid* maka P_n adalah subgrup normal dari B_n.
3. Grup faktor B_n/P_n isomorfik terhadap grup simetri S_n dan $[B_n : P_n] = n!$.

5.2 Saran

Saran yang dapat diberikan adalah penelitian dapat dilanjutkan dengan mengkaji tentang grup siklik dari grup *braid*, *free group* atas grup *braid*, dan homeomorfisma *braid*. Selain kajian teori dapat juga mengkaji tentang penerapan dari grup *braid (knot theory, cryptography)*.

DAFTAR PUSTAKA

Andrilli, S. & D. Hecker. 2010. *Elementary Linear Algebra* (4th ed.). Canada: Academic Press.

Ayres, F. JR. & L. R., Jaisingh. 2004. *Theory and Problems of Abstract Algebra* (2nd ed.). USA: McGraw-Hill Companies, Inc.

Durbin, J. R. 2009. *Modern Algebra: An Introduction* (6th ed.). USA: John Wiley & Sons, Inc.

Fraleigh, J. B. 2002. *A First Course in Abstract Algebra* (7th ed.). New Jersey: Addison-Wesley.

Judson, T. W. 2011. *Abstract Algebra: Theory and Applications*. USA: Free Software Foundation, Inc.

Kassel, C. & V . Turaev. 2008. *Braid Groups*. USA: Springer Science+Business Media, LLC.

Mahindroo, A. 2005. *Golden Modern Algebra*. New Delhi: Mehra Offset Press.

Malik, D. S., J. N., Moderson, & M. K. Sen. 2007. *An Introduction to Abstract Algebra*. USA: Creighton University.

Murasugi, K., & B. I. Kurpita. 1999. *A Study of Braids*. Netherland: Kluwer Academic Publisher.

Redfield, R. H. 2001. *Abstract Algebra A Concrete Introduction*. USA: Addison Wesley Longman, Inc.