



**PENERAPAN PEWARNAAN TITIK PADA GRAF UNTUK
MENYUSUN JADWAL PELAJARAN
(STUDI KASUS MI AL WATHONIYYAH 02 SEMARANG)**

Skripsi
disusun sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika

oleh
Rifan Rahadian Gani
4111411047

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
2018**

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi yang berjudul “Penerapan Pewarnaan Titik pada Graf untuk Menyusun Jadwal Pelajaran (Studi Kasus MI Al Wathoniyyah Semarang)” ini bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan.

Semarang, 27 September 2018



Rifan Rahadian Gani

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Penerapan Pewarnaan Titik pada Graf untuk Menyusun Jadwal Pelajaran
(Studi Kasus MI Al Wathoniyyah Semarang)

disusun oleh

Rifan Rahadian Gani

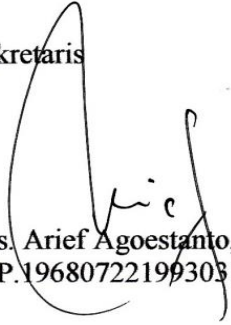
4111411047

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES
pada tanggal 27 September 2018.

Panitia:
Ketua

Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si., Akt.
NIP. 196412231988031001

Sekretaris


Drs. Arief Agoestanto, M.Si.
NIP. 196807221993031005

Ketua Penguji



Dr. Mulyono, M.Si.
NIP. 197009021997021001

Anggota Penguji/
Pembimbing I



Dr. Isnaini Rosyida, S.Si., M.Si.
NIP. 197302191998022001

Anggota Penguji/
Pembimbing II



Dr. Tri Sri Noor Asih, S.Si., M.Si.
NIP. 197706142008122002

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

Motto

- Ikatlah ilmu dengan menulis. (Ali bin Abi Thalib)
- Ilmu itu bukan yang diingat tetapi yang memberi manfaat. (Imam Syafi'i)
- Science without religion is lame, religion without science is blind.
(Albert Einstein)

Persembahan

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

- Ayah dan Ibu saya yang luar biasa atas doa, nasehat, dan dukungan yang telah diberikan.
- Kakak dan adik saya atas motivasi yang diberikan.
- Dosen pembimbing, dosen penguji, dan dosen-dosen jurusan Matematika UNNES yang telah memberikan ilmu yang bermanfaat.
- Teman-teman seperjuangan, mahasiswa Program Studi Matematika UNNES angkatan 2011 (M2M) yang menginspirasi saya.

PRAKATA

Puji syukur senantiasa penulis panjatkan kehadirat Allah Subhanahu Wa Ta'ala atas limpahan rahmat, hidayah, taufiq, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“Penerapan Pewarnaan Titik pada Graf untuk Menyusun Jadwal Pelajaran (Studi Kasus MI Al Wathoniyah 02 Semarang)”**.

Penulis menyadari dalam penyusunan skripsi ini penulis telah mendapat banyak bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum., Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si, Akt., Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si., Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.
4. Dr. Mulyono, M.Si., Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang
5. Drs. Mashuri, M.Si., Ketua Prodi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang
6. Dr. Isnaini Rosyida, S.Si, M.Si., Dosen pembimbing utama yang telah membimbing dan memberikan masukan dalam penulisan skripsi ini.
7. Dr. Tri Sri Noor Asih, S.Si., M.Si., Dosen pembimbing pendamping yang telah membimbing dan memberikan masukan dalam penulisan skripsi ini.

8. Ibu dan Bapak tercinta yang selalu memberikan doa, semangat, dan dukungan.
9. Kakak dan adik saya, yang selalu mendoakan serta memberikan motivasi dan semangat untuk selalu bekerja keras.
10. Seluruh Dosen Matematika yang telah membimbing dan memberikan ilmunya kepada penulis.
11. Kawan-kawan matematika angkatan 2011 yang memberikan dorongan untuk selalu semangat dalam bimbingan skripsi ini.
12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis menyadari, bahwa masih banyak keterbatasan pengetahuan dan kemampuan yang penulis miliki. Penulis mengharapkan kritik dan saran yang bisa membangun penelitian-penelitian yang lain. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Semarang, 27 September 2018

Penulis

ABSTRAK

Gani, Rifan Rahadian. 2018. Penerapan Pewarnaan Titik pada Graf untuk Menyusun Jadwal Pelajaran (Studi Kasus MI Al Wathoniyyah Semarang). Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang. Pembimbing 1 Dr. Isnaini Rosyida, S.Si, M.Si. dan Pembimbing 2 Dr. Tri Sri Noor Asih, S.Si., M.Si.

Kata kunci : Graf, Algoritma Welch Powell, Bilangan Kromatik.

Penyusunan jadwal pelajaran merupakan contoh sebuah penjadwalan yang harus dilakukan oleh setiap sekolah menjelang dimulainya tahun ajaran baru. Jadwal tersebut memetakan berbagai komponen penjadwalan ke dalam matriks ruang dan waktu. Hasil akhir dari penjadwalan tersebut adalah sebuah informasi kepada seluruh guru dan murid terkait pelaksanaan kegiatan belajar mengajar setiap mata pelajaran. MI Al Wathoniyyah Semarang merupakan salah satu sekolah yang harus melakukan penyusunan jadwal pelajaran disetiap tahun ajaran barunya. Dalam penyusunannya banyak hal terjadi jadwal bentrok satu sama lain.

Metode penelitian yang digunakan meliputi beberapa tahap, yaitu kajian pustaka, pengumpulan data, pengolahan dan analisis data, serta penarikan kesimpulan. Data yang digunakan yaitu data primer. Pengambilan data dilaksanakan di MI Al Wathoniyyah Semarang. Data yang diambil yaitu data guru dan data mata pelajaran agama. Data yang diperoleh kemudian dianalisis melalui beberapa langkah yaitu: (1) mentransformasikan data ke dalam bentuk graf; (2) mewarnai graf menggunakan algoritma Welch Powell; dan (3) menginterpretasikan bilangan kromatik.

Dari hasil analisis diperoleh bilangan kromatik 12, yang menunjukkan jumlah minimum periode waktu penjadwalan mata pelajaran agama dalam satu minggu yaitu 12 periode waktu. Satu periode waktu sama dengan 2 jam mata pelajaran (70 menit).

DAFTAR ISI

| | Halaman |
|---|---------|
| HALAMAN JUDUL | i |
| PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN | ii |
| HALAMAN PENGESAHAN | iii |
| MOTTO DAN PERSEMBAHAN | iv |
| PRAKATA | v |
| ABSTRAK..... | vii |
| DAFTAR ISI | viii |
| DAFTAR TABEL | x |
| DAFTAR GAMBAR | xi |
| BAB | |
| 1. PENDAHULUAN | 1 |
| 1.1 Latar Belakang Masalah | 1 |
| 1.2 Rumusan Masalah | 3 |
| 1.3 Batasan Masalah | 4 |
| 1.4 Tujuan Penelitian | 4 |
| 1.5 Manfaat Penelitian | 5 |
| 1.6 Sistematika Penulisan Skripsi | 5 |
| 2. TINJAUAN PUSTAKA | 8 |
| 2.1 Graf | 8 |
| 4.1.1 Definisi Graf | 8 |
| 4.1.2 Terminologi Graf | 10 |

| | |
|--|----|
| 4.1.3 Jenis-Jenis Graf | 14 |
| 4.1.4 Graf Planar | 17 |
| 2.2 Pewarnaan Graf | 18 |
| 2.3 Algoritma Welch Powell..... | 21 |
| 3. METODE PENELITIAN | 24 |
| 3.1 Kajian Pustaka | 25 |
| 3.2 Pengumpulan Data | 25 |
| 3.3 Pengolahan Data | 25 |
| 3.4 Penarikan Kesimpulan | 27 |
| 4. HASIL DAN PEMBAHASAN | 28 |
| 4.1 Hasil Penelitian | 28 |
| 4.1.1 Pewarnaan Manual | 33 |
| 4.1.2 Pewarnaan dengan Program Excel | 63 |
| 4.2 Pembahasan | 66 |
| 5. PENUTUP | 70 |
| 5.1 Simpulan | 70 |
| 5.2 Saran | 71 |
| DAFTAR PUSTAKA | 72 |

DAFTAR TABEL

| | |
|--|----|
| Tabel 2.1. Matriks | 22 |
| Tabel 2.2. Bilangan Kromatik | 23 |
| Tabel 4.1. Guru yang Mengajar | 28 |
| Tabel 4.2. Mata Pelajaran yang Diajarkan | 29 |
| Tabel 4.3. Batasan Guru, Kelas, dan Mata Pelajaran | 29 |
| Tabel 4.4. Matriks Adjacency | 31 |
| Tabel 4.5. Ranging Derajat Verteks | 33 |
| Tabel 4.6. Derajat Verteks Tidak Bertetangga V_{10} | 34 |
| Tabel 4.7. Derajat Verteks Tidak Bertetangga V_{11} | 43 |
| Tabel 4.8. Derajat Verteks Tidak Bertetangga V_{12} | 49 |
| Tabel 4.9. Derajat Verteks Tidak Bertetangga V_{16} | 54 |
| Tabel 4.10. Derajat Verteks Tidak Bertetangga V_{17} | 58 |
| Tabel 4.11. Derajat Verteks Tidak Bertetangga V_{18} | 60 |
| Tabel 4.12. Warna Titik | 62 |
| Tabel 4.13. Alternatif Jadwal Pertama | 68 |
| Tabel 4.14. Alternatif Jadwal Kedua | 68 |
| Tabel 4.15. Alternatif Jadwal Ketiga | 68 |
| Tabel 4.16. Alternatif Jadwal Keempat | 69 |

DAFTAR GAMBAR

| | |
|---|----|
| Gambar 2.1 (a) Graf <i>loop</i> | 9 |
| Gambar 2.1 (b) Graf Ganda | 10 |
| Gambar 2.2 Jalan (<i>walk</i>) | 10 |
| Gambar 2.3 Graf Bertetangga | 11 |
| Gambar 2.3 Graf Bersisian..... | 12 |
| Gambar 2.5 Graf Titik Terpencil | 12 |
| Gambar 2.6 Graf Kosong | 13 |
| Gambar 2.7 Graf G_1 | 13 |
| Gambar 2.8 Graf Sederhana..... | 14 |
| Gambar 2.9 Graf Ganda | 15 |
| Gambar 2.10 Graf Semu | 16 |
| Gambar 2.11 Graf Tak Berarah..... | 14 |
| Gambar 2.12 (a) Graf Berarah | 17 |
| Gambar 2.12 (b) Graf Ganda Berarah | 17 |
| Gambar 2.13 (a) Graf Planar | 18 |
| Gambar 2.13 (b) Graf Bidang | 18 |
| Gambar 2.13 (c) Graf Bidang | 18 |
| Gambar 2.14 Pewarnaan Titik 3 Warna..... | 19 |
| Gambar 2.15 Pewarnaan Sisi 3 Warna..... | 20 |
| Gambar 2.16 Pewarnaan Wilayah 4 Warna | 20 |
| Gambar 2.17 (a) Graf | 23 |

| | |
|--|----|
| Gambar 2.17 (b) Graf Telah Diwarnai | 23 |
| Gambar 3.1 Diagram Alur Kerja | 24 |
| Gambar 4.1 Representasi Graf | 32 |
| Gambar 4.2 Form Menu | 63 |
| Gambar 4.3 Tabel Kosong | 63 |
| Gambar 4.4 Tabel Matriks Adjacency | 64 |
| Gambar 4.5 Form Menu | 64 |
| Gambar 4.6 Kotak Informasi..... | 64 |
| Gambar 4.7 Konfirmasi Pertama..... | 65 |
| Gambar 4.8 Konfirmasi Kedua | 65 |
| Gambar 4.9 Hasil Akhir Program Excel | 65 |
| Gambar 4.10 Pewarnaan Graf | 66 |

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu ilmu yang membantu dalam mengatasi berbagai permasalahan dalam berbagai disiplin ilmu. Salah satu cabang matematika ini mempunyai banyak manfaat dalam mengatasi permasalahan sosial maupun permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Teori graf mulai dikenalkan oleh salah satu matematikawan yang bernama Leonhard Euler pada tahun 1736. Ide tersebut muncul pada saat menyelesaikan masalah jembatan Königsberg. Masalah tersebut kemudian dimodelkan Euler dalam bentuk graf dengan memisalkan daratan sebagai sebuah titik (node) dan jembatan yang menghubungkan antara sebarang dua daratan sebagai sebuah sisi (Caprara, et al., 2012:121).

Dewasa ini penerapan graf telah banyak digunakan oleh manusia untuk merepresentasikan permasalahan yang ada agar lebih mudah dipecahkan. Sebagai contoh, ilmuwan kimia menggunakan graf dalam memodelkan molekul senyawa karbon, ilmuwan teknik elektro menggunakan graf dalam perancangan *integrated circuit*, serta masalah kemacetan lalu lintas dapat diselesaikan dengan memodelkan jalan raya dalam graf (Munir, 2015:34).

Salah satu permasalahan yang banyak memanfaatkan teori graf adalah masalah penjadwalan. Beker (1974) mengemukakan penjadwalan merupakan

kegiatan untuk mengalokasikan sejumlah sumber daya yang tersedia untuk memastikan bahwa perencanaan dapat berjalan dengan baik dengan waktu dan tenaga yang digunakan secara efisien. Salah satu bidang yang memanfaatkan teori graf dalam penjadwalan adalah bidang pendidikan.

Penyusunan jadwal pelajaran merupakan contoh sebuah penjadwalan yang harus dilakukan oleh setiap sekolah menjelang dimulainya tahun ajaran baru. Jadwal tersebut memetakan berbagai komponen penjadwalan ke dalam matriks ruang dan waktu. Hasil akhir dari penjadwalan tersebut adalah sebuah informasi kepada seluruh guru dan murid terkait pelaksanaan kegiatan belajar mengajar setiap mata pelajaran. MI Al Wathoniyyah Semarang merupakan salah satu sekolah yang harus melakukan penyusunan jadwal pelajaran disetiap tahun ajaran barunya. Dalam penyusunannya banyak hal terjadi jadwal bentrok satu sama lain. Penjadwalan mata pelajaran di MI Semarang ini masih menggunakan Microsoft Excel secara manual sehingga memakan banyak waktu dan memungkinkan terjadinya *human error*.

Permasalahan penjadwalan dapat diatasi dengan suatu sistem yang dapat membantu dalam mengatasi dan mengoptimalkan dalam pembuatan jadwal pelajaran. Salah satu algoritma yang menangani masalah penjadwalan adalah algoritma Welch Powel. Menurut Aladag dan Hocaoglu (2007: 56) algoritma Welch Powell digunakan untuk mewarnai suatu graf, dengan banyak warna minimal dengan cara mengurutkan semua titik berdasarkan derajatnya, dari derajat besar ke derajat kecil, mengambil warna pertama (misalnya merah), warnai titik pertama yang sudah kita urutkan berdasarkan

derajatnya tadi. Kemudian warnai titik berikutnya yang tidak berdampingan dengan titik pertama tadi dengan warna yang masih sama (merah) kemudian lanjutkan dengan warna kedua, dan seterusnya, sampai semua titik telah diberi warna.

Beberapa penelitian yang menggunakan pewarnaan graf (*graph coloring*) untuk penyusunan jadwal sebagai berikut, Gunawan (2011) meneliti tentang aplikasi pewarnaan graf untuk menyusun jadwal ujian tengah semester di suatu perguruan tinggi; Tasari (2012) meneliti aplikasi pewarnaan graf pada penjadwalan perkuliahan di program studi pendidikan matematika Unwidha Klaten. Zaenab, dkk (2016) meneliti aplikasi *graph coloring* pada penjadwalan perkuliahan di fakultas sains dan teknologi UIN Sunan Ampel Surabaya. Suryani (2013) meneliti masalah pewarnaan graf pada penjadwalan kuliah dengan algoritma *tabu search*. Rosyida, dkk (2016) meneliti tentang pengembangan metode pewarnaan titik dan bilangan kromatik pada graf-graf tak deterministik.

Berdasarkan uraian di atas, penulis akan mengangkat judul “Penerapan Pewarnaan Titik pada Graf untuk Menyusun Jadwal Pelajaran di MI Al Wathoniyyah Semarang”.

1.2 Rumusan Masalah

Dari uraian latar belakang di atas dapat dirumuskan masalah yang ingin dipecahkan sebagai berikut.

- 1.2.1 Bagaimana merepresentasikan permasalahan penjadwalan mata pelajaran di MI Al Wathoniyyah Semarang ke dalam graf?

1.2.2 Bagaimana mengimplementasikan pewarnaan graf dengan menggunakan algoritma Welch Powel?

1.2.3 Bagaimana menginterpretasikan bilangan kromatik ke dalam penjadwalan mata pelajaran di MI Al Wathoniyyah Semarang?

1.3 Batasan Masalah

Agar penulisan skripsi ini tidak meluas, maka pembahasan hanya difokuskan pada penerapan pewarnaan pada graf untuk menyusun jadwal mata pelajaran agama di MI Al Wathoniyyah 02 Semarang. Data yang digunakan adalah kode mata pelajaran dan kode guru. Kode (mata pelajaran, kelas, dan guru) dinyatakan sebagai titik dan dua titik dihubungkan dengan sebuah sisi jika terdapat guru yang sama mengajar dua mata pelajaran tertentu atau di kelas tertentu.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah, penulisan skripsi itu bertujuan untuk

1.4.1 Mengetahui bagaimana merepresentasikan permasalahan penjadwalan mata pelajaran di MI Al Wathoniyyah Semarang dengan graf.

1.4.2 Mengetahui bagaimana mengimplementasikan pewarnaan graf dengan menggunakan algoritma Welch Powel.

1.4.3 Mengetahui bagaimana menginterpretasikan bilangan kromatik ke dalam penjadwalan mata pelajaran di MI Al Wathoniyyah Semarang.

1.5 Manfaat Penelitian

a. Bagi Penulis

Membantu penulis untuk mengetahui bagaimana merancang dan merepresentasikan permasalahan penjadwalan mata pelajaran di MI Al Wathoniyyah Semarang.

b. Bagi Universitas

Dari hasil penelitian ini dapat menjadi referensi yang berkaitan dengan teori graf dalam menyelesaikan masalah penjadwalan.

c. Bagi Mahasiswa

Penerapan pewarnaan pada graf sangat berguna untuk menyusun jadwal pelajaran maupun jadwal kuliah. Penelitian ini juga dapat dipakai sebagai bahan acuan bagi mahasiswa yang ingin melanjutkan penelitian penjadwalan dengan metode yang berbeda.

d. Bagi Instansi

Dari hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi salah satu bahan masukan bagi Yayasan Al Wathoniyyah untuk menentukan jadwal mata pelajaran.

1.6 Sistematika Skripsi

Dalam penulisan skripsi ini secara garis besar dibagi menjadi tiga bagian pokok, yaitu bagian awal, bagian isi, dan bagian akhir.

1.6.1 Bagian awal skripsi memuat:

- a. Halaman sampul
- b. Halaman judul

- c. Abstrak
- d. Lembar pengesahan
- e. Motto dan persembahan
- f. Kata pengantar
- g. Daftar isi

1.6.2 Bagian isi

- a. Bab I : Pendahuluan

Mengemukakan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika skripsi.

- b. Bab II : Tinjauan Pustaka

Berisi uraian teoritis atau teori-teori yang mendasari pemecahan tentang masalah-masalah yang berhubungan dengan judul skripsi.

- c. Bab III : Metode Penelitian

Berisi tentang metode-metode yang digunakan dalam penelitian yang meliputi merumuskan masalah, studi pustaka, pemecahan masalah, serta penarikan kesimpulan.

- d. Bab IV : Hasil Penelitian dan Pembahasan

Berisi semua hasil penelitian dan pembahasan dalam merancang dan merepresentasikan permasalahan penjadwalan mata pelajaran di MI Al Wathoniyyah Semarang.

e. Bab V : Penutup

Bab ini berisi tentang simpulan dan saran-saran yang diberikan penulis berdasarkan simpulan yang diambil.

1.6.3 Bagian akhir

Bagian akhir skripsi berisi tentang daftar pustaka dan lampiran-lampiran yang mendukung skripsi.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Graf

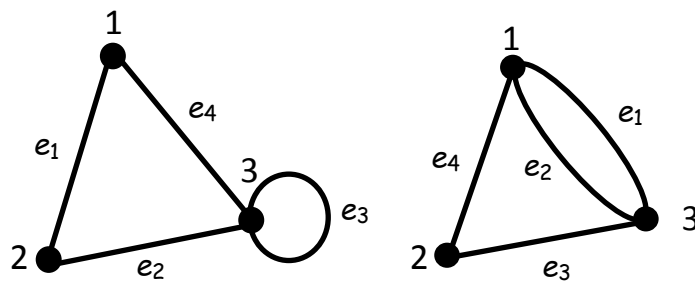
Menurut Budayasa (2012:1), teori graf merupakan cabang dari matematika yang sudah ada sejak lebih dari dua ratus tahun yang silam. Jurnal pertama tentang teori graf muncul pada tahun 1736, oleh matematikawan terkenal dari Swiss bernama Euler. Dari segi matematika, pada awalnya teori graf “kurang” signifikan, karena kebanyakan dipakai untuk memecahkan teka-teki (*puzzle*), namun akhirnya mengalami perkembangan yang sangat pesat yaitu terjadi pada beberapa puluh tahun terakhir ini. Salah satu alasan perkembangan teori graf yang begitu pesat adalah aplikasinya yang sangat luas dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang ilmu seperti: Ilmu Komputer, Teknik, Sains, bahkan Ilmu Sosial.

2.1.1 Definisi Graf

Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$ disebut himpunan titik G (Budayasa, 2012: 1-2). Menurut Munir (2015: 356), graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E) , ditulis dengan notasi

$G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertices* atau *nodes*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang titik, E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah titik tanpa sisi dinamakan *graf trivial*.

Sebuah sisi yang hanya menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri disebut gelung (*loop*). Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik u dan v pada suatu graf, maka sisi-sisi tersebut disebut sisi ganda (Budayasa, 2012: 3). Contoh *loop* dan sisi ganda dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 (a) *loop*, (b) sisi ganda

Misalkan G adalah sebuah graf. Sebuah jalan (*walk*) di G adalah sebuah barisan berhingga tak kosong $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k)$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir sisi e_i , untuk $1 \leq i \leq k$. Dapat dinyatakan W adalah sebuah jalan dari titik V_0 ke titik V_k atau jalan (v_0, v_k) . Titik V_0 dan titik V_k berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir W . Jika semua sisi dalam jalan W yang berbeda, maka W disebut jejak (*trail*).

Jika semua titik dalam jalan W juga berbeda, maka W disebut lintasan (*path*) (Budayasa, 2012: 6). Misalkan G adalah sebuah graf. Sebuah jalan W disebut tertutup jika titik awal dan titik akhir dari W sama. Jejak tertutup disebut sirkuit. Sirkuit dengan titik awal dan titik akhirnya sama tetapi titik internalnya berlainan disebut siklus (*cycle*). Siklus dengan n titik dinotasikan dengan C_n (Sutarno, 2003: 65).

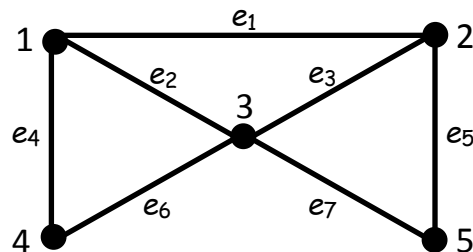
Tinjau Gambar 2.2:

$\{4, e_6, 3, e_7, 5, e_5, 2, e_1, 1, e_4, 4\}$ merupakan jalan (*walk*),

$\{4, e_6, 3, e_3, 2, e_1, 1, e_2, 3, e_7, 5\}$ merupakan jejak (*trail*),

$\{1, e_4, 4, e_6, 3, e_3, 2, e_5, 5\}$ merupakan lintasan (*path*), dan

$\{1, e_2, 3, e_7, 5, e_5, 2, e_1, 1\}$ merupakan siklus (*cycle*).



Gambar 2.2 Jalan (*walk*)

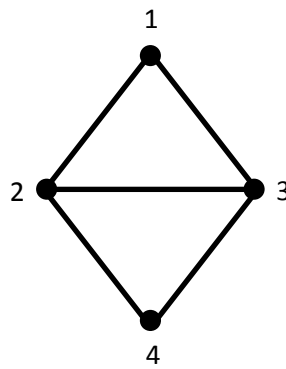
2.1.2 Terminologi Dasar Graf

Dalam pembahasan mengenai graf biasanya sering menggunakan *terminology* (istilah) yang berkaitan dengan graf (Munir, 2015: 364-376). Berikut ini *terminology* (istilah) yang berkaitan dengan graf,

1. Bertetangga (*Adjacent*)

Dua buah titik dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi dan dua buah sisi dikatakan bertetangga jika terhubung langsung dengan satu titik yang sama.

Tinjau Gambar 2.3: titik 1 bertetangga dengan titik 2 dan 3, titik 1 tidak bertetangga dengan titik 4.

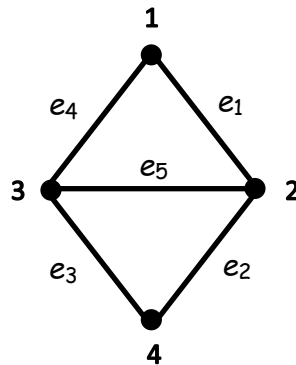


Gambar 2.3 Graf Bertetangga

2. Bersisian (*Incidency*)

Untuk sembarang sisi $e = (v_j, v_k)$, dikatakan e bersisian dengan titik v_j dan titik v_k .

Tinjau Gambar 2.4: sisi e_5 bersisian dengan titik 2 dan titik 3, sisi e_2 bersisian dengan titik 2 dan titik 4, tetapi sisi e_1 tidak bersisian dengan titik 4.

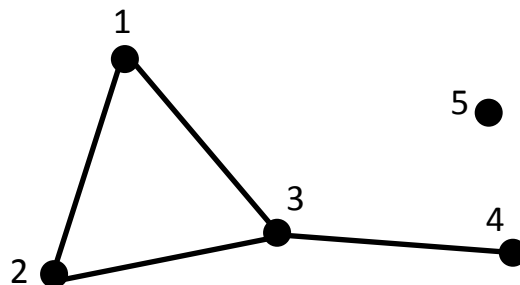


Gambar 2.4 Graf Bersisian

3. Titik Terpencil (*Isolated Vertex*)

Titik terpencil ialah titik yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.

Tinjau Gambar 2.5: titik 5 adalah titik terpencil.



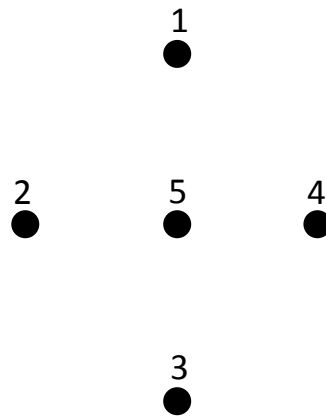
Gambar 2.5 Graf Titik Terpencil

4. Graf Kosong (*null graph* atau *empty graph*)

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (N_n).

Contoh graf kosong dengan 5 titik (N_5) dapat dilihat pada

Gambar 2.6.

Gambar 2.6 Graf Kosong N_5 5. Derajat (*Degree*)

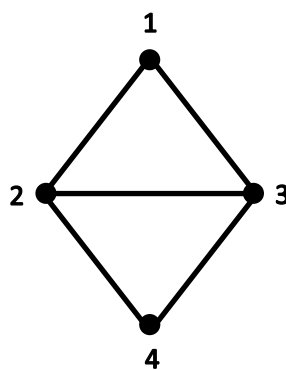
Derajat suatu titik adalah jumlah sisi yang bersisian dengan titik tersebut.

Notasi: $d(v)$

Tinjau graf G_1 :

$$d(1) = d(4) = 2$$

$$d(2) = d(3) = 3$$

Gambar 2.7 Graf G_1

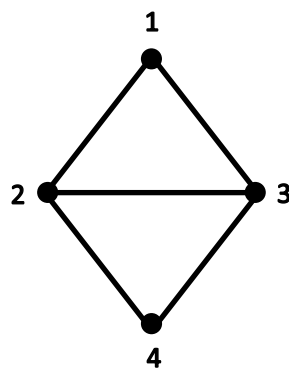
2.1.3 Jenis-jenis Graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda, berdasarkan jumlah titik, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi (Munir, 2015: 357).

a. Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis, yaitu:

1) Graf Sederhana (*Simple Graph*)

Graf yang tidak mengandung gelang (*loop*) maupun sisi ganda dinamakan graf sederhana (Munir, 2015: 357). Contoh graf sederhana dapat dilihat pada Gambar 2.8.



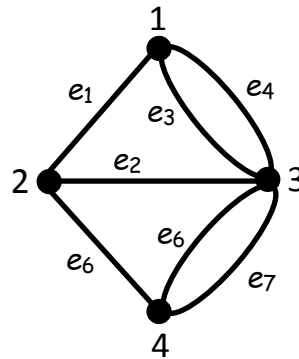
Gambar 2.8 Graf Sederhana

2) Graf Tak Sederhana

Menurut Munir (2015: 357), graf yang mengandung sisi ganda atau *loop* dinamakan graf tak sederhana (*unsimple graph*). Ada

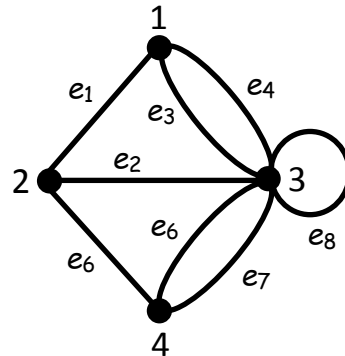
dua macam graf tak sederhana, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*).

- a) Graf Ganda (*Multigraph*) adalah graf yang mengandung sisi ganda tetapi tidak memiliki *loop* (gelang). Sisi ganda yang menghubungkan sepanjang titik dapat lebih dari dua buah. Contoh graf ganda dapat dilihat pada Gambar 2.9.



Gambar 2.9 Graf Ganda

- b) Graf Semu (*Pseudograph*) adalah graf yang mengandung loop (termasuk bila memiliki sisi ganda sekalipun). Graf semu lebih umum daripada graf ganda, karena sisi pada graf semu dapat terhubung ke dirinya sendiri. Contoh graf semu dapat dilihat pada Gambar 2.10.



Gambar 2.10 Graf Semu

b. Berdasarkan Jumlah Titik pada Suatu Graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis, yaitu:

1) Graf Berhingga

Graf berhingga adalah sebuah graf $G (V, E)$ dengan V (himpunan titik) dan E (himpunan sisi) hingga (Sutarno, 2013: 62).

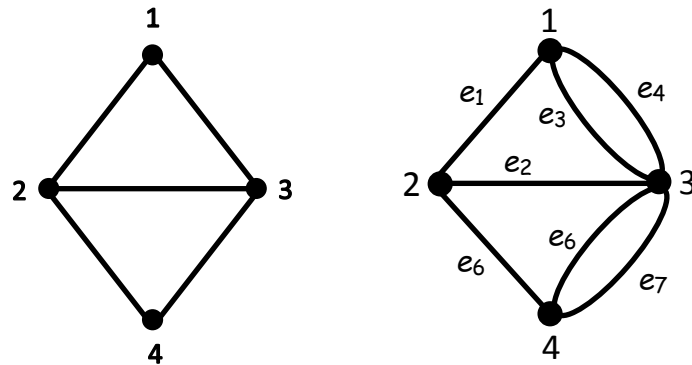
2) Graf Tak Berhingga

Graf tak berhingga adalah sebuah graf $G (V, E)$ dengan V (himpunan titik) dan E (himpunan sisi) tak hingga (Sutarno, 2013: 62).

c. Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis, yaitu:

1) Graf tak-berarah (*undirected graph*)

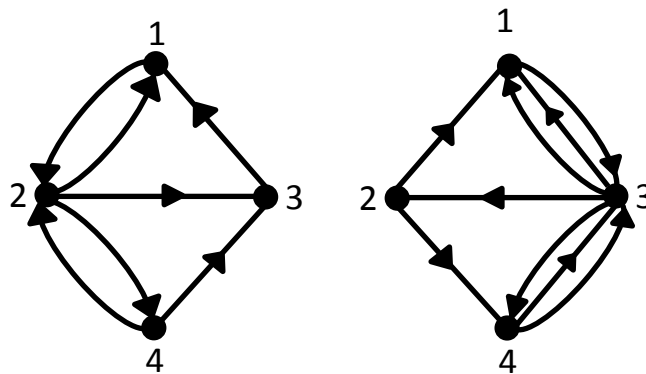
Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Dua buah graf pada Gambar 2.11 adalah contoh graf tak-berarah.



Gambar 2.11 Graf Tak Berarah

2) Graf berarah (*directed graph* atau *digraph*)

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Contoh graf berarah dapat dilihat pada Gambar 2.12.

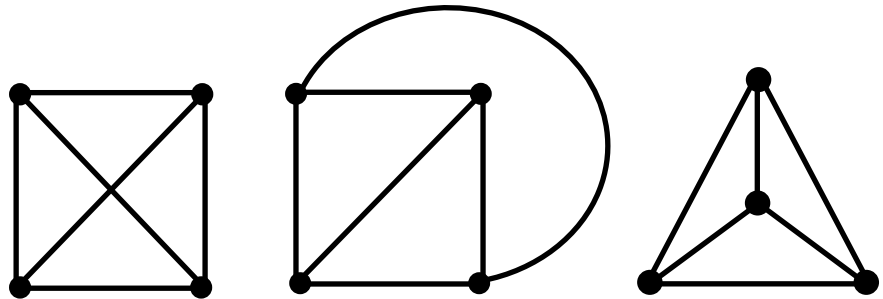


Gambar 2.12 (a) graf berarah, (b) graf ganda berarah

2.1.4 Graf Planar (*Planar Graph*)

Graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi tidak saling memotong (bersilangan) disebut graf planar, jika tidak maka ia disebut graf tak planar. Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan disebut graf bidang (*plane*

graph). Contoh graf planar dan graf bidang dapat dilihat di Gambar 2.13.



Gambar 2.13 (a) graf planar, (b) dan (c) graf bidang

2.2 Pewarnaan Graf

2.2.1 Pengertian Pewarnaan Graf (*Graph Coloring*)

Pewarnaan graf (*graph coloring*) adalah pemberian warna yang biasanya direpresentasikan sebagai bilangan terurut mulai dari 1, pada objek tertentu pada graf. Objek tersebut dapat berupa titik, sisi, dan wilayah.

2.2.2 Klasifikasi Pewarnaan Graf

Ada tiga macam pewarnaan graf, yaitu:

1. Pewarnaan titik (*vertex coloring*)

Merupakan pemberian warna atau label pada setiap titik sehingga tidak ada 2 titik bertetangga yang memiliki warna sama.

Jumlah warna minimum yang digunakan untuk mewarnai titik pada suatu graf disebut bilangan kromatik, dilambangkan dengan $\chi(G)$.

2. Pewarnaan sisi (*edge coloring*)

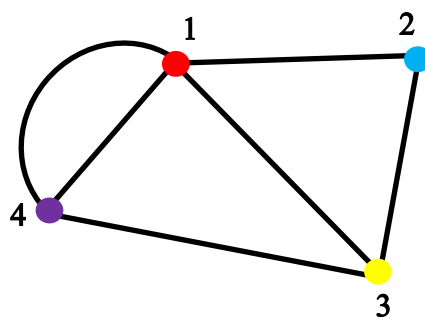
Merupakan pemberian warna pada setiap sisi pada graf sehingga sisi-sisi yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama.

Bilangan yang menyatakan minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua sisi sedemikian hingga setiap dua sisi yang terkait ke titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda disebut indeks kromatik, dilambangkan dengan $\chi'(G)$.

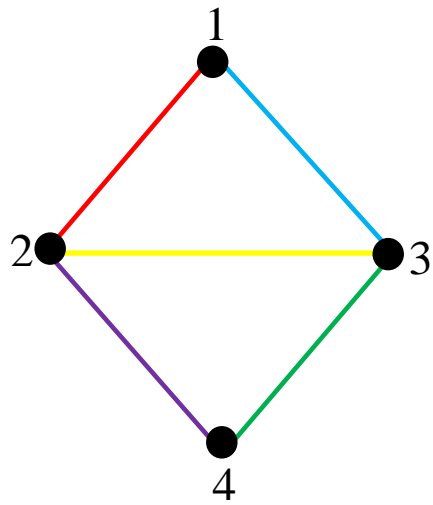
3. Pewarnaan wilayah (*region coloring*)

Merupakan pemberian warna pada setiap wilayah pada graf sehingga tidak ada wilayah yang bertetangga yang memiliki warna yang sama.

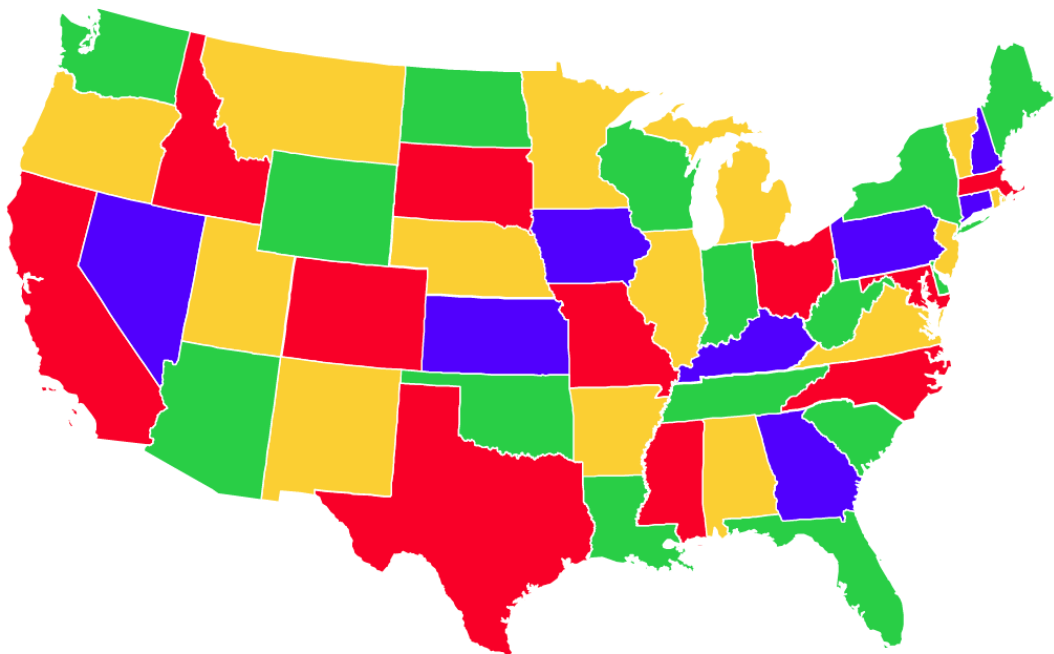
Contoh pewarnaan graf dapat dilihat pada Gambar 2.14, Gambar 2.15, dan Gambar 2.16.



Gambar 2.14 Pewarnaan Titik dengan 3 Warna



Gambar 2.15 Pewarnaan Sisi dengan 3 Warna



Gambar 2.16 Pewarnaan Wilayah dengan 4 Warna

2.3 Algoritma Welch Powell

Pewarnaan graf adalah metode pewarnaan elemen sebuah graf yang terdiri dari pewarnaan titik (*vertex*) dan pewarnaan sisi (*edge*). Pewarnaan titik pada graf yaitu dengan memberi warna pada titik-titik suatu graf sedemikian sehingga tidak ada dua titik bertetangga yang memiliki warna yang sama. Dalam pewarnaan graf terdapat beberapa algoritma, salah satunya algoritma Welch Powell. Algoritma ini cukup praktis dan efisien digunakan dalam pewarnaan titik pada graf. Langkah-langkah algoritma Welch Powell adalah sebagai berikut.

1. Urutkan semua titik berdasarkan derajatnya, dari yang terbesar ke yang terkecil
2. Ambil satu warna pertama (misal merah) untuk mewarnai titik pertama (yang mempunyai derajat tertinggi). Kemudian warnai titik yang tidak bertetangga dengan titik pertama dengan warna yang sama (merah)
3. Lanjutkan dengan warna kedua dan seterusnya, sampai semua titik telah diberi warna

2.3.1 Contoh Kasus

Sebagai contoh akan diberikan studi kasus tentang cara mentransformasi data ke bentuk graf. Menurut Rinaldi Munir (2005) salah satu persoalan yang mempunyai kemiripan dengan pewarnaan graf adalah permasalahan penentuan jadwal ujian. Misalkan diketahui ada delapan mahasiswa yaitu Arya, Bisma, Chasa, Dedi, Emma, Fina, Gugun, dan Hamis. Kemudian diketahui ada lima mata kuliah yang dapat dipilih oleh mahasiswa yaitu Aljabar (A), Fuzzy (F), Geometri

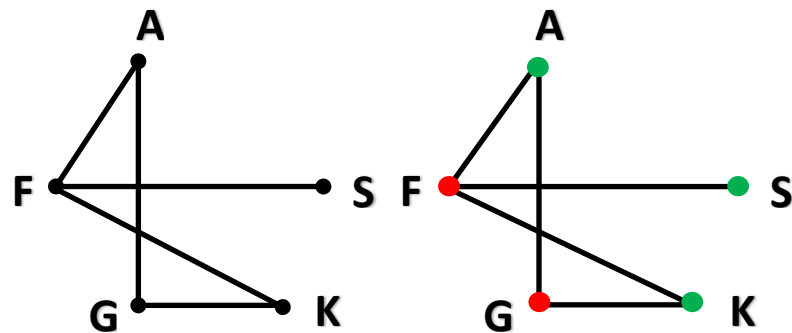
(G), Kalkulus (K), dan Statistika (S). Pada saat pengisian KRS, Arya mengambil mata kuliah F dan S, Bisma mengambil mata kuliah F dan K, Chasa mengambil mata kuliah G dan K, Dedi mengambil mata kuliah A dan F, Emma mengambil mata kuliah F dan K, Fina mengambil mata kuliah G dan K, Gugun mengambil mata kuliah A dan G, dan Hamis mengambil mata kuliah G dan K. Data tersebut dapat ditransformasikan ke dalam bentuk tabel (i,j) .

Tabel 2.1 Matriks

| | (A) | (F) | (G) | (K) | (S) |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Arya | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Bisma | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| Chasa | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| Dedi | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Emma | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| Fina | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| Gugun | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Hamis | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Tabel 2.1 menunjukkan matriks delapan orang mahasiswa dan lima mata kuliah. Angka 1 pada elemen (i,j) berarti mahasiswa i memilih mata kuliah j , sedangkan angka 0 menyatakan mahasiswa i tidak memilih mata kuliah j .

Berdasarkan Tabel 2.1 kita dapat menggambarkan graf yang menyatakan penjadwalan ujian. Titik-titik pada graf menyatakan mata kuliah. Sisi yang menghubungkan dua buah titik menyatakan ada mahasiswa yang sama memilih dua mata kuliah. Hasilnya terlihat pada Gambar 2.17.



Gambar 2.17 (a) Graf, (b) Graf Telah Diwarnai

Berdasarkan graf pada Gambar 2.17 dapat disimpulkan bahwa titik yang bertetangga tidak dapat dijadwalkan dalam waktu yang bersamaan. Jadi ujian mata kuliah A, S, dan K dapat dilaksanakan secara bersamaan, sedangkan ujian mata kuliah F dan G dapat dilaksanakan secara bersamaan tetapi di waktu yang berbeda dengan mata kuliah A, S, dan K.

Tabel 2.2 Bilangan Kromatik

| Titik | F | A | K | G | S |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Derajat | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| Warna | Merah | Hijau | Hijau | Merah | Hijau |

Berdasarkan Tabel 2.2 menunjukkan bilangan kromatik dari graf pada Gambar 2.17 di atas adalah 2. Jadi jumlah minimum hari yang dibutuhkan untuk jadwal ujian lima mata kuliah untuk delapan orang mahasiswa tersebut adalah 2 hari.

BAB V

PENUTUP

5.1 Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan dapat diambil simpulan sebagai berikut.

1. Dari data yang diperoleh yaitu kode guru dan kode mata pelajaran, dapat direpresentasikan ke dalam graf. Kode (mata pelajaran, guru, dan kelas) dinyatakan sebagai titik dan dua titik dihubungkan dengan sebuah sisi jika terdapat guru yang sama mengajar dua mata pelajaran tertentu atau di kelas tertentu. Titik-titik yang *adjacent* kemudian dihubungkan sehingga terbentuklah representasi graf dari data yang diperoleh.
2. Penerapan pewarnaan pada graf untuk menyusun jadwal pelajaran menggunakan algoritma Welch Powell yaitu dengan cara
 - a. Mentransformasikan data ke dalam bentuk graf
 - b. Menghubungkan titik-titik yang *adjacent*
 - c. Mewarnai setiap titik pada graf dengan menggunakan algoritma Welch Powell
 - d. Menginterpretasikan bilangan kromatik.
3. Dari hasil pewarnaan graf diperoleh bilangan kromatik 12. Bilangan kromatik diinterpretasikan sebagai banyaknya minimum periode waktu penjadwalan mata pelajaran agama dalam satu minggu, sehingga terdapat 12 periode waktu penjadwalan mata pelajaran agama dalam satu minggu. Satu

periode waktu sama dengan 2 jam mata pelajaran (70 menit). Alokasi waktu yang diberikan dalam satu hari yaitu 4 periode waktu (8 jam mata pelajaran), sehingga minimal dalam 3 hari mata pelajaran Pendidikan Agama Islam dapat dijadwalkan.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil yang diperoleh maka saran yang dapat disampaikan adalah sebagai berikut.

1. Untuk penelitian selanjutnya dalam pembuatan jadwal mata pelajaran hendaknya dikembangkan pada tingkat menengah (SMP) dan atas (SMA) dengan menggunakan metode atau algoritma pewarnaan yang lain
2. Penelitian ini dapat dikembangkan dengan menambahkan program atau *software* komputer untuk mempermudah menyelesaikan masalah pewarnaan pada graf.

DAFTAR PUSTAKA

- Aladag, C.H. and Hocaoglu, G. 2007. *A Tabu Search Algorithm to Solve Course Timetabling Problem*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 36(1), 53-64.
- Akbulut, A. dan Yilmaz, G. 2013. University Exam Scheduling System Using Graph Coloring Algorithm. *International Journal of Innovation, Management and Technology*, 4(1): 66-71.
- Aldous, J. M. dan Robin, J.W. 2000. *Graphs and Application*. London: Springer.
- As'ad, N. 2008. *Aplikasi Pewarnaan Graf pada Pemecahan Masalah Penyusunan Jadwal*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Baker, Kenneth R. 1974. *Introduction to Sequencing and Scheduling*. New York: John Wiley & Sons, Inc. Beasley, J.E.
- Budayasa, I.K. 2013. *Teori graf dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.
- Gunawan, T. P. 2011. *Aplikasi Pewarnaan Graph Untuk Menyusun Jadwal Ujian Suatu Perguruan Tinggi*. Surabaya: Sekolah Tinggi Teknik Surabaya.
- Jensen, T. R. dan Bjarne Toft. 1995. *Graph Coloring Problem*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Johnsonbaugh, R. 2012. *Discrete Mathematics Revised Edition*. New York: Macmillian Publishing Company.
- Malkawi, M., M. Al-Haj Hassan, & O. Al-Haj Hassan. 2008. A New Exam Scheduling Using Graph Coloring. *The International Journal Arab of Information Technology*, 5(1): 80-85.
- Munir, R. 2015. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.
- Siang, J. J. 2014. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Andi Offset.
- Supardi, Y. 2006. *Microsoft Visual Basic 6.0 untuk Segala Tingkat*. Jakarta: Penerbit PT Elex Media Komputindo.

- Suryani, I., Purwanto, & Yasin, M. 2013. *Implementasi Masalah Pewarnaan Graph Dengan Algoritma Tabu Search Pada Penjadwalan Kuliah*. Malang: FMIPA Universitas Negeri Malang.
- Susiloputro, A., Rochmad, & Alamsyah. 2012. Penerapan Pewarnaan Graf pada Penjadwalan Ujian Menggunakan Algoritma Welsh Powell. *UNNES Journal of Mathematics*, 1(1): 2-7.
- Sutarno, H. 2003. *Matematika Diskrit*. Jakarta: Universitas Pendidikan Indonesia.
- Tasari. 2012. *Aplikasi Pewarnaan Graf Pada Penjadwalan Perkuliahan Di Program Studi Pendidikan Matematika Unwidha Klaten*. Klaten: UNWIDHA.
- Wilson, R. J, dan Watkins, J. J. 2012. *Graphs An Introductory Approach*. New York: Published simultaneously in Canada.
- Zaenab, D. S., dkk. 2016. *Aplikasi Graph Coloring Pada Penjadwalan Perkuliahan Di Fakultas Sains Dan Teknologi UIN Sunan Ampel Surabaya*. Surabaya: UIN Sunan Ampel.