SPATIAL DURBIN MODEL (SDM) UNTUK MENGIDENTIFIKASI FAKTOR - FAKTOR YANG BERPENGARUH PADA PRODUKSI PADI DI JAWA TENGAH

Skripsi

disusun sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

Suyono
4111411014

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2018

SPATIAL DURBIN MODEL (SDM) UNTUK MENGIDENTIFIKASI FAKTOR - FAKTOR YANG BERPENGARUH PADA PRODUKSI PADI DI JAWA TENGAH

Skripsi

disusun sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

Suyono
4111411014

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2018

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi yang berjudul " Spatial Durbin Model (SDM) untuk Mengidentifikasi Faktor-Faktor yang Berpengaruh pada Produksi Padi di Jawa Tengah " bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan perundang-undangan.

Semarang, Juli 2018

METERAI TEMPEL

D091AFF176320901

6000

ENAM RIBU RUPIAH

Suyono

ii

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Spatial Durbin Model (SDM) untuk Mengidentifikasi Faktor-Faktor yang Berpengaruh pada Produksi Padi di Jawa Tengah

disusun oleh

Nama : Suyono

NIM : 4111411014

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang pada

Hari : Rabu

Tanggal : 11 Juli 2018

Panitia,

Ketua

Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si., Akt.

NIP. 196412231988031001

Sekretaris

Drs. Arief Agoestanto, M.Si.

NIP. 196807221993031005

Ketua Penguji

Dr. Scolastika Mariani, M.Si.

NIP. 196502101991022001

Anggota Penguji

Pembimbing Utama

Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si., Akt

NIP. 196412231988031001

Anggota Penguji

Pembimbing Pendamping

Drs. Sugiman, M.Si.

NIP. 196401111989011001

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

"Apapun juga yang kamu perbuat, perbuatlah dengan segenap hatimu seperti untuk Tuhan dan bukan untuk manusia" (Kolose 3: 23)

"Dan apa saja yang kamu minta dalam doa dengan penuh kepercayaan, kamu akan menerimanya" (Matius 21: 22)

"Diberkatilah orang yang mengandalkan Tuhan, yang menaruh harapannya pada Tuhan" (Yeremia 17:7)

"Banyak kegagalan dalam hidup ini dikarenakan orang tidak menyadari betapa dekatnya mereka dengan keberhasilan saat mereka menyerah" (Thomas Alva Edison)

PERSEMBAHAN

- Untuk Bapak, Ibu, dan Adik tersayang yang selalu mendukung, memberikan semangat dan menguatkan di dalam doa.
- Untuk Ratna Luhung Strinariswari yang telah memberikan semangat saat penyusunan skripsi ini.
- Untuk teman-teman RTB IM3 yang selalu memberikan semangat dan dukungan.
- Untuk teman-teman Matematika 2011.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Tuhan yang Maha Esa yang telah memberikan kasih dan karunia-Nya serta kemudahan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul " Spatial Durbin Model (SDM) untuk Mengidentifikasi Faktor-Faktor yang Berperngaruh pada Produksi Padi di Jawa Tengah".

Penulisan skripsi ini dapat diselesaikan berkat bimbingan, kerjasama, bantuan, dan dorongan dari berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum., Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si., Akt., Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si., Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
4. Drs. Mashuri, M.Si., Koordinator Program Studi Matematika Universitas Negeri Semarang.
5. Muhammad Kharis, S.Si., M.Sc., Dosen wali sekaligus orangtua yang telah memberikan arahan dan bimbingan selama masa kuliah hingga selesai.
6. Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si., Akt., Pembimbing utama yang telah memberikan arahan , bimbingan dan motivasi kepada penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
7. Drs. Sugiman, M.Si., Pembimbing pendamping yang telah memberikan arahan , bimbingan dan motivasi kepada penulis sehinggaskripsi ini dapat terselesaikan.
8. Dr. Scolastika Mariani, M.Si., Dosen penguji yang telah memberikan kritik, saran, dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

9. Seluruh Dosen Matematika Universitas Negeri Semarang yang telah membekali penulis dengan berbagai ilmu selama masa perkuliahan.
10. Staff Tata Usaha FMIPA Universitas Negeri Semarang yang telah membantu penulis selama mengikuti perkuliahan dan penulisan skripsi ini.
11. Bapak, ibu, dan adik tercinta yang selalu memberikan doa, semangat dan dukungan baik secara moral maupun spiritual.
12. Ratna Luhung Strinariswari yang senantiasa mendoakan, memberi semangat dan dukungan.
13. Semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini.

Akhir kata penulis mengucapkan terimakasih dan penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Semarang, Juli 2018

Penulis

ABSTRAK

Suyono. 2018. *Spatial Durbin Model (SDM) untuk Mengidentifikasi Faktor-Faktor yang Berpengaruh pada Produksi Padi di Jawa Tengah*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Pembimbing I Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si.,Akt. dan Pembimbing II Drs. Sugiman, M.Si.

Kata kunci : produksi padi, dependensi spasial, *Spatial Durbin Model, Ordinary Least Square*

Penelitian ini bertujuan mengidentifikasi faktor-faktor yang mempengaruhi produksi padi di Jawa Tengah dari sudut pandang kewilayahannya serta memilih model terbaik antara OLS dan metode *Spatial Durbin Model* (SDM). Aspek wilayah dalam penelitian ini terkait dengan perbedaan karakteristik antar daerah, yang seringkali memiliki pengaruh antar lokasi pengamatan satu dan lokasi lainnya. Dalam hal ini dinamakan efek spasial, yang terdiri dari spasial dependensi dan spasial heterogenitas. Menguji dependensi spasial dalam model regresi sangat penting karena mengabaikan kedua hal tersebut yang menyebabkan estimasi tidak efisien dan kesimpulan yang dipeoleh kurang sahih. Karena itu digunakan metode *Spatial Durbin Model* (SDM) dalam penelitian ini. Penelitian ini difokuskan pada identifikasi faktor-faktor yang mempengaruhi produksi padi di Jawa Tengah serta memilih model terbaik antara OLS dan metode SDM. Analisis dilakukan dengan cara seleksi variabel untuk mendapatkan variabel yang signifikan. Setelah itu membuat pemodelan OLS dan SDM dari variabel yang signifikan di kedua model kemudian membandingkan hasil pemodelan. Pemilihan model terbaik ditentukan dari nilai koefisien determinasi (R^2) dan *Akaike's Information Criterion* (AIC)

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data produksi padi dan faktor-faktor yang mempengaruhinya tahun 2014 yang bersumber dari BPS serta Dinas Pertanian Tanaman Pangan dan Hortikultura Provinsi Jawa Tengah. Hasil uji Moran's I menyatakan bahwa tidak terdapat efek spasial baik pada produksi padi maupun faktor-faktor yang mempengaruhinya, sehingga SDM tidak dapat digunakan untuk analisis data ini. Oleh karena itu analisis datanya digunakan metode regresi *Ordinary Least Square* (OLS), dimana variabel yang secara signifikan mempengaruhi produksi padi di Jawa Tengah adalah luas lahan sawah irigasi(X_1), banyaknya alat pembersih gulma manual(X_2), banyaknya alat pemberantas tikus(X_3), dan pompa air(X_5) berkontribusi sebesar 92%.

ABSTRACT

Suyono. 2018. Spatial Durbin Model (SDM) untuk Mengidentifikasi Faktor-Faktor yang Berpengaruh pada Produksi Padi di Jawa Tengah. Research, Mathematic Program Faculty of Mathematic and Science Semarang State University. Supervisor I Prof . Dr. Zaenuri, S.E., M.Si.,Akt. and Supervisor II Drs. Sugiman, M.Si.

Keyword : rice production, spatial dependency, Spatial Durbin Model, Ordinary Least Square

The purpose of this research is to identify the factors which affecting the rice production in Central Java from the geographical point of view and to choose the best model of OLS and Spatial Durbin Model (SDM) method. Territorial aspect in this research related to each zone characteristic differences which usually have interrelationships between observation locations one another. In this case, it is called as spatial effect which contains dependency spatial and heterogeneity spatial. Examining dependency spatial using regression model can be very important since neglecting it would cause the inefficient estimation and invalid conclusion. Spatial Durbin Model (SDM) is used in this research since then. This research is focused on identifying the factors which affecting the rice production in Central Java fromand to choose the best model of OLS and Spatial Durbin Model (SDM) method. The analysis is conducted by selecting variabel to obtain the significant variabels. After that making OLS and SDM model from significant variabels in both models then comparing the model result. The selection of the best model is determined by the determination coefficient value (R^2) and Akaike's Information Criterion (AIC).

The data used in this research is taken from rice production data and the factors which affecting the rice production in 2014 from BPS data and Dinas Pertanian Tanaman Pangan dan Hortikultura Provinsi Jawa Tengah. The result of Moran's I research states that there are no spatial effect on both the rice production and the factors which are affecting it, so SDM can't be used for data analysis. Because of that the regression Ordinary Least Square (OLS) method is used which the variables significantly affects the rice production in Central Java is the area of the irrigated field (X_1), the amount of manual weed cleaners (X_2), the amount of eradicating rats (X_3) and water pumper (X_5) contributed by 92%.

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i

PERNYATAAN ii

HALAMAN PENGESAHAN iii

MOTTO DAN PERSEMBAHAN iv

KATA PENGANTAR v

ABSTRAK vii

ABSTRACT viii

DAFTAR ISI ix

DAFTAR TABEL xi

DAFTAR GAMBAR xii

DAFTAR LAMPIRAN xiii

BAB

1. PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Rumusan Masalah 5

1.3 Tujuan Penelitian 5

1.4 Batasan Penelitian 5

1.5 Manfaat Penelitian 5

2. LANDASAN TEORI 7

2.1 Regresi Linear 7

2.2 Spatial Durbin Model 13

2.3 Kerangka Pemikiran 24

3. METODE PENELITIAN 25

3.1 Fokus Penelitian 25

3.2 Data 25

3.3 Pengumpulan Data 26

3.4 Metode Analisis 27

4. HASIL DAN PEMBAHASAN 30

4.1 Seleksi Variabel 30

4.1.1 Regresi Global (OLS) 30

4.1.2 Spatial Durbin Model 36

5. SIMPULAN DAN SARAN 41

5.1 Simpulan 41

5.2 Saran 42

DAFTAR PUSTAKA 43

LAMPIRAN 44

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 2.1 Analisis Varians Model Regresi 9

Tabel 4.1 Koefisien Enam variabel 30

Tabel 4.2 Anova dengan Enam Variabel 31

Tabel 4.3 Koefisien Empat Variabel 32

Tabel 4.4 Uji Parameter Model dengan Variabel 33

Tabel 4.5 Model Summary 35

Tabel 4.6 Nilai Moran's I 37

Tabel 4.7 Estimasi Parameter SDM dengan Empat Variabel 39

Tabel 4.8 Estimasi Parameter SDM dengan Dua Variabel 40

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 1.1 Luas Panen dan Produksi Padi Kabupaten dan Kota di Jawa Tengah 9

Gambar 2.1 Ilustrasi Persinggungan 22

Gambar 2.2 Kerangka Pemikiran 24

Gambar 3.1 Diargram Alir 29

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1. Data Produksi Padi di Jawa Tengah dan Faktor-Faktor yang Mempengaruhi 44

Lampiran 2. Pemodelan OLS dengan Enam Variabel 45

Lampiran 3. Pemodelan OLS dengan Empat Variabel 46

Lampiran 4. Uji Normalitas Error Model OLS dengan Empat Variabel 47

Lampiran 5. Uji Glejser dan Nilai AIC Model OLS dengan Empat Variabel 48

Lampiran 6. Tabel F untuk Probabilita = 0,05 49

Lampiran 7. Tabel Durbin-Watson, $\alpha = 0{,}05$ 50

Lampiran 8. Tabel Persentase Distribusi t (df=1-40) 51

Lampiran 9. Peta Jawa Tengah 52

Lampiran 10. Matriks Pembobot Queen Contiguity 53

Lampiran 11. Uji Dependensi Spasial 56

Lampiran 12. Pemodelan SDM dengan Empat Variabel 59

Lampiran 13. Pemodelan SDM dengan Dua Variabel 61

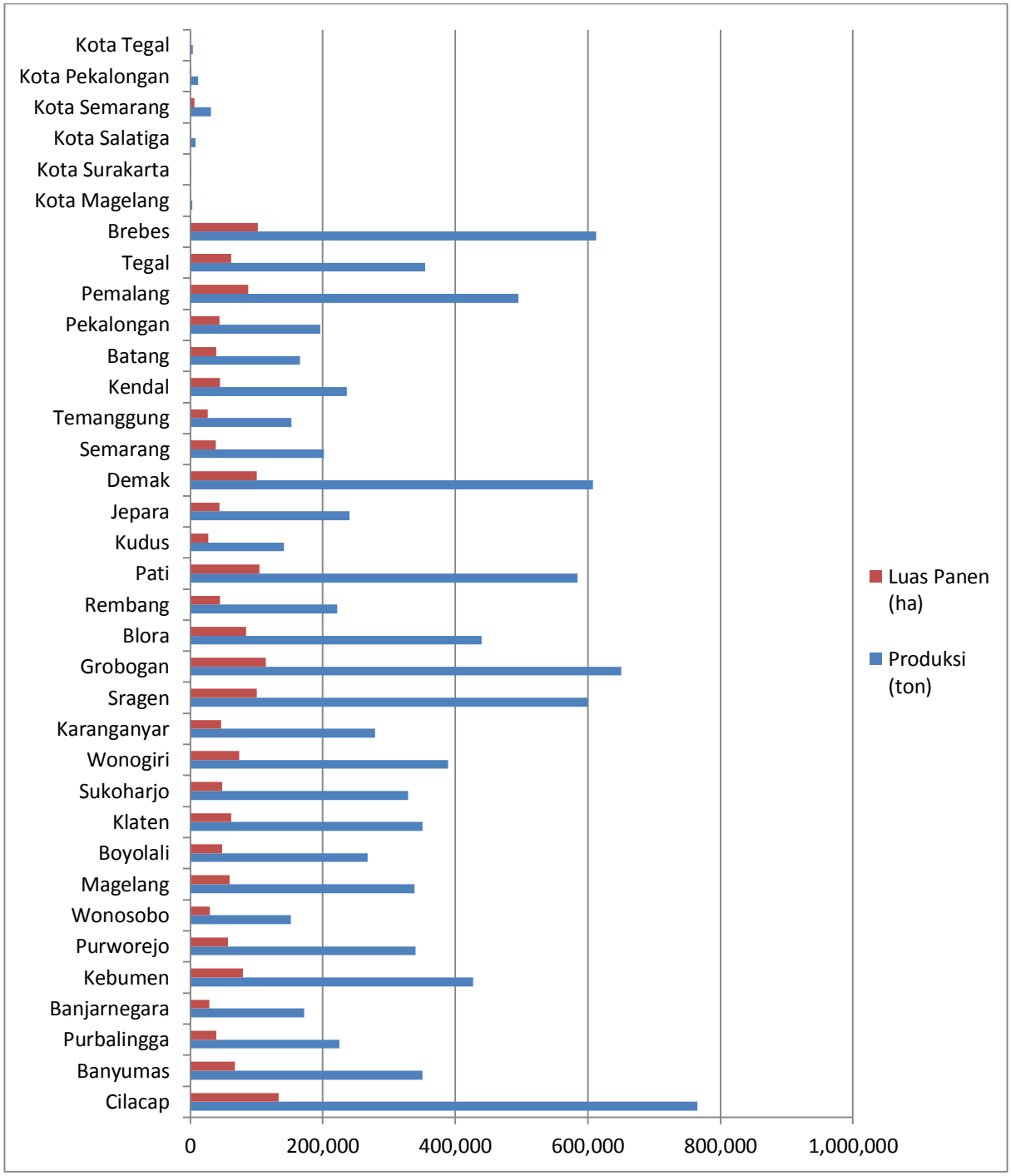
BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Indonesia merupakan negara yang mayoritas penduduknya bekerja sebagai petani. Pembangunan pertanian sebagai sektor pemimpin dalam pembangunan ekonomi nasional didukung oleh pembangunan subsektor-subsektor pertanian. Sektor pertanian sendiri terbagi ke dalam beberapa macam sub sektor. Sektor pertanian di Indonesia terbagi menjadi lima, yaitu sub sektor pertanian rakyat (sub sektor tanaman pangan), sub sektor perkebunan, sub sektor peternakan, sub sektor perhutanan dan sub sektor perikanan (Mubyarto, 1994)

Bagi Jawa Tengah peranan sektor pertanian masih sangat penting dalam perekonomian, karena merupakan salah satu komoditas unggulan. Akan tetapi secara proporsional cenderung mengalami penurunan. Dengan kondisi seperti ini, pemerintah akan selalu berusaha untuk meningkatkan produktivitas sektor pertanian. Salah satu komoditas utama dalam pertanian yang ikut serta dalam meningkatkan pendapatan masyarakat adalah padi. Padi merupakan komoditas yang paling dominan ditanam tiap daerah, karena beras merupakan makanan pokok yang dikonsumsi masyarakat Indonesia termasuk Jawa Tengah sehingga beras adalah salah satu bahan pokok sangat penting.

Pada umumnya padi di Indonesia adalah bahan pokok untuk memenuhi kebutuhan pangan atau konsumsi masyarakat Indonesia terutama di Jawa Tengah. Seiring dengan berjalannya waktu kebutuhan beras semakin meningkat. Beras juga komoditi penting dalam perekonomian sehingga produksi beras dalam negeri menjadi tolak ukur ketersediaan pangan di Indonesia terutama di Jawa Tengah. Data luas panen dan produksi padi tiap kabupaten dan kota di provinsi Jawa Tengah tahun 2014 disajikan pada gambar 1.1 .



Gambar 1.1 Luas Panen dan Produksi Padi Kabupaten dan Kota di Jawa Tengah

Sumber : BPS, 2014

Usaha tani padi di Jawa Tengah telah mengalami perubahan-perubahan seiring dengan perubahan teknologi dan alih fungsi penggunaan lahan, tanah pertanian semakin lama semakin berkurang secara positif akan mengurangi produksi padi itu sendiri. Peralihan alih fungsi lahan dan efisiensi penggunaan input sangat berdampak pada menurunnya tingkat

produksi. Oleh karena itu pemerintah selalu berusaha meningkatkan produksi padi salah satu caranya harus mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhinya.

Beberapa penelitian telah dilakukan untuk mengkaji faktor-faktor yang mempengaruhi produksi padi, salah satu diantaranya Enjelita *et al.*(2014) dengan metode Analisis Regresi Berganda menemukan bahwa pupuk, luas lahan, curah hujan, dan hari hujan berpengaruh terhadap produksi padi di Deli Serdang. Rujukan lainnya, Laila Novita *et al*. (2012) menjelaskan penelitian tentang kematian ibu dengan menggunakan pendekatan *Geographically Weighted Poisson Regression* (GWPR) dimana dihasilkan kesimpulan bahwa variabel presentase sarana kesehatan berpengaruh signifikan disetiap kabupaten/kota, sedangkan presentase variabel ibu hamil beresiko tinggi ditangani serta variabel presentase bidan tidak berpengaruh di seluruh kabupaten/kota. Metode GWPR merupakan metode pemodelan spasial dengan menggunakan pendekatan titik, sedangkan penelitian tersebut menyimpulkan adanya pengelompokan variabel-variabel prediktor yang signifikan pada lokasi yang berdekatan sehingga menunjukan ada persamaan antarlokasi yang berdekatan. Oleh karena itu perlu diadakan penelitian lebih lanjut untuk mendapatkan pemodelan spasial dengan pendekatan area yang memperhatikan pengaruh spasial dari variabel respon dan prediktor. Bekti (2011) menjelaskan metode SDM mengenai faktor-faktor yang berpengaruh terhadap kejadian diare di Kabupaten Tuban. Hasilnya bahwa pemodelan SDM mempunyai kinerja lebih baik daripada pemodelan non SDM. Partiwi (2013) menjelaskan analisis kemiskinan dengan pendekatan model SDM di Kabupaten Gianyar. Hasilnya terdapat dependensi spasial pada variabel independen. Dan pramono (2011) melakukan pemodelan Angka kematian bayi (AKB) dengan metode SDM, hasilnya bahwa pola persebaran AKB terdapat pola pengelompokan wilayah dan variabel yang berpengaruh signifikan adalah persentase persalinan dengan bantuan medis dan persentase rumah tangga yang menggunakan air bersih.

Dalam penelitian ini, objek penelitiannya adalah produksi padi di seluruh kabupaten dan kota di Provinsi Jawa Tengah, dengan unit pengamatannya wilayah atau lokasi (spasial). Dengan adanya aspek lokasi ini maka faktor kedekatan antar wilayah juga perlu diperhitungkan. Regresi OLS (*Ordinary Least Square*) adalah metode yang digunakan untuk menganalisis hubungan antara variabel respon (Y) dengan variabel prediktor (X). Namun metode tersebut akan menjadi kurang spesifik bila digunakan terhadap data yang memiliki aspek lokasi karena tidak memperhitungkan faktor kedekatan antar wilayah. Karena itu digunakan metode Regresi Spasial yang merupakan pengembangan dari metode Analisis Regresi Linear, di mana aspek lokasi juga ikut diperhatikan (Anselin, 1988).

Spatial Durbin Model (SDM) merupakan metode Regresi Spasial yang dikembangkan oleh Anselin (1988). Metode ini menggunakan data spasial area sebagai pendekatannya. Maka dari itu, matriks pembobot yang digunakan ialah matriks *Contiguity* yang didasarkan pada persinggungan antar lokasi yang diamati. Pada metode SDM memiliki lag spasial yang diperhitungkan tidak hanya pada variabel respon (Y) saja, namun juga pada variabel prediktor (X). Dari uraian tersebut dapat dirumuskan suatu permasalahan yaitu bagaimana mengidentifikasi faktor-faktor yang mempengaruhi produksi padi kabupaten dan kota di Jawa Tengah dengan memperhatikan aspek lokasi menggunakan metode SDM.

Dalam penelitian difokuskan pada 35 kabupaten dan kota di Provinsi Jawa Tengah, dengan mengambil 6 variabel keadaan dan kondisi di wilayah tersebut. Matriks pembobot yang digunakan adalah matriks queen contiguity yang didasarkan pada persinggungan sisi dan sudut antar lokasi. Diharapkan hasil penelitian ini nantinya dapat menjadi wawasan dan masukan tidak hanya bagi yang ingin memperkaya ilmu mengenai statistika, namun juga bermanfaat bagi pihak pemerintah dalam usahanya meningkatkan produksi padi di Provinsi Jawa Tengah.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang akan diangkat dalam penelitian adalah sebagai berikut:

1. Faktor-faktor apakah yang mempengaruhi produksi padi di Jawa Tengah?
2. Bagaimana pemodelan produksi padi di Jawa Tengah menggunakan model regresi global (OLS) dan metode SDM?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian adalah:

1. Mengidentifikasi faktor-faktor yang mempengaruhi produksi padi di Jawa Tengah
2. Menganalisis model terbaik antara regresi global (OLS) dan metode SDM dalam pemodelan produksi padi.

1.4 Batasan Penelitian

Batasan masalah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Penelitian menggunakan Spatial Durbin Model (SDM) dan Ordinary Least Squares (OLS).
2. Program yang mendukung penelitan adalah SPSS 16.0, Geo-Da, R 3.1.1 dan ARC-View.
3. Variabel pengamatan adalah data produksi dan faktor-faktor yang mempengaruhi tingkat produksi padi pada 35 kabupaten dan kota di Jawa Tengah.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang dapat diambil dari penelitian ini adalah sebagai berkut,

1. Bagi Jurusan Matematika

Penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan referensi bagi mahasiswa jurusan matematika mengenai analisis menggunakan Spatial Durbin Model pada produksi padi di Jawa Tengah.

2. Bagi Kabupaten Pati

   Dapat menjadi solusi dan pertimbangan dalam meningkatkan produksi padi di Jawa Tengah dengan melihat faktor-faktor yang berpengaruh dengan menggunakan Spatial Durbin Model

BAB 2
LANDASAN TEORI

2.1 Regresi linear

Analisis regresi adalah metode statistika yang digunakan untuk memodelkan hubungan antara variabel respon (Y) dengan variabel prediktor (X) Secara umum, variabel respon Y dapat dihubungkan dengan sejumlah k variabel prediktor, sehingga menghasilkan model sebagai berikut:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

Parameter β_j, dimana $j = 0,1, \dots, k$ merupakan koefisien regresi.

Sedangkan model regresi *k* variabel prediktor dan jumlah pengamatan *n* adalah:

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij} + \varepsilon_i \qquad (1)$$

Dengan *i* = 1,2, ..., *n*

Model regresi dapat ditulis dengan bentuk matriks, dengan mengubah persamaan (1) menjadi:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Dimana

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix}, \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

(Montgomery dan Peck, 1991)

a. Penaksiran Parameter $\boldsymbol{\beta}$ dan $\boldsymbol{\sigma^2}$

Model penaksiran parameter model regresi adalah dengan metode kuadrat terkecil (*Ordinary Least Square*), yaitu dengan meminimumkan jumlah kuadrat error. Dalam OLS

errornya diasumsikan identik, independen, dan berdistribusi normal dengan mean nol dan varians konstan.

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i{}^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})$$

$$= \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} + \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$= \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{2}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y} + \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} \qquad (2)$$

Dengan meminimumkan persamaan (2) terhadap $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$:

$\frac{\partial(\varepsilon^T\varepsilon)}{\partial(\beta)} = -\boldsymbol{2}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{2}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = 0$, sehingga diperoleh:

$$\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}$$

sehingga penaksir parameter untuk model (1) adalah $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}$

(Montgomery dan Peck, 1991)

Dimana:

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ = vektor parameter yang ditaksir berukuran $(k+1) \times 1$

$\boldsymbol{X}$ = matriks variabel bebas berukuran $n \times (k+1)$

$\boldsymbol{Y}$ = vektor observasi dari variabel respon berukuran $(n \times 1)$

Sedangkan untuk penaksir σ^2, berdasarkan asumsi regresi dan menurut persamaan (1), maka nilai σ^2 akan sama untuk setiap Y_i, dengan i = 1,2, ..., n.

$$var(Y_i) = E[Y_i - E(Y_i)]^2$$

$$\sigma^2 = E[Y_i - X_i^T\hat{\beta}]^2$$

Penaksir σ^2 diperoleh dari rata-rata sampel sebagai berikut:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - X_i^T\hat{\beta})^2}{n-k-1}$$

Dimana *n* adalah jumlah sampel dan *k* adalah banyaknya parameter

b. Pengujian Model Regresi

1. Uji Kesesuaian Model

Untuk menguji kesesuaian model regresi secara simultan digunakan prosedur uji dengan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$ (artinya variabel prediktor tidak signifikan terhadap variabel respon)

H_1 : paling tidak ada satu $\beta_j \neq 0$ dengan $j = 1,2,\ldots,k$ (artinya variabel prediktor signifikan terhdap variabel respon)

Untuk melakukan uji kesamaan berikut komponen-komponen analisis varians disajikan pada tabel 2.1.

Tabel 2.1. Analisis varians Model Regresi

Sumber Variansi	Jumlah Kuadrat	Derajat Kebebasan	Rata-rata Kuadrat	F_{hitung}
Regresi	$JKR = \hat{\beta}^T X^T Y - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}{n}$	*K*	$RKR = \frac{JKR}{k}$	$F = \frac{RKR}{RKE}$
Error	$JKE = Y^T Y - \hat{\beta}^T X^T Y$	*n-k-1*	$RKE = \frac{JKE}{n-k-1}$	
Total	*JKT = JKR+JKE*	*n-1*		

Statistik Uji:

$$F_{hitung} = \frac{RKR}{RKE}$$

Pengambilan keputusan adalah H_0 ditolak jika $F_{hitung} > F_{a,k,n-k-1}$

2. Uji Parameter Model

Pengujian ini bertujuan untuk menentukan variabel bebas mana saja yang memiliki pengaruh yang signifikan secara statistik terhadapa variabel respon.

Rumus hipotesis:

$H_0 : \beta_j = 0$

$H_1 : \beta_j \neq 0$, dengan j = 1,2,...,k

Statistika Uji:

$$t_{hitung} = \frac{\hat{\beta}_j}{se(\hat{\beta}_j)}$$

Dengan $se(\hat{\beta}_j) = \sqrt{var(\hat{\beta}_j)}$ dan $var(\hat{\beta}_j) = C_{jj}\sigma^2$

$C_{jj} =$ elemen diagonal dari perkalian matriks $(X^T X)^{-1}$

Pengambilan keputusan adalah H_0 ditolak jika $|t_{hitung}| > t_{a/2,n-k-1}$

c. Asumsi –asumsi Model Regresi

Model regresi yang telah diperoleh melalui *Ordinary Least Square* (OLS) akan menghasilkan estimator linear yang tidak bias jika asumsi-asumsi klasik terpenuhi. Menurut Gujarati (2003) pengujian asumsi klasik yang penting adalah uji normalitas residual, uji heteroskedastisitas, uji multikolinearitas dan uji independensi error.

1. Normalitas Error

Secara visual kenormalan dapat dilihat dari plot peluang normal dari error yang diperoleh. Plot ini dinamakan plot kuantil-kuantil atau plot Q-Q. Prosedur pemeriksaan kenormalan data dengan menggunakan plot Q-Q adalah sebagai berikut:

a. Pertama-tama diurutkan terlebih dahulu data yang akan diuji kenormalannya dengan mengurutkan data dari yang terkecil hingga yang paling besar.
b. Untuk setiap y_i, tetapkan nilai $p_i = (i - 0{,}5)/n$
c. Untuk setiap p_i, tetapkan $F^{-1}(p_i)$=$Q(p_i)$ denganbantuan tabel sebaran normal baku. F merupakan fungsi sebaran normal kumulatif, sedangkan $Q(p_i)$ adalah kumulatif normal baku.
d. Buat plot antara y_i dengan $Q(p_i)$ yang merupakan plot Q-Q.

Pola sebaran titik-titik dalam plot Q-Q yang membentuk garis lurus menjadi petunjuk bahwa sebaran data dapat didekati oleh pola sebaran normal.

Uji formal yang dapat digunakan untuk menguji asumsi kenormalan distribusi pada suatu data adalah dengan uji Kolmogorov-Smirnov. Uji Kolmogorov-Smirnov memusatkan perhatian pada simpangan terbesar D (deviasi maksimum), yaitu selisih maksimum dari frekuensi kumulatif distribusi normal dan frekuensi kumulatif observasi.

Hipotesis yang diuji:

H_0 : Data berdistribusi normal

H_1 : Data tidak berdistribusi normal

Statistik uji:

$$D = sup|S(X) - F_0(X)|$$

dimana

$S(X)$ = Probabilitas kumulatif dari data pengamatan

$F_0(X)$ = Probabilitas kumulatif distribusi normal.

Dengan tingkat signfikansi sebesar α, maka diambil keputusan dengan menerima H_0 atau dengan kata lain error mengikuti distribusi normal jika $D > D(1-\alpha)$, dimana $D(1-\alpha)$ merupakan nilai kritis yang diperoleh dari tabel KolmogorovSmirnov atau jika sig.> α

2. Heteroskedastisitas

Heteroskedastisitas terjadi apabila variasi ε_i tidak konstan atau berubah-ubah secara sistematik seiring berubahnya nilai variabel prediktor, untuk mengujinya digunakan uji Glejser (Gujarati, 2003). Uji ini diperoleh dengan meregresikan nilai absolut error dari model yang diperoleh sebelumnya dengan semua variabel prediktor yang digunakan. Jika variabel prediktornya signifikan mempengaruhi nilai absolut error, berarti didalam data terdapat kasus heteroskedastisitas. Sebaliknya, jika tidak ada signifikan berarti asumsi homoskedastisitas terpenuhi.

3. Multikolinearitas

Multikolinearitas berarti adanya hubungan linear yang sempurna atau pasti diantara beberapa atau semua variabel penjelas dari model regresi (Gujarati, 2003). Beberapa indikator yang bisa digunakan untuk mendeteksi adanya multikolinieritas, antara lain :

1. Jika nilai R^2 sangat tinggi tetapi hanya sedikit atau bahkan tidak ada satupun koefisien regresi yang signifikan secara statistik berdasarkan uji t.
2. Pada model dengan dua variabel independen, kolinearitas dapat diketahui dengan melihat nilai korelasi antara dua variabel tersebut. Jika korelasi tinggi, maka dapat dipastikan terjadi kolinearitas antara dua variabel independen tersebut.
3. Menghitung nilai *Variance Inflation Factors* (VIF) dengan rumus:

$$(\text{VIF})_j = \frac{1}{1 - {R_j}^2}$$

Dengan ${R_j}^2$ adalah koefisien determinasi variabel ke-j.

Nilai VIF yang semakin besar akan menunjukkan multikolinieritas yang semakin kompleks. Jika nilai VIF > 10, maka secara signifikan dapat disimpulkan bahwa terdapat multikolinieritas.

4. Independensi Error

Satu asumsi penting dari model regresi linear klasik bahwa tidak ada korelasi antar errornya. Tujuan dari uji ini adalah menguji apakah dalam model regresi linear ada korelasi antara error ke-*i* dengan error pada *i*-1 (sebelumnya). Jika asumsi ini dilanggar, akan diperoleh masalah serial korelasi atau autokorelasi.

Cara mendeteksi keberadaan autokorelasi yaitu dengan menggunakan uji Durbin-Watson. Langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

a. Menghitung d dengan rumus:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^{n}(e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2}$$

(Gujarati,2003)

Keterangan :

d = nilai Durbin-Watson

e = error ke-i

e_{i-1} = error pada i-1

b. Untuk ukuran sampel (n) tertentu dan banyaknya variabel independen (k) tertentu, tentukan nilai kritis batas bawah (d_L) dan batas atas (d_U)

c. Jika hipotesis H_0 menyatakan tidak ada serial korelasi positif, maka nilai d hitung dibanding dengan nilai d_L dan d_U tabel, dengan aturan sebagai berikut:

$d < d_L$:H_0 ditolak

$d > d_U$: H_0 diterima

$d_L < d < d_U$: Pengujian tidak meyakinkan

Jika hipotesis H_0 menyatakan tidak ada serial korelasi negatif, maka nilai d hitung dibandingkan dengan nilai d_L dan d_U tabel, dengan aturan sebagai berikut:

$d > 4 - d_L$: H_0 ditolak

$d < 4 - d_U$: H_0 diterima

$4 - d_U \leq d \leq 4 - d_L$: Pengujian tidak meyakinkan

2.2 Spatial Durbin Model

Spatial Durbin Model (SDM) merupakan model regresi yang memiliki bentuk seperti Spatial Autoregressive Model (SAR) yang memiliki spasial lag pada variabel respon (Y) seperti pada persamaan berikut:

$$\boldsymbol{Y} = \rho \boldsymbol{WY} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Hanya saja, SDM memiliki ciri khas adanya spasial lag pada variabel prediktor (X) (Anselin, 1988). Model SDM dinyatakan pada persamaan berikut:

$$y_i = \rho \sum_{j=1}^{n} w_{ij} y_j + \alpha + \sum_{p=1}^{k} \beta_i \, x_{ip} + \sum_{p=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \theta_p (w_{ij} x_{pj}) + \varepsilon_i$$

$$\boldsymbol{Y} = \rho \boldsymbol{WY} + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{WX\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

(Le Sage,2009)

Dengan:

Y = vektor variabel respon, berukuran *n* x 1

X = matriks variabel prediktor, berukuran *n* x k

ρ = koefisien lag spasial variabel respon (*y*)

$\boldsymbol{\alpha}$ = vektor parameter konstan, berukuran *n* x 1

$\boldsymbol{\beta}$ = vektor parameter regresi, berukuran *k* x 1

$\boldsymbol{\theta}$ = vektor parameter lag spasial variabel prediktor berukuran *k* x l

$\boldsymbol{W}$ = matriks pembobot, berukuran *n* x *n*

$\boldsymbol{\varepsilon}$ = vektor error, berukuran *n* x 1

Adanya variabel Y pada sisi kanan model SDM menunjukkan adanya kebergantungan spasial pada variabel respon yang berada di lokasi yang bersinggngan dengan lokasi *i* yang diamati.

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_k \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & w_{n3} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Atau dapat juga ditulis seperti pada persamaan berikut:

$$\boldsymbol{Y} = \rho \boldsymbol{WY} + \boldsymbol{Z\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Dengan:

$\boldsymbol{Z} = [\mathbf{1} \quad \boldsymbol{X} \quad \boldsymbol{WX}]$dan $\boldsymbol{\delta} = [\boldsymbol{\alpha} \quad \boldsymbol{\beta} \quad \boldsymbol{\theta}]^{\mathbf{T}}$

a. Estimasi Parameter *Spatial Durbin Model* (SDM)

Penaksiran parameter SDM dilakukan dengan menggunakan dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Pembentukan fungsi likelihood dilakukakan melalui error (ε) sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y} = \rho\boldsymbol{WY} + \boldsymbol{Z\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{Y} - \rho\boldsymbol{WY} - \boldsymbol{Z\delta}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\delta} \tag{3}$$

$$\mathrm{L}(\sigma^2; \varepsilon) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\varepsilon^T\varepsilon)\right) \tag{4}$$

Dilakukan diferensi persamaan (3) terhadap **Y**, sehingga didapatkan fungsi Jacobian $J = \left|\frac{\partial_\varepsilon}{\partial_y}\right| = |\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W}|$. Fungsi likelihood untuk model SDM diperoleh dengan menambahkan fungsi Jacobian dan substitusi persamaan (3) ke dalam persamaan (4).

Persamaan yang dihasilkan adalah :

$$\mathrm{L}(\rho, \delta, \sigma^2|y) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} |\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W}| \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\delta})^T((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\delta}))\right)$$

Sehingga fungsi *ln likelihood* adalah sebagai berikut:

$$\ln(\mathrm{L}) = \frac{n}{2} ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right) + ln|\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W}| + \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\delta}\right)^T\left((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\delta}\right)\right)\right)$$

$$\ln(\mathrm{L}) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2} ln(\sigma^2) + ln|\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W}| + \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\delta}\right)^T\left((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\delta}\right)\right)\right) \tag{5}$$

1. Estimasi Parameter $\boldsymbol{\rho}$

Estimasi parameter ρ diperoleh dengan cara meregresikan variabel Y terhadap Z dan WY terhadap Z seperti pada persamaan (6).

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z\delta_0} + \boldsymbol{e_0} \text{dan } \boldsymbol{WY} = \boldsymbol{Z\delta_d} + \boldsymbol{e_d} \tag{6}$$

Hasil estimasi parameter persamaan (6) adalah

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{0}} = (\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y} \text{dan } \widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{d}} = (\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{Y} \quad (7)$$

Dari persamaan (7) akan didapatkan residual $\boldsymbol{e}_{\mathbf{0}}$ dan $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{d}}$ yang akan disubstitusikan pada parameter σ^2, seperti pada persamaan berikut:

$$\boldsymbol{e}_{\mathbf{0}} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{0}} \text{dan } \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{d}} \quad (8)$$

$$\sigma^2 = \frac{\{[\boldsymbol{e}_{\mathbf{0}} - \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{d}}]^T[\boldsymbol{e}_{\mathbf{0}} - \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{d}}]\}}{n} \quad (9)$$

Dengan menyubtitusikan persamaan (9) pada persamaan (5) didapatkan fungsi logaritma natural untuk mengestimasi ρ.

$$\ln\big((\mathrm{L}(\boldsymbol{\rho})\big) = C - \frac{n}{2}\ln([e_0 - \rho e_d]^T[e_0 - \rho e_d]) + ln|\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W}|$$

Dimana C adalah konstanta yang tidak bergantung pada parameter ρ. Besar parameter ρ adalah pada rentang ${}^{1}/_{\lambda_{min}} < \rho < {}^{1}/_{\lambda_{max}}$ dengan λ adalah nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{W}$yang terstandarisasi (Le Sage, 1999).

2. Estimasi Parameter $\boldsymbol{\delta}$

Estimasi parameter $\boldsymbol{\delta}$ pada model SDM diperoleh dengan memaksimumkan fungsi *ln likelihood* dari persamaan (5) yaitu dengan mendiferensikan persamaan tersebut terhadap $\boldsymbol{\delta}$**.**

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \delta} = 0$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \delta} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\big(((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\delta}\big)^T\big((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\delta})\big)\right)}{\partial \delta}$$

$$0 = \frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\delta})$$

$$\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}$$

Sehingga estimasi parameter $\boldsymbol{\delta}$adalah:

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}} = (\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{I} - \hat{\rho}\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}} = (\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y} - \hat{\rho}(\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{Y} = \widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{0}} - \hat{\rho}\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{d}}$$

Estimator $\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{0}}$dan $\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{d}}$diperoleh dari model $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z\delta_0} + \boldsymbol{e_0}$dan $\boldsymbol{WY} = \boldsymbol{Z\delta_d} + \boldsymbol{e_d}$ melalui model OLS, sehingga estimasi parameter $\boldsymbol{\delta}$ menjadi:

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}} = \widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{0}} - \hat{\rho}\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{d}} \tag{10}$$

3. Estimasi Parameter $\boldsymbol{\sigma^2}$

Estimasi parameter σ^2 diperoleh dengan memaksimumkan fungsi *ln likelihood* dari persamaan (5), yaitu dengan mendiferensikan persamaan tersebut terhadap σ^2.

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\left(\left(((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\delta})^T\left((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\delta})\right)\right)$$

$$0 = -n + \frac{1}{\sigma^2}\left(\left(((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\delta})^T\left((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\delta})\right)\right)$$

$$\sigma^2 = \frac{\left(\left(((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\delta})^T\left((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\delta})\right)\right)}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\left((y - \rho\boldsymbol{WY} - \boldsymbol{Z\delta})^T(y - \rho\boldsymbol{WY} - \boldsymbol{Z\delta})\right)}{n}$$

Maka estimasi parameter untuk σ^2 adalah

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left((\boldsymbol{Y} - \hat{\rho}\boldsymbol{WY} - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\delta}})^T(\boldsymbol{Y} - \hat{\rho}\boldsymbol{WY} - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\delta}})\right)}{n} \tag{11}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (10) ke dalam persamaan (11) maka akan menjadi persamaan berikut:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left(\left(\boldsymbol{Y} - \hat{\rho}\boldsymbol{WY} - \boldsymbol{Z}(\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{0}} - \hat{\rho}\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{d}})\right)^T\left(\boldsymbol{Y} - \hat{\rho}\boldsymbol{WY} - \boldsymbol{Z}(\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{0}} - \hat{\rho}\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{d}})\right)\right)}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left(\left(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{0}} - \hat{\rho}(\boldsymbol{WY} - \widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{d}})\right)^T\left(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{0}} - \hat{\rho}(\boldsymbol{WY} - \widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{d}})\right)\right)}{n}$$

Kemudian substitusikan persamaan (8)terhadap persamaan (12)

$$\sigma^2 = \frac{\{[\boldsymbol{e_0} - \hat{\rho}\boldsymbol{e_d}]^T[\boldsymbol{e_0} - \hat{\rho}\boldsymbol{e_d}]\}}{n}$$

b. Pengujian Model SDM

1. Uji Kesesuaian Model

Untuk menguji kesesuaian model SDM digunakan prosedur uji dengan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \rho = \beta_j = \theta_j = 0$, dengan j = 1,2,...,k

$H_1 : \rho \neq 0$ atau paling tidak ada satu $\beta_j \neq 0, \theta_j \neq 0$

Statistik uji dinyatakan pada persamaan berikut (Kosfeld, 2010):

$$F_{hitung} = \frac{(JKT - JKR)/k}{JKR/(n-k-1)}$$

dengan:

$$JKT = \sum_{i=1}^{n} (y - \bar{y})^2$$

$$JKR = \sum_{i=1}^{n} (y - \hat{y}_i)^2$$

Pengambilan keputusan H_0 ditolak jika nilai $F_{hitung} > F_{a,k,n-k-1}$

2. Uji signifikansi Parameter

Pengujian signifikansi parameter pemodelan spasial pada penelitian ini menggunakan uji Wald (Anselin, 1988). Untuk menguji parameter ρ digunakan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \rho = 0$

$H_1 : \rho \neq 0$

Statistika uji dinyatakan pada persamaan:

$$Wald_\rho = \frac{\hat{\rho}^2}{var(\hat{\rho})}$$

Sedangkan untuk menguji parameter :

$H_0 : \beta_j = 0$

$H_1 : \beta_j \neq 0$, *j= 1,2,…,k*

Dengan statistik uji:

$$Wald_\beta = \frac{\widehat{\beta_j}^2}{var(\widehat{\beta_j})}$$

Untuk parameter θ menggunakan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \theta_j = 0$

$H_1 : \theta_j \neq 0$, *j= 1,2,…,k*

Statistik uji:

$$Wald_\theta = \frac{\widehat{\theta_j}^2}{var(\widehat{\theta_j})}$$

Dengan:

$var(\hat{\rho})$ = elemen diagonal dari matriks varians yang berkorespondensi terhadap ρ

$var(\widehat{\beta_j})$ = elemen diagonal dari matriks varians yang berkorespondensi terhadap β

$var(\widehat{\theta_j})$ = elemen diagonal dari matriks varians yang berkorespondensi terhadap θ

Pengambilan keputusan adalah H_0 ditolak jika nilai $Wald > X^2_{\alpha,1}$

c. Uji Efek Spasial

Untuk mengetahui adanya efek spasial yaitu *spatial dependence* dan *spatial heterogeneity* pada data maka dilakukan metode pengujian yang berbeda. Pengujian *spatial dependence* menggunakan metode Moran's I sedangkan pengujian *spatial heterogeneity* menggunakan *Breush-Pagan test (BP test).*

1. Uji Dependensi Spasial

Uji dependensi spasial atau autokorelasi antar lokasi dilakukan dengan menggunakan metode Moran's I (I_M). Hipotesis yang digunakan adalah

$H_0 : I = 0$ (tidak ada dependensi antar lokasi)

$H_1 : I \neq 0$ (ada dependensi antar lokasi)

Statistika uji dinyatakan pada persamaan berikut:

$$Z_{hitung} = \frac{I - E(I)}{\sqrt{var(I)}}$$

Dimana

$$I = \frac{n}{S_o} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$E(I) = -\frac{1}{n-1}$$

$$var(I) = \frac{n^2 S_1 - nS_2 + 3{S_0}^2}{(n^2 - 1){S_0}^2} - [E(1)]^2$$

$S_1 = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}^{n}(w_{ij} + w_{ji})^2$ $\quad$ $S_2 = \sum_{i \neq j}^{n}(w_{i0} + w_{0i})^2$

$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij}$ $\quad$ $w_{i0} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}$ $\quad$ $w_{0i} = \sum_{j=1}^{n} w_{ji}$

Dimana:

x_i = data ke-i (i=1,2,…,n)

x_j = data ke-j (j=1,2,…,n)

$\bar{x}$ = rata-rata data

$var(I)$ = varian Moran's I

$E(I)$ = *expected value* Moran's I

Pengambilan keputusan H_0 ditolak jika $|Z_{hitung}| > Z_{a/2}$. Nilai I berada pada kisaran antara -1 dan 1.

2. Uji Heterogenitas Spasial

Pengujian ini bertujuan untuk mengetahui adanya heterogenitas spasial. Uji yang digunakan adalah *Breusch-Pagan Test* (Anselin, 1988) yang memiliki hipotesis sebagai berikut:

H_0 : ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2 = \cdots = {\sigma_n}^2 = \sigma^2$ (terdapat homoskedastisitas)

H_0 : minimal terdapat satu ${\sigma_1}^2 \neq \sigma^2$ (terdapat heteroskedastisitas)

Nilai *Breusch-Pagan Test* :

$$BP = \frac{1}{2}\boldsymbol{f^T Z}(\boldsymbol{Z^T Z})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Z^T f} \sim \boldsymbol{X_k^2}$$

Dengan elemen vektor f adalah :

$$f_i = \left(\frac{{\varepsilon_i}^2}{\sigma^2} - 1\right)$$

Dimana :

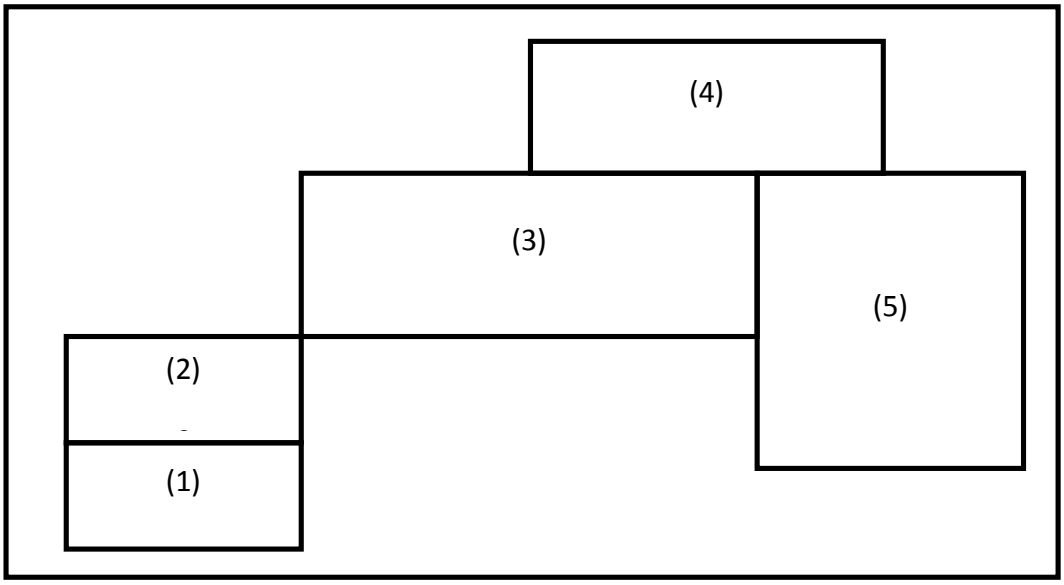
ε_i = error observasi ke-i

Z = matriks berukuran $n \times (k+1)$ yang berisi vektor konstan.

H_0 ditolak jika$BP > \boldsymbol{X_{a,k}^2}$

d. Matriks Pembobot Spasial

Matriks pembobot spasial bisa didapatkan melalui beberapa metode, salah satunya ialah metode *Queen Contiguity* yang akan digunakan dalam penelitian ini. Metode ini mendefinisikan $w_{ij} = 1$ bila lokasi bersinggungan sisi atau sudut dengan lokasi lainnya, sedangkan $w_{ij} = 0$ bila tidak bersinggungan. Seperti yang terlihat pada gambar 2.1, dimana terdapat lima entitas atau area sebagai subjek pengamatan.



Gambar 2.1. Ilustrasi Persinggungan

Untuk baris pertama didapat $w_{12} = 1$ sedangkan sisanya nol. Kemudian persinggungan area (2), (3), (4), dan (5) didapat $w_{23} = 1$, $w_{34} = 1$, $w_{35} = 1$, dan $w_{45} = 1$, seluruh elemen sisanya bernilai nol. Sehingga matriks pembobot yang terbentuk adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(Le Sage, 1999)

e. Pemilihan Model Terbaik

Pemilihan model terbaik ditentukan melalui nilai koefisien determinasi (R^2) dan *Akaike's Information Criterion* (AIC).

1. Koefisien determinasi (R^2)

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{S_{yy}}$$

Dimana:

$$S_{yy} = \boldsymbol{y^T y} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y_1}\right)^2}{\boldsymbol{n}}$$

(Montgomery dan Peck, 1991)

Nilai dari koefisien determinasi berada pada kisaran $0 \leq R^2 \leq 1$. Besarnya nilai R^2 menunjukkan besarnya tingkat kepercayaan terhadap model.

2. *Akaike's Information Criterion* (AIC)

$$AIC = -2\log\left(L\left(\hat{\theta}\middle|y\right)\right) + 2k$$

(Hu, 2007)

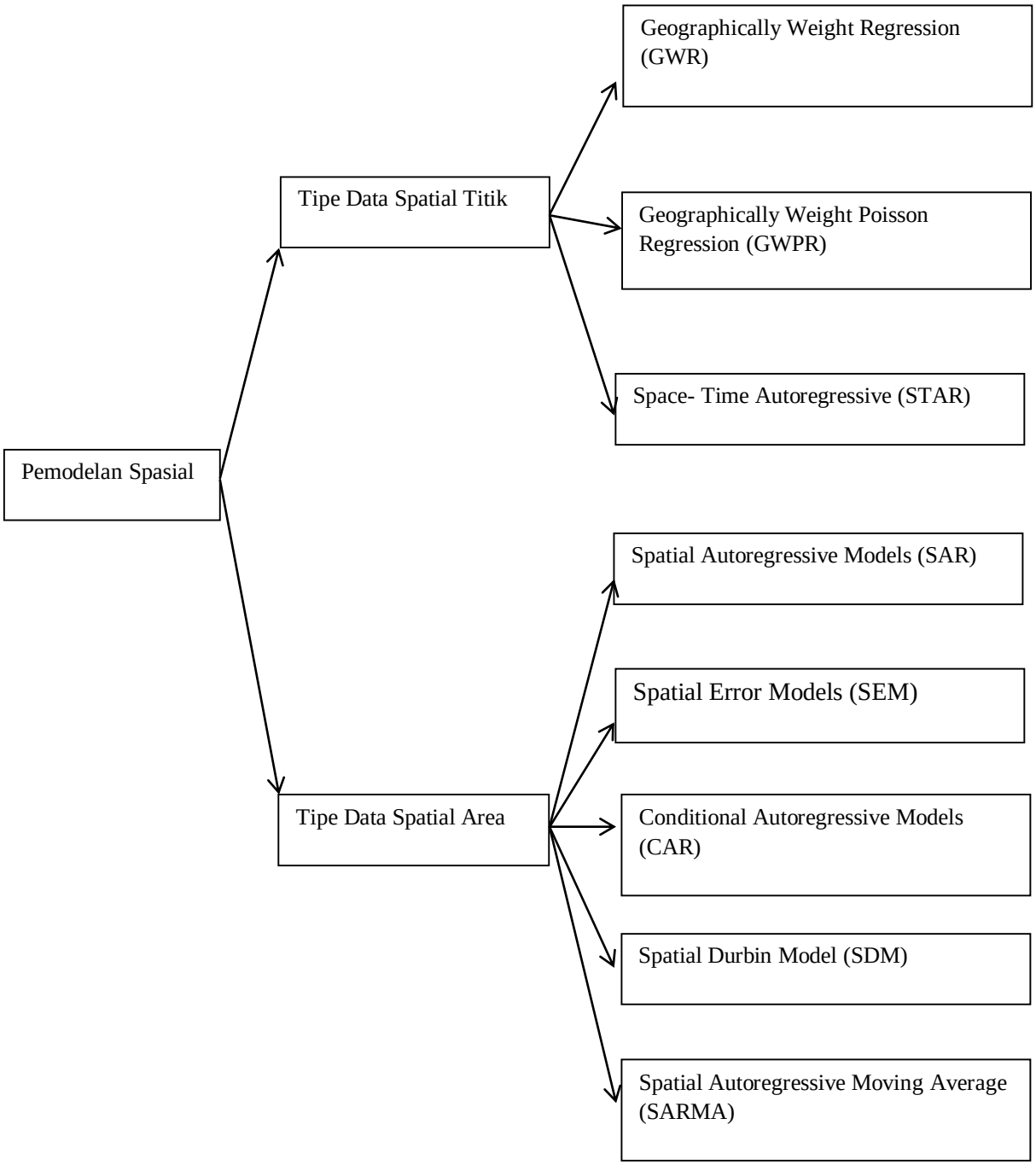
Dimana:

$L\left(\hat{\theta}\middle|y\right)$ = fungsi likelihood parameter yang diestimasi

k = Jumlah parameter yang diestimasi

Model terbaik ditentukan berdasarkan nilai AIC yang paling kecil.

2.3 Kerangka Pemikiran



Gambar 2.2. Kerangka Pemikiran

BAB 5

SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan, diperoleh beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Faktor-faktor yang secara global mempengaruhi produksi padi di Jawa Tengah adalah luas lahan sawah irigasi, banyaknya alat pembersih gulma manual, banyaknya alat pemberantas tikus, dan pompa air
2. Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh model akhir OLS sebagai berikut

   $$\hat{Y} = 21725{,}89 + 8{,}29X_1 + 5{,}728X_2 + 40{,}181X_3 + 8{,}243X_5$$

   Keempat faktor yaitu luas lahan sawah irigasi, banyaknya alat pembersih gulma manual, alat pemberantas tikus, dan pompa air berkontribusi terhadap produksi padi sebesar 92%, sisanya 8% dipengaruhi variabel lain diluar model regresi ini.

   Untuk pemodelan SDM menunjukkan tidak memiliki efek spasial, hal ini ditunjukkan dari signifikansi uji Moran's I, sehingga tidak dapat dilanjutkan.

5.2 Saran

Saran yang dapat diberikan dari hasil penelitian ini adalah :

1. Pemodelan SDM yang digunakan saat ini belum bisa memilih variabel prediktor yang berpengaruh dikarenakan tidak memiliki dependensi spasial. Untuk bisa menggunakan analisis regresi spasial maka perlu dilakukan pemilihan data yang memenuhi persyaratan spasial sehingga bisa dibandingkan OLS dan SDM.
2. Untuk penelitian lebih lanjut dapat memasukkan faktor lain, misalnya unsur situasi dan kondisi alam seperti hari hujan dan curah hujan.
3. Untuk Pemerintah Provinsi Jawa Tengah hendaknya memperhatikan faktor-faktor yang berpengaruh signifikan terhadap produksi padi di Jawa Tengah sehingga diharapkan dapat ditingkatkan.

DAFTAR PUSTAKA

Anselin, L. 1988. *Spatial Econometrics: Methods and Models*. Kluwer Academic Publishers. The Netherlans

Bekti, R. D. 2011. *Spatial Durbin Model (SDM) untuk Mengidentifikasi Faktor-faktor yang Berpengaruh terhadap Kejadian Diare di Kabupaten Tuban*. Tesis. Surabaya: FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

BPS (Badan Pusat Statistik). 2014. *Jawa Tengah dalam Angka 2014*. BPS Provinsi Jawa Tengah.

Enjelita, R., M. Situmorang, & G. Tarigan. 2014. Analisa Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Hasil Produksi Padi di Deli Serdangan. *Saintia Matematika*. Vol.2, No.1.

Gujarati, D.N. 2003. *Basiceconometrics*. Fourth edition. McGraw-Hill. New York.

Hu, S. 2007. *Akaike Information Criterion*. North Carolina State University. USA.

Kosfeld, R.2010. *Spatial Econometrics*. University of Kassel. http://www.uni-kassel.de/~rkosfeld/lehre/spatial.html (18 April 2015)

LeSage, J. P. Dan R. K. Pace. 2009. *Introduction to Spatial Econometrics*. R Press. Boca Ration.

LeSage, J.P. 1999. *The Theory and Practice of Spatial Econometrics*. Universityof Toledo.

Montgomery, D. C. Dan E. A. Peck. 1991. *Introduction to Linear Regression Analysis*. John Wiley and Sons. USA.

Mubyarto.1989. *Pengantar Ekonomi Pertanian*. Jakarta: LP3S

Novita, L., M. Salamah, & Sutikno. 2012. Pemodelan Maternal Mortality di Jawa Timur dengan Pendekatan Geographically Weighted Poisson Regression (GWPR). FMIPA ITS.

Pramono, M.S., N.B. Aditie, & Sutikno. 2011. Regresi Spatial Durbin Model untuk Mengidentifikasi Faktor-Faktor yang Berpengaruh Pada Angka Kematian Bayi di Jawa Timur. Pusat Humaniora, FMIPA ITS.

Pratiwi, L.P.S., I.G.A.Ayu Made Srinadi, & M.Susilawati. 2013. Analisis Kemiskinan dengan Pendekatan Model Regresi Spasial Durbin. *E-jurnal Matematika*. Volume 2, No.3.

Vivekanandan, N., Dan Rahul.S.J. 2012. Optimization of Hydrometric Network Using Spatial Regression Approach. *Bonfring International Journal of Industrial Engineering and Management Science*. Vol.2.

Widodo, R.B. 2014.Pemodel Spasial Resiko Kebakaran Hutan (Studi Kasus Provinsi Jambi, Sumatera). *Jurnal Pembangunan Wilayah dan Kota*. Vol. 10(2):127-138.