UNNES
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

APLIKASI MATRIKS LESLIE UNTUK MENENTUKAN
OPTIMAL SUSTAINABLE HARVESTING POLICY
(STUDI KASUS PADA PETERNAKAN SAPI KTT BANGUN REJO, KECAMATAN BAWEN)

Skripsi
disusun sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika

oleh
Niken Hesti Larassati
4111413023

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
2018

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul "Aplikasi Matriks Leslie untuk Menentukan *Optimal Sustainable Harvesting Policy* (Studi Kasus pada Peternakan Sapi KTT Bangun Rejo, Kecamatan Bawen)" ini bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan.

Semarang, 18 Desember 2017

Niken Hesti Larassati
4111413023

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Aplikasi Matriks Leslie untuk Menentukan *Optimal Sustainable Harvesting Policy* (Studi Kasus pada Peternakan Sapi KTT Bangun Rejo, Kecamatan Bawen)

disusun oleh

Niken Hesti Larassati

4111413023

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES pada tanggal 18 Desember 2017.

Panitia:

Ketua

Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si., Akt.
196412231988031001

Sekretaris

Drs. Arief Agoestanto, M.Si.
196807221993031005

Ketua Penguji

Dr. Isnarto, M.Si.
196902251994031001

Anggota Penguji/
Pembimbing I

Dra. Rahayu Budhiati Veronica, M.Si.
196406131988032002

Anggota Penguji/
Pembimbing II

Drs. Mashuri, M.Si.
196708101992031003

MOTTO

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan

(QS. Al Insyirah: 6)

Kegagalan hanya terjadi bila kita menyerah

(Lessing)

PERSEMBAHAN

Untuk Bapak Arie Sudirman, Ibu Hana Lies Suprapti, Ratih Nursasiwi, Yosiana Widya Arini, Singgih Ario Jatmiko, keluarga, teman-teman seperjuangan Program Studi Matematika 2013, dan Universitas Negeri Semarang

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah swt. yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini tidak dapat berjalan dengan baik tanpa bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Rektor Universitas Negeri Semarang, yang telah memberikan kesempatan untuk menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang;
2. Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang, yang telah memberikan izin untuk melaksanakan penelitian;
3. Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang, yang telah memberikan kemudahan administrasi dalam menyelesaikan skripsi ini;
4. Ketua Program Studi Matematika, yang telah memberikan kemudahan administrasi, serta memberikan arahan dan motivasi selama menjadi mahasiswa Matematika;
5. Dosen pembimbing I, Dra. Rahayu Budhiati Veronica, M.Si. dan dosen pembimbing II, Drs. Mashuri, M.Si., yang telah sabar memberikan bimbingan dan arahan dalam menyusun skripsi;
6. Dosen penguji, Dr. Isnarto, M.Si., yang telah memberikan masukan, saran, dan kritik yang membangun dalam penyempurnaan skripsi;
7. Dosen wali, Drs. Sugiman, M.Si., yang telah sabar memberikan arahan, bimbingan, dan motivasi selama menempuh studi;
8. Beasiswa Bidikmisi, yang telah membiayai penulis selama menempuh studi;

9. Teman-teman terdekat: Mita, Retna, Nindy, Puspa, Roro, Ais, Lia, Farid, dan Iin, yang telah membantu dalam setiap kesulitan;
10. Keluarga besar Kos Wulandary: Ibu dan Bapak kos, Mita, Retna, Rianti, Anita, Devi, Ira, Imma, Hana, Moli, dan Wiji yang telah memberikan motivasi;
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pembaca yang telah berkenan membaca skripsi ini. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan serta menjadi bahan kajian dalam bidang ilmu terkait.

Semarang, Desember 2017

Penulis

ABSTRAK

Larassati, Niken Hesti. 2018. *Aplikasi Matriks Leslie untuk Menentukan Optimal Sustainable Harvesting Policy (Studi Kasus pada Peternakan Sapi KTT Bangun Rejo, Kecamatan Bawen)*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Pembimbing Pertama Dra. Rahayu Budhiati Veronica, M.Si. dan Pembimbing Kedua Drs. Mashuri, M.Si.

Kata kunci: matriks Leslie, tingkat pertumbuhan populasi betina, kebijakan pemanenan berkesinambungan optimal, batasan ekonomi

Keberadaan populasi sapi betina pada peternakan sapi Kelompok Tani-Ternak (KTT) Bangun Rejo sangat dibutuhkan untuk meningkatkan pertumbuhan populasi. Agar populasi tetap ideal, maka kelebihan jumlah sapi betina akan dipanen. Sebelum dilakukan pemanenan, dilakukan prediksi tingkat pertumbuhan populasi menggunakan matriks Leslie. Parameter yang digunakan untuk membentuk matriks Leslie adalah paramater kelahiran dan kematian sapi betina pada tiap kelas umur. Untuk kasus pertumbuhan populasi sapi betina meningkat (nilai eigen dominan lebih dari satu), maka matriks Leslie dapat digunakan untuk menentukan kebijakan pemanenan berkesinambungan. Kebijakan ini akan mempertahankan jumlah sapi betina yang tidak dipanen tetap stabil.

Tujuan penelitian ini adalah menentukan tingkat pertumbuhan populasi sapi betina di peternakan sapi KTT Bangun Rejo dan menentukan kebijakan pemanenan berkesinambungan yang paling tepat diterapkan pada peternakan tersebut. Terdapat dua model kebijakan pemanenan yang diterapkan, yaitu kebijakan pemanenan berkesinambungan optimal tanpa batasan ekonomi dan kebijakan pemanenan berkesinambungan optimal dengan batasan ekonomi, kemudian ditentukan kebijakan mana yang paling optimal di antara dua kebijakan tersebut. Metode yang digunakan adalah metode studi kasus. Pengumpulan data dilakukan melalui wawancara langsung dengan narasumber (ketua KTT Bangun Rejo) untuk memperoleh data yang diperlukan.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa pertumbuhan populasi sapi betina di peternakan tersebut mengalami peningkatan sebesar 26,25% setiap dua tahun. Dengan menggunakan kebijakan pemanenan berkesinambungan optimal tanpa batasan ekonomi, diperoleh hasil optimal yaitu 28,784% dari total populasi sapi betina dapat dipanen dengan memanen kelas umur 1 sebesar 49,3% dan memanen seluruh kelas umur 6. Kebijakan ini menghasilkan pendapatan Rp235.500.000,00 setiap dua tahun. Dengan menggunakan kebijakan pemanenan berkesinambungan optimal dengan batasan ekonomi, diperoleh hasil optimal yaitu pertumbuhan ekonomi meningkat sebesar 36% dengan memanen kelas umur 3 sebesar 70,39% dan memanen seluruh kelas umur 6. Kebijakan ini menghasilkan pendapatan Rp273.000.000,00 setiap dua tahun. Dengan membandingkan pendapatan yang diperoleh dari kedua kebijakan tersebut, maka kebijakan yang paling tepat untuk diterapkan adalah kebijakan pemanenan berkesinambungan optimal dengan batasan ekonomi.

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran Halaman

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika sebagai dasar semua ilmu pengetahuan telah banyak digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam bidang lain, salah satunya adalah bidang biologi. Dalam bidang biologi, konsep matematika yang sering digunakan adalah matriks. Matriks digunakan pada beberapa kajian biologi sebagai pengelola informasi numerik karena kemudahan dan keefisienan matriks dalam menganalisis data (Rodin, 1988).

Salah satu kajian biologi yang memanfaatkan matriks adalah menghitung pertumbuhan populasi. Pertumbuhan populasi diartikan sebagai perubahan jumlah individu pada suatu populasi (Pratama *et al.*, 2013). Pertumbuhan populasi dipengaruhi oleh beberapa hal, misalnya kelahiran, kematian, migrasi, lingkungan, dll. Kajian tentang pertumbuhan populasi sangat penting dilakukan. Pada populasi manusia, salah satu manfaat memprediksi tingkat pertumbuhan populasi adalah untuk mengendalikan tingkat kepadatan penduduk. Pada populasi hewan ternak, memprediksi tingkat pertumbuhan populasi dilakukan untuk menentukan strategi pemanenan. Definisi pemanenan pada bahasan ini adalah mengeluarkan sebagian hewan ternak dari populasinya. Strategi pemanenan merupakan upaya yang dilakukan oleh peternak untuk mendapatkan hasil panen yang optimal dan tetap mempertahankan kestabilan populasi.

Salah satu peternakan yang terdapat di Kabupaten Semarang adalah peternakan sapi milik Kelompok Tani-Ternak (KTT) Bangun Rejo yang berlokasi di Dusun Krajan, Desa Polosiri, Kecamatan Bawen. Peternakan ini mampu memelihara sekitar 500 ekor sapi jantan untuk digemukkan dan 80 ekor sapi betina untuk dikembangbiakkan. Keberadaan populasi sapi betina pada peternakan ini sangat dibutuhkan untuk meningkatkan pertumbuhan populasi dan menambah pendapatan bagi peternak. Akan tetapi, pertumbuhan populasi sapi betina pada peternakan ini masih rendah karena banyak kelahiran pada kelas umur produktif masih rendah. Sebagian besar sapi betina yang dipanen adalah sapi betina yang sudah tidak produktif. Hal tersebut menyebabkan rendahnya pendapatan yang diperoleh dari pemanenan sapi betina dikarenakan nilai jual sapi betina yang tidak produktif tergolong rendah. Oleh sebab itu, perlu dilakukan penelitian tentang tingkat pertumbuhan populasi dan strategi pemanenan sapi betina pada peternakan sapi KTT Bangun Rejo agar diperoleh pendapatan yang maksimum dan tetap mempertahankan kestabilan populasi.

Salah satu aplikasi matematis di lapangan untuk menyelesaikan masalah pertumbuhan populasi adalah penggunaan matriks Leslie. Parameter yang digunakan untuk membentuk matriks Leslie adalah paramater kelahiran dan kematian betina. Oleh sebab individu yang mampu menghasilkan keturunan adalah perempuan/betina, maka matriks Leslie ini hanya berlaku untuk populasi perempuan/betina. Beberapa asumsi yang digunakan untuk membuat matriks Leslie, yaitu: populasi yang diperhitungkan hanya perempuan/betina, umur maksimum yang dapat dicapai perempuan/betina diketahui, populasi dikelompokkan menjadi kelas-kelas umur di mana selang tiap kelas umur sama, tingkat ketahanan hidup diketahui, tingkat kesuburan diketahui, dan distribusi umur awal tiap kelas umur diketahui (Darko, 2012). Pada model ini, diasumsikan tidak ada migrasi masuk atau keluar pada populasi yang diteliti (Yuliani *et al.*, 2012).

Bentuk umum matriks Leslie sebagai matriks pertumbuhan populasi adalah sebagai berikut:

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

dengan a_i sebagai tingkat kesuburan perempuan/betina, yaitu rata-rata banyak anak perempuan/betina yang lahir dari tiap perempuan/betina ketika si ibu/induk berada dalam kelas umur ke-i dan b_i adalah tingkat ketahanan hidup perempuan/betina, yaitu peluang perempuan/betina yang dapat bertahan hidup dari kelas umur ke-i sampai $i + 1$. Batasan nilai a_i dan b_i adalah

$a_i \geq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$

$0 < b_i \leq 1$ untuk $i = 1, 2, \dots, n - 1$ (Pratama *et al.*, 2013).

Dengan menghitung nilai eigen dominan matriks Leslie, akan diperoleh tiga kasus pertumbuhan populasi, yaitu pertumbuhan populasi meningkat, menurun, atau tetap. Untuk kasus pertumbuhan populasi meningkat (nilai eigen dominan lebih dari satu) pada hewan betina, maka matriks Leslie dapat digunakan lebih lanjut untuk menentukan strategi pemanenan yang tepat (Anton & Rorres, 2013).

Strategi pemanenan yang dilakukan adalah pemanenan berkesinambungan. Masalah yang akan dikaji adalah menentukan kebijakan pemanenan berkesinambungan yang memberikan hasil terbesar (hasil berkesinambungan optimal) bagi peternakan sapi KTT Bangun Rejo. Terdapat dua kebijakan pemanenan berkesinambungan yang akan diaplikasikan, yaitu kebijakan tanpa batasan ekonomi yang akan menghasilkan persentase terbesar dari populasi sapi betina yang dapat dipanen, serta kebijakan dengan batasan ekonomi $\langle c, x \rangle = 1$, di mana c adalah vektor pembatas dan x adalah vektor populasi kesetimbangan setelah panen yang akan menghasilkan tingkat pertumbuhan ekonomi terbesar yang dapat dicapai oleh populasi. Dari kedua kebijakan tersebut, ditentukan kebijakan mana yang memberikan hasil paling optimal.

Berdasarkan pemikiran tersebut, maka penulis mencoba melakukan pembahasan yang berjudul “Aplikasi Matriks Leslie untuk Menentukan *Optimal Sustainable Harvesting Policy* (Studi Kasus pada Peternakan Sapi KTT Bangun Rejo, Kecamatan Bawen)”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka permasalahan yang timbul adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana tingkat pertumbuhan populasi sapi betina di peternakan sapi KTT Bangun Rejo?

2. Bagaimana strategi pemanenan yang paling tepat diterapkan di peternakan sapi KTT Bangun Rejo dan berapa hasil berkesinambungan optimal yang diperoleh?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui tingkat pertumbuhan populasi sapi betina di peternakan sapi KTT Bangun Rejo;
2. Mengetahui strategi pemanenan yang paling tepat diterapkan di peternakan sapi KTT Bangun Rejo dan hasil berkesinambungan optimal yang diperoleh.

1.4 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, populasi yang diteliti hanya populasi sapi betina dan nilai ekonomi dibatasi pada rata-rata nilai jual sapi betina tiap kelas umur.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Manfaat Akademis

   Manfaat akademis penelitian ini adalah menerapkan teori-teori matematika, khususnya teori Aljabar Linear yang diperoleh dalam perkuliahan dan menambah pengetahuan serta wawasan tentang aplikasi matriks Leslie untuk menghitung tingkat pertumbuhan populasi dan menentukan strategi pemanenan.

2. Manfaat Praktis

   Manfaat praktis penelitian ini adalah diharapkan peternakan sapi KTT Bangun Rejo dapat mengaplikasikan matriks Leslie untuk menghitung tingkat pertumbuhan populasi dan strategi pemanenan agar populasi sapi betina tetap stabil dan hasil panennya berkesinambungan optimal.

1.6 Sistematika Skripsi

Secara garis besar, penulisan skripsi ini terdiri dari tiga bagian, yaitu bagian awal, bagian isi, dan bagian akhir, yang masing -masing diuraikan sebagai berikut:

1. Bagian Awal

   Bagian ini terdiri atas halaman judul, pernyataan keaslian tulisan, halaman pengesahan, persembahan, motto, prakata, abstrak, daftar isi, daftar tabel, dan daftar lampiran.

2. Bagian Isi

   Bagian ini merupakan bagian laporan penelitian yang terdiri atas lima bab dengan rincian sebagai berikut:

   a. BAB 1 PENDAHULUAN

      Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan skripsi.

   b. BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

      Bab ini berisi teori-teori yang mendasari pemecahan masalah-masalah yang berhubungan dengan rumusan masalah.

c. BAB 3 METODE PENELITIAN

Bab ini berisi tempat dan waktu penelitian, subyek penelitian, metode pengumpulan data, metode analisis data, dan penarikan kesimpulan.

d. BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini merupakan jawaban dari rumusan masalah.

e. BAB 5 PENUTUP

Bab ini berisi simpulan hasil penelitian dan saran yang berkaitan dengan hasil penelitian yang diperoleh.

3. Bagian Akhir

Bagian ini terdiri dari daftar pustaka dan lampiran-lampiran.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Nilai dan Vektor Eigen

Definisi 2.1.1

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol x di dalam R^n dinamakan sebuah vektor eigen (*eigen vector*) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yakni

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigen value*) dari A dan x dikatakan sebuah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ (Anton, 2000).

Contoh 2.1.1

Dipunyai $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Maka vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ merupakan vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$, karena $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Setiap kelipatan tak nol dari x akan menjadi vektor eigen, sebab $A(\alpha x) = \alpha A x = \alpha \lambda x = \lambda(\alpha x)$. Sebagai contoh, $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ juga merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$, sebab $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$, persamaan $Ax = \lambda x$ dituliskan kembali sebagai $Ax = \lambda I x$ atau secara ekuivalen $(\lambda I - A)x = 0$ …(2.1.1)

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada penyelesaian tak trivial dari Persamaan 2.1.1. Himpunan penyelesaian dari Persamaan 2.1.1 membentuk sub ruang dari R^n yang disebut ruang eigen atau ruang karakteristik untuk nilai eigen λ, dan ditulis $\varepsilon_A(\lambda)$. Jadi, jika λ adalah nilai eigen dari A, maka $\varepsilon_A(\lambda) \neq \{0\}$ dan sembarang vektor tak nol dalam $\varepsilon_A(\lambda)$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Persamaan 2.1.1 akan mempunyai penyelesaian tak trivial jika dan hanya jika $\lambda I - A$ singular, atau secara ekuivalen

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad \ldots(2.1.2)$$

Persamaan 2.1.2 dinamakan persamaan karakteristik A. Skalar yang memenuhi Persamaan 2.1.2 adalah nilai eigen dari A.

Berdasarkan penjelasan-penjelasan yang telah diuraikan sebelumnya, dipunyai sejumlah kondisi ekuivalen bagi λ untuk menjadi nilai eigen A. Misalkan A matriks berukuran $n \times n$ dan λ adalah skalar, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

a) λ adalah nilai eigen A

b) $(\lambda I - A)x = 0$ mempunyai penyelesaian tak trivial

c) $\varepsilon_A(\lambda) \neq \{0\}$

d) $\lambda I - A$ adalah singular

e) $\det(\lambda I - A) = 0$ (Leon, 2001)

Lemma 2.1.1

Misalkan A matriks $n \times n$. $\lambda \in R$ adalah nilai eigen dari matriks A jika dan hanya jika λ adalah akar persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) =$

0. Sedangkan vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan λ adalah penyelesaian tak nol dari SPL homogen $(\lambda I - A)x = 0$ (Anton, 2000).

Contoh 2.1.2

Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\Leftrightarrow det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)\lambda = 0$$

Jadi, diperoleh nilai-nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 1$.

Untuk mencari vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$, kita pandang SPL homogen sebagai berikut:

$$(\lambda_1 I - A)x = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 = 0 \\ -\frac{1}{2} x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0$$

Jika $x_2 = t$ maka diperoleh $x_1 = 0$ dan $x_2 = t$.

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$ adalah vektor-vektor tak nol berbentuk $x = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in R.$

Untuk mencari vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 1$, kita pandang SPL homogen sebagai berikut:

$$(\lambda_2 I - A)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x_1 = -x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2x_2$$

Jika $x_2 = t$ maka diperoleh $x_1 = 2t$ dan $x_2 = t$.

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 1$ adalah vektor-vektor tak nol berbentuk $x = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in R$.

Definisi 2.1.2

Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ himpunan vektor tak kosong, maka persamaan

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n = 0$$

mempunyai sekurang-kurangnya satu penyelesaian, yaitu:

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$$

Jika penyelesaian di atas merupakan satu-satunya penyelesaian, maka S disebut himpunan yang bebas linear. Jika masih ada penyelesaian lain, maka S disebut himpunan yang bergantung linear (Anton, 2000)

Contoh 2.1.3

Dipunyai $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \subset R^3$. Selidiki apakah S himpunan yang bebas linear.

Penyelesaian:

Bentuk persamaan:

$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (0,0,0)$
$\Leftrightarrow (k_1, k_2, k_3) = (0,0,0)$
$\Leftrightarrow k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$

Oleh sebab $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$ merupakan satu-satunya penyelesaian, maka S merupakan himpunan yang bebas linear.

Contoh 2.1.4

Dipunyai $W = \{p_1, p_2, p_3\} \subset P_2$ dengan $p_1 = 1 - x$, $p_2 = 5 + 3x - 2x^2$, $p_3 = 1 + 3x - x^2$. Selidiki apakah W himpunan yang bebas linear.

Penyelesaian:

Bentuk persamaan

$k_1p_1 + k_2p_2 + k_3p_3 = 0$
$\Leftrightarrow k_1(1 - x) + k_2(5 + 3x - 2x^2) + k_3(1 + 3x - x^2) = 0 + 0x + 0x^2$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} k_1 + 5k_2 + k_3 &= 0 \\ -k_1 + 3k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_2 - k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Bentuk matriksnya:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan melakukan OBE diperoleh:

$$k_1 = \frac{3}{2}k_3, \qquad k_2 = -\frac{1}{2}k_3$$

Jika dipilih $k_3 = 2t$, dengan $t \epsilon R$ maka diperoleh

$k_1 = 3t, \qquad k_2 = -t, \qquad k_3 = 2t$

Oleh sebab terdapat tak hingga penyelesaian, atau dengan kata lain ada penyelesaian lain selain nol, maka W himpunan yang bergantung linear.

Dari Contoh 2.1.4, koefisien matriks yang terbentuk mempunyai determinan sama dengan nol yang berakibat SPL homogen yang terbentuk mempunyai lebih dari satu penyelesaian sehingga W bergantung linear. Jadi, dapat disimpulkan bahwa jika diperoleh matriks koefisien dari SPL merupakan matriks persegi, maka untuk menentukan suatu himpunan bebas linear, cukup dengan menunjukkan bahwa determinan matriks koefisiennya tidak sama dengan nol.

Definisi 2.1.3

Sebuah matriks A berordo $n \times n$ dikatakan dapat didiagonalkan jika ada sebuah matriks non singular (dapat dibalik) P berordo $n \times n$ sehingga $P^{-1}AP$ diagonal. Matriks P dikatakan mendiagonalkan A (Anton, 2000).

Teorema 2.1.1

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen satu sama lain:

a. A dapat didiagonalkan

b. A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear (Anton, 2000).

Bukti:

a $\Rightarrow$ b

Diketahui A dapat didiagonalkan, maka ada matriks non singular P berordo $n \times n$.

Misalkan $P = [p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$

sehingga $P^{-1}AP$ diagonal, katakanlah $P^{-1}AP = D$ di mana

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

maka $AP = PD$

$\Leftrightarrow A[p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n] = [p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow [Ap_1 \quad Ap_2 \quad \dots \quad Ap_n] = [\lambda_1 p_1 \quad \lambda_2 p_2 \quad \cdots \quad \lambda_n p_n]$

Jadi, $Ap_1 = \lambda_1 p_1,\ Ap_2 = \lambda_2 p_2, \ldots, Ap_n = \lambda_n p_n$.

Karena P non singular maka vektor-vektor $p_1, \quad p_2, \quad \cdots \quad , p_n$ merupakan vektor-vektor tak nol. Maka menurut definisi vektor dan nilai eigen, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai-nilai eigen dari matriks A dan $p_1, \quad p_2, \quad \cdots \quad , p_n$ merupakan vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan berturut-turut $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Karena P matriks non singular, maka $|P| \neq 0$ sehingga $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ bebas linear.

b ⇒ a

Diketahui A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear yaitu $p_1, \quad p_2, \quad \cdots \quad , p_n$ yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen berturut-turut $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Misalkan $P = [p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n]$ matriks $n \times n$ dengan vektor-vektor kolomnya p_i, maka $AP = [Ap_1 \quad Ap_2 \quad \dots \quad Ap_n]$.

Tetapi karena $p_1, p_2, \dots, p_n$ adalah vektor-vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen berturut-turut $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_n$, maka kita juga mempunyai $Ap_1 = \lambda_1 p_1,\ Ap_2 = \lambda_2 p_2,\ \dots,\ Ap_n = \lambda_n p_n,$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} AP &= [Ap_1 \quad Ap_2 \quad \dots \quad Ap_n] \\ &= [\lambda_1 p_1 \quad \lambda_2 p_2 \quad \dots \quad \lambda_n p_n] \\ &= [p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= PD \end{aligned}$$

di mana D adalah matriks diagonal yang mempunyai nilai-nilai eigen $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sebagai elemen-elemen pada diagonal utamanya. Karena vektor-vektor kolom dari P bebas linear maka P non singular. Sehingga ditemukan $P^{-1}AP = D.$ Jadi, A dapat didiagonalkan.

Teorema 2.1.2

Jika A adalah sebuah matriks segitiga $n \times n$ (diagonal, segitiga atas, segitiga bawah), maka nilai-nilai eigen matriks A adalah entri-entri yang terletak pada diagonal utama matriks A (Anton, 2000).

Bukti:

Matriks diagonal:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ adalah matriks diagonal dengan $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ adalah entri-entri diagonal utamanya. Menurut Lemma

2.1.1, nilai-nilai eigen matriks A adalah akar persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$.

Diperoleh

$$det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow det\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - a_{11})det\begin{bmatrix} \lambda - a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})det\begin{bmatrix} \lambda - a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - a_{44} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots \left(\lambda - a_{(n-2)(n-2)}\right)det\begin{bmatrix} \lambda - a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots \left(\lambda - a_{(n-2)(n-2)}\right)\left(\lambda - a_{(n-1)(n-1)}\right)(\lambda - a_{nn}) = 0$$

sehingga diperoleh $\lambda_1 = a_{11}, \lambda_2 = a_{22}, \dots, \lambda_n = a_{nn}$.

Jadi, nilai eigen dari matriks diagonal A adalah $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ yang merupakan entri-entri pada diagonal utama matriks A.

Matriks segitiga atas:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ adalah matriks segitiga atas dengan $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ adalah entri-entri diagonal utamanya. Nilai-nilai eigen matriks A adalah akar persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$.

Diperoleh

$$det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow det\begin{bmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n}\\ 0 & \lambda-a_{22} & \dots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda-a_{nn}\end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-a_{11})\ det\begin{bmatrix}\lambda-a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n}\\ 0 & \lambda-a_{33} & \dots & -a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda-a_{nn}\end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})det\begin{bmatrix}\lambda-a_{33} & -a_{34} & \dots & -a_{3n}\\ 0 & \lambda-a_{44} & \dots & -a_{4n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda-a_{nn}\end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\dots\left(\lambda-a_{(n-2)(n-2)}\right)det\begin{bmatrix}\lambda-a_{(n-1)(n-1)} & -a_{(n-1)n}\\ 0 & \lambda-a_{nn}\end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\dots\left(\lambda-a_{(n-2)(n-2)}\right)\left(\lambda-a_{(n-1)(n-1)}\right)(\lambda-a_{nn})=0$$

sehingga diperoleh $\lambda_1=a_{11}, \lambda_2=a_{22},\dots,\lambda_n=a_{nn}$.

Jadi, nilai eigen dari matriks segitiga atas A adalah $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$ yang merupakan entri-entri pada diagonal utama matriks A.

Matriks segitiga bawah:

Misalkan $A=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}$ adalah matriks segitiga bawah dengan $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$ adalah entri-entri diagonal utamanya. Nilai-nilai eigen matriks A adalah akar persamaan karakteristik $\det(\lambda I-A)=0$.

Diperoleh

$$det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow det\begin{bmatrix}\lambda - a_{11} & 0 & \dots & 0\\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn}\end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - a_{11})\ det\begin{bmatrix}\lambda - a_{22} & 0 & \dots & 0\\ -a_{32} & \lambda - a_{33} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & \lambda - a_{nn}\end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) det\begin{bmatrix}\lambda - a_{33} & 0 & \dots & 0\\ -a_{43} & \lambda - a_{44} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n3} & -a_{n4} & \dots & \lambda - a_{nn}\end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots \big(\lambda - a_{(n-2)(n-2)}\big) det\begin{bmatrix}\lambda - a_{(n-1)(n-1)} & 0\\ -a_{n(n-1)} & \lambda - a_{nn}\end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots \big(\lambda - a_{(n-2)(n-2)}\big)\big(\lambda - a_{(n-1)(n-1)}\big)(\lambda - a_{nn}) = 0$$

sehingga diperoleh $\lambda_1 = a_{11}, \lambda_2 = a_{22}, \dots, \lambda_n = a_{nn}$.

Jadi, nilai eigen dari matriks segitiga bawah A adalah $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ yang merupakan entri-entri pada diagonal utama matriks A.

Definisi 2.1.4

Sebuah nilai eigen dari matriks A dinamakan nilai eigen dominan (*dominant eigen value*) dari A jika nilai mutlaknya lebih besar dari nilai-nilai mutlak nilai-nilai eigen selebihnya. Sedangkan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan ini dinamakan vektor eigen dominan (*dominant eigen vector*) dari A (Anton, 2000).

Contoh 2.1.5

Misalkan matriks A berukuran 4×4 mempunyai nilai-nilai eigen

$$\lambda_1 = -4, \qquad \lambda_2 = 3, \qquad \lambda_3 = -2, \qquad \lambda_4 = 2$$

maka $\lambda_1 = -4$ adalah nilai eigen dominan karena

$$|-4| > |3|, \qquad |-4| > |-2|, \qquad |-4| > |2|$$

Contoh 2.1.6

Misalkan matriks A berukuran 3×3 mempunyai nilai-nilai eigen

$$\lambda_1 = 7, \qquad \lambda_2 = -7, \qquad \lambda_3 = 2$$

maka matriks A tidak mempunyai nilai eigen dominan.

Contoh 2.1.7

Dengan menggunakan matriks A pada Contoh 2.1.2, tentukan nilai dan vektor eigen dominan matriks A.

Penyelesaian:

Dari Contoh 2.1.2, diperoleh nilai-nilai eigen matriks A adalah $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 1$. Jadi, nilai eigen dominannya adalah $\lambda_2 = 1$. Vektor eigen dominannya adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 1$, yaitu vektor-vektor tak nol berbentuk $x = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in R$ (lihat Contoh 2.1.2).

2.2 Matriks Leslie

Salah satu model pertumbuhan populasi yang paling umum digunakan oleh para ahli demografi adalah matriks Leslie yang dikembangkan pada tahun 1945 oleh seorang pakar ekologi bernama P. H.

Leslie. Matriks ini menjelaskan pertumbuhan jenis kelamin perempuan (manusia) dan betina (hewan) (Anton & Rorres, 2013). Dalam matriks ini, diasumsikan bahwa laju pertumbuhan populasi hanya disebabkan oleh proses kelahiran dan kematian perempuan/betina saja dan dianggap tidak ada migrasi masuk atau keluar pada populasi yang diteliti (Yuliani *et al.*, 2012). Proses pembentukan matriks Leslie akan dijelaskan pada bagian 2.2.1 dan 2.2.2.

2.2.1 Pembagian Kelas Umur

Untuk membentuk matriks ini, perempuan (manusia) atau betina (hewan) dikelompokkan menjadi kelas-kelas umur di mana tiap kelas mempunyai perbedaan umur yang sama. Pada populasi hewan betina, jika umur maksimum yang dapat dicapai oleh sebarang betina dalam suatu populasi adalah L tahun (atau satuan waktu lainnya) dan kita mengelompokkan populasi tersebut menjadi n kelas umur, maka tiap kelas mempunyai perbedaan umur $\frac{L}{n}$ tahun. Sebagai contoh dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1. Penentuan Kelas Umur

Kelas Umur	Interval Umur
1	$[0, \frac{L}{n})$
2	$[\frac{L}{n}, \frac{2L}{n})$
3	$[\frac{2L}{n}, \frac{3L}{n})$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$[\frac{(n-2)L}{n}, \frac{(n-1)L}{n})$
n	$[\frac{(n-1)L}{n}, L)$

Misal terdapat $x_1^{(0)}$ betina pada kelas umur 1, $x_2^{(0)}$ betina pada kelas umur 2, dan seterusnya sampai kelas umur n. Dengan n bilangan-bilangan ini, dapat dibentuk sebuah vektor kolom:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Vektor di atas disebut vektor distribusi umur awal (*initial age distribution vector*).

Cara termudah untuk mempelajari proses pertambahan umur adalah dengan mengobservasi populasi dalam waktu diskret, misalnya $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k$. Matriks Leslie mempersyaratkan bahwa durasi antara dua waktu observasi yang berurutan sama dengan durasi interval umur. Dengan demikian dapat ditetapkan:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_1 &= \frac{L}{n} \\ t_2 &= \frac{2L}{n} \\ &\vdots \\ t_k &= \frac{kL}{n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dengan asumsi ini, seluruh betina pada kelas ke-$(i+1)$ pada waktu t_{k+1} sebelumnya berada dalam kelas ke-i pada waktu t_k (Anton & Rorres, 2013).

Pada populasi hewan, menghitung distribusi umur populasi periode berikutnya dengan matriks Leslie dipengaruhi oleh tingkat kesuburan dan ketahanan hidup betina. Didefinisikan a_i sebagai tingkat kesuburan betina, yaitu rata-rata banyak anak betina yang lahir dari tiap betina ketika si induk berada dalam kelas umur ke-i dan b_i sebagai tingkat ketahanan hidup betina, yaitu peluang betina yang dapat bertahan hidup dari kelas umur ke-i sampai $i + 1$. Berdasarkan definisi tersebut, batasan nilai a_i dan b_i adalah

$a_i \geq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$

$0 < b_i \leq 1$ untuk $i = 1, 2, \dots, n - 1$

Berdasarkan batasan tersebut, paling sedikit satu kelas umur $a_i > 0$, karena jika $a_i = 0 \ \forall i$, maka pada populasi tersebut tidak ada kelahiran yang terjadi, dan $b_i \neq 0$, karena jika $b_i = 0$, maka tidak ada betina yang dapat bertahan hidup ke kelas berikutnya (Pratama *et al.*, 2013). Jika salah satu atau kedua batasan tersebut tidak terpenuhi, maka pada masa mendatang populasi akan punah.

2.2.2 Penyusunan Matriks Leslie

Didefinisikan vektor distribusi umur $x^{(k)}$ untuk waktu t_k sebagai berikut:

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} {x_1}^{(k)} \\ {x_2}^{(k)} \\ \vdots \\ {x_n}^{(k)} \end{bmatrix}$$

dengan ${x_i}^{(k)}$ adalah banyak betina pada kelas umur ke-i pada waktu t_k. Selanjutnya, pada waktu t_k, betina yang berada dalam kelas umur pertama adalah anak betina yang lahir antara waktu t_{k-1} dengan t_k. Dapat dituliskan

$$\begin{Bmatrix} banyak \\ betina \\ pada\ kelas\ 1 \\ pada \\ waktu\ t_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} banyak\ anak \\ betina\ yang\ lahir \\ dari\ betina\ dalam \\ kelas\ 1\ antara \\ waktu\ t_{k-1}\ \text{dengan}\ t_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} banyak\ anak \\ betina\ yang\ lahir \\ dari\ betina\ dalam \\ kelas\ 2\ antara \\ waktu\ t_{k-1}\ \text{dengan}\ t_k \end{Bmatrix} + \cdots +$$

$$\begin{Bmatrix} banyak\ anak \\ betina\ yang\ lahir \\ dari\ betina\ dalam \\ kelas\ n\ antara \\ waktu\ t_{k-1}\ \text{dengan}\ t_k \end{Bmatrix} +$$

atau secara matematis,

$$x_1{}^{(k)} = a_1 x_1{}^{(k-1)} + a_2 x_2{}^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n{}^{(k-1)} \qquad \ldots(2.2.2.1)$$

Betina-betina pada kelas umur ke-$(i+1)$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n-1$ pada waktu t_k adalah betina-betina pada kelas ke-i pada waktu t_{k-1} yang masih hidup pada waktu t_k, sehingga

$$\begin{Bmatrix} banyak \\ betina \\ pada\ kelas \\ i+1\ pada \\ waktu\ t_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} peluang\ betina \\ pada\ kelas\ i \\ yang\ bertahan\ hidup \\ dan\ memasuki \\ kelas\ i+1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} banyak \\ betina \\ pada\ kelas \\ i\ pada \\ waktu\ t_{k-1} \end{Bmatrix}$$

atau secara matematis,

$$x_{i+1}{}^{(k)} = b_i x_i{}^{(k-1)},\ i = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad \ldots(2.2.2.2)$$

Dengan menggunakan notasi matriks, Persamaan 2.2.2.1 dan 2.2.2.2 dapat dituliskan

$$\begin{bmatrix} x_1{}^{(k)} \\ x_2{}^{(k)} \\ x_3{}^{(k)} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n{}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1{}^{(k-1)} \\ x_2{}^{(k-1)} \\ x_3{}^{(k-1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n{}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x^{(k)} = Lx^{(k-1)},\ k = 1, 2, \ldots \qquad \ldots(2.2.2.3)$$

dengan $L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$ disebut matriks Leslie.

(Anton & Rorres, 2013).

2.3 Proyeksi Distribusi Umur Populasi Perempuan/Betina di Masa Mendatang dengan Matriks Leslie

Matriks Leslie sebagai matriks pertumbuhan populasi dapat digunakan untuk memproyeksikan distribusi umur populasi perempuan/betina di masa mendatang, yaitu dengan menggunakan Persamaan 2.2.2.3

$$x^{(k)} = Lx^{(k-1)}, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Untuk k yang bernilai besar, menghitung proyeksi distribusi umur perempuan/betina dengan Persamaan 2.2.2.3 menjadi kurang efektif. Persamaan 2.2.2.3 kemudian dikembangkan untuk menyederhanakan perhitungan, yaitu

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= Lx^{(0)} \\ x^{(2)} &= Lx^{(1)} = L.L.x^{(0)} = L^2x^{(0)} \\ x^{(3)} &= Lx^{(2)} = L.L^2x^{(0)} = L^3x^{(0)} \\ &\vdots \\ x^{(k)} &= Lx^{(k-1)} = L.L^{k-1}x^{(0)} = L^kx^{(0)} \end{aligned}$$

Dengan demikian, jika diketahui distribusi umur awal $x^{(0)}$ dan matriks Leslie L, dapat ditentukan distribusi umur perempuan/betina pada sebarang waktu di masa mendatang. Jadi, untuk sebarang k waktu berikutnya, model pertumbuhan populasi menjadi

$$x^{(k)} = L^k x^{(0)} \ldots \quad (2.3.1) \qquad \text{(Anton \& Rorres, 2013).}$$

2.4 Tingkat Pertumbuhan Populasi Perempuan/Betina dengan Matriks Leslie

Rumus pada Persamaan 2.3.1 hanya menunjukkan distribusi umur dari suatu populasi pada waktu mendatang dan belum memberikan gambaran umum tentang dinamika proses pertumbuhan yang terjadi. Untuk mengetahui prediksi tingkat pertumbuhan populasi dapat dilakukan melalui pembahasan lebih lanjut tentang nilai dan vektor eigen dari matriks Leslie, sebagaimana dijelaskan dalam Teorema 2.4.1 dan 2.4.2.

Teorema 2.4.1

Sebuah matriks Leslie L mempunyai sebuah nilai eigen positif unik λ_1. Nilai eigen ini mempunyai kelipatan satu dan sebuah vektor eigen X_1 yang seluruh entri-entrinya adalah positif (Pratama *et al.*, 2013).

Bukti:

Menurut Lemma 2.1.1, nilai eigen dari matriks L adalah akar-akar persamaan karakteristik matriks L. Persamaan karakteristik matriks L dapat ditulis sebagai berikut:

$$p(\lambda) = |\lambda I - L| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ -b_1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{n-1} & \lambda \end{bmatrix} \right\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \cdots - a_nb_1b_2 \dots b_{n-1} = 0 \qquad \dots(2.4.1)$$

Persamaan 2.4.1 dibagi dengan λ^n, maka diperoleh persamaan:

$$\frac{\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \cdots - a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda^n} = \frac{0}{\lambda^n}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{a_1}{\lambda} - \frac{a_2b_1}{\lambda^2} - \frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3} - \cdots - \frac{a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda^n} = 0$$

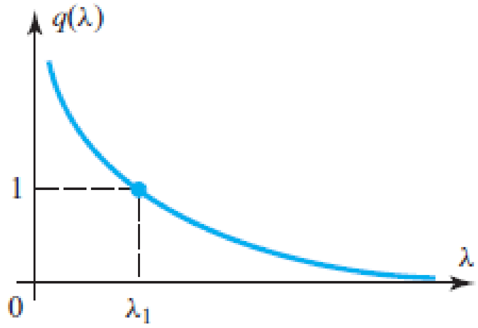
$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda^n} = 1 \qquad \dots(2.4.2)$$

Dimisalkan sebuah persamaan polinomial

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda^n} \qquad \dots(2.4.3)$$

sehingga diperoleh $q(\lambda) = 1$ untuk $\lambda \neq 0$ …(2.4.4)

Karena seluruh a_i dan b_i adalah tak negatif, maka $q(\lambda)$ akan berkurang secara monoton untuk $\lambda > 0$ dan akan mendekati nol ketika $\lambda \longrightarrow \infty$. Konsekuensinya, terdapat sebuah λ yang positif dan unik, misalnya $\lambda = \lambda_1$ sedemikian sehingga $q(\lambda_1) = 1$, sebagaimana terlihat pada Gambar 2.1. Diperoleh juga λ_1 mempunyai kelipatan aljabar satu, yaitu λ_1 muncul sebagai akar dari Persamaan 2.4.1 sebanyak satu kali (Anton & Rorres, 2013).



Gambar 2.1. Grafik Fungsi $q(\lambda)$

Diberikan X_1 yang merupakan vektor eigen dari L yang bersesuaian dengan λ_1 yang memenuhi

$$(\lambda_1 I - L)X_1 = 0$$

Dimisalkan

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 - a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ -b_1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{n-1} & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (\lambda_1 - a_1)x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 - \dots - a_{n-1}x_{n-1} - a_nx_n \\ -b_1x_1 + \lambda_1x_2 \\ -b_2x_2 + \lambda_1x_3 \\ \vdots \\ -b_{n-2}x_{n-2} + \lambda_1x_{n-1} \\ -b_{n-1}x_{n-1} + \lambda_1x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh

$$(\lambda_1 - a_1)x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 - \dots - a_{n-1}x_{n-1} - a_nx_n = 0 \qquad \dots(2.4.5)$$

$$-b_1x_1 + \lambda_1x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{b_1x_1}{\lambda_1} \quad ...(2.4.6)$$

$$-b_2x_2 + \lambda_1x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = \frac{b_2x_2}{\lambda_1} \Leftrightarrow x_3 = \frac{b_1b_2x_1}{\lambda_1^2} \quad ...(2.4.7)$$

$$\vdots$$

$$-b_{n-2}x_{n-2} + \lambda_1x_{n-1} = 0 \Leftrightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-2}x_{n-2}}{\lambda_1} \Leftrightarrow x_{n-1} = \frac{b_1b_2 \dots b_{n-2}x_1}{\lambda_1^{n-2}} \quad ...(2.4.8)$$

$$-b_{n-1}x_{n-1} + \lambda_1x_n = 0 \Leftrightarrow x_n = \frac{b_{n-1}x_{n-1}}{\lambda_1} \Leftrightarrow x_n = \frac{b_1b_2 \dots b_{n-1}x_1}{\lambda_1^{n-1}} \quad ...(2.4.9)$$

Substitusi Persamaan 2.4.6 s.d. 2.4.9 ke Persamaan 2.4.5, diperoleh

$$\lambda_1x_1 - a_1x_1 - a_2\frac{b_1x_1}{\lambda_1} - a_3\frac{b_1b_2x_1}{\lambda_1^2} - \cdots - a_{n-1}\frac{b_1b_2 \dots b_{n-2}x_1}{\lambda_1^{n-2}} - a_n\frac{b_1b_2 \dots b_{n-1}x_1}{\lambda_1^{n-1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1\left(\lambda_1 - a_1 - a_2\frac{b_1}{\lambda_1} - a_3\frac{b_1b_2}{\lambda_1^2} - \cdots - a_{n-1}\frac{b_1b_2 \dots b_{n-2}}{\lambda_1^{n-2}} - a_n\frac{b_1b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}}\right) = 0$$

Diperoleh $x_1 = 0$ atau

$$\lambda_1 - a_1 - a_2\frac{b_1}{\lambda_1} - a_3\frac{b_1b_2}{\lambda_1^2} - \cdots - a_{n-1}\frac{b_1b_2 \dots b_{n-2}}{\lambda_1^{n-2}} - a_n\frac{b_1b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} = 0$$

Diketahui X_1 merupakan vektor eigen dari L yang bersesuaian dengan λ_1, maka X_1 harus merupakan vektor tak nol. Jika $x_1 = 0$, maka X_1 merupakan vektor nol sehingga X_1 bukan merupakan vektor eigen dari L yang bersesuaian dengan λ_1. Dimisalkan $x_1 = t$, diperoleh

$$x_2 = \frac{b_1t}{\lambda_1}$$

$$x_3 = \frac{b_1b_2t}{\lambda_1^2}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = \frac{b_1b_2 \dots b_{n-2}t}{\lambda_1^{n-2}}$$

$$x_n = \frac{b_1b_2 \dots b_{n-1}t}{\lambda_1^{n-1}}$$

sehingga diperoleh vektor eigen X_1 yang bersesuaian dengan λ_1 berbentuk

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{b_1 b_2 \ldots b_{n-2}}{\lambda_1^{n-2}} \\ \frac{b_1 b_2 \ldots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \end{bmatrix} t \qquad \text{...(2.4.10)}$$

dengan $t \epsilon \mathbb{R} - \{0\}$.

Berdasarkan Persamaan 2.4.10, diperoleh ruang eigen dari X_1 memiliki dimensi 1, sehingga dapat disimpulkan kelipatan geometrinya satu (Anton & Rorres, 2013) serta diperoleh elemen-elemen dari vektor eigen X_1 merupakan bilangan positif.

Ketika nilai eigen positif λ_1 ini adalah nilai eigen dominan, maka Teorema 2.4.2 akan menjelaskan bagaimana nilai eigen dominan λ_1 mempengaruhi tingkat pertumbuhan populasi.

Teorema 2.4.2

Jika $\lambda_1 = 1$ merupakan nilai eigen dominan dari matriks Leslie L, maka vektor distribusi umur periode berikutnya akan selalu sama dengan vektor distribusi umur periode sebelumnya, sehingga berakibat:

a. jika diketahui $\lambda_1 < 1$, maka populasi pada semua kelas umur menurun;
b. jika diketahui $\lambda_1 = 1$, maka populasi pada semua kelas umur tetap;
c. jika diketahui $\lambda_1 > 1$, maka populasi pada semua kelas umur meningkat. (Pratama *et al.*, 2013)

Bukti:

Diasumsikan matriks Leslie L dapat didiagonalisasi, maka menurut Teorema 2.1.1, L mempunyai n nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ yang tidak harus berbeda dan n vektor eigen yang bebas linear $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang bersesuaian dengan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Nilai eigen dominan λ_1 ditempatkan pada urutan pertama. Dibentuk sebuah matriks non singular P di mana kolom-kolomnya adalah vektor-vektor eigen dari L:

$$P = [x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \dots \mid x_n]$$

Menurut Definisi 2.1.3, matriks L dapat didiagonalisasi jika terdapat sebuah matriks non singular P berordo $n \times n$ sehingga $P^{-1}LP$ diagonal, atau ditulis $P^{-1}LP = D$. Dengan menggunakan sifat perkalian invers matriks, diperoleh

$$P^{-1}LP = D$$
$$\Leftrightarrow PP^{-1}LPP^{-1} = PDP^{-1}$$
$$\Leftrightarrow ILI = PDP^{-1}$$
$$\Leftrightarrow L = PDP^{-1} \qquad \dots(2.4.11)$$

Diagonalisasi L kemudian dinyatakan dengan Persamaan 2.4.11

$$L = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

Untuk L^k dengan $= 1, 2, \dots$, persamaan diagonalisasi menjadi

$$L^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

Untuk vektor distribusi umur awal $x^{(0)}$ manapun, diperoleh

$$L^k x^{(0)} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1} x^{(0)}$$

Diketahui $x^{(k)} = L^k x^{(0)},$ diperoleh

$$x^{(k)} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1} x^{(0)}$$

Misal hasil perkalian $P^{-1}x^{(0)} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, diperoleh

$$x^{(k)} = [x_1 \mid x_2 \mid x_3 | \dots | \, x_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x^{(k)} = [x_1 \mid x_2 \mid x_3 | \dots | \, x_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^k c_1 \\ \lambda_2^k c_2 \\ \vdots \\ \lambda_n^k c_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x^{(k)} = x_1 \lambda_1^k c_1 + x_2 \, \lambda_2^k c_2 + \cdots + \; x_n \lambda_n^k c_n$$

Akan ditunjukkan jika λ_1 merupakan nilai eigen dominan maka akan berpengaruh terhadap pertumbuhan populasi. Dengan membagi kedua sisi persamaan dengan λ_1^k, diperoleh

$$\frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \end{bmatrix} P^{-1} x^{(0)} \qquad \dots(2.4.12)$$

Karena λ_1 adalah nilai eigen dominan, berakibat $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$ untuk $i = 2, 3, \dots, n$. Selanjutnya diperoleh $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|^k \to 0$ ketika $k \to \infty$ untuk $i = 2, 3, \dots, n$.

Dengan menggunakan fakta ini, dapat diambil limit di kedua sisi Persamaan 2.4.12, sehingga diperoleh

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}x^{(k)}\right\} = P\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}P^{-1}x^{(0)} \qquad \text{...(2.4.13)}$$

Dengan mengsubstitusikan $P^{-1}x^{(0)} = \begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}$ ke Persamaan 2.4.13, diperoleh

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}x^{(k)}\right\} = P\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}x^{(k)}\right\} = [x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \dots \mid x_n]\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}x^{(k)}\right\} = [x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \dots \mid x_n]\begin{bmatrix}c_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}x^{(k)}\right\} = c_1x_1 \qquad \text{...(2.4.14)}$$

Dari Persamaan 2.4.14 diperoleh suatu pendekatan

$$x^{(k)} = \lambda_1^k c_1 x_1$$
$$\Leftrightarrow x^{(k-1)} = \lambda_1^{k-1} c_1 x_1$$

sedemikian hingga

$$x^{(k)} = \lambda_1^k c_1 x_1$$
$$\Leftrightarrow x^{(k)} = \lambda_1^1 \lambda_1^{k-1} c_1 x_1$$
$$\Leftrightarrow x^{(k)} = \lambda_1 x^{(k-1)} \qquad \text{...(2.4.15)}$$

Dari Persamaan 2.4.15, terbukti bahwa jika untuk sebarang nilai k yang menyatakan periode berikutnya dalam populasi, dan diketahui $\lambda_1 = 1$ merupakan nilai eigen dominan dari matriks Leslie L, maka dapat diambil kesimpulan bahwa vektor distribusi umur periode berikutnya akan selalu sama dengan vektor distribusi umur periode sebelumnya, sehingga berakibat:

a. jika diketahui $\lambda_1 < 1$, maka populasi pada semua kelas umur menurun;
b. jika diketahui $\lambda_1 = 1$, maka populasi pada semua kelas umur tetap;
c. jika diketahui $\lambda_1 > 1$, maka populasi pada semua kelas umur meningkat.

Contoh 2.4.1 akan menjelaskan perbedaan antara nilai dan vektor eigen untuk sebarang matriks Leslie dan sebarang matriks persegi di R^n.

Contoh 2.4.1

Dipunyai matriks Leslie $L = \begin{bmatrix} 0 & 4{,}1951 & 5{,}48 & 4{,}5714 \\ 0{,}2934 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9024 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix}$ dan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai eigen, nilai eigen dominan, dan vektor eigen dominan matriks L dan A.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan *software* MATLAB R2009a, diperoleh nilai-nilai eigen matriks L adalah

$\lambda_1 = 1{,}5414$

$\lambda_2 = -0{,}518\ +\ 0{,}5943\mathrm{i}$

$\lambda_3 = -0{,}518\ +\ 0{,}5943\mathrm{i}$

$\lambda_4 = -0{,}5054$

Jika masing-masing nilai $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,$ dan λ_4 disubstitusikan ke persamaan $q(\lambda)$, maka nilai λ positif yang menghasilkan $q(\lambda) = 1$ adalah $\lambda_1 = 1{,}5414$. Jadi, λ_1 bersifat positif dan unik.

Menurut Definisi 2.1.4, diperoleh nilai eigen dominannya adalah $\lambda_1 = 1{,}5414$ karena $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ untuk $i = 2, 3, 4$. Jadi, λ_1 adalah nilai eigen yang bersifat positif dan unik serta merupakan nilai eigen dominan. λ_1 hanya muncul satu kali sehingga kelipatan aljabarnya satu. Menurut Persamaan 2.4.10, diperoleh vektor eigen X_1 yang bersesuaian dengan λ_1 adalah

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \\ \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}1903 \\ 0{,}1114 \\ 0{,}0289 \end{bmatrix}$$

di mana seluruh entri dari X_1 adalah positif. Diperoleh ruang eigen dari X_1 memiliki dimensi 1, sehingga kelipatan geometrinya satu.

Selanjutnya, dengan *software* MATLAB R2009a diperoleh nilai-nilai eigen matriks A adalah

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = -2$

$\lambda_4 = -1$

Diperoleh nilai eigen dominannya adalah $\lambda_3 = -2$ karena $|\lambda_3| > |\lambda_i|$ untuk $i = 1, 2, 4$. Akan tetapi, nilai eigen dominan ini tidak bersifat positif sehingga tidak memenuhi Teorema 2.4.1. λ_3 hanya muncul satu kali sehingga kelipatan aljabarnya satu. Vektor eigen X yang bersesuaian dengan λ_3 adalah $X = \begin{bmatrix} -0{,}7071 \\ 0 \\ 0{,}7071 \\ 0 \end{bmatrix}$ sehingga terdapat entri X yang berupa bilangan negatif sehingga tidak memenuhi Teorema 2.4.1. Diperoleh ruang eigen dari X memiliki dimensi 1, sehingga kelipatan geometrinya satu.

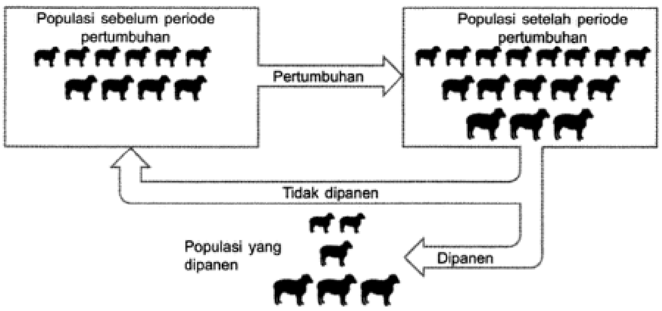
Berdasarkan Contoh 2.4.1, diperoleh bahwa untuk sebarang matriks persegi di R^n, Teorema 2.4.1 dan Teorema 2.4.2 tidak berlaku, karena terdapat minimal satu syarat dari kedua teorema yang tidak terpenuhi. Setiap nilai eigen positif unik λ_1 pada Teorema 2.4.1 juga merupakan nilai eigen dominan seperti dijelaskan pada Teorema 2.4.2, sehingga menurut Teorema 2.4.2, λ_1 yang akan berpengaruh terhadap pertumbuhan populasi.

2.5 Memanen Populasi Hewan yang Tumbuh Mengikuti Model Leslie

Pada kasus di mana pertumbuhan populasi meningkat (nilai eigen dominan lebih dari satu), maka pada populasi tersebut dapat dilakukan pemanenan. Secara umum, istilah memanen (*harvesting*) berarti menghilangkan sekelompok hewan dari populasinya. Strategi memanen harus tepat agar dapat menghasilkan hasil panen yang maksimum tetapi tetap memperhatikan banyak hewan tersebut setelah panen agar dapat mencegah terjadinya kelangkaan. Terdapat dua kebijakan pemanenan yang akan diaplikasikan, sebagaimana dijelaskan pada bagian 2.5.1 dan 2.5.2.

2.5.1 Kebijakan Pemanenan Berkesinambungan Optimal Tanpa Batasan Ekonomi

Suatu kebijakan pemanenan di mana sebuah populasi hewan dipanen secara periodik dikatakan berkesinambungan (*sustainable*) jika hasil dari tiap panen selalu sama dan distribusi umur dari populasi yang tersisa setelah setiap panen selalu sama, sehingga populasi hewan tidak berkurang dengan adanya kebijakan panen berkesinambungan, hanya kelebihan pertumbuhannya saja yang dihilangkan (Anton & Rorres, 2013). Pemanenan berkesinambungan dapat diilustrasikan melalui Gambar 2.2.



Gambar 2.2. Ilustrasi Kebijakan Pemanenan Berkesinambungan

Pada akhir periode pertumbuhan, sebagian betina dari tiap kelas umur dipanen sedemikian rupa sehingga populasi yang tidak dipanen mempunyai distribusi umur yang sama dengan populasi semula. Siklus ini diulang setelah tiap panen sehingga hasilnya berkesinambungan. Durasi dari suatu panen diasumsikan relatif pendek dibandingkan dengan periode pertumbuhannya, sehingga pertumbuhan atau perubahan apapun yang terjadi pada populasi selama periode panen dapat diabaikan.

Misalkan $x_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ adalah banyak betina pada kelas ke-i sesaat setelah pemanenan, atau dengan kata lain banyak betina pada kelas ke-i yang tidak dipanen. Vektor kolom

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

dinamakan vektor populasi kesetimbangan (*equilibrium population vector)*. Dengan pertimbangan adanya kondisi kesetimbangan ini, maka populasi harus segera kembali ke populasi kesetimbangan sesaat setelah panen. Di antara dua waktu panen, populasi tumbuh menurut model matriks Leslie. Durasi antara dua waktu panen disyaratkan sama dengan durasi kelas-kelas umur (Rorres & Fair, 1975).

Jika L adalah suatu matriks Leslie yang menggambarkan pertumbuhan suatu populasi, maka vektor Lx adalah vektor populasi pada akhir periode pertumbuhan, tepat sebelum periode panen berikutnya. Sebagian tertentu dari tiap-tiap kelas umur pada vektor populasi Lx kemudian dipanen, sehingga yang tersisa adalah vektor populasi kesetimbangan x. Misal h_i $(0 \leq h_i \leq 1,\ \ i = 1, 2, \dots, n)$ adalah bagian dari populasi betina dari kelas ke-i yang dipanen, maka didefinisikan matriks diagonal berukuran $n \times n$ sebagai berikut:

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_n \end{bmatrix}$$

yang disebut matriks pemanenan (*harvesting matrix*). Komponen-komponen vektor HLx adalah banyak betina yang dipanen pada tiap-tiap kelas umur. Dari definisi kebijakan pemanenan berkesinambungan, dipunyai

$$\begin{bmatrix} distribusi\ umur \\ pada\ akhir \\ periode \\ pertumbuhan \end{bmatrix} - [panen] = \begin{bmatrix} distribusi\ umur \\ pada\ awal \\ periode \\ pertumbuhan \end{bmatrix}$$

atau secara matematis

$$Lx - HLx = x$$

atau dapat ditulis

$$(I - H)Lx = x \qquad \dots(2.5.1.1)$$

maka x harus merupakan sebuah vektor eigen dari matriks $(I - H)L$ yang bersesuaian dengan nilai eigen 1. Hal ini akan memberikan batasan-batasan tertentu pada nilai h_i dan x. Karena batasan ekonomi, misal nilai jual atau biaya pemeliharaan tidak ditambahkan, maka nilai h_i dan x yang memenuhi Persamaan 2.5.1.1 merupakan kebijakan pemanenan berkesinambungan tanpa batasan ekonomi yang mampu mempertahankan kestabilan populasi setelah tiap panen. Akan dicari nilai h_i dan x yang memenuhi Persamaan 2.5.1.1.

$I - H$ akan berbentuk $I - H = \begin{bmatrix} 1-h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-h_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-h_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1-h_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-h_n \end{bmatrix}$.

Misalkan $1 - h_i = \mu_i$, maka matriks $I - H = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mu_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{bmatrix}$.

Secara keseluruhan, Persamaan 2.5.1.1 dapat dituliskan sebagai berikut:

$(I - H)Lx = x$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mu_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mu_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ b_1x_1 \\ b_2x_2 \\ \vdots \\ b_{n-2}x_{n-2} \\ b_{n-1}x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_1(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \\ \mu_2b_1x_1 \\ \mu_3b_2x_2 \\ \vdots \\ \mu_{n-1}b_{n-2}x_{n-2} \\ \mu_nb_{n-1}x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} &\mu_1(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) = x_1 \\ &\mu_2b_1x_1 = x_2 \\ &\mu_3b_2x_2 = x_3 \qquad \dots(2.5.1.2) \\ &\vdots \\ &\mu_{n-1}b_{n-2}x_{n-2} = x_{n-1} \\ &\mu_nb_{n-1}x_{n-1} = x_n \end{aligned}$$

Dengan mengsubstitusikan $x_2 = \mu_2 b_1 x_1$ ke $x_3, \dots, x_n$ pada Persamaan 2.5.1.2 diperoleh

$$\begin{aligned} x_2 &= \mu_2 b_1 x_1 \\ x_3 &= \mu_2 \mu_3 b_1 b_2 x_1 \qquad \dots(2.5.1.3) \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \mu_2 \mu_3 \dots \mu_{n-1} b_1 b_2 \dots b_{n-2} x_1 \\ x_n &= \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} x_1 \end{aligned}$$

Dengan mengsubstitusikan Persamaan 2.5.1.3 ke baris pertama Persamaan 2.5.1.2 dan membaginya dengan x_1 diperoleh

$$\mu_1 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n) = x_1$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mu_1 (a_1 x_1 + a_2 \mu_2 b_1 x_1 + \cdots + a_n \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} x_1)}{x_1} = \frac{x_1}{x_1}$$
$$\Leftrightarrow a_1 \mu_1 + a_2 b_1 \mu_1 \mu_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n = 1 \qquad \dots(2.5.1.4)$$

Persamaan 2.5.1.4 akan memberi batasan berapa bagian yang dapat dipanen dari tiap kelas umur. Nilai-nilai $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ yang memenuhi Persamaan 2.5.1.4 dan terletak di dalam interval [0,1] yang dapat menghasilkan panen berkesinambungan.

Karena diinginkan populasi yang tersisa setelah pemanenan konstan, maka menurut Teorema 2.4.2, matriks $(I - H)Lx = x$ haruslah memiliki nilai eigen $\lambda = 1$. Kasus ini dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$(I - H)Lx = \lambda x \qquad \dots(2.5.1.5)$$

dengan mengsubstitusikan nilai $\lambda = 1$. Menurut Definisi 2.1.1, x merupakan vektor eigen (*eigen vector*) dari $(I - H)L$ yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$. Misalkan $(I - H)L = C$. Untuk menentukan nilai x, menurut Lemma 2.1.1, x adalah penyelesaian tak nol dari SPL homogen $(\lambda I - C)x = 0$. Dengan mengsubstitusikan nilai $\lambda = 1$, diperoleh

$$(I - C)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1\mu_1 & a_2\mu_1 & a_3\mu_1 & \dots & a_{n-1}\mu_1 & a_n\mu_1 \\ b_1\mu_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2\mu_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3\mu_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{n-1}\mu_n & 0 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 - a_1\mu_1 & -a_2\mu_1 & -a_3\mu_1 & \dots & -a_{n-1}\mu_1 & -a_n\mu_1 \\ -b_1\mu_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2\mu_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3\mu_4 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{n-1}\mu_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (1 - a_1\mu_1)x_1 - a_2\mu_1x_2 - a_3\mu_1x_3 - \dots - a_{n-1}\mu_1x_{n-1} - a_n\mu_1x_n \\ -b_1\mu_2x_1 + x_2 \\ -b_2\mu_3x_2 + x_3 \\ \vdots \\ -b_{n-2}\mu_{n-1}x_{n-2} + x_{n-1} \\ -b_{n-1}\mu_nx_{n-1} + x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh

$$(1 - a_1\mu_1)x_1 - a_2\mu_1x_2 - a_3\mu_1x_3 - \dots - a_{n-1}\mu_1x_{n-1} - a_n\mu_1x_n = 0 \quad \dots(2.5.1.6)$$

$$-b_1\mu_2x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = b_1\mu_2x_1 \quad \dots(2.5.1.7)$$

$$-b_2\mu_3x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = b_2\mu_3x_2 = b_1b_2\mu_2\mu_3x_1 \quad \dots(2.5.1.8)$$

$$\vdots$$

$$-b_{n-2}\mu_{n-1}x_{n-2} + x_{n-1} = 0 \Leftrightarrow x_{n-1} = b_{n-2}\mu_{n-1}x_{n-2} = b_1b_2 \dots b_{n-2}\mu_2\mu_3 \dots \mu_{n-1}x_1 \quad \dots(2.5.1.9)$$

$$-b_{n-1}\mu_nx_{n-1} + x_n = 0 \Leftrightarrow x_n = b_{n-1}\mu_nx_{n-1} = b_1b_2 \dots b_{n-1}\mu_2\mu_3 \dots \mu_nx_1 \quad \dots(2.5.1.10)$$

Substitusi Persamaan 2.5.1.7 s.d. 2.5.1.10 ke Persamaan 2.5.1.6, diperoleh

$$(1 - a_1\mu_1)x_1 - a_2\mu_1x_2 - a_3\mu_1x_3 - \dots - a_{n-1}\mu_1x_{n-1} - a_n\mu_1x_n = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - a_1\mu_1)x_1 - a_2b_1\mu_1\mu_2x_1 - a_3b_1b_2\mu_1\mu_2\mu_3x_1 - \dots$$
$$- a_{n-1}b_1b_2 \dots b_{n-2}\mu_1\mu_2 \dots \mu_{n-2}\mu_{n-1}x_1$$
$$- a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}\mu_1\mu_2 \dots \mu_{n-1}\mu_nx_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1(1 - a_1\mu_1 - a_2b_1\mu_1\mu_2 - a_3b_1b_2\mu_1\mu_2\mu_3 - \cdots$$
$$- a_{n-1}b_1b_2 \dots b_{n-2}\mu_1\mu_2 \dots \mu_{n-2}\mu_{n-1}$$
$$- a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}\mu_1\mu_2 \dots \mu_{n-1}\mu_n) = 0$$

Diperoleh $x_1 = 0$ atau

$$1 - a_1\mu_1 - a_2b_1\mu_1\mu_2 - a_3b_1b_2\mu_1\mu_2\mu_3 - \cdots$$
$$- a_{n-1}b_1b_2 \dots b_{n-2}\mu_1\mu_2 \dots \mu_{n-2}\mu_{n-1}$$
$$- a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}\mu_1\mu_2 \dots \mu_{n-1}\mu_n = 0$$

Diketahui x merupakan vektor eigen dari C yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$, maka x harus merupakan vektor tak nol. Jika $x_1 = 0$, maka x merupakan vektor nol sehingga x bukan merupakan vektor eigen dari C yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$. Dimisalkan $x_1 = t$, diperoleh

$$x_2 = b_1\mu_2t$$
$$x_3 = b_1b_2\mu_2\mu_3t$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1} = b_1b_2 \dots b_{n-2}\mu_2\mu_3 \dots \mu_{n-1}t$$
$$x_n = b_1b_2 \dots b_{n-1}\mu_2\mu_3 \dots \mu_nt$$

sehingga diperoleh vektor eigen x yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1\mu_2 \\ b_1b_2\mu_2\mu_3 \\ \vdots \\ b_1b_2 \dots b_{n-2}\mu_2\mu_3 \dots \mu_{n-1} \\ b_1b_2 \dots b_{n-1}\mu_2\mu_3 \dots \mu_n \end{bmatrix} t \qquad \dots(2.5.1.11)$$

dengan $t \epsilon \mathbb{R} - \{0\}$.

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, akan ditentukan kebijakan pemanenan yang mampu menghasilkan hasil berkesinambungan optimal. Menurut Beddington & Taylor (1973), hasil berkesinambungan optimal diperoleh ketika dilakukan pemanenan pada dua kelas umur di mana kelas umur yang lebih tua dipanen seluruhnya, seperti diuraikan pada penjelasan berikut.

Pada kondisi stabil, proporsi panen keseluruhan diberikan oleh persamaan

$$M = \sum_{i=1}^{n} h_i u_i \qquad \text{...(2.5.1.12)}$$

di mana $h_i = 1 - \mu_i$ adalah bagian betina pada kelas umur i yang dipanen dan u_i adalah proporsi dari total populasi pada kondisi stabil untuk kelas umur i yang dirumuskan sebagai berikut:

$$u_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

di mana x_i adalah entri ke-i vektor x yang diberikan oleh Persamaan 2.5.1.11. Persamaan 2.5.1.12 dijabarkan, diperoleh

$$M = \frac{(1-\mu_1)+(1-\mu_2)b_1\mu_2+\cdots+(1-\mu_n)b_1b_2\ldots b_{n-1}\mu_2\mu_3\ldots\mu_n}{1+b_1\mu_2+\cdots+b_1b_2\ldots b_{n-1}\mu_2\mu_3\ldots\mu_n} \qquad \text{...(2.5.1.13)}$$

Masalah yang akan dikaji adalah bagaimana memaksimumkan Persamaan 2.5.1.13 berdasarkan batasan yang diberikan oleh Persamaan 2.5.1.4.

Jika sebarang μ_i dihilangkan, dengan $i > j$, maka tidak ada μ_i yang akan berpengaruh pada perhitungan Persamaan 2.5.1.13 atau masuk pada batasan yang diberikan oleh Persamaan 2.5.1.4, sehingga n kelas umur akan lebih efektif jika direduksi menjadi j kelas umur.

Didefinisikan barisan proporsi panen $M_k, k = 1, 2, \dots, n$.

Andaikan $\mu_i = \varphi_i{}^{(0)}, i = 1, 2, \dots, k$ menggambarkan bagian betina pada kelas umur i yang tidak dipanen yang memenuhi Persamaan 2.5.1.4 dengan $n = k$, diperoleh $\varphi_i{}^{(0)} > 0$ untuk $i < k$.

Oleh sebab semua betina yang memasuki kelas umur ke-k dipanen, maka $\varphi_k{}^{(0)} = 0$ dan proporsi panen keseluruhan diperoleh dari Persamaan 2.5.1.13 dengan $n = k$.

Tulis $M^{(0)} = M_k\left(\varphi_i{}^{(0)}\right)$.

Akan diselidiki bagaimana $M^{(0)}$ berubah ketika dua nilai dari $\varphi_i{}^{(0)}$ berubah.

Pilih r dan t dengan $1 < r < t < k$, diperoleh $\varphi_r{}^{(0)}, \varphi_t{}^{(0)} \neq 1$.

Persamaan 2.5.1.4 dengan $n = k$ dapat ditulis dalam bentuk

$$A - \mu_r(B + \mu_t C) = 0 \qquad \dots(2.5.1.14)$$

dengan menuliskan $\mu_i = \varphi_i{}^{(0)},\ i \neq r, t$.

Dengan substitusi serupa pada Persamaan 2.5.1.13 dengan $n = k$, diperoleh

$$M_k(\mu_r, \mu_t) = \frac{D + \mu_r(E + \mu_t X)}{G + \mu_r(K + \mu_t Y)} \qquad \dots(2.5.1.15)$$

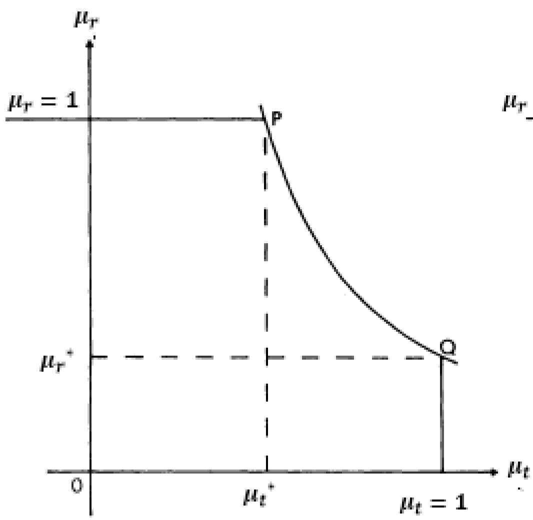
Eliminasi μ_t menggunakan Persamaan 2.5.1.14 menghasilkan

$$M_k(\mu_r) = \frac{DC + \mu_r EC + X(A - B\mu_r)}{SC + \mu_r KC + Y(A - B\mu_r)} \qquad \dots(2.5.1.16)$$

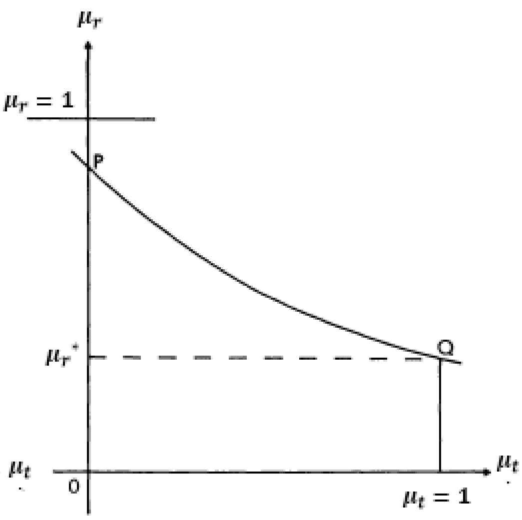
Jelas pembilang dan penyebut pada Persamaan 2.5.1.16 akan positif untuk $0 < \mu_r < 1$, $M_k(\mu_r)$ monoton untuk $0 \leq \mu_r \leq 1$, dan $M_k(\mu_r)$ mencapai maksimum pada nilai maksimum atau minimum μ_r untuk $0 \leq \mu_t \leq 1$.

Dari Persamaan 2.5.1.14, dua kasus muncul berdasarkan tanda dari $A - B$.

Kasus 1 adalah kasus di mana $A > B$ dan digambarkan pada Gambar 2.3, sedangkan kasus 2 adalah kasus di mana $A \leq B$ dan digambarkan pada Gambar 2.4.



Gambar 2.3. Grafik $A - \mu_r(B + \mu_t C) = 0$ untuk $A > B$



Gambar 2.4. Grafik $A - \mu_r(B + \mu_t C) = 0$ untuk $A \leq B$

Pada kasus 1, nilai maksimum μ_r untuk $0 < \mu_t < 1$ (titik P) terjadi ketika

$$\mu_r = 1,\ \mu_t = \mu_t^* = \frac{A+B}{C} \text{ (Gambar 2.3)}$$

dan pada kasus 2 terjadi ketika

$$\mu_r = \frac{A}{B},\ \mu_t = 0 \text{ (Gambar 2.4)}$$

Sedangkan nilai minimum μ_r (titik Q) terjadi ketika

$$\mu_r = \mu_r^* = \frac{A}{B+C},\ \mu_t = 1$$

baik untuk kasus 1 atau 2 (Gambar 2.3 dan 2.4).

Telah ditunjukkan bahwa jika diberikan sebarang pola pemanenan yang mempertahankan populasi dan melibatkan pemanenan sebagian dari beberapa kelas umur, maka terdapat sebuah pola pemanenan di mana dilakukan pemanenan sebagian pada satu kelas umur dan pemanenan total pada kelas umur lain yang menghasilkan sebuah rasio proporsi panen keseluruhan yang lebih besar. Misal dua kelas umur tersebut adalah kelas umur r dan k. Kelas umur r dipanen sebagian, sedangkan kelas umur k (kelas umur yang lebih tua) dipanen seluruhnya.

Berdasarkan penjelasan dan pembuktian yang telah dijelaskan pada subbab 2.5.1 ini, dibuat suatu langkah-langkah menentukan kebijakan pemanenan berkesinambungan optimal tanpa batasan ekonomi sebagai berikut.

1. Menentukan nilai μ_r (bagian betina pada kelas umur ke-r yang tidak dipanen) yang memenuhi batasan yang diberikan pada Persamaan 2.5.1.4 untuk semua kemungkinan nilai r dan k.

   r dan k terletak pada $1 \leq r < k \leq n$. Dengan mengsubstitusikan nilai $\mu_i = 1,\ i = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, k-1$ dan $\mu_k = 0$ ke Persamaan 2.5.1.4, diperoleh nilai μ_r. Nilai μ_r yang terletak pada interval [0,1] dapat diprediksi menghasilkan hasil panen optimal, sedangkan nilai μ_r di luar interval [0,1] dapat diabaikan.
2. Menentukan vektor distribusi umur setelah tiap panen (vektor eigen x yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ yang diberikan oleh Persamaan 2.5.1.11) untuk nilai r dan k yang memenuhi langkah 1.
3. Menentukan vektor distribusi umur pada saat tepat sebelum panen (Lx) untuk nilai x pada langkah 2.

4. Menentukan persentase populasi yang dapat dipanen dari keseluruhan populasi Lx pada langkah 3. Nilai r dan k yang menghasilkan persentase terbesar menentukan dua kelas umur yang akan dipanen.

2.5.2 Kebijakan Pemanenan Berkesinambungan Optimal dengan Batasan Ekonomi

Terdapat model kebijakan pemanenan berkesinambungan lain yang dapat diaplikasikan pada populasi betina, yaitu kebijakan pemanenan dengan batasan ekonomi $\langle c, x\rangle = 1$. Contoh penggunaan batasan ekonomi dijelaskan sebagai berikut.

Komponen-komponen vektor HLx adalah banyak betina yang dipanen pada tiap-tiap kelas umur. Misalkan nilai ekonomi atau pendapatan yang diperoleh dari tiap-tiap betina yang dipanen dari kelas ke-i adalah y_i, $i = 1, 2, \dots, n$ dan didefinisikan vektor hasil y adalah $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, maka nilai ekonomi atau pendapatan Y yang diperoleh dari keseluruhan panen diberikan oleh $Y = \langle y, HLx\rangle$, di mana $\langle\ ,\ \rangle$ merupakan perkalian dalam (skalar atau titik) dari dua vektor. Y lebih umum disebut hasil panen. Kebijakan pemanenan optimal adalah kebijakan yang memaksimumkan Y.

Nilai Y akan berbeda-beda tergantung solusi x pada Persamaan 2.5.1.1. Dengan alasan ini, sebuah pembatas akan dikenakan untuk menormalisasikan solusi Persamaan 2.5.1.1. Pembatas ini akan berbentuk linear. Secara spesifik, persamaan pembatas tersebut adalah

$$\langle c, x\rangle = 1 \qquad \dots(2.5.2.1)$$

di mana $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ adalah vektor pembatas yang diberikan. Penggunaan vektor pembatas, antara lain:

1) Jika diinginkan total betina dalam populasi kesetimbangan adalah N, maka ditetapkan $c_i = \frac{1}{N},\ i = 1, 2, \dots, n$. Dengan $N = 1$, hasil Y dapat diinterpretasikan sebagai pendapatan yang diperoleh dari tiap betina yang tersisa setelah pemanenan. Dengan kelinearitasan dari pembatas, hasil untuk N betina dalam populasi kesetimbangan adalah N kali pendapatan yang diperoleh tiap betina yang tersisa setelah pemanenan.
2) Jika rata-rata berat seekor betina di kelas umur ke-i adalah w_i dan jika diinginkan untuk mempertahankan total berat dari populasi kesetimbangan adalah W, maka ditetapkan $c_i = \frac{w_i}{W},\ i = 1, 2, \dots, n$. Dengan $W = 1$, hasil Y adalah pendapatan yang diperoleh per unit berat dari betina-betina yang tersisa setelah pemanenan.
3) Jika ditetapkan $c = y$, maka perkalian dalam $\langle c, x \rangle$ menjadi nilai ekonomis dari populasi kesetimbangan. Hasil Y yang didasarkan pada pembatas $\langle y, x \rangle = 1$ adalah pendapatan yang diperoleh per satuan uang (dollar, rupiah, dll) dari pendapatan yang mungkin di populasi kesetimbangan yang tidak dipanen. Konsekuensinya, Y dapat diinterpretasikan sebagai tingkat pertumbuhan ekonomi dari populasi. Jika nilai maksimum Y kurang dari tingkat bunga yang berlaku, maka

secara ekonomi akan lebih menguntungkan untuk memanen seluruh populasi dan menginvestasikan pendapatan.

Dengan menambahkan batasan ekonomi ini, maka kebijakan pemanenan akan berkesinambungan ketika memenuhi:

(i) $(I - H)Lx = x$

(ii) $\langle c, x \rangle = 1$ (Rorres & Fair, 1975).

Nilai h_i dan x yang memenuhi Persamaan (i) dan (ii) disebut kebijakan pemanenan berkesinambungan optimal dengan batasan ekonomi.

Sama halnya dengan kebijakan pemanenan tanpa batasan ekonomi, kebijakan pemanenan dengan batasan ekonomi ini juga akan mendapatkan hasil panen yang optimal ketika dilakukan pada dua kelas umur, yang terdiri dari memanen sebagian tertentu (θ) dari kelas umur r dan memanen seluruh kelas umur k.

Nilai h_i dan x yang memenuhi Persamaan (i) dan (ii) ditentukan sebagai berikut: batasan yang diperoleh dari poin (i) telah dijelaskan sebelumnya pada bagian pemanenan tanpa batasan ekonomi, yaitu batasan yang diberikan oleh Persamaan 2.5.1.4.

Dengan mengsubstitusikan $x_2, x_3, \dots, x_n$ pada Persamaan 2.5.1.3 ke pembatas $\langle c, x \rangle = 1$ memberikan

$$x_1(c_1 + c_2 b_1 \mu_2 + c_3 b_1 b_2 \mu_2 \mu_3 + \cdots + c_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n) = 1 \quad \text{...(2.5.2.2)}$$

Untuk hasil Y, simplifikasi berikut ditampilkan:

$$Y = \langle y, HLx \rangle = \langle y, Lx - x \rangle = \langle (L' - I)y, x) \rangle$$

Komponen-komponen vector $(L' - I)y$, dimisalkan d_i, adalah

$$d_i = y_1 a_i + y_{i+1} b_i - y_i,\ \ i = 1, 2, \dots, n \qquad \text{...(2.5.2.3)}$$

di mana y_{n+1} dan b_n didefinisikan sama dengan nol.

Hasil Y dapat ditulis

$$Y = d_1 x_1 + d_2 x_2 + \cdots + d_n x_n \qquad \text{...(2.5.2.4)}$$

Dengan mengsubstitusikan $x_2, x_3, \dots, x_n$ dari Persamaan 2.5.1.2 dan x_1 dari Persamaan 2.5.2.2 ke Y diperoleh

$$Y = \frac{d_1 + d_2 b_1 \mu_2 + d_3 b_1 b_2 \mu_2 \mu_3 + \cdots + d_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n}{c_1 + c_2 b_1 \mu_2 + c_3 b_1 b_2 \mu_2 \mu_3 + \cdots + c_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n} \qquad \text{...(2.5.2.5)}$$

Untuk lebih ringkasnya, misalkan

$$\alpha_i = d_i b_1 b_2 \dots b_{i-1} = (y_1 a_i + y_{i+1} b_i - y_i) b_1 b_2 \dots b_{i-1}\ ,$$
$$\beta_i = c_i b_1 b_2 \dots b_{i-1},$$
$$i = 1, 2, \dots, n \qquad \text{...(2.5.2.6)}$$

Kemudian, dengan mengalikan pembilang dan penyebut dari Persamaan 2.5.2.5 dengan μ_1, Y dapat ditulis

$$Y = \frac{\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_1 \mu_2 + \cdots + \alpha_n \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}{\beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_1 \mu_2 + \cdots + \beta_n \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \qquad \text{...(2.5.2.7)}$$

Dimisalkan $\xi_i = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_i \quad i = 1, 2, \dots, n$ ...(2.5.2.8)

Maka dengan

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix},\ \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},\ \ \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \qquad \text{...(2.5.2.9)}$$

Y dapat diekspresikan sebagai

$$Y = \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{\langle \beta, \xi \rangle} \qquad \text{...(2.5.2.10)}$$

Untuk memaksimumkan Persamaan 2.5.2.10, pertama-tama ξ harus ditentukan. Dari Persamaan 2.5.1.4, nilai-nilai $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ terletak pada

$$M = \{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) | 0 \leq \mu_i \leq 1,\ i = 1, 2, \dots, n;\ (a_1\mu_1 + a_2b_1\mu_1\mu_2 + \cdots + a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}\mu_1\mu_2 \dots \mu_n) = 1\}.$$

Dengan memisalkan

$$\gamma_i = a_ib_1b_2 \dots b_{i-1},\ \ i = 1, 2, \dots, n$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \qquad \text{...(2.5.2.11)}$$

ditemukan bahwa nilai ξ yang diperbolehkan terletak pada himpunan

$$S = \{\xi | 0 \leq \xi_n \leq \xi_{n-1} \leq \cdots \leq \xi_1 \leq 1;\ \langle \gamma, \xi \rangle = 1\}.$$

Sifat-sifat himpunan S akan dikaji untuk menentukan rumus kebijakan pemanenan berkesinambungan dengan batasan ekonomi. Dengan mengasumsikan bahwa S adalah sebuah polihedron konveks di R^n, maka memaksimumkan Y untuk semua $\xi \epsilon S$ mengikuti Teorema 2.5.2.1.

Teorema 2.5.2.1

Jika S tak kosong dan $\langle \beta, \xi \rangle > 0$ untuk semua $\xi \epsilon S$, maka $\frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{\langle \beta, \xi \rangle}$ mengasumsikan nilai maksimumnya pada sebuah puncak dari S.

Bukti:

Di bawah hipotesis $Y(\xi) = \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{\langle \beta, \xi \rangle}$ kontinu pada polihedron konveks S, yang menjamin bahwa Y mengasumsikan maksimumnya, m, pada suatu titik $\eta \in$

S. Didefinisikan fungsi linear pada S, $l(\xi) = \langle \alpha, \xi \rangle - m\langle \beta, \xi \rangle$. Maka $l(\xi) \leq 0$, $\xi \in S$, dan dengan teorema dasar dalam pemrograman linear, $l(\xi)$ mengasumsikan maksimumnya pada suatu puncak, $\sigma \in S$. Oleh sebab itu, $l(\sigma) \leq 0$ dan $l(\eta) = 0$, yang menyiratkan $l(\sigma) = l(\eta)$ dan $Y(\sigma) = m$.

Untuk menguji kapan S tidak kosong, didefinisikan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} E_i &= \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_i \\ &= a_1 + a_2 b_1 + \cdots + a_i b_1 b_2 \ldots b_{i-1}, \ i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \qquad \ldots(2.5.2.12)$$

E_i adalah banyak anak-anak betina kumulatif yang diharapkan ketika si induk melalui i kelas umur. Lemma 2.5.2.1 kemudian dinyatakan.

Lemma 2.5.2.1

S tak kosong jika dan hanya jika $E_n \geq 1$.

Bukti:

($\Longrightarrow$) Jika S tak kosong dan memuat sebuah vektor ξ, maka

$1 = \langle \gamma, \xi \rangle = \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \cdots + \gamma_n \xi_n \leq \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n = E_n$.

($\Longleftarrow$) Jika $E_n \geq 1$, maka vektor $\left(\frac{1}{E_n}, \frac{1}{E_n}, \ldots, \frac{1}{E_n}\right) \in S$, sehingga S tak kosong.

Dua kelas umur khusus diperkenalkan, yaitu *replacement age* (umur pergantian) rp, yaitu ketika banyak anak-anak betina kumulatif yang diharapkan adalah yang pertama kali lebih dari atau sama dengan satu, dan *surplus age* (umur surplus) s, yaitu ketika banyak anak-anak betina kumulatif yang diharapkan adalah yang pertama kali melampaui satu. Dengan kata lain

$$E_{rp-1} < 1$$

$$E_{rp} \geq 1$$
$$E_{s-1} \leq 1$$
$$E_s > 1$$

Dalam sebagian besar situasi nyata, $rp = s$.

Sebelum kondisi $\langle \beta, \xi \rangle > 0$ pada S diuji, diberikan Lemma 2.5.2.2 yang mengidentifikasi puncak-puncak dari S berikut.

Lemma 2.5.2.2

Jika $E_n > 1$, puncak-puncak dari S adalah titik-titik dalam bentuk

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & i = 1, 2, \dots, r-1 \\ \rho, & i = r, r+1, \dots, k-1 \\ 0, & i = k, k+1, \dots, n \end{cases}$$

di mana

$$1 \leq r \leq s < k \leq n+1, \qquad \rho = \frac{1 - E_{r-1}}{E_{k-1} - E_{r-1}} \qquad \text{...(2.5.2.13)}$$

Bukti:

Andaikan $\xi \in S$ adalah dalam bentuk 2.5.2.13, dan $\xi = \theta\sigma + (1-\theta)\eta$, $0 < \theta < 1$ dan $\sigma, \eta \in S$. Akan ditunjukkan $\xi = \sigma = \eta$, yang menyiratkan ξ adalah sebuah puncak dari S. Ini adalah akibat langsung dari dekomposisi dan sifat-sifat monotonik komponen-komponen dari sebuah vektor di S yang diasumsikan bahwa $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_{r-1}, \sigma_r = \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_{k-1}$, $\sigma_i = 0$, $\eta_i = 0$, $i \geq k$, $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_{r-1}, \eta_r = \eta_{r+1} = \cdots = \eta_{k-1}$. Persamaan-persamaan yang menghubungkan komponen-komponen tersebut adalah $\theta\sigma_1 + (1-\theta)\eta_1 = 1$, $\theta\sigma_r + (1-\theta)\eta_r = \rho$; selain itu juga vektor-vektor yang memenuhi $\langle \gamma, \sigma \rangle = \langle \gamma, \eta \rangle = 1.$ Jika $\sigma_1 < 1$, maka $\sigma_r > \rho$, dan jika $\eta_1 \leq 1$ menyiratkan bahwa $\eta_r \geq \rho$, ini menjadikan $\rho =$

$\theta\sigma_r + (1-\theta)\eta_r > \theta\rho + (1-\theta)\rho = \rho$, yang merupakan sebuah kontradiksi. Jadi, $\sigma_1 = 1$ dan $\sigma_r = \rho$. Dengan cara yang sama, $\eta_1 = 1$ dan $\eta_r = \rho$ sehingga $\xi = \sigma = \eta$.

Sekarang, dimisalkan $\xi \in S$ bukan dalam bentuk 2.5.2.13. Akan ditunjukkan ξ bukan sebuah puncak dari S. Tanpa kehilangan generalisasi, diasumsikan bahwa $\xi_i = 1,\ i = 1, 2, \dots, m;\ 1 > \xi_{m+1} \geq \xi_{m+t} > \alpha = \xi_i > 0,\ i = m+t+1, \dots, m+p,$ di mana $p > t$; dan $\xi_i = 0,\ i = m+p+1, \dots, n.$ Dua kasus kemudian dipertimbangkan.

Kasus (i):

$E_{m+t} > 1.$ Misal $\delta = \frac{1-E_m}{E_{m+t}-E_m}$ dan pilih $\mu,\ 0 < \mu < 1$, sedemikian hingga $\eta_{m+i} = \frac{[\xi_{m+i}-(1-\mu)\delta]}{\mu},\ i = 1, 2, \dots, t,$ dan $\beta = \frac{\alpha}{\mu}$ mempunyai sifat-sifat $1 \geq \eta_{m+1} \geq \eta_{m+t} \geq \beta$. Hal ini mungkin karena

$$\lim_{\mu \to 1} \eta_{m+i} = \xi_{m+i} > \alpha = \lim_{\mu \to 1} \beta$$

Dapat dibuktikan bahwa $\xi = \mu\eta + (1-\mu)\sigma,$ di mana $\sigma, \eta \in S$ didefinisikan oleh $\eta_i = \sigma_i = 1, i = 1, \dots, m;\ \sigma_{m+i} = \beta, i = 1, \dots, t;\ \sigma_i = 0, i > m+t;\ \eta_{m+i} = \frac{[\xi_{m+i}-(1-\mu)\delta]}{\mu}, i = 1, 2, \dots, t;\ \eta_i = \beta, i = m+t+1, \dots, m+p$; dan $\eta_i = 0, i > m+p.$ Jadi, ξ bukanlah puncak dari S.

Kasus (ii)

$E_{m+t} \leq 1.$ Misal $\delta = \frac{1-E_{m+t}}{E_{m+p}-E_{m+t}}$ dan pilih $\mu,\ 0 < \mu < 1,$ sedemikian hingga $\eta_{m+i} = \frac{[\xi_{m+i}-(1-\mu)]}{\mu}, i = 1, 2, \dots, t,$ dan $\beta = \frac{[\alpha-(1-\mu)\delta]}{\mu}$ mempunyai sifat-sifat bahwa $1 \geq \eta_{m+1} \geq \eta_{m+t} \geq \beta$. Jadi, $\xi = \mu\eta + (1-\mu)\sigma$, di mana $\eta_i = \sigma_i = 1,\ i = 1, \dots, m;\ \eta_{m+i} = \frac{[\xi_{m+i} - (1-\mu)]}{\mu},\ i = 1, \dots, t;\ \eta_i = \beta, i = m+t+1, \dots, m+p;\ \eta_i = 0,\ i > m+p;\ \sigma_{m+i} = 1,\ i = 1, \dots, t;\ \sigma_i = \delta,\ i = m+t+1, \dots, m+p;$ dan $\sigma_i = 0,\ i > m+p$. Maka $\eta, \sigma \in S$ sehingga ξ bukanlah puncak dari S.

Kebijakan pemanenan dua kelas umur dinyatakan dalam Lemma 2.5.2.3.

Lemma 2.5.2.3

Puncak-puncak dari S berhubungan dengan kebijakan pemanenan dua umur dengan memanen kelas r dan k, di mana $1 \leq r \leq s < k \leq n+1$, dan sebagian tertentu dari kelas r yang dipanen adalah $\theta = \frac{E_{k-1} - 1}{E_{k-1} - E_{r-1}}$.

Bukti:

Menurut Lemma 2.5.2.2, puncak-puncak dari S secara tepat adalah titik-titik dalam bentuk

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & i = 1, 2, \dots, r-1 \\ \rho, & i = r, r+1, \dots, k-1 \\ 0, & i = k, k+1, \dots, n \end{cases}$$

dengan $\rho = \frac{1 - E_{r-1}}{E_{k-1} - E_{r-1}}$ dan $1 \leq r \leq s < k \leq n+1$.

Nilai ξ_r yang memenuhi batasan tersebut adalah ρ. ξ_r dapat diinterpretasikan sebagai bagian tertentu dari kelas umur r yang tidak dipanen. Maka nilai θ, yaitu bagian tertentu dari kelas umur r yang dipanen adalah

$$\begin{aligned} \theta &= 1 - \rho \\ &= 1 - \frac{1 - E_{r-1}}{E_{k-1} - E_{r-1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{E_{k-1} - E_{r-1}}{E_{k-1} - E_{r-1}} - \frac{1 - E_{r-1}}{E_{k-1} - E_{r-1}}$$
$$= \frac{E_{k-1} - E_{r-1} - 1 + E_{r-1}}{E_{k-1} - E_{r-1}}$$
$$= \frac{E_{k-1} - 1}{E_{k-1} - E_{r-1}}$$

Kondisi-kondisi yang menjamin bahwa $\langle \beta, \xi \rangle > 0$ untuk semua $\xi \epsilon S$, pertama didefinisikan

$$P_i = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_i$$
$$= c_1 + c_2 b_1 + \cdots + c_i b_1 b_2 \dots b_{i-1},\ i = 1, 2, \dots, n$$

Lemma 2.5.2.4 kemudian akan mengidentifikasi nilai-nilai P_i.

Lemma 2.5.2.4

Jika $E_n > 1$ dan $\langle \beta, \xi \rangle > 0$ untuk semua $\xi \epsilon S$, maka

$$P_i > \left(\frac{E_i - 1}{E_n - 1}\right) P_n, \qquad i = 1, 2, \dots, rp - 1$$
$$P_i > 0, \qquad i = rp, rp + 1, \dots, n$$

Bukti:

Untuk $i = 1, 2, \dots, rp - 1$, definisikan vektor-vektor $\xi^{(i)} \in S$ oleh

$$\xi_j{}^{(i)} = \begin{cases} 1, & j = 1, 2, \dots, i \\ \frac{1 - E_i}{E_n - E_i}, & j = i + 1, \dots, n \end{cases}$$

kemudian

$$0 < \langle \beta, \xi^{(i)} \rangle = (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_i) + \left(\frac{1 - E_i}{E_n - E_i}\right)(\beta_{i+1} + \cdots + \beta_n)$$
$$= P_i + \left(\frac{1 - E_i}{E_n - E_i}\right)(P_n - P_i)$$
$$= P_i + P_n \left(\frac{1 - E_i}{E_n - E_i}\right) - P_i \left(\frac{1 - E_i}{E_n - E_i}\right)$$
$$= P_i \left(1 - \frac{1 - E_i}{E_n - E_i}\right) + P_n \left(\frac{1 - E_i}{E_n - E_i}\right)$$
$$= P_i \left(\frac{E_n - E_i - 1 + E_i}{E_n - E_i}\right) - P_n \left(\frac{E_i - 1}{E_n - E_i}\right)$$

$$= P_i\left(\frac{E_n-1}{E_n-E_i}\right) - P_n\left(\frac{E_i-1}{E_n-E_i}\right)$$

Oleh sebab itu,

$$P_i > \left(\frac{E_i - 1}{E_n - 1}\right)P_n, \quad i = 1, 2, \dots, rp - 1$$

Selanjutnya, untuk $i = rp, rp + 1, \dots, n$, definisikan vektor-vektor $\xi^{(i)} \in S$

oleh $\xi_j^{(i)} = \begin{cases} \frac{1}{E_i}, & j = 1, 2, \dots, i \\ 0, & j = i + 1, \dots, n \end{cases}$

Maka $0 < \langle \beta, \xi^{(i)} \rangle = \frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_i}{E_i} = \frac{P_i}{E_i}$

dan oleh sebab $E_i \geq 1$ untuk $i = rp, rp + 1, \dots, n$, maka $P_i > 0$ untuk $i = rp, rp + 1, \dots, n$.

Kondisi $\langle \beta, \xi \rangle > 0$ kemudian akan dipenuhi melalui Lemma 2.5.2.5.

Lemma 2.5.2.5

Jika $E_n > 1$ dan salah satu dari (i) dan (ii) benar, maka $\langle \beta, \xi \rangle > 0$ untuk semua $\xi \epsilon S$.

(i) $P_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, rp - 1$

$P_i > 0, \quad i = rp, rp + 1, \dots, n$

(ii) $P_i > \left(\frac{E_i-1}{E_n-1}\right)P_n, \quad i = 1, 2, \dots, s - 1$

$$P_i \geq \left(\frac{E_i - 1}{E_n - 1}\right)P_n, \quad i = s, s + 1, \dots, n - 1$$

$P_n > 0$

Bukti:

Andaikan bahwa

$P_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, rp - 1$

$P_i > 0, \quad i = rp, rp + 1, \dots, n$

maka untuk sebarang $\xi \in S$

$$\begin{aligned}\langle \beta, \xi \rangle &= \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \cdots + \beta_{n-1}\xi_{n-1} + \beta_n\xi_n \\ &= P_1\xi_1 + (P_2 - P_1)\xi_2 + \cdots + (P_{n-1} - P_{n-2})\xi_{n-1} + (P_n - P_{n-1})\xi_n \\ &= P_1\xi_1 + P_2\xi_2 - P_1\xi_2 + \cdots + P_{n-1}\xi_{n-1} - P_{n-2}\xi_{n-1} + P_n\xi_n \\ &\qquad - P_{n-1}\xi_n \\ &= P_1(\xi_1 - \xi_2) + P_2(\xi_2 - \xi_3) + \cdots + P_{n-1}(\xi_{n-1} - \xi_n) + P_n\xi_n \\ &\geq P_{rp}(\xi_{rp} - \xi_{rp+1}) + P_{rp+1}(\xi_{rp+1} - \xi_{rp+2}) + \cdots + P_{n-1}(\xi_{n-1} \\ &\qquad - \xi_n) + P_n\xi_n\end{aligned}$$

Andaikan masing-masing jumlah yang dikalikan dengan bilangan-bilangan $P_i, i = rp, rp+1, \dots, n,$ pada baris terakhir adalah sama dengan nol. Maka $\xi_n = \xi_{n-1} = \cdots = \xi_{rp} = 0,$ sehingga $\langle \gamma, \xi \rangle = \gamma_1\xi_1 + \cdots + \gamma_{rp-1}\xi_{rp-1} \leq \gamma_1 + \cdots + \gamma_{rp-1} = E_{rp-1} < 1$ yang mana kontradiksi dengan $\langle \gamma, \xi \rangle = 1.$ Oleh sebab itu, minimal salah satu dari $\xi_i - \xi_{i+1}, i = rp, rp+1, \dots, n-1,$ atau ξ_n lebih dari nol. Maka $P_i > 0, i = rp, rp+1, \dots, n,$ sehingga $\langle \beta, \xi \rangle > 0.$

Selanjutnya, andaikan

$P_i > \left(\frac{E_i - 1}{E_n - 1}\right) P_n, \quad i = 1, 2, \dots, s-1$-

$$P_i \geq \left(\frac{E_i - 1}{E_n - 1}\right) P_n, \quad i = s, s+1, \dots, n-1$$

$P_n > 0$

Kemudian, dengan argumen yang serupa dengan di atas, maka untuk sebarang $\xi \in S$:

$$\begin{aligned}\langle \beta, \xi \rangle &= P_1(\xi_1 - \xi_2) + P_2(\xi_2 - \xi_3) + \cdots + P_{n-1}(\xi_{n-1} - \xi_n) + P_n\xi_n \\ &\geq \left(\frac{E_1 - 1}{E_n - 1}\right) P_n(\xi_1 - \xi_2) + \left(\frac{E_2 - 1}{E_n - 1}\right) P_n(\xi_2 - \xi_3) + \cdots \\ &\qquad + \left(\frac{E_{n-1} - 1}{E_n - 1}\right) P_n(\xi_{n-1} - \xi_n) + P_n\xi_n\end{aligned}$$

$$= \frac{[E_1\xi_1+(E_2-E_1)\xi_2+\cdots+(E_n-E_{n-1})\xi_n-\xi_1]P_n}{E_n-1}$$

$$= \frac{[\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \cdots + \gamma_n\xi_n - \xi_1]P_n}{E_n - 1}$$

$$= \frac{(1-\xi_1)P_n}{E_n - 1}$$

Dua kasus muncul. Jika $\xi_1 < 1$, maka $\langle \beta, \xi \rangle > 0.$ Jika $\xi_1 = 1$, maka pertidaksamaan pada rangkaian di atas dapat diganti dengan sebuah *strict inequality*, sebab satu dari jumlahan-jumlahan $\xi_i - \xi_{i+1}, i = 1, 2, \dots, s-1$, harus lebih dari nol, lainnya $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_s = 1$ sehingga $\langle \gamma, \xi \rangle \geq \gamma_1 + \cdots + \gamma_s = E_s > 1$, yang mana kontradiksi dengan $\langle \gamma, \xi \rangle = 1.$ Dengan *strict inequality* di atas, maka $\langle \beta, \xi \rangle > 0$.

Dari penjelasan dan pembuktian yang telah dilakukan, dapat dibuat langkah-langkah menentukan kebijakan pemanenan berkesinambungan optimal dengan batasan ekonomi, yaitu:

1. Menentukan nilai ekonomi yang didefinisikan dengan vektor hasil $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.
2. Menetapkan vektor pembatas $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.
3. Menentukan kelas *replacement* (rp) dan kelas surplus (s). Kelas *replacement* (rp) dan kelas surplus (s) ini dapat ditentukan dengan menghitung nilai E_i (banyak anak-anak betina kumulatif yang diharapkan ketika si induk melalui i kelas umur) untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Nilai i yang pertama kali menghasilkan nilai $E_i \geq 1$ merupakan kelas *replacement* (rp), sedangkan nilai i yang pertama kali menghasilkan nilai $E_i > 1$ merupakan kelas surplus (s).

E_i dirumuskan sebagai berikut:

$$E_i = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_i$$

$$= a_1 + a_2 b_1 + \cdots + a_i b_1 b_2 \ldots b_{i-1}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Biasanya, kelas *replacement* sama dengan kelas surplus.

4. Menguji apakah masalah memenuhi syarat untuk diselesaikan atau tidak yaitu dengan cara sebagai berikut:

   Jika $E_n > 1$ dan salah satu

   $$P_i \geq 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, rp - 1$$
   $$P_i > 0, \;\; i = rp, rp + 1, \ldots, n$$

   atau

   $$P_i > \left(\frac{E_i - 1}{E_n - 1}\right) P_n, \;\; i = 1, 2, \ldots, s - 1\text{-}$$

   $$P_i \geq \left(\frac{E_i - 1}{E_n - 1}\right) P_n, \;\; i = s, s + 1, \ldots, n - 1$$

   $$P_n > 0$$

   maka masalah memenuhi syarat dan dapat diselesaikan.

   P_i dirumuskan sebagai berikut:

   $$P_i = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_i$$
   $$= c_1 + c_2 b_1 + \cdots + c_i b_1 b_2 \ldots b_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

5. Menentukan kemungkinan-kemungkinan dua kelas umur yang akan dipanen (kelas umur r dan k), yaitu kelas-kelas umur yang memenuhi $1 \leq r \leq s < k \leq n + 1$.

6. Mencari nilai Y untuk seluruh kemungkinan nilai r dan k. Nilai Y terbesar merupakan hasil berkesinambungan optimal. Nilai r dan k yang memberikan hasil berkesinambungan optimal merupakan dua kelas umur yang akan dipanen.

   Nilai Y dirumuskan sebagai berikut:

$$Y = \frac{(E_{k-1} - 1)y_r b_1 b_2 \dots b_{r-1} + (1 - E_{r-1})y_k b_1 b_2 \dots b_{k-1}}{(E_{k-1} - 1)P_{r-1} + (1 - E_{r-1})P_{k-1}}$$

7. Menghitung sebagian tertentu dari betina yang akan dipanen pada kelas r dan k. Kelas umur r dipanen sebesar $\theta = \frac{E_{k-1}-1}{E_{k-1}-E_{r-1}}$ sedangkan kelas umur k dipanen seluruhnya.
8. Menentukan vektor distribusi umur setelah tiap panen (vektor populasi kesetimbangan) x, yang dirumuskan sebagai berikut:

$$x = \frac{1}{\theta P_{r-1} + (1-\theta)P_{k-1}} \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_1 b_2 \\ \vdots \\ b_1 b_2 \dots b_{r-2} \\ (1-\theta) b_1 b_2 \dots b_{r-1} \\ (1-\theta) b_1 b_2 \dots b_r \\ \vdots \\ (1-\theta) b_1 b_2 \dots b_{k-2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.6 Penelitian-penelitian yang Relevan

Penelitian tentang matriks Leslie pernah dilakukan oleh Marzuki & Malko (2015) yang mengkaji karakterisasi matriks Leslie ordo empat. Penelitian-penelitian lain dilakukan oleh Yuliani *et al.* (2012) dan Corazon *et al*. (2016) yang mengaplikasikan matriks Leslie untuk memproyeksikan banyak perempuan di masa mendatang dan menghitung laju pertumbuhan populasinya, Aires-da-Silva & Gallucci (2007) yang menggunakan matriks Leslie untuk manajemen dan konservasi hiu biru, dan Santadino *et al*. (2014) yang meneliti efek *sublethal glyphosate* pada pertumbuhan populasi *E. fetida* dengan tiga perlakuan *glyphosate* yang berbeda. Pertumbuhan populasi *E. fetida* untuk masing-masing perlakuan dimodelkan dengan matriks Leslie dan tingkat pertumbuhan populasi pada masing-masing perlakuan dihitung. Penelitian lain dilakukan oleh Kurniawan (2012) yang mengaplikasikan matriks Leslie untuk memanen populasi babi betina dengan menerapkan pemanenan kelas umur termuda dan pemanenan seragam. Akan tetapi, kebijakan pemanenan ini belum menghasilkan hasil panen yang optimal.

Pada penelitian ini, penulis mengaplikasikan matriks Leslie untuk memprediksi tingkat pertumbuhan populasi hewan betina dan menentukan strategi pemanenan yang akan dilakukan. Karena pada penelitian terdahulu pemanenan yang dilakukan belum menghasilkan hasil panen yang optimal, maka pada penelitian ini akan dirumuskan kebijakan pemanenan yang akan menghasilkan hasil panen berkesinambungan optimal.

BAB 5
PENUTUP

5.1 Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan menggunakan data banyak sapi betina tiap kelas umur pada bulan Agustus 2015, data kelahiran dan kematian sapi betina bulan Agustus 2015 s.d. Juli 2017, dan data rata-rata nilai jual sapi betina tiap kelas umur di peternakan sapi KTT Bangun Rejo, dapat disimpulkan bahwa:

1. Pertumbuhan populasi sapi betina di peternakan sapi KTT Bangun Rejo mengalami peningkatan sebesar 26,25% setiap dua tahun.
2. Strategi pemanenan yang paling tepat diterapkan di peternakan sapi KTT Bangun Rejo adalah kebijakan pemanenan berkesinambungan optimal dengan batasan ekonomi, yaitu dengan memanen sapi betina kelas umur 3 sebesar 70,39% (16 ekor) dan memanen seluruh sapi betina pada kelas umur 6 (6 ekor). Kebijakan pemanenan ini menghasilkan hasil berkesinambungan optimal, yaitu meningkatkan pertumbuhan ekonomi peternakan sebesar 36% dan memberikan pendapatan yang maksimum, yaitu Rp273.000.000,00 setiap dua tahun.

5.2 Saran

1. Bagi Pengelola Peternakan Sapi KTT Bangun Rejo

   Penulis menyarankan kepada pengelola peternakan sapi KTT Bangun Rejo untuk menerapkan kebijakan pemanenan berkesinambungan optimal dengan batasan ekonomi, karena kebijakan ini akan menghasilkan pendapatan yang maksimum dan tetap mempertahankan kestabilan populasi sehingga tetap menjaga keberlangsungan peternakan ini.

2. Bagi Mahasiswa

Pada penelitian ini, penulis menggunakan parameter kelahiran dan kematian betina saja untuk membentuk matriks Leslie. Maka dari itu, penulis menyarankan kepada mahasiswa yang ingin melakukan penelitian serupa untuk menambahkan parameter lain, misal parameter stokastik sehingga memungkinkan hasil penelitian lebih akurat. Selain itu, mahasiswa juga dapat menggunakan matriks-matriks khusus lainnya yang dapat digunakan untuk menentukan pertumbuhan populasi dan menentukan kebijakan pemanenan, misalnya matriks yang didasarkan pada kelas-kelas ukuran, tahap perkembangan, dan lain-lain.

DAFTAR PUSTAKA

Aires-da-Silva, A. M. & Gallucci, V. F. 2007. Demographic and Risk Analyses Applied to Management and Conservation of the Blue Shark (*Prionace glauca*) in the North Atlantic Ocean. *Marine and Freshwater Research,* 58:570-580.

Anton, H. 2000. *Elementary Linear Algebra 8th Edition*. United States of America: John Wiley & Sons, Inc.

Anton, H. & Rosses, C. 2013. *Elementary Linear Algebra Applications Version 11th Edition*. United States of America: John Willey & Sons, Inc.

Beddington, J. R. & Taylor, D. B. 1973. Optimum Age Specific Harvesting of A Population. *International Biometric Society,* 29(4):801-809.

Corazon, C. M., Muda, Y., & Hasanah, N. 2016. Aplikasi Matriks Leslie untuk Memprediksi Jumlah dan Laju Pertumbuhan Perempuan di Provinsi Riau pada Tahun 2017. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika,* 2(1):1-11.

Darko, S. 2012. *Optimal Harvesting Policy for An Age-Structured Tilapia Population*. Tesis. Ghana: Faculty of Physical Science Kwame Nkrumah University of Science and Technology.

Kurniawan, S. B. 2012. *Matriks Leslie serta Aplikasinya dalam Pemanenan Ternak Babi di Peternakan Topo Surakarta*. Skripsi. Semarang: FMIPA Universitas Negeri Semarang.

Leon, S. J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya Edisi Kelima*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Marzuki, C. C. & Malko, O. 2015. Karakterisasi Matriks Leslie Ordo Empat. *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri,* 13(1):108-114.

Pratama, Y., Prihandono, B., & Kusumastuti, N. 2013. Aplikasi Matriks Leslie untuk Memprediksi Jumlah dan Laju Pertumbuhan Suatu Populasi. *Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster),* 2(3):163 – 172.

Rodin, E.Y. 1988. A Matrix Model of Population Growth. *Journal of Math. Comput. Modelling*, 10(4):299-306.

Rorres, C. & Fair, W. 1975. Optimal Harvesting Policy for an Age-Specific Population. *Journal of Mathematical Biosciences,* 24:31-47.

Santadino, M., Coviella, C., & Momo, F. 2014. Glyphosate Sublethal Effects on the Population Dynamics of the Earthworm *Eisenia fetida*. *Journal of Water Air Soil Pollut*, 225:2207.

Yuliani, S., Veronica, R. B., & Mashuri. 2012. Penerapan Diagonalisasi Matriks dan Matriks Leslie dalam Memproyeksikan Jumlah Populasi Perempuan. *UNNES Journal of Mathematics*, 1(1):52-59.