ANALISIS DAN SIMULASI MODEL MATEMATIKA PENYAKIT ZIKA DENGAN SATU SEROTIPE VIRUS ZIKA

Skripsi

disusun sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

Ais Maysaroh

4111413009

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2018

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan.

Semarang, Juni 2018

Ais Maysaroh
NIM 4111413009

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Analisis dan Simulasi Model Matematika Penyakit Zika dengan Satu Serotipe Virus Zika

Disusun oleh

Ais Maysaroh

NIM 4111413009

Telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES pada hari Senin tanggal 04 Juni 2018.

Ketua

Prof. Dr. Zaenuri, S. E., M. Si., Akt.
NIP 196412231988031001

Sekretaris

Drs. Arief Agoestanto, M. Si.
NIP 196807221993031005

Ketua Penguji

Muhammad Kharis S.Si., M.Sc.
NIP 198210122005011001

Anggota Penguji/Pembimbing I

Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si.
NIP 196809071993031002

Anggota Penguji/Pembimbing II

Drs. Wuryanto, M.Si.
NIP 195302051983031003

iii

MOTTO

Barangsiapa menginginkan dunia maka hendaklah berilmu. Barangsiapa yang menginginkan (selamat dan bahagia) di akhirat maka dengan ilmu. Dan Barangsiapa menginginkan keduanya maka dengan ilmu.
(HR. Bukhori dan Muslim)

Allah tidak menutup atas hambaNya satu pintu dengan hikmah kecuali Allah akan membukakan baginya dua pintu dengan rahmatNya.
(Ibnu Qayyim Al-Jauziyyah)

PERSEMBAHAN

- Teruntuk kedua orang tuaku tercinta Ibu Tarsiyah dan Bapak Ahmad Sukar yang senantiasa meridhoi dan mendoakan anak-anaknya.
- Teruntuk adek tersayang Amif Nur Jannah dan Azka Ainur Ridho.
- Teruntuk sahabatku Eka Fatmawati, Faradisa, Dwi Liana, dan Iin Lutfiyati.
- Teruntuk teman-teman Bali Kos.
- Teruntuk teman-teman Matematika angkatan 2013.
- Teruntuk Universitas Negeri Semarang.

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmanirrohim

Assalamualaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan nikmat dan karunia-Nya serta kemudahan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Analisis dan Simulasi Model Matematika Penyakit Zika dengan Satu Serotipe Virus Zika".

Penyusunan skipsi ini dapat diselesaikan berkat kerjasama, bantuan, dan dorongan dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum., Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si., Akt., Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si., Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, nasehat, saran, dan dorongan selama penyusunan skripsi ini.
4. Drs. Mashuri, M.Si., Ketua Prodi Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
5. Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, nasehat, saran, dan dorongan selama penyusunan skripsi ini.

6. Drs. Wuryanto, M.Si., selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, nasehat, saran, dan dorongan selama penyusunan skripsi ini.
7. Muhammad Kharis S.Si., M.Sc., selaku Dosen Penguji yang telah memberikan penilaian dan saran dalam perbaikan skripsi ini serta telah memberikan bimbingan dan arahan.
8. Staf Dosen Matematika dan Staf Tata Usaha Universitas Negeri Semarang yang telah membekali dengan berbagai ilmu selama mengikuti perkuliahan sampai akhir penulisan skripsi ini.
9. Kedua Orang tua, Ibu Tarsiyah dan Bapak Ahmad Sukar yang senantiasa memberikan dukungan dan doa yang tiada putusnya.
10. Teman-Teman Matematika angkatan 2013 yang berjuang bersama untuk mewujudkan cita-cita.
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah memberikan bantuan.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Semarang, Juni 2018

Penulis

ABSTRAK

Maysaroh, Ais. 2018. *Analisis dan Simulasi Model Matematika Penyakit Zika dengan Satu Serotipe Virus Zika*. Skripsi. Jurusan Matematika FMIPA UNNES. Pembimbing Utama Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si. dan Pembimbing Pendamping Drs. Wuryanto, M.Si.

Kata Kunci: Model Epidemi SEIR, Virus Zika, Titik Kesetimbangan, Kestabilan.

Penyakit Zika mulai mendapat sorotan dunia ketika pada tahun 2016 sekitar 1-1,5 juta orang terjangkit virus Zika di Brazil dan 4000 bayi dilahirkan *Microcephaly* (WHO,2016). Indonesia merupakan wilayah yang berpotensi terserang wabah virus Zika. Penelitian ini membahas model matematika untuk penyebaran penyakit Zika dengan satu serotipe virus Zika. Model yang digunakan berupa model SEIR. Tujuan penelitian ini adalah membangun model matematika, menganalisis titik kestabilan, dan menginterpretasikan simulasi model matematika dengan *Maple 18*. Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah (1) penentuan masalah, (2) perumusan masalah, (3) studi pustaka, (4) analisis dan pemecahan masalah, dan (5) penarikan kesimpulan. Sebagai hasil penelitian, model yang dibangun sebagai berikut.

$$\frac{dS_h}{dt} = BN_h - \frac{\varepsilon\beta_h S_h I_v}{N_h+m} - \mu_h S_h$$
$$\frac{dE_h}{dt} = \frac{\varepsilon\beta_h S_h I_v}{N_h+m} - (\alpha_h + \mu_h)E_h$$
$$\frac{dI_h}{dt} = \alpha_h E_h - (\gamma_h + \mu_h)I_h$$
$$\frac{dR_h}{dt} = \gamma_h I_h - \mu_h R_h$$
$$\frac{dS_v}{dt} = A - \frac{\varepsilon\beta_v S_v I_h}{N_h+m} - \mu_v S_v$$
$$\frac{dE_v}{dt} = \frac{\varepsilon\beta_v S_v I_v}{N_h+m} - (\alpha_v + \mu_v)E_v$$
$$\frac{dI_v}{dt} = \alpha_v E_v - \mu_v I_v$$

dari analisa model matematika diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Analisis yang dilakukan menghasilkan bilangan rasio reproduksi dasar $R_0 = \frac{\alpha_h ur}{\mu_v^2 pyz^2}$. Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik apabila $R_0 < 1$. Sedangkan titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik apabila $R_0 > 1$. Model matematika disimulasikan menggunakan program *Maple 18* menghasilkan beberapa fakta, yaitu semakin kecil peluang penyebaran virus Zika oleh nyamuk ke manusia di suatu daerah maka semakin kecil individu manusia yang terinfeksi virus Zika dan sebaliknya. Kemudian dengan adanya intervensi diperoleh semakin besar nilai intervensi fumigasi yang diberikan pada nyamuk maka semakin berkurang jumlah individu manusia yang terinfeksi virus Zika.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN ii

PENGESAHAN iii

MOTTO DAN PERSEMBAHAN iv

KATA PENGANTAR v

ABSTRAK vii

DAFTAR ISI viii

DAFTAR TABEL xi

DAFTAR GAMBAR xii

DAFTAR LAMPIRAN xiii

BAB 1 PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Rumusan Masalah 5

1.3 Batasan Masalah 5

1.4 Tujuan Penelitian 6

1.5 Manfaat Penelitian 6

1.6 Sistematika Penulisan 7

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Gambaran Virus Zika 9

2.2 Penularan Virus Zika 10

2.3 Pemodelan Matematika 10

2.4 Persamaan Diferensial 12
2.5 Sistem Persamaan Diferensial 13
2.6 Titik Kesetimbangan (Ekuilibrium) 15
2.7 Linearisasi 16
2.8 Kestabilan Titik Kesetimbangan (Ekuilibrium) 20
2.9 Bilangan Reproduksi Dasar 27
2.10 Kriteria Routh-Hurwitz 27
2.11 *Maple* 28
2.12 Kerangka Berfikir 29
2.13 Penelitian Terdahulu 31
BAB 3 METODE PENELITIAN
3.1 Menemukan Masalah 34
3.2 Merumuskan Masalah 34
3.3 Studi Pustaka 35
3.4 Analisis dan Pemecahan Masalah 35
3.5 Penarikan Kesimpulan 36
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN
4.1 Hasil Penelitian 37
4.1.1 Pembentukan Model Matematika Penyakit Zika 37
4.1.2 Analisa Model Matematika 44
4.1.3 Analisis Kestabilan 50
4.1.4 Simulasi Numerik 57
4.2 Pembahasan 70

BAB 5 SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan 78

5.2 Saran 80

DAFTAR PUSTAKA 81

LAMPIRAN 84

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Variabel-variabel yang berkaitan dengan model matematika dalam satu periode infeksi 39

Tabel 4.2 Parameter-parameter yang berkaitan dengan model matematika dalam satu periode infeksi 39

Tabel 4.3 Nilai Parameter-parameter yang terkait dengan model matematika dalam satu periode infeksi 58

Tabel 4.4 Nilai Awal Variabel yang terkait dengan model matematika dalam satu periode infeksi 58

Tabel 4.5 Variasi nilai β_h kasus bebas penyakit $(R_0 < 1)$ 60

Tabel 4.6 Variasi nilai β_h kasus endemik $(R_0 > 1)$ 64

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Proses Pemodelan Matematika..... 11

Gambar 2.2 Simulasi Kestabilan Titik Kesetimbangan..... 21

Gambar 2.3 Model Matematika Penyebaran Zika 30

Gambar 4.1 Skema Model SEIR-SEI Penyakit Zika 40

Gambar 4.2 Bidang medan vektor dengan $\beta_h = 0.00082$ 61

Gambar 4.3 Dinamika Banyak Populasi $(a)s_h, (b)e_h, (c)i_h, (d)s_v$ dan $(e)i_v$ terhadap Waktu t dengan $\beta_h = 0.00082; 0.045; 0.09; 0.12$ 63

Gambar 4.4 Banyak Populasi $s_h, e_h, i_h, s_v,$ dan i_v terhadap Waktu t $\beta_h = 0.00082; 0.045; 0.09; 0.12$ 64

Gambar 4.5 Bidang medan vektor dengan $\beta_h = 0.30$ 65

Gambar 4.6 Dinamika Banyak Populasi $(a)s_h, (b)e_h, (c)i_h, (d)s_v$ dan $(e)i_v$ terhadap Waktu t dengan $\beta_h = 0.14; 0.22; 0.24; 0.30$ 66

Gambar 4.7 Banyak Populasi $s_h, e_h, i_h, s_v,$ dan i_v terhadap Waktu t dengan $\beta_h = 0.14; 0.22; 0.24; 0.30$ 68

Gambar 4.8 Grafik Populasi dengan Intervensi Fumigasi 70

Gambar 4.9 Grafik Intervensi Fumigasi $s_h, e_h, i_h, s_v,$ dan i_v dengan $\beta_h = 0.30$..... 70

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Pembuktian Analisis Bebas Penyakit 85
Lampiran 1 Pembuktian Analisis Bebas Penyakit 88
Lampiran 3 *Print Out Maple* Model Penyakit Zika dengan Satu Serotipe Virus Zika Kasus Bebas Penyakit 97
Lampiran 4 *Print Out Maple* Model Matematika Model Penyakit Zika dengan Satu Serotipe Virus Zika Kasus Endemik..... 105
Lampiran 5 *Print Out Maple* Model Matematika Model Penyakit Zika dengan Satu Serotipe Virus Zika Kasus Endemik dengan Intervensi Fumigasi..... 119
Lampiran 6 *Print Out Maple* Bidang Medan Vektor Kasus Bebas Penyakit $\beta_h = 0.00082$ 126
Lampiran 7 *Print Out Maple* Bidang Medan Vektor Kasus Endemik dengan $\beta_h = 0.30$ 128

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyakit Zika merupakan salah satu penyakit menular yang disebabkan oleh virus Zika. Virus Zika berasal dari jenis *flavivirus* yang mempunyai kesamaan dengan virus Dengue. Virus Zika ditularkan melalui gigitan nyamuk *Aedes Sp.* Manusia yang terinfeksi virus Zika akan merasakan gejala seperti demam, kulit berbintik, sakit kepala, nyeri sendi, nyeri otot, dan peradangan konjungtiva. Gejala penyakit ini menyebabkan kesakitan yang berlangsung selama 2 sampai dengan 7 hari (WHO, 2016). Virus Zika menjadi perhatian dunia setelah otoritas kesehatan Brasil menemukan adanya hubungan antara penularan dari ibu hamil yang terinfeksi virus Zika selama kehamilan dengan kelahiran bayi *microcephaly*. *Microcephaly* merupakan kondisi di mana bayi mempunyai kepala kecil dan perkembangan otak yang tidak lengkap (ECDC, 2016). Selain itu, virus Zika terindikasi dapat menyebabkan sindrom *Guillain-Barre* yang merupakan peradangan akut hingga menimbulkan kerusakan sel saraf.

Menurut Dick *et.al* (1952) penyebaran virus Zika pertama kali di identifikasi di Uganda. Pada tahun 2007, epidemi virus Zika dilaporkan menyebar di Yap, Mikronesia (Duffy *et.al*, 2008). Kemudian bulan Oktober 2013, wabah virus Zika menyebar di Polinesia, Perancis (Lormeau *et.al* ,2014). Awal tahun 2015, virus Zika dilaporkan terdeteksi berada di wilayah Brasil (Zanluca *et.al*, 2015).

Virus Zika juga sudah menyebar di Singapura pada tahun 2016. Di Indonesia, Lembaga Biologi Molekuler Eijkman telah melaporkan adanya virus Zika kepada Kementerian Kesehatan. Lembaga Eijkman mencatat ada lima kasus virus Zika di Indonesia, yaitu: (1) pada tahun 1981 dilaporkan terdapat satu pasien di Rumah Sakit Tegalyoso, Klaten, Jawa Tengah; (2) pada tahun 1983 dilaporkan terdapat enam dari 71 sampel di Lombok, NTB; (3) pada tahun 2013 dilaporkan seorang turis perempuan dari Australia positif terinfeksi virus Zika setelah sembilan hari tinggal di Jakarta; (4) pada tahun 2015 dilaporkan seorang turis dari Australia terinfeksi virus Zika setelah digigit monyet di Bali; dan (5) pada tahun 2015-2016 seorang pasien di Provinsi Jambi positif terinfeksi virus Zika. Penyebaran virus Zika di Indonesia masih tergolong rendah, akan tetapi potensi penyebaran penyakit Zika perlu di waspadai dan juga perlu adanya antisipasi. Saat ini vaksin untuk menyembuhkan virus Zika belum ditemukan. Pengobatan yang dapat dilakukan masih bersifat suportif seperti istirahat yang cukup, mengkonsumsi cukup air untuk mencegah dehidrasi, dan meminum obat pereda demam atau nyeri (WHO, 2016).

Virus Zika menjadi permasalahan dunia yang sedang banyak diteliti dan dikaji dari berbagai bidang keilmuan. Dalam konteks ini, beberapa penelitian dilakukan untuk memahami dinamika penyebaran penyakit Zika dan mengusulkan model matematikanya. Funk *et.al* (2016), meneliti tentang perbandingan antara penyakit Dengue dan Zika. Model yang digunakan $S_H E_H I_H R_H$ (*Susceptible-Exposed-Infectious-Removed)* pada populasi manusia *(human)* dan $S_V E_V I_V$

(*Susceptible-Exposed-Infectious)* pada populasi nyamuk *(vector).* Struktur model matematika yang digunakan sebagai berikut.

$$\frac{dS_H}{dt} = -\lambda_H S_H,$$

$$\frac{dE_H}{dt} = \lambda_H S_H - \delta_H E_H,$$

$$\frac{dI_H}{dt} = p\delta_H E_H - \gamma_H I_H,$$

$$\frac{dR_H}{dt} = \gamma_H I_H,$$

$$\frac{dS_M}{dt} = v_M - \lambda_M S_M - \mu_M S_M,$$

$$\frac{dE_M}{dt} = \lambda_M S_M - (\delta_M + \mu_M)E_M,$$

$$\frac{dI_M}{dt} = \delta_M E_M - \mu_M I_M,$$

hasil dari penelitian menunjukkan terdapat 108 kasus yang mungkin dan terkonfirmasi terinfeksi virus Zika pada populasi sebanyak 7391 di wilayah Pulau Yap Main dan Fais.

Pada Februari tahun 2016, Kucharski *et.al* (2016) mempublikasikan penelitian tentang dinamika penyebaran dan analisis pemodelan virus Zika di Polinesia, Perancis tahun 2013-2014. Dalam penelitian ini data demografi penyebaran virus Zika diambil dari wabah virus Zika yang terjadi di Polinesia Perancis. Model matematika yang digunakaan adalah $S^H E^H I^H R^H$ (*Susceptible-Exposed-Infectious-Removed)* pada populasi manusia dan populasi nyamuk $S^V E^V I^V$ (*Susceptible-Exposed-Infectious)* dengan asumsi model penyebaran virus Zika terhadap populasi manusia sama. Struktur model matematika yang digunakan sebagai berikut.

$$\frac{dS^H}{dt} = -\beta_H S_t^H I_t^H,$$

$$\frac{dE^H}{dt} = \beta_H S_t^H I_t^V - \alpha E_t^H,$$

$$\frac{dI^H}{dt} = \alpha_H E_t^H - \gamma I_t^H,$$

$$\frac{dR^H}{dt} = \gamma I_t^H,$$

$$\frac{dC}{dt} = \alpha_H E_t^H,$$

$$\frac{dS^V}{dt} = -\frac{\beta_V I_t^H}{N} - \delta S_t^V,$$

$$\frac{dE^V}{dt} = \frac{\beta_V I_t^H}{N} - (\delta + \alpha_V) E_t^V,$$

$$\frac{dI^V}{dt} = \alpha_V E_t^V - \delta I_t^V,$$

hasil penelitian Adam *et.al* (2016) menunjukkan penggunaan model demografi penyebaran virus Zika dapat memperkirakan potensi penyebaran virus Zika di Polinesia untuk masa yang akan datang. Diperkirakan dalam 15-20 tahun mendatang wabah virus Zika sangat rentan terjadi di Polinesia.

Penelitian juga dilakukan oleh Khalid *et.al* (2016) yang dalam jurnalnya menjelaskan kestabilan model matematika virus Zika dengan metode deterministik. Simulasi model matematika menggunakan data dari tiga wilayah, yaitu Brazil, Cape Verde, dan Kolumbia. Model matematika pada populasi manusia $S^H E^H I^H R^H$ (*Susceptible-Exposed-Infectious-Removed)* dan untuk populasi nyamuk menggunakan model $S^V I^V$ ((*Susceptible-Infectious)*. Populasi manusia dan nyamuk diasumsikan dalam keadaan stabil dan laju kematian sama.

Berdasarkan beberapa penelitian yang sudah dilakukan, penulis dalam penelitian kali ini akan mengkaji mengenai analisis dan simulasi model

matematika penyakit Zika dengan satu serotipe yaitu virus Zika. Model matematika yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah model dinamik $S_h E_h I_h R_h - S_v E_v I_v$ (*Susceptible-Exposed-Infectious-Recovered)* dengan populasi manusia dan nyamuk konstan. Dari model yang terbentuk akan dianalisis perilaku solusi di sekitar titik ekuilibrium agar dapat dianalisa kestabilan titik ekuilibriumnya. Selanjutnya dilakukan simulasi untuk mengetahui dinamika penyebaran virus Zika.

1.2 Batasan Masalah

Penelitian ini membahas mengenai analisis model dan simulasi penyebaran penyakit Zika dengan satu serotipe yaitu virus Zika. Penelitian ini dibatasi oleh beberapa hal sebagai berikut:

1. Terdapat 4 kompartemen yaitu sel rentan, sel terjangkit, sel terinfeksi dan satu serotipe virus Zika.
2. Mencari titik kesetimbangan model matematika SEIR.
3. Simulasi modelnya dari data acak berupa parameter menggunakan data dari jurnal.

1.3 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini dapat diuraikan sebagai berikut.

1. Bagaimana model matematika penyebaran penyakit Zika dengan satu serotipe virus Zika?
2. Bagaimana hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan model matematika penyebaran penyakit Zika dengan satu serotipe virus Zika?

3. Bagaimana simulasi dari solusi-solusi model matematika di sekitar titik kesetimbangan penyakit Zika dengan satu serotipe virus Zika?

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini diuraikan sebagai berikut.

1. Mengkaji proses pemodelan matematika berkaitan dengan penyebaran virus Zika.
2. Menganalisis kestabilan model matematika mengenai peyebaran penyakit Zika dengan satu serotipe virus Zika.
3. Mengetahui dinamika penyebaran virus Zika yang dipresentasikan dalam simulasi numerik.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan penulis dalam penelitian memodelkan penyebaran penyakit Zika antara lain.

1. Bagi Para Peneliti
    a. Diharapkan dapat menambah kekayaan ilmu matematika khususnya pemodelan epidemi penyakit.
    b. Diharapkan dapat menjadi referensi baru dalam pengembangan ilmu matematika di bidang pemodelan epidemik.
2. Bagi Instansi Kesehatan

    Memberikan informasi tentang hasil penelitian virus Zika yang memungkinkan penyebarannya terjadi di Indonesia sehingga dapat digunakan dalam pengambilan kebijakan di masa mendatang untuk mengantisipasi penyebaran penyakit Zika.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini disusun dalam tiga bagian, yaitu bagian awal, bagian isi, dan bagian akhir.

1.6.1 Bagian Awal

Pada bagian ini terdiri dari halaman cover, halaman pernyataan keaslian, halaman pengesahan, halaman motto dan persembahan, kata pengantar, abstrak, daftar isi, daftar tabel, daftar gambar, dan daftar lampiran.

1.6.2 Bagian Isi

Pada bagian ini terdiri dari lima bab, yaitu :

BAB I : PENDAHULUAN

Pada bab ini terdiri dari latar belakang, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II: TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini terdiri dari gambaran umum virus Zika, pemodelan matematika, pendekatan model matematika, persamaan differensial, sistem persamaan differensial, titik kesetimbangan (ekuilibrium), linearisasi, Bilangan reproduksi dasar, kriteria Routh-Hurwitz, *Maple*, kerangka berfikir, dan penelitian terdahulu.

BAB III: METODE PENELITIAN

Pada bab ini terdiri dari menemukan masalah, perumusan masalah, studi pustaka, analisis dan pemecahan masalah, dan penarikan kesimpulan.

BAB IV : HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini terdiri dari model matematika penyebaran penyakit Zika, menemukan titik kesetimbangan dan bilangan reproduksi dasar (R_0), analisis kestabilan dari titik kesetimbangan, dan hasil simulasi model matematika penyebaran penyakit Zika dengan program *Maple 18*.

BAB V: PENUTUP

Pada bab ini terdiri dari simpulan dan saran.

1.6.3 Bagian Akhir

Pada bagian ini terdiri dari daftar pustaka dan lampiran-lampiran.

BAB 2

LANDASAN TEORI

2.1 Gambaran Umum Virus Zika

Virus Zika merupakan anggota keluarga *flaviviridae* yang ditularkan ke manusia oleh nyamuk. Orang yang terjangkit virus Zika akan merasakan gejala seperti sakit kepala, demam, nyeri punggung, dan ruam di wajah, leher, lengan atas, mungkin juga menyebar ke telapak tangan dan kaki. Virus Zika tidak menyebabkan kelainan berat seperti demam berdarah, *West Nile,* dan virus ensefalitis Jepang akan tetapi virus ini dapat menimbulkan resiko tehadap janin pada wanita hamil. Virus Zika telah dikaitkan dengan *Microcephaly*, sebuah kondisi di mana bayi memiliki kepala kecil dan perkembangan otak menjadi tidak lengkap. Selain itu, virus Zika juga terindikasi dapat menyebakan sindrom *Guillain-Barre* yang merupakan peradangan akut yang menyebabkan kerusakan sel saraf tanpa penyebab yang jelas. Penyakit ini disebabkan oleh antibodi yang menyerang sistem saraf tepi dan menyebabkan kerusakan sel saraf.

Virus Zika merupakan penyakit menular yang muncul dengan potensi menyebar ke daerah-daerah baru di mana ada nyamuk *Aedes aegypti* dan *Aedes albopictus*. Keberadaan virus Zika telah dilaporkan oleh CDC (C*entre for Disease Prevention and Control)* di daerah Afrika, Asia Tenggara, Kepulauan Pasifik, Amerika Latin, dan Karibia. Vaksin dari virus Zika ini belum ditemukan sehingga

pencegahan dapat dilakukan dengan pemberantasan sarang nyamuk agar menghilangkan sumber penyebaran virus.

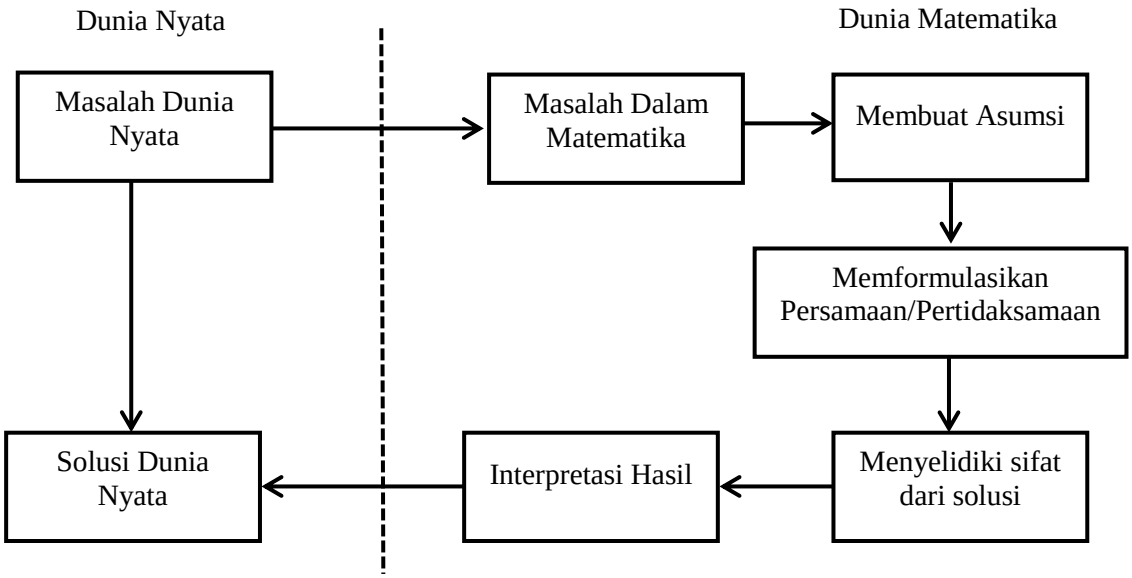
2.2 Penularan Virus Zika

Virus Zika dapat ditularkan ke manusia oleh gigitan nyamuk *Aedes Sp.* di antaranya *Aedes aegypti* dan *Aedes albopictus* yang terinfeksi. Nyamuk *Aedes aegypti* dan *Aedes albopictus* merupakan nyamuk yang juga mendukung penyebaran demam berdarah dan chikungunya. Nyamuk yang sudah terinfeksi akibat dari menghisap darah manusia yang terinfeksi virus Zika, kemudian mengirimkan virus kepada manusia yang lain dengan gigitan. Bahaya dari virus Zika ini dapat ditularkan dari seorang ibu hamil yang terinfeksi virus Zika terhadap bayi yang dikandungnya sehingga bayi yang terinfeksi virus Zika beresiko terkena *Microcephaly* (CDC, 2016). Virus Zika juga terindikasi dapat menyebabkan sindrom *Guillain-Barre* di mana terjadi peradangan akut hingga menimbulkan kerusakan sel saraf. Selain dapat ditularkan dari nyamuk, virus Zika juga dapat ditularkan melalui kontak seksual.

2.3 Pemodelan Matematika

Model matematika merupakan representasi secara matematika yang dihasilkan dari pemodelan matematika. Pemodelan merupakan suatu proses merepresentasikan dan menjelaskan pada dunia nyata ke dalam pernyataan matematis (Widowati & Sutimin, 2007 : 1).

Proses pemodelan matematika dapat dinyatakan dalam diagram alur sebagai berikut.



Gambar 2.1 Proses Pemodelan Matematika

Berdasarkan Gambar 2.1 dapat diperoleh langkah-langkah pemodelan matematika sebagai berikut.

a. Menyatakan permasalahan nyata ke dalam pengertian matematika. Pada langkah ini permasalahan yang ada di dunia nyata dimodelkan dalam bahasa matematis meliputi identifikasi variabel-variabel dalam membentuk hubungan antar variabel yang dihasilkan dari permasalahan tersebut.
b. Membuat asumsi-asumsi dalam pemodelan matematika mencerminkan bagaimana proses berpikir matematis sehingga model dapat berjalan.
c. Pemahaman hubungan antar variabel dan asumsi, langkah selanjutnya dengan memformulasikan persamaan atau sistem persamaan. Formulasi

model merupakan langkah penting, sehingga terkadang adanya pengujian kembali asumsi-asumsi agar formulasi model dapat sesuai dan realistik.

d. Setelah membentuk formulasi model, langkah selanjutnya adalah menyelidiki sifat dari solusi apakah sistem stabil atau tidak stabil.

e. Interpretasi hasil merupakan suatu langkah yang menghubungkan formula matematika dengan kembali ke permasalhan dunia nyata. Interpretasi dapat diwujudkan dalam bentuk grafik yang digambarkan berdasarkan solusi yang diperoleh dan selanjutnya dapat diinterpretasikan sebagai solusi dalam dunia nyata.

2.4 Persamaan diferensial

Definisi 1 (Ross,1984)

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari variabel-variabel tak bebas dan terhadap variabel-variabel bebas.

Berdasarkan banyaknya variabel bebas yang dilibatkan, persamaan diferensial terbagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Definisi 2 (Ross, 1984)

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Definisi 3 (Ross,1984)

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.

2.5 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial merupakan gabungan dari dua atau lebih persamaan diferensial. Diberikan vektor $x \in \mathbb{R}^n$ dengan $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)^T$ dan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Jika notasi $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ untuk menyatakan turunan x terhadap t, maka

$$\dot{x} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right)^T$$

sehingga

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\frac{dx_3}{dt} = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\vdots$$

$$\dot{x_n} = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (2.1)$$

Pada persamaan (2.1), jika secara eksplisit memuat variabel t maka Sistem (2.1) disebut sebagai sistem *non autonomous* dan sebaliknya jika tidak secara eksplisit memuat variabel t maka disebut sistem *autonomous*. Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$$

Sistem persamaan diferensial dibagi menjadi 2, yaitu:

2.5.1 Sistem Persamaan Diferensial Linear

Sistem persamaan diferensial linear orde satu dengan variabel tak bebas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan variabel bebas t dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + H_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + H_2(t)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n + H_3(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + H_n(t) \qquad (2.2)$$

jika $H_i(t)$ dengan $i = 1,2,3, \dots, n$ bernilai nol, maka Sistem (2.2) disebut sistem persamaan diferensial linear homogen, sedangkan jika ada $H_i(t)$ bernilai taknol, maka sistem disebut sistem persamaan diferensial nonhomogen.

Sistem persamaan (2.2) dapat dinyatakan dalam suatu bentuk persamaan sebagai berikut.

$$\dot{x} = Ax + H(t)$$

dengan A adalah matriks $n \times n$ yang merupakan suatu matriks koefisien dari variabel tak bebas $x \in \mathbb{R}^n$, dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1,2,3, \dots, n,\ j = 1,2,3, \dots, n$ dan $H(t)$ adalah matriks ukuran $n \times 1$ yang merupakan fungsi dari t. Berikut persamaan (2.2) yang dituliskan dalam bentuk matriks:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \\ \vdots \\ H_n(t) \end{bmatrix}$$

Diberikan contoh sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = 5x + y,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - 4y, \qquad (2.3)$$

Sistem persamaan (2.3) merupakan persamaan diferensial linear homogen.

2.5.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Definisi 4 (Ross, 1984)

Persamaan diferensial nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang tidak linear.

Persamaan diferensial dapat dikatakan sebagai persamaan diferensial nonlinear apabila memenuhi setidaknya satu dari kriteria berikut (Ross, 1984).

i. Memuat variabel tak bebas dan turunan-turunannya berpangkat selain satu.
ii. Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan atau turunan-turunannya.
iii. Terdapat fungsi transedental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

2.6 Titik Kesetimbangan (Ekuilibrium)

Titik kesetimbangan atau ekuilibrium merupakan solusi dari sistem $\dot{x} = f(x)$ yang tidak mengalami perubahan terhadap waktu. Definisi tentang titik ekuilibrium akan dijelaskan sebagai berikut,

Definisi 5 (Perko, 2001)

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah titik ekuilibrium dari $\dot{x} = f(x)$ jika $f(\bar{x}) = 0$.

Diberikan contoh carilah titik ekuilibrium sistem berikut ini.

$$\dot{x_1} = x_1 - x_1 x_2,$$

$$\dot{x_2} = x_2 - x_1^2, \tag{2.4}$$

Misalkan $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T$ adalah titik ekuilibrium dari Sistem (2.4) jadi

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_1 \bar{x}_2 = 0,$$

$$\bar{x}_2 - \bar{x}_1^2 = 0, \tag{2.5}$$

dari persamaan (2.5) diperoleh

$$\bar{x}_1(1 - \bar{x}_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}_1 = 0 \text{ atau } \bar{x}_2 = 1$$

Substitusikan $\bar{x}_1 = 0$ ke persamaan (2.5) sehingga didapatkan $\bar{x}_2 = 0$. Jika $\bar{x}_2 = 1$ disubstitusikan ke persamaan (2.5) maka diperoleh

$$1 - \bar{x}_1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}_1 = -1 \text{ atau } \bar{x}_1 = 1$$

Jadi sistem memiliki titik ekuilibrium yaitu $(0,0)^T$,$(-1,1)^T$ dan $(1,1)^T$.

2.7 Linearisasi

Linearisasi merupakan proses mentransformasi sistem persamaan diferensial nonlinear ke bentuk persamaan diferensial linear. Proses ini dilakukan dengan linearisasi di sekitar titik kesetimbangan. Namun, sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu matriks Jacobian yang dijelaskan dalam Teorema 1.

Teorema 1 (Perko,2001)

Jika $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *terdiferensial di* x_0 *maka turunan parsial* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i,j = 1,2,3,\dots,n$ *di* x_0 *ada untuk semua* $x\epsilon\mathbb{R}^n$ *dan*

$$Df(x_0)x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j \qquad (2.6)$$

Bukti:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0)x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0)x_2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)x_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0)x_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0)x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= Df(x_0)x$$

Matriks $Df(x_0)x$ disebut matriks Jacobian dari fungsi $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ yang terdiferensial di $x_0 \in \mathbb{R}^n, Df(x_0)$ dapat dinotasikan dengan $Jf(x_0)$. Selanjutnya akan ditunjukkan proses linearisasi dari sistem persamaan diferensial nonlinear ke dalam sistem persamaan diferensial linear. Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut.

$$\dot{x} = f(x) \qquad (2.7)$$

dengan $x \in E \subseteq \mathbb{R}^n, f:E \to \mathbb{R}^n$, f merupakan fungsi nonlinear dan kontinu. Misalkan $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ adalah titik ekuilibrium dari Sistem (2.7).

Deret Taylor dari fungsi f disekitar titik ekuilibrium $\bar{x}$ adalah sebagai berikut,

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) +$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots +$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f1}$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) +$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots +$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f2}$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) +$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots +$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{fn} \qquad (2.8)$$

$R_{f1}, R_{f2}, \dots, R_{fn}$ nilainya mendekati nol sehingga nilai $R_{f1}, R_{f2}, \dots, R_{fn}$ dapat diabaikan dan karena $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ titik ekuilibrium Sistem (2.7) maka $f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T = \cdots = f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T = 0$ sehingga diperoleh

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}((\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots +$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n),$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T (x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}((\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T (x_2 - \bar{x}_2) + \cdots +$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T (x_n - \bar{x}_n),$$

$$\vdots$$

$$\dot{x_n} = \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T (x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}((\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T (x_2 - \bar{x}_2) + \cdots +$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T (x_n - \bar{x}_n).$$

Sistem dapat ditulis ke dalam bentuk matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_n - \bar{x}_n \end{bmatrix}.$$

Misalkan $y_1 = x_1 - \bar{x}_1, y_2 = x_2 - \bar{x}_2, \dots, y_n = x_n - \bar{x}_n$ sehingga didapatkan:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Sehingga diperoleh matriks Jacobian dari Sistem (2.9) yaitu:

$$J\big(f(\bar{x})\big) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix}$$

2.8 Kestabilan Titik Ekuilibrium

Definisi 6 (Perko,2001)

Titik ekuilibrium $\bar{x}$ disebut titik ekuilibrium hiperbolik dari sistem (2.7) jika tidak ada nilai eigen dari matriks $Df(\bar{x})$ yang mempunyai bagian real nol.

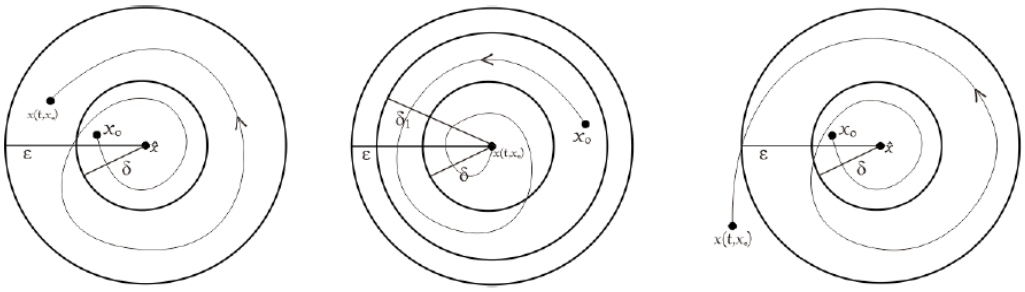
Kestabilan sistem nonlinear $\dot{x} = f(x)$ di sekitar titik ekuilibrium $\bar{x}$ dapat dilihat dari kestabilan linearisasi sistem (2.7) di sekitar titik ekulibrium $\bar{x}$, asalkan titik ekuilibrium $\bar{x}$ hiperbolik (Perko,2001).

Definisi 7 (Olsder, 2004)

Diberikan persamaan diferensial orde satu (2.7) dengan $x \in \mathbb{R}^n$, penyelesaian dengan keadaan awal $x(0) = x_0$ dinotasikan oleh $x(t, x_0)$.

a. *Vektor $\bar{x}$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ dikatakan sebagai titik ekuilibrium.*
b. *Titik ekuilirium $\bar{x}$ dikatakan stabil jika diberikan setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq 0$.*
c. *Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil asimtotik jika titik ekulibriumnya stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $lim_{t\to\infty}\|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$ bila $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$.*
d. *Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan tidak stabil jika tidak memenuhi (b).*

Berikut ini merupakan protet fase dari titik kesetimbangan yang ditunjukkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Simulasi Kestabilan Titik Kesetimbangan

Definisi 8 (Anton, 1998)

Jika A merupakan suatu matrik $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam R^n disebut vector eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yakni

$$Ax = \lambda x \qquad (2.10)$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Definisi 9

Misalkan A adalah sebuah matriks persegi berorde n dengan polinom karakteristik

$$\rho_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_1$$

Multiplisitas aljabar dari suatu nilai eigen λ^* adalah banyaknya kemunculan λ^* dalam himpunan penyelesaian $\rho_A(\lambda) = 0$.

Definisi 10

Misalkan A adalah matriks persegi dan λ^* adalah suatu nilai eigen dari A. Multiplisitas geometri dari λ^*, ditulis $m_g(\lambda^*)$ adalah dimensi dari ruang eigen E_{λ^*}. Dengan kata lain $m_g(\lambda^*) = E_{\lambda^*}$.

Teorema 2 (Olsder,2004)

a. *Diberikan semua bagian real nilai eigen matriks Jacobian $Jf(\bar{x})$ bernilai negatif, maka titik ekuilibrium $\bar{x}$ dari sistem (2.7) stabil asimtotik lokal.*
b. *Jika terdapat paling sedikitsatu nilai eigen matriks Jacobian $Jf(\bar{x})$ yang bagian realnya bernilai positif, maka titik ekuilibrium $\bar{x}$ dari sistem (2.7) tidak stabil.*

Teorema 3 (Olsder, 2004)

Diberikan sistem persamaan diferensial linear $\dot{x} = Ax$, dengan A adalah matriks berukuran $n \times n$, mempunyai k nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dan $k \leq n$.

a. *Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimtotik jika dan $\Re e(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1,2,3, \dots, k$.*
b. *Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil jika dan hanya jika $\Re e(\lambda_i) \leq 0$, untuk semua $i = 1,2,3, \dots, k$ dan untuk setiap nilai eigen λ_i pada sumbu imajiner dengan $\Re e(\lambda_i) = 0$ yang multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri untuk nilai eigen sama.*
c. *Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah tidak stabil jika dan hanya jika $\Re e(\lambda_i) > 0$ untuk beberapa $i = 1,2,3, \dots, k$ atau terdapat nilai eigen λ_i pada sumbu imajiner dengan $\Re e(\lambda_i) = 0$ yang multiplisitas aljabar lebih besar daripada multiplisitas geometri untuk nilai eigen.*

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil jika dan hanya jika $\Re e(\lambda_i) < 0$, untuk semua $i = 1,2,3, \dots, k$.

(⇒)

Jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil jika dan hanya jika $\Re e(\lambda_i) < 0$, untuk semua $i = 1,2,3, \dots, k$. Menurut definisi (7), titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$. Sehingga untuk $t \to \infty, x(t, x_0)$ menuju $\bar{x} = 0$. Solusi dari sistem persamaan $\dot{x} = Ax$ adalah $x(t, x_0)$, maka $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Artinya agar $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ menuju $\bar{x} = 0$ maka $\Re e(\lambda_i) < 0$, untuk semua $i = 1,2,3, \dots, k$.

(⇐)

Jika $\Re e(\lambda_i) < 0$, untuk semua $i = 1,2,3, \dots, k$ maka titik $\hat{x} = 0$ stabil asimtotik. Solusi $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Jika $\Re e(\lambda_i) < 0$ maka $t \to \infty$, $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ akan menuju $\bar{x} = 0$. Berdasarkan definisi (2.7) titik $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.

Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah tidak stabil jika dan hanya jika $\Re e(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1,2,3, \dots, k$ dan untuk setiap nilai eigen λ_i pada sumbu imajiner dengan $\Re e(\lambda_i) = 0$ yang multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri untuk nilai eigen harus sama.

(⇒)

Jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil maka $\Re e(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1,2,3, \dots, k$. Pembuktian menggunakan kontraposisi yaitu dibuktikan bahwa jika ada $\Re e(\lambda_i) > 0$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil.

$\Re e(\lambda_i) > 0$ maka solusi $x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ untuk $t \to \infty$ akan menuju ke ∞ artinya menjauhi titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$. Sehingga sistem tidak stabil. Jadi terbukti bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil maka $\Re e(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1,2,3, \dots, k$.

($\Leftarrow$)

Jika $\Re e(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1,2,3, \dots, k$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil dan jika ada $\Re e(\lambda_i) = 0$ maka multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri untuk nilai eigen harus sama.

$x(t, x_0)$ adalah solusi dari Persamaan maka $x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Jika $\Re e(\lambda_i) < 0$ maka $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ akan menuju $\bar{x} = 0$ yang artinya stabil asimtotik. Titik ekuilbrium yang stabil asimtotik pasti stabil. Jika $\Re e(\lambda_i) = 0$ maka nilai eigen berupa bilangan kompleks murni. Menurut Luenberger (1979:85), multiplisitas aljabar berhubungan dengan nilai eigen dan multiplisitas geometri berhubungan dengan vektor eigen. Oleh karena itu, akan dibuktikan bahwa banyak nilai eigen dan vektor eigen adalah sama.

Ambil sebarang sistem di $\mathbb{R}^2$ yang mempunyai nilai eigen bilangan kompleks murni. Diambil sistem sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ dengan } a > 0,\ b > 0. \qquad (2.10)$$

Akan dicari nilai eigen dari Sistem (2.10)

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & -a \\ b & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + ab = 0 \qquad (2.11)$$

akar-akar dari persamaan (2.11) adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4ab}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{abi}}{2} = \pm i\sqrt{ab}$$

sehingga $\lambda_1 = i\sqrt{ab}$ dan $\lambda_2 = -i\sqrt{ab}$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = i\sqrt{ab}$,

$$\begin{bmatrix} -i\sqrt{ab} & -a \\ b & -i\sqrt{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

maka

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{i\sqrt{ab}}{b} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

selanjutnya diperoleh

$$x_1 - \frac{i\sqrt{ab}}{b} x_2 = 0.$$

Misalkan $x_2 = t$ maka $x_1 = \frac{i\sqrt{ab}}{b} t$ sehingga

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{ab}}{b} \\ 1 \end{bmatrix} t$$

diambil $t = 1$ maka didapatkan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = i\sqrt{ab}$ adalah $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{ab}}{b} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -i\sqrt{ab}$,

$$\begin{bmatrix} i\sqrt{ab} & -a \\ b & i\sqrt{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

sehingga

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{i\sqrt{ab}}{b} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

selanjutnya diperoleh

$$x_1 + \frac{i\sqrt{ab}}{b} x_2 = 0.$$

Misalkan $x_2 = t$ maka $x_1 = -\frac{i\sqrt{ab}}{b}t$ sehingga

$$v_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{ab}}{b} \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Diambil $t = 1$ maka didapatkan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -i\sqrt{ab}$ adalah $v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{ab}}{b} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Jadi terbukti banyaknya nilai eigen sama dengan banyaknya vektor eigen, yaitu dua.

Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah tidak stabil jika dan hanya jika $\Re e(\lambda_i) = 0$ yang multiplisitas aljabar lebih besar daripada multiplisitas geometri untuk nilai eigen.

($\Rightarrow$)

Jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil maka $\Re e(\lambda_i) > 0$ untuk setiap $i = 1,2,3, \dots, k$. Titik ekuilibrium tidak stabil apabila $t \to \infty, x(t, x_0)$ menuju ∞. Hal tersebut terjadi jika $\Re e(\lambda_i) > 0$.

($\Leftarrow$)

Jika $\Re e(\lambda_i) > 0$ untuk setiap $i = 1,2,3, \dots, k$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil. Apabila $\Re e(\lambda_i) > 0, x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ akan selalu menuju ∞. Oleh karena itu, titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil.

Disimpulkan bahwa untuk melihat kestabilan Sistem digunakan linearisasi agar Sistem menjadi sistem linear $\dot{x} = Ax$ di mana $A = J(f(\bar{x}))$ adalah matriks Jacobian. Kestabilan yang dimaksud adalah kestabilan lokal. Titik ekuilibrium

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ dikatakan stabil asimtotik lokal jika semua nilai eigen matriks Jacobian mempunyai bilangan real negatif.

2.9 Bilangan Reproduksi Dasar

Definisi 11 (Diekmann & Heesterbeek,2000)

Bilangan reproduksi dasar (R_0) *merupakan jumlah rata-rata kasus individu terinfeksi yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi selama masa terinfeksinya dalam keseluruhan populasi rentan.*

Jika $\mathrm{R_o} < 1$ maka penyakit hanya menginfeksi kurang dari satu individu rentan sehingga kemungkinan penyakit akan hilang dari populasi. Jika $R_0 > 1$ maka individu yang terinfeksi akan menginfeksi lebih dari satu individu yang rentan, sehingga individu yang terinfeksi dalam suatu populasi akan menularkan penyakit tersebut dan penyakit akan menyebar dalam populasi dan jika $R_0 = 1$ maka individu yang terinfeksi akan menularkan tepat kepada satu individu.

2.10 Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria Routh-Hurwitz digunakan jika nilai eigen persamaan karakteristik tidak dapat ditentukan dengan mudah. Diberikan sistem persamaan karakteristik $P(z) = a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_{k-1}\lambda + a_n = 0$ maka didefinisikan matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ sebagai berikut:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

determinan Hurwitz tingkat ke-k, dinotasikan dengan $\Delta_k; k = 1,2, \dots, n$ yang dibentuk dari matriks Hurwitz H,didefinisikan sebagai berikut.

$$\Delta_1 = |a_1|$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots$$

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Pembuat nol dari Polinomial $P(z)$ mempunyai bagian real negatif jika dam hanya jika pertidaksamaan $\frac{a_1}{a_0} > 0, \frac{a_2}{a_0} > 0, \dots, \frac{a_n}{a_0} > 0$ dipenuhi dan $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, .., \Delta_n > 0$ (Gantmacher,1959).

2.11 Maple

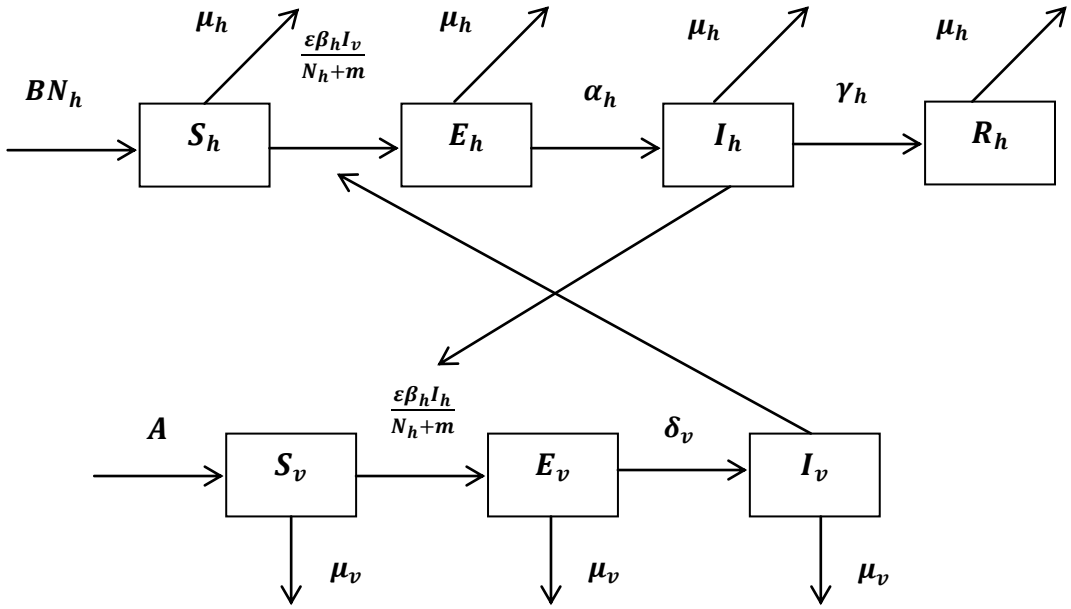
Maple merupakan software yang sering digunakan dalam simulasi pemodelan matematika. *Maple* dikembangkan oleh Waterloo *Inc*. Kelebihan yang dimiliki *maple* salah satunya adalah kemampuan menyederhanakan persamaan sehingga suatu solusi persamaan diferensial dapat dipahami dengan baik. Selain itu, maple juga memiliki kemampuan membuat animasi grafik dari suatu fenomena gerakan yang dimodelkan ke dalam persamaan diferensial yang memiliki nilai awal dan syarat baatas (Kartono, 2001).

2.12 Kerangka berfikir

Pada latar belakang masalah telah di uraikan bahwa potensi penyebaran virus Zika di Indonesia sangat memungkinkan terjadi karena daerah Indonesia merupakan daerah tropis yang dihuni oleh nyamuk *Aedes Aegypti*. Menurut data di Indonesia baru terdapat lima kasus yang diidentifikasi penyakit Zika. Pada penelitian ini, penulis akan meneliti pemodelan matematika dinamika penyebaran penyakit Zika dengan satu serotipe virus Zika, di mana yang dimaksud dengan satu serotipe virus Zika adalah dengan tidak adanya potensi penyebaran melalui virus Dengue yang terdiri dari empat serotipe yaitu DENV1, DENV2, DENV3, dan DENV4.

Dalam penelitian ini, kontruksi model yang digunakan adalah $S_h E_h I_h R_h - S_v E_v I_v$ dengan asumsi populasi manusia dan nyamuk konstan, populasi manusia dan nyamuk tertutup, laju kelahiran sama dengan laju kematian, dan rata-rata gigitan nyamuk per-hari konstan. Model pada populasi manusia SEIR dibagi menjadi kelas *Susceptible-Exposed-Infectious-Recovered*, di mana setelah penderita sembuh diasumsikan tidak kembali terjangkit virus Zika. Sedangkan model pada nyamuk SEI dibagi menjadi kelas *Susceptible-Exposed-Infectious*, diasumsikan nyamuk tidak akan pernah sembuh dari virus Zika. Berbeda dengan penelitian sebelumnya dalam kajian model matematika yang dilakukan peneliti adalah adanya laju rekruitmen pada model manusia, yaitu perkalian antara banyaknya subpopulasi manusia dan laju kelahiran manusia. Selain itu, juga memperhatikan laju rekruitmen pada populasi nyamuk, yaitu perkalian antara banyaknya subpopulasi nyamuk dan laju kelahiran nyamuk.

Berikut skema model penyebaran virus Zika dari rancangan peneliti:



Gambar 2.3 Model Matematika Penyebaran Zika

Variabel-variabel dan parameter-parameter yang digunakan sebagai berikut.

S_h: Jumlah subpopulasi yang rentan terjangkit virus Zika dalam populasi manusia.

E_h : Jumlah subpopulasi yang terjangkit virus Zika dalam populasi manusia.

I_h : Jumlah subpopulasi yang terinfeksi virus Zika dalam populasi manusia.

R_h : Jumlah subpopulasi yang telah sembuh dalam populasi manusia.

B : Laju kelahiran pada populasi manusia.

N_h : Jumlah populasi manusia.

μ_h : Laju kematian alami dalam suatu populasi manusia.

β_h : Peluang keberhasilan penyebaran virus Zika dari nyamuk ke manusia.

ε : Banyaknya gigitan yang disebabkan oleh satu ekor nyamuk.

α_h : Peluang seseorang pada populasi manusia untuk terinfeksi virus Zika.

γ_h : Peluang seseorang mengalami kesembuhan dari infeksi virus Zika.

S_v : Jumlah subpopulasi yang rentan terjangkit virus Zika dalam populasi nyamuk.

E_v : Jumlah subpopulasi yang terjangkit virus Zika dalam populasi nyamuk.

I_v : Jumlah subpopulasi yang terinfeksi virus Zika dalam populasi nyamuk.

A : Banyaknya kelahiran yang merupakan perkalian dari laju kelahiran nyamuk dengan jumlah penduduk.

μ_v : Laju kematian alami dalam suatu populasi nyamuk.

β_v : Peluang keberhasilan penyebaran virus Zika dari manusia ke nyamuk.

δ_v : Peluang terinfeksi virus Zika pada populasi nyamuk.

m : Jumlah hewan lain yang tergigit nyamuk.

dari model matematika dianalisis penyebaran penyakit Zika sehingga diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik. Selanjutnya dapat dianalisis kestabilan titik ekuilibriumnya dan dilakukan simulasi menggunakan *Maple*. Proses penelitian ini akan dilakukan dengan metode studi pustaka.

2.13 Penelitian Terdahulu

Terdapat beberapa penelitian terdahulu mengenai pemodelan matematika pada penyebaran penyakit Zika yang dapat dijadikan dasar dan acuan dalam penelitian ini, diantaranya:

1. Penelitian tentang penyebaran dinamik virus Zika pada populasi pulau di Polinesia, Perancis tahun 2013-2014. Menurut Kucharski *et.al* (2016) model yang digunakan untuk memprediksi penyebaran virus Zika di masa mendatang adalah model SEIR. Model fitting yang digunakan Rantai Markov Monte Carlo. Simulasi numerik yang dilakukan pada enam pulau yaitu Tahiti, Sous-le-event, Moorea, Tuamotu-Gambier, Marquises, dan Australes

menunjukkan penyebaran virus Zika mengikuti pola demam berdarah. Tercatat banyaknya manusia terinfeksi virus Zika masing-masing daerah adalah Tahiti (87%), Sous-le-event (89%), Moorea (95%), Tuamotu-Gambier (82%), Marquises (76%), dan Australes (82%). Hasil penelitian menunjukkan kemungkinan membutuhkan waktu 15 sampai 20 tahun untuk menggantikan populasi manusia yang rentan terhadap virus Zika dengan adanya wabah lain.

2. Penelitian yang dilakukan oleh Funk *et.al* (2016) perbandingan analisis virus Zika dan virus Dengue untuk mengungkapkan pebedaan dengan pengaturan dan virus. Model yang digunakan adalah SEIR dengan varian Ross-McDonald. Data yang digunakan adalah data penyebaran virus Zika di Pulau Yap Main dan Fais dari pertengahan bulan April 2007 sampai dengan akhir Juli 2007. Hasil penelitian menunjukkan terdapat 108 kasus yang mungkin dan terkonfirmasi terinfeksi virus Zika pada populasi sebanyak 7391.
3. Penelitian yang dilakukan oleh Dantas *et.al* (2017) yaitu kalibrasi model epidemik SEIR untuk menjelaskan wabah virus Zika di Brasil. Model yang digunakan adalah model SEIR dengan menggunakan varian Ross-McDonald untuk memprediksi epidemi virus Zika. Hasil penelitian menunjukkan jumlah populasi yang terinfeksi virus Zika paling banyak di Brasil terjadi pada tahun 2016. Dalam model matematika ini dapat digunakan untuk memprediksikan populasi terinfeksi di wilayah Brasil.
4. Penelitian Khalid & Khan (2016) menjelaskan analisis kestabilan model matematika virus Zika dengan metode deterministik. Simulasi model

matematika menggunakan data dari tiga wilayah, yaitu Brazil, Cape Verde, dan Kolumbia. Diasumsikan untuk populasi manusia struktur model SEIR dan untuk populasi vektor menggunakan model SIR. Populasi manusia dan nyamuk diasumsikan dalam keadaan stabil dan laju kematian sama. Hasil penelitian menunjukkan model matematika dapat memperkirakan populasi terinfeksi virus Zika di masa yang akan datang pada tiga wilayah yaitu Colombia, Cape Verde, dan Brazil.

BAB 5

SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Dari hasil dan pembahasan diperoleh simpulan sebagai berikut.

1. Model matematika penyakit Zika dengan satu serotipe virus Zika pada populasi konstan sebagai berikut.

$$\frac{ds_h}{dt} = \mu_h - \frac{\varepsilon\beta_h A s_h i_v}{\mu_v(N_h + m)} - \mu_h s_h$$

$$\frac{de_h}{dt} = \frac{\varepsilon\beta_h A s_h i_v}{\mu_v(N_h + m)} - (\alpha_h + \mu_h)e_h$$

$$\frac{di_h}{dt} = \alpha_h e_h - (\gamma_h + \mu_h)i_h$$

$$\frac{ds_v}{dt} = \mu_v - \frac{\varepsilon\beta_v N_h s_v i_h}{N_h + m} - \mu_v s_v$$

$$\frac{di_v}{dt} = \alpha_v(1 - i_v - s_v) - \mu_v i_v$$

dengan kondisi $r_h = 1 - (s_h + i_h + e_h)$ dan $e_v = 1 - (s_v + i_v)$.

2. Analisis kesetimbangannya dipunyai $R_0 = \frac{\alpha_h ur}{\mu_v^2 pyz^2}$. Dari sistem persamaan berdasarkan nilai R_0 tersebut diperoleh:
   a. Apabila $R_0 < 1$ maka sistem persamaan hanya mempunnyai 1 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas peyakit (P_0) dengan $P_o = (s_h^*, e_h^*, i_h^*, s_h^*, i_h^*) = (1,0,0,1,0)$.
   b. Apabila $R_0 > 1$ maka sistem persamaan mempunnyai 2 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas peyakit (P_0) dengan

$P_o = (s_h^*, e_h^*, i_h^*, s_h^*, i_h^*) = (1,0,0,1,0)$ dan titik kesetimbangan endemik (P_1) sebagai berikut.

$$s_h^* = \frac{\mu_h \mu_v z}{\frac{r\mu_h \mu_v^2 pyz^2(R_0-1)}{qw(zx\mu_h\mu_v + r)\left(\frac{\mu_h\mu_v^2 pyz^2(R_0-1)}{q(zx\mu_h\mu_v+r)} + \mu_v z\right)} + \mu_h\mu_v z}$$

$$e_h^* = \frac{r\mu_h^2\mu_v^2 pz^2(R_0-1)}{(q(zx\mu_h\mu_v + r)\left(\frac{r\mu_h\mu_v^2 pyz^2(R_0-1)}{q(zx\mu_h\mu_v+r)} + \mu_h\mu_v zw\left(\frac{\mu_h\mu_v^2 pyz^2(R_0-1)}{q(zx\mu_h\mu_v+r)} + \mu_v z\right)\right)}$$

$$i_h^* = \frac{\mu_h\mu_v^2 pyz^2}{uq(\mu_h\mu_v xz + r)}(R_0 - 1)$$

$$s_v^* = \frac{\mu_v z}{\frac{\mu_h\mu_v^2 pyz^2(R_0-1)}{q(zx\mu_h\mu_v+r)} + \mu_v z}$$

$$i_v^* = \frac{\alpha_v\mu_h\mu_v^2 pyz^2(R_0-1)}{qw(zx\mu_h\mu_v + r)\left(\frac{\mu_h\mu_v^2 pyz^2(R_0-1)}{q(zx\mu_h\mu_v+r)} + \mu_v z\right)}$$

dengan $p = (\mu_h + \gamma_h)(\mu_v + \alpha_v)$, $q = (\mu_h + \alpha_h)(\mu_h + \gamma)$, $r = A\alpha_v\beta_h\varepsilon$, $u = \varepsilon\beta_v N_h$, $w = (\mu_v + \alpha_v)$, $x = (\mu_v + \alpha_h)$, $y = (\mu_h + \alpha_h)$, dan $z = (N_h + m)$.

3. Simulasi model matematika penyakit Zika dengan satu serotipe virus Zika menggunakan *software Maple 18* menghasilkan beberapa fakta, yaitu semakin kecil nilai peluang penyebaran penyakit dari nyamuk ke manusia maka laju penderita penyakit Zika akan berkurang. Sebaliknya, semakin besar nilai peluang penyebaran penyakit dari nyamuk ke manusia maka laju penderita penyakit Zika akan bertambah, bahkan bisa menyebabkan wabah. Kemudian, semakin besar adanya intervensi fumigasi pada

nyamuk maka semakin sedikit individu manusia yang terinfeksi virus Zika.

5.2 SARAN

Dalam penulisan ini, penulis membahas pemodelan matematika penyakit Zika dengan satu serotipe virus Zika pada populasi manusia dan nyamuk konstan. Dalam penulisan ini belum diteliti model matematika pada populasi manusia dan nyamuk tidak konstan. Kemudian juga, belum adanya laju individu nyamuk yang gagal pada saat fumigasi dan kemungkinan individu manusia yang sembuh dapat terinfeksi virus Zika lagi. Oleh karena itu, penulis menyarankan kepada pembaca yang tertarik pada masalah ini untuk mengembangkan model yang sudah dibangun.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H.1998. *Aljabar Linear Elementer*. Terjemahan oleh Pantur Silaban. Jakarta: Erlangga.

Brauer, P. & J. WU. 2008. *Mathematical Epidemiology*. Berlin : Springer-Verlag Berlin Heidelbe.

Bonyah, Ebenezer, & Okosun, K. O. 2016. Mathematical Modeling of Zika Virus. *Asian Pasific Journal of Tropical Disease*, 6(9), 673-679.

Campbell, S. L., and Haberman, R. 2008. *Introduction to Differential Equations with Dynamical System*. New Jersey: Princeton University Press.

Cao-Lormeau, V. M., Roche, C., Teissier, A., Robin, E., Berry, Al., Mallet, H. P., Sall, A. A., Musso, D. 2014. Zika virus, French polynesia, South pacific, 2013. *Emerging Infectious Disease*, 20(6):1085-1086. doi: 10.3201/eid2006.140138.

Centers for Disease Control and Prevention (CDC), CDC issues interim travel guidance related to Zika virus for 14 countries and territories in central and south America and the Caribbean, January 15, 2016. http://www.cdc.gov/media/releases/2016/s0315-zika-virus-travel. Diakses tanggal 3 Januari 2017.

Dantas, E., Tosin, M., & Cunha, A. 2017. Calibration of a SEIR Epidemic Model to Describe Zika Virus Outbreak in Brazil. *Universidade do Estado do Rio De Janeiro (UERJ)*, 47.

Dick, G. W., Kitchen, S. F. & Hadow, A. J. Zika Virus. 1952.Isolationa and serological specificity. *Trans. R. Soc. Trop. Med. Hyg.* 46(5),509-520.

Diekmann, O dan Heesterbeek. 2000. *Mathematical Epidemilogy of Infectious Disease.* New York: John Wiley and Son.

Duffy, M. R. , Chen, T. H., Hancock, W. T., Powers, A. M., Kool, J. L., Lanciotti, R. S., et al. 2009. *Zika Virus Outbreak on Yap Island, Federated States of Micronesia. New England Journal of Medicine,* 360(24): 2536-2543.

Europan Centre for Disease Prevention and Control (ECDC), *Zika virus.* Online, April 2016.

Funk, S., Kucharski, A.J., Camacho, A., et al. *Comparative Analysis of Dengue and Zika Outbreaks Reveals Difference by Setting and Virus.* ArXiv: 2016.

Gantmacher, F.R.1959. *the Theory of Matrices*, New York: Chelsea Publishing Company.

Hayes, E. B. 2009. Zika Virus Outside Africa. *Emerging Infectious Diseases*,15:1347-1350.

Kartono. 2001. *Maple untuk Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: J&J Learning.

Khalid, M. dan Sami, F. 2016. Stability Analysis of Deterministic Mathematical Model for Zika Virus. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 19(4), 20. doi: 10.9734/BJMCS/2016/29834.

Kharis, M. & Arifudin, R. 2017. Mathematical Model of Seasonal Influenza Epidemic in Central Java with Treatment Action. *International Journal of Pure and Applied Mathematics,* 112(3), 571-588.

Kurcharski, A.J., Funk, S., Eggo, R.M.M., Mallet, H.P., John, E. J., Nilles, E.J. 2016. Transmission Dynamics of Zika Virus in Island Populations: A modeling Analysis of the 2013-14 French Polynesia Outbreak. *PLOS Neglected Tropical Disease 10(5)*. doi: 10.1101/038588.

Moreno, V., Espinoza, B., Bichara, D., Holechek, S. A. Chavez, C. C. 2016. Role of Short-term Dispersal on the Dynamics of Zika Virus. *Cornell University Library*. ArXiv: 1603.00442v3.

Murray, J.D. *Mathematical Biology I an Introduction. Third edition*. Springer-Verlag: New York; 2002.

Olsder, G. J & Woude J. W. van der. 2004. *Mathematical System Theory*. Netherland:VVSD.

Perko, L. 2001. *Differensial Equations and Dynamical Systems.* 3rd.New York: Springer.

Purwanto, H., Noviani, E., dan Mara, M. N. 2014. Analisis dan Simulasi Model Matematika Penyakit Demam Berdarah dengan Satu Serotif Virus Dengue. *Buletin Ilmiah Mat.Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, 3,153-162.

Ross, L. 1984. *Differential Equation.* 3rd.New York: Springer.

Widowati & Sutimin. 2007.*Buku Ajar Pemodelan Matematika.* Semarang: Universitas Diponegoro

World Health Organisation. *Western Pasific Region.* Zika Virus;2016.

Zancula, C., Mello, V.C., Mosimann A. L., Santos G.I., Santos, C.N., Luz, K. 2015. First Report of Autochthonous Transmission of Zika Virus in Brazil. *Memorias do Instituto Oswaldo Cruz*. 110: 569-572.