IDEAL PADA HEMIRING

Skripsi

disajikan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

Dani Lidiana

4111413038

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2017

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang – undangan

Semarang, 25 Agustus 2017

METERAI TEMPEL

TGL

BD51CAEF214517008

6000

ENAM RIBU RUPIAH

Dani Lidiana

4111413038

iii

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Ideal Pada Hemiring

disusun oleh

Dani Lidiana

4111413038

telah dipertahankan dihadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES pada tanggal 25 Agustus 2017

Panitia:

Ketua	Sekretaris
Prof. Zaenuri, SE, M.Si, Akt.	Drs. Arief Agoestanto, M.Si.
196412231988031001	196807221993031005

Ketua Penguji

Drs. Mashuri, M.Si

196708101992031003

Anggota Penguji/Pembimbing I	Anggota Penguji/Pembimbing II
Dr. Isnarto, M.Si.	Dra. Kristina Wijayanti, M.S.
196902251994031001	196012171986012001

iv

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

Barang siapa bertakwa kepada Allah maka Dia akan membukakan jalan keluar baginya, dan Dia memberinya rizki dari arah yang tidak disangka-sangkanya. Dan barang siapa yang bertawakal kepada Allah, niscaya Allah akan mencukupkan (keperluan)nya. Sesungguhnya Allah melaksanakan urusan-Nya. Sungguh, Allah telah mengadakan ketentuan bagi setiap sesuatu *(QS. At-Talaq: 2-3)*.

PERSEMBAHAN

Teruntuk keluargaku, Bapak, Ibu, dan saudari kecilku yang senantiasa mendukung dan selalu menjadi penyemangat dalam setiap langkahku.

PRAKATA

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang Maha Pengasih dan Penyayang, atas limpahan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**IDEAL PADA HEMIRING**".

Penulis menyadari dalam menyelesaikan skripsi ini memperoleh banyak bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Untuk itu, dengan rasa hormat, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum, selaku Rektor Universitas Negeri Semarang;
2. Prof. Dr. Zaenuri S.E, M.Si,Akt., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang;
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang;
4. Drs. Mashuri M.Si., selaku dosen penguji dan Ketua Prodi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang;
5. Drs. Sugiman M.Si., selaku dosen wali Prodi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang angkatan 2013;
6. Dr. Isnarto, M.Si., selaku dosen pembimbing utama, yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penyelesaian skripsi ini;
7. Dra. Kristina Wijayanti, M.S., selaku dosen pembimbing pendamping, yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penyelesaian skripsi ini;

8. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika serta staf Tata Usaha Universitas Negeri Semarang yang telah membekali penulis dengan ilmu selama mengikuti perkuliahan dan penulisan skripsi;
9. Orang tua dan keluarga yang selalu memberikan doa, dukungan, dan semangat;
10. Teman-teman seperjuangan Matematika angkatan 2013 yang selalu menghibur, memberikan motivasi, dorongan dan doa;
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah memberikan bantuan.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari pembaca.

Semarang, 25 Agustus 2017

Penulis

vii

Abstrak

Lidiana, Dani, 2017. *Ideal Pada Hemiring*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Pembimbing Utama Dr. Isnarto, M.Si. dan Pembimbing Pendamping Dra. Kristina Wijayanti, M.S.

Kata Kunci: Hemiring, Ideal Hemiring, Ideal Prima, Ideal Semiprima

Misalkan H himpunan tak kosong dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Himpunan H dinamakan hemiring apabila memenuhi i) (H,+) merupakan monoid komutatif, ii) (H,·) merupakan semigrup, ii) (H,+, ·) memenuhi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan, iv) untuk setiap $a \in H$ berlaku $a0 = 0a = 0$, dengan 0 merupakan elemen netral pada operasi penjumlahan. Himpunan bagian tak kosong I dari hemiring H merupakan ideal di H apabila memenuhi kondisi i) jika $a, b \in I$ maka $a + b \in I$, ii) jika $a \in I$ dan $h \in H$ maka $ha \in I$ dan $ah \in I$. Ideal utama yang dibangun oleh a, ditulis dengan (a) didefinisikan sebagai berikut $(a) = \{na + sa + at + \sum_{i=1}^{n} s_i a t_i | n \in N, s, t, s_i, t_i \in H\}$. Penelitian ini mengkaji bentuk-bentuk ideal hemiring, sifat-sifat yang berlaku di hemiring, dan sifat-sifat yang berlaku di ideal hemiring. Bentuk-bentuk ideal yang dikaji adalah ideal prima, ideal semiprima, dan ideal maksimal. Hasilnya diperoleh bahwa terdapat sifat dalam ring atau semiring juga berlaku di hemiring. Misalkan H hemiring, dan ideal I. Kondisi berikut adalah ekuivalen i) I ideal prima, ii) $\{ahb | h \in H\} \subseteq I$ jika dan hanya jika $a \in I$ atau $b \in I$, iii) jika $a, b \in H$ dan $(a)(b) \subseteq I$ maka berlaku $a \in I$ atau $b \in I$. Misalkan H hemiring, dan ideal I. Kondisi berikut adalah ekuivalen i) Iideal semiprima, ii) $\{ara | r \in H\} \subseteq I$ jika dan hanya jika $a \in I$. Hasil lainnya menunjukkan terdapat sifat dalam ring dan semiring yang tidak berlaku di hemiring, yaitu tidak semua ideal maksimal di hemiring merupakan ideal prima.

DAFTAR ISI

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut Setiawan (2014:20) mengatakan bahwa: "Suatu cabang matematika yang mempelajari struktur aljabar dinamakan aljabar modern atau abstrak (*abstract algebra*). Sistem aljabar (*algebraic system*) terdiri dari suatu himpunan objek, satu atau lebih operasi pada himpunan bersama dengan hukum tertentu yang dipenuhi oleh operasi."

Menurut Fraleigh (1999), misalkan S himpunan tak kosong. Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah aturan yang mengawankan setiap pasangan terurut $(a, b) \in S$ x S dengan tepat satu elemen di S. Jika operasi biner pada S memenuhi sifat asosiatif, maka S disebut semigrup. Jika semigrup S mempunyai elemen identitas atau elemen netral, maka S disebut monoid. Jika setiap elemen di monoid S memiliki invers di S, maka S disebut grup.

Salah satu kajian dalam struktur aljabar adalah ring. Ring merupakan kajian dalam struktur aljabar dengan dua operasi didealamnya. Menurut Fraleigh (1999) himpunan tak kosong R dengan operasi perkalian dan penjumlahan disebut ring apabila memenuhi i) (R,+) merupakan grup komutatif, ii) (R,·) merupakan semigrup, iii) (R,+,·) memenuhi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

Kajian lain dalam struktur aljabar adalah semiring, semiring merupakan kajian struktur aljabar yang lebih luas dari ring. semiring merupakan perluasan dari ring dengan mengurangi syarat keberadaan invers pada operasi penjumlahan. Gollan (2003) mendefinisikan semiring adalah himpunan tak kosong S dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang memenuhi kondisi i) (S,+) merupakan monoid komutatif , ii) (S, ·) merupakan monoid, iii) (S,+, ·) memenuhi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan, iv) untuk setiap $a \in S$ berlaku $0a = 0 = a0$, dengan 0 adalah elemen netral operasi penjumlahan di S.

Kajian lain dalam struktur aljabar yang lebih luas dari ring dan semiring adalah hemiring. Hemiring merupakan perluasan dari ring dengan mengurangi syarat keberadaan invers pada operasi penjumlahan, dan keberadaan identitas pada operasi perkalian. Giri dan Chide (2014) mendefinisikan hemiring sebagai himpunan tak kosong H dengan dua operasi penjumlahan dan perkalian memenuhi kondisi i) (H,+) merupakan monoid komutatif, ii) (H, ·) merupakan semigrup, iii) (H,+,·) memenuhi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan, dan, iv) untuk setiap $a \in H$ memenuhi sifat $0a = 0 = a0$, dimana 0 adalah elemen netral operasi penjumlahan di H.

Dalam ring terdapat subring, yaitu himpunan bagian dari ring yang mempunyai struktur sama dengan ring. Selain subring, dalam ring juga terdapat ideal, yaitu himpunan bagian dari ring yang lebih khusus dari subring. Ideal M dari ring R dikatakan ideal maksimal apabila $M \neq R$ dan tidak ada ideal lain di R yang memuat M, (Fraleigh, 1999). Jika R ring komutatif dan P ideal di R maka P dikatakan ideal prima apabila $ab \in P$ mengakibatkan $a \in P$ atau $b \in P$ (Fraleigh, 1999).

Sama halnya dengan ring, dalam hemiring juga terdapat ideal hemiring. Tampak perbedaan yang jelas antara ideal ring dan ideal hemiring. Menurut Giri (2014) himpunan bagian tak kosong I dari hemiring H merupakan ideal di H apabila memenuhi kondisi i) jika $a, b \in I$ maka $a + b \in I$, ii) jika $a \in I$ dan $h \in H$ maka $ha \in I$ dan $ah \in I$. Terdapat himpunan bagian lain dari hemiring H dengan sifat khusus didalamnya, menurut Giri dan Chide (2014) himpunan bagian tak kosong M dari hemiring H merupakan m-sistem jika dan hanya jika $\forall, b \in M, \exists h \in H$ sehingga berlaku $ahb \in M$. Himpunan bagian tak kosong A dari hemiring H merupakan p-sistem jika dan hanya jika $\forall a \in A, \exists h \in H$ sehingga berlaku $aha \in A$ (Giri & Chide, 2014).

Terdapat sebuah sifat dalam ring yang menyebutkan bahwa pada ring komutatif dengan elemen satuan berlaku setiap ideal maksimal merupakan ideal prima. Ketiadaan elemen identitas pada operasi perkalian di hemiring mengakibatkan sifat tersebut tidak berlaku pada ideal maksimal di hemiring. Perlu adanya tambahan syarat atau perlakuan khusus dalam ideal maksimal di hemiring agar sifat tersebut dapat berlaku.

Dari uraian di atas, penulis tertarik untuk mengkaji lebih dalam mengenai ideal di hemiring, bagaimana ideal di hemiring dan sifat-sifat yang berlaku pada ideal ring apakah berlaku pada ideal hemiring, serta mengkaji lebih luas jenis-jenis ideal yang ada pada hemiring seperti ideal prima pada hemiring, ideal semiprima pada hemiring, k-ideal, h-ideal, dan ideal lain pada hemiring.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana sifat-sifat yang berlaku pada p-sistem dan m-sistem di hemiring?
2. Bagaimana sifat-sifat yang berlaku pada ideal hemiring?

1.3 Tujuan Penelitian

Dari rumusan permasalahan di atas, tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui sifat-sifat yang berlaku pada p-sistem dan m-sistem di hemiring.
2. Mengetahui sifat-sifat yang berlaku pada ideal hemiring.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, penulis membatasi masalah yang diteliti pada sifat-sifat di hemiring dan subhemiring, p-sistem, m-sistem, ideal pada hemiring, jenis jenis ideal pada hemiring, dan sifat-sifat ideal pada hemiring.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat dari berbagai pihak

1. Bagi Penulis

   Dapat mengetahui lebih dalam mengenai kajian teori di hemiring, ideal pada hemiring, sifat-siat yang ada pada ideal hemiring, dan jenis jenis ideal di hemiring.

2. Bagi Pembaca

   Dapat menjadi referensi tentang ideal pada hemiring.

3. Bagi Instansi

   Dapat menjadi referensi penelitian tentang hemiring.

1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan sistemetika penulisan sebagai berikut.

1.6.1 Bagian Awal

Bagian awal skripsi ini berisi halaman judul, pernyataan, pengesahan, motto dan persembahan, kata pengantar, abstrak, daftar isi, daftar tabel, daftar, gambar, dan daftar lampiran.

1.6.2 Bagian Isi

Bagian isi skripsi secara garis besar terdiri dari lima bab, yaitu

BAB 1 PENDAHULUAN

Bab ini berisi mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, dan sistematika penelitian.

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi mengenai teori-teori yang mendukung teori hemiring yaitu teori himpunan, semigrup, monoid, grup, ring, dan semiring.

BAB 3 METODE PENELITIAN

Bab ini berisi tentang studi pustaka, dan penarikan kesimpulan.

BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi mengenai penyelesaian dari permasalahan yang diungkapkan, yaitu teori ideal pada hemiring.

BAB 5 PENUTUP

Bab ini berisi tentang simpulan dari pembahasan dan saran yang berkaitan dengan simpulan.

1.6.3 Bagian Akhir

Bagian akhir skripsi meliputi daftar pustaka yang memberikan informasi tentang buku sumber dan literatur yang digunakan dan lampiran-lampiran yang mendukung skripsi.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Operasi dan Himpunan

Himpunan adalah sekumpulan objek yang mempunyai syarat tertentu dan jelas. Objek yang dimaksud dapat berupa bilangan, manusia, hewan, tumbuhan, negara, dan lain sebagainya. Objek ini selanjutnya dinamakan anggota atau elemen dari himpunan itu. Syarat tertentu dan jelas dalam menentukan anggota suatu himpunan ini sangat penting, karena untuk membedakan mana yang menjadi anggota himpunan dan mana yang bukan merupakan anggota himpunan.

Himpunan biasanya dinyatakan dengan huruf kapital A, B, C, H, K dan sebagainya. Sementara itu untuk melambangkan anggota himpunan biasanya menggunakan huruf kecil a, b, c, dan yang lainnya.

Teorema 2.1.1

Untuk sembarang himpunan A dan B diperoleh

i) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

ii) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Bukti

i) Akan ditunjukkan $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

$\Rightarrow$Dipunyai $A \subseteq B$.

a. Ambil sebarang $x \in A \cap B$.

Akan ditunjukkan $x \in A$.

Oleh sebab $x \in A \cap B$, diperoleh $x \in A$ dan $x \in B$.

Jadi $\forall x \in A \cap B$, berlaku $x \in A$.

Jadi $A \cap B \subset A$.

b. Ambil sebarang $x \in A$.

Akan ditunjukkan $x \in A \cap B$.

Oleh sebab $A \subseteq B$, dan $x \in A$ maka $x \in B$.

Oleh sebab $x \in A$ dan $x \in B$, maka $x \in A \cap B$.

Jadi $\forall x \in A$, berlaku $x \in A \cap B$.

Jadi $A \subset A \cap B$

Berdasarkan a dan b diperoleh $A = A \cap B$

$\Leftarrow$Dipunyai $A \cap B = A$.

Ambil sebarang $x \in A$.

Akan ditunjukkan $x \in B$.

Oleh sebab $A \cap B = A$, diperoleh $x \in A \cap B$.

Oleh sebab $x \in A \cap B$, diperoleh $x \in A$ dan $x \in B$.

Diperoleh $x \in B$.

Jadi $\forall x \in A$, berlaku $x \in B$.

Jadi $A \subseteq B$.

ii) Akan ditunjukkan $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

$\Leftarrow$Dipunyai $A \cup B = B$.

Ambil sebarang $x \in A$.

Akan ditunjukkan $x \in B$.

Oleh sebab $A \cup B = B$, dan $x \in A$ diperoleh $x \in B$.

Jadi $\forall x \in A$, berlaku $x \in B$.

Jadi $A \subseteq B$.

$\Rightarrow$ Dipunyai $A \subseteq B$.

a. Ambil sebarang $x \in A \cup B$.

Akan ditunjukkan $x \in B$.

Oleh sebab $x \in A \cup B$, dan $A \subseteq B$ diperoleh $x \in B$.

Jadi $\forall x \in A \cup B$, berlaku $x \in B$.

Jadi $A \cup B \subset B$.

b. Ambil sebarang $x \in B$.

Akan ditunjukkan $x \in A \cup B$.

Oleh sebab $x \in B$ dan $A \subseteq B$, diperoleh $x \in A \cup B$.

Jadi $\forall x \in B$, berlaku $x \in A \cup B$.

Jadi $B \subset A \cup B$.

Berdasarkan a dan b diperoleh $A \cup B = B$

Untuk sebarang 3 himpunan berlaku sifat sebagaimana dijelaskan dalam Teorema 2.1.2.

Teorema 2.1.2

Untuk sebarang 3 himpunan A, B, C berlaku

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bukti

i) Ambil sebarang $x \in A \cap (B \cup C)$.

Akan ditunjukkan $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Oleh sebab $x \in A \cap (B \cup C)$, diperoleh $x \in A$ dan $x \in (B \cup C)$.

Diperoleh $x \in A$ dan $x \in B$ atau $x \in C$

$\Leftrightarrow x \in A$ dan $x \in B$ atau $x \in A$ dan $x \in C$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B)$ atau $x \in (A \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

JAdi $\forall x \in A \cap (B \cup C)$, berlaku $x \in (A \cap B) \cap (A \cap C)$.

Jadi $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cap (A \cap C)$.

ii) Ambil sebarang $x \in (A \cap B) \cap (A \cap C)$.

Akan ditunjukkan $x \in A \cap (B \cup C)$.

Oleh sebab $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, diperoleh $x \in (A \cap B)$ atau $x \in (A \cap C)$.

Diperoleh $x \in A$ dan $x \in B$ atau $x \in C$

$\Leftrightarrow x \in A$ dan $x \in (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cup C)$

Diperoleh $\forall x \in (A \cap B) \cap (A \cap C)$, berlaku $x \in A \cap (B \cup C)$.

Jadi $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

Berdasarkan i) dan ii) diperoleh $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2.2 Operasi Biner

Definisi 2.2.1

Misalkan S himpunan tak kosong. Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah aturan yang mengawankan setiap pasangan terurut $(a, b) \in S$ x S dengan tepat satu elemen di S.

Contoh 2.2.1

Dipunyai N himpunan bilangan cacah. Misalkan $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in N - \{1\} \right\}$. Operasi penjumlahan matriks merupakan operasi biner pada H.

Ambil sebarang $a, b \in H$.

Akan ditunjukkan $a + b \in H$.

Misalkan $a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, a_2, b_1 b_2 \in N - \{1\}$.

Diperoleh $a + b = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

Tinjau kasus $a_1, a_2 = 0$, dan $b_1, b_2 = 0$.

Diperoleh $a_1 + a_2 = 0$, dan $b_1 + b_2 = 0$.

Tinjau kasus $a_1 = 0, a_2 \neq 0$, dan $b_1 = 0, b_2 \neq 0$.

Diperoleh $a_1 + a_2 \geq 2$ sehingga tidak akan bernilai 1, dan $b_1 + b_2 \geq 2$ sehingga tidak akan bernilai 1.

Tinjau kasus $a_1, a_2 \neq 0$, dan $b_1, b_2 \neq 0$.

Diperoleh $a_1 + a_2 \geq 4$ sehingga tidak akan bernilai 1, dan $b_1 + b_2 \geq 4$ sehingga tidak akan bernilai 1.

Diperoleh $a_1 + a_2, b_1 + b_2 \in N - \{1\}\}$.

Jadi untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a + b \in H$.

Oleh sebab operasi yang didefinisikan pada H merupakan operasi penjumlahan matriks maka hasil $a + b$ tepat satu elemen di H.

Jadi operasi penjumlahan matriks merupakan operasi biner pada H.

2.3 Semigrup

Definisi 2.3.1

Misalkan $G \neq \emptyset$ dan $*$ adalah operasi biner pada G. Himpunan G bersama sama dengan operasi biner $*$, ditulis dengan $(G,*)$, disebut semigrup apabila $\forall a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Definisi 2.3.2

Misalkan M semigrup. Apabila operasi yang didefinisikan pada M bersifat komutatif maka M dinamakan semigrup komutatif.

Contoh 2.3.1

Dipunyai himpunan tak kosong H sebagaimana dijelaskan dalam Contoh 2.2.1. Akan ditunjukkan H dengan operasi penjumlahan matriks merupakan semigrup.

Untuk menunjukkan H semigrup, cukup ditunjukkan $\forall a, b, c \in H$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Ambil sebarang $a, b, c \in H$.

Akan ditunjukkan $a + (\mathrm{b} + \mathrm{c}) = (a + b) + c$.

Misalkan $a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$, dan $c = \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in N - \{1\}\}$.

Diperoleh $a + (\mathrm{b} + \mathrm{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix} \right)$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + a_3 & 0 \\ 0 & b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + (a_2 + a_3) & 0 \\ 0 & b_1 + (b_2 + b_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1 + a_2) + a_3 & 0 \\ 0 & (b_1 + b_2) + b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1 + a_2) & 0 \\ 0 & (b_1 + b_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

$=(a + b) + c$

Diperoleh $a + (\mathrm{b} + \mathrm{c}) = (a + b) + c$.

Jadi $\forall a, b, c \in H$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Jadi H merupakan semigrup terhadap operasi penjumlahan matriks.

2.4 Monoid

Definisi 2.4.1

Misalkan $G \neq \emptyset$ dan $*$ adalah operasi biner pada G. Himpunan G bersama-sama dengan operasi biner $*$, ditulis dengan $(G,*)$, disebut monoid apabila $\forall a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$ dan mempunyai elemen identitas yaitu $\exists i \in G \ni \forall a \in G$ berlaku $i * a = a * i = a$.

Dengan kata lain, suatu himpunan G dikatakan monoid terhadap operasi yang didefinisikan pada G, apabila G merupakan semigrup yang mempunyai elemen netral atau elemen identitas di G.

Definisi 2.4.2

Misalkan M monoid. Apabila operasi yang didefinisikan pada M bersifat komutatif maka M dinamakan monoid komutatif.

Contoh 2.4.1

Dipunyai H semigrup, sebagaimana dijelaskan pada Contoh 2.3.1. Akan ditunjukkan H dengan operasi penjumlahan matriks merupakan monoid.

Untuk menunjukkan H monoid, cukup ditunjukkan H mempunyai elemen netral pada operasi penjumlahan matriks.

Akan ditunjukkan $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$ adalah elemen netral di H.

Ambil sebarang $a \in H$.

Ditunjukkan $a + 0 = 0 + a = a$.

Misalkan $a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, b_1 \in N - \{1\}$.

Diperoleh $a + 0 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + 0 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & b_1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} = a.$$

Diperoleh $0 + a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 + a_1 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & 0 + b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} = a.$$

Diperoleh $a + 0 = 0 + a = a$.

Jadi $\exists 0 \in H \ni a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in H$.

Jadi H mempunyai elemen netral yaitu $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Oleh sebab semigrup H mempunyai elemen netral pada operasi penjumlahan matriks, maka H merupakan monoid.

2.5 Grup

Definisi 2.5.1

Misalkan $G \neq \emptyset$ dan $*$ adalah operasi yang didefinisikan pada G. Himpunan G bersama-sama dengan operasi yang didefinisikan pada G, ditulis dengan $(G,*)$ disebut grup apabila memenuhi

i) $\forall a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$

ii) mempunyai elemen identitas yaitu $\exists e \in G \ni \forall a \in G$ berlaku $e * a = a * e = a$

iii) setiap elemen di G mempunyai invers di dalam G pula, yaitu $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \ni a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$

Contoh 2.5.1

Dipunyai himpunan bilangan bulat Z. Akan ditunjukkan Z dengan operasi penjumlahan merupakan grup.

i) Ambil sebarang $a, b \in Z$.

Ditunjukkan $a + b \in Z$.

Oleh sebab $a, b \in Z$, dan Z merupakan himpunan bilangan bulat maka $a + b \in Z$.

Jadi $\forall a, b \in Z$, berlaku $a + b \in Z$.

ii) Ambil sebarang $a, b, c \in Z$.

Ditunjukan $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Oleh sebab $a, b, c \in Z$, dan Z merupakan himpunan bilangan bulat maka berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Jadi $\forall a, b, c \in Z$, berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.

iii) Ditunjukkan Z mempunyai elemen netral.

Oleh sebab Z merupakan himpunan bilangan bulat, mka elemen netral operasi penjumlahan di Z adalah 0.

Jadi $(Z, +)$ mempunyai elemen netral yaitu 0.

iv) Ambil sebarang $x \in Z$.

Akan ditunjukkan $\exists x^{-1} \in Z \ni x^{-1} + x = x + x^{-1} = 0$.

Oleh sebab Z himpunan bilangan bulat maka $\exists(-x) \in Z$ sehingga $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Jadi $\forall x \in Z, \exists(-x) \in Z \ni x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Berdasarkan i), ii) ,iii) ,dan iv) dapat disimpulkan bahwa Z dengan operasi penjumlahan adalah grup.

Definisi 2.5.2

Misalkan G Grup. G dinamakan grup abelian (komutatif) apabila $a * b = b * a \; \forall \; a, b \in G$.

Contoh 2.5.2

Dipunyai grup Z yang didefinisikan dalam Contoh 2.5.1. Akan ditunjukkan $(Z, +)$ merupakan grup abelian.

Untuk menunjukkan $(Z, +)$ grup abelian, cukup ditunjukkan operasi penjumlahan pada Z bersifat komutatif.

Ambil sebarang $a, b \in Z$.

Ditunjukkan $a + b = b + a$.

Oleh sebab $a, b \in Z$, dan Z merupakan himpunan bilangan bulat maka berlaku $a + b = b + a$.

Jadi $\forall a, b \in Z$, berlaku $a + b = b + a$.

Jadi (Z,+) adalah grup abelian.

Teorema 2.5.1

Misalkan (G,$*$) grup dan $a, b, c \in G$

i) jika $a * b = a * c$ maka b=c (hukum kanselasi kiri).

ii) jika b $*$ a = $c *$ a maka b = c (hukum kanselasi kanan).

Bukti

i) Misalkan $a * b = a * c$ dengan $a, b, c \in G$.

Oleh sebab G grup maka $\exists a^{-1} \in G$ sehingga $a^{-1} * a = e$.

Diperoleh $a * b = a * c$

$\Leftrightarrow a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$

$\Leftrightarrow (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$

$\Leftrightarrow e * b = e * c$

$\Leftrightarrow b = c$.

Terbukti bahwa hukum kanselasi kiri berlaku.

ii) Misalkan b $*$ a = $c *$ a dengan $a, b, c \in G$.

Oleh sebab G grup maka $\exists a^{-1} \in G$ sehingga $a^{-1} * a = e$.

Diperoleh $b * a = c * a$

$\Leftrightarrow (b * a) * a^{-1} = (c * a) * a^{-1}$

$\Leftrightarrow b * (a * a^{-1}) = c * (a * a^{-1})$

$\Leftrightarrow b * e = c * e$

$\Leftrightarrow b = c.$

Terbukti bahwa hukum kanselasi kanan berlaku.

Teorema 2.5.2

Misalkan G grup. Elemen netral dan invers di G adalah tunggal.

Bukti

i) Bukti ketunggalan elemen netral.

Misalkan e dan e' adalah elemen netral di G.

Ditunjukkan e = e'.

Ambil sebarang $x \in G$.

Diperoleh $x = e * x = e' * x = x$

$\Leftrightarrow e * x = e' * x.$

Berdasarkan hukum kanselasi kanan diperoleh $e = e'$.

Jadi elemen netral di grup G adalah tunggal.

ii) Bukti ketunggalan invers.

Misalkan a, b adalah invers dari c.

Ditunjukkan $a = b$.

Oleh sebab a, b adalah invers dari c.

Diperoleh $a * c = e = b * c$.

Diperoleh $a * c = b * c$.

Berdasarkan hukum kanselasi kiri diperoleh $a = b$.

Jadi setiap invers di grup G adalah tunggal.

Definisi 2.5.3

Himpunan bagian tak kosong H dari grup G merupakan subgrup G apabila H grup terhadap operasi yang didefinisikan pada G.

Teorema 2.5.3

Himpunan bagian tak kosong H dari grup G merupakan subgrup G jika dan hanya jika $\forall a, b \in H$ berlaku $ab^{-1} \in H$.

Bukti

$\Rightarrow$ Diketahui H subgrup dari G.

Ambil sebarang $a, b \in H$.

Ditunjukkan $ab^{-1} \in H$.

Oleh sebab H subgrup dari H, maka $b^{-1} \in H$.

Oleh sebab $a \in H$, $b^{-1} \in H$ dan H subgrup dari G maka $ab^{-1} \in H$.

$\Leftarrow$ Diketahui $ab^{-1} \in H$.

Ditunjukkan H subgrup dari G

i) Ambil sebarang $a \in H$.

Ditunjukkan H memuat elemen identitas.

Oleh sebab $ab^{-1} \in H$.

Diperoleh $e = aa^{-1} \in H$.

Jadi H memuat elemen identitas.

ii) Ambil sebarang $a, b \in H$.

Ditunjukkan $ab \in H$.

Berdasarkan i) diperoleh $e \in H$.

Sesuai dengan yang diketahui $b^{-1} = eb^{-1} \in H$.

Diperoleh $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$.

Jadi $\forall a, b \in H$, berlaku $ab \in H$.

iii) Ambil sebarang $a \in H$.

Ditunjukkan a mempunyai invers di H.

Oleh sebab $e \in H$.

Diperoleh $a^{-1} = ea^{-1} \in H$.

Jadi untuk setiap anggota H mempunyai invers.

iv) Ditunjukkan H bersifat asosiatif

Oleh sebab $H \subset G$ maka sifat asosisatif di G juga berlaku di H.

Jadi H bersifat asosiatif.

Berdasarkan i), ii), iii), dan iv) dapat disimpulkan bahwa H subgrup dari G.

Contoh 2.5.3

Dipunyai grup Z. Himpunan bagian $S = 3Z$ merupakan subgrup dari Z.

i) Akan ditunjukkan S bukan himpunan kosong.

Oleh sebab $S = 3Z$, dan Z merupakan grup maka $S \neq \emptyset$.

ii) Oleh sebab $S = 3Z$, diperoleh $S \subset Z$.

iii) Ambil sebarang $a, b \in S$.

Akan ditunjukkan $ab^{-1} \in S$.

Oleh sebab $S = 3Z$, diperoleh $a = 3n_1, b = 3n_2$ untuk suatu $n_1, n_2 \in Z$.

Oleh sebab operasi yang didefinisikan pada S merupakan operasi penjumlahan, diperoleh $b^{-1} = (-b)$.

Diperoleh $ab^{-1} = a + (-b) = 3n_1 + (-3n_2)$.

Diperoleh $3n_1 + (-3n_2) = 3(n_1 - n_2)$.

Oleh sebab Z grup dan $n_1, n_2 \in G$, maka $n_1 - n_2 \in Z$.

Diperoleh $ab^{-1} \in S$.

Jadi $\forall a, b \in S$ berlaku $ab^{-1} \in S$.

Berdasarkan Teorema 2.5.3, diperoleh S merupakan subgrup dari Z.

2.6 Ring

Definisi 2.6.1

Suatu himpunan tak kosong R beserta 2 operasi penjumlahan dan perkalian (disimbolkan dengan + dan ·) dinamakan ring apabila memenuhi

a. $(R, +)$ merupakan grup komutatif

b. $(R, \cdot)$ merupakan semigrup

c. $(R, +, \cdot)$ memenuhi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

Contoh 2.6.1

Dipunyai himpunan bilangan bulat Z. Akan ditunjukkan Z dengan operasi perkalian dan penjumlahan merupakan ring.

i) Dalam Contoh 2.5.2 telah ditunjukkan bahwa (Z,+) merupakan grup komutatif.

ii) Akan ditunjukkan (Z,·) merupakan semigrup.

a. Ambil sebarang $a, b \in Z$.

Akan ditunjukkan $ab \in Z$.

Oleh sebab $a, b \in Z$ dan Z merupakan himpunan bilangan bulat, maka $ab \in Z$.

Jadi $\forall a, b \in Z$, berlaku $ab \in Z$.

b. Ambil sebarang $a, b, c \in Z$.

Akan ditunjukkan $a(bc) = (ab)c$.

Oleh sebab $a, b, c \in Z$, dan Z merupakan himpunan bilangan bulat, maka $a(bc) = (ab)c$.

Jadi $\forall a, b, c \in Z$, berlaku $a(bc) = (ab)c$.

Berdasarkan a, dan b diperoleh $(Z,\cdot)$ merupakan semigrup.

iii) Akan ditunjukkan $(Z, +, \cdot)$ memenuhi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

a. Ambil sebarang $a, b, c \in Z$.

Akan ditunjukkan $a(b + c) = ab + ac$.

Oleh sebab $a, b, c \in Z$, dan Z merupakan himpunan bilangan bulat, maka $a(b + c) = ab + ac$.

Jadi $\forall a, b, c \in Z$, berlaku $a(b + c) = ab + ac$.

b. Ambil sebarang $a, b, c \in Z$.

Akan ditunjukkan $(a + b)c = ac + bc$.

Oleh sebab $a, b, c \in Z$, dan Z merupakan himpunan bilangan bulat, maka $(a + b)c = ac + bc$.

Jadi $\forall a, b, c \in Z$, berlaku $(a + b)c = ac + bc$.

Berdasarkan a, dan b diperoleh bahwa $(Z, +, \cdot)$ memenuhi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

Berdasarkan i), ii), dan iii) diperoleh bahwa $(Z,+,\cdot)$ merupakan ring.

Definisi 2.6.2

Ring R dikatakan ring komutatif (abelian) apabila untuk setiap $a,b \in R$ berlaku $ab = ba$.

Terdapat sifat khusus dalam ring R terkait elemen netral pada operasi penjumlahan sebagaimana disajikan dalam Definisi 2.6.3.

Definisi 2.6.3

Misalkan R ring. Apabila a dan b keduanya elemen tak nol di R sehingga ab=0 maka a dan b dinamakan pembagi nol.

Terdapat ring dengan elemen satuan yang tidak memuat pembagi nol, sebagaimana dijelaskan dalam Definisi 2.6.4.

Definisi 2.6.4

Ring komutatif dengan elemen satuan yang tidak memuat pembagi nol dinamakan daerah integral.

Definisi 2.6.5

Misalkan R ring dengan elemen satuan 1.

i) $u \in R$ dinamakan unit apabila terdapat $v \in R$ sehingga uv=1.

ii) R dinamakan ring pembagian (*division ring)* apabila setiap elemen tak nol di R merupakan unit.

iii) R dinamakan field apabila R merupakan ring pembagian komutatif.

Terdapat hubungan khusus antara daerah integral dengan field, dimana setiap field merupakan daerah integral, sebagaimana dijelaskan dalam Teorema 2.6.1.

Teorema 2.6.1

Setiap field merupakan daerah integral.

Bukti

Misalkan F field

Ambil sebarang $a, b \in F$ dengan $ab = 0$.

Ditunjukkan $a = 0$ atau $b = 0$.

Misalkan $a \neq 0$.

Karena F field maka terdapat $a' \in F$ sehingga $a'a = 1$.

Diperoleh $ab = 0 \Leftrightarrow a'(ab) = a'0$

$$\Leftrightarrow (a'a)b = 0$$

$$\Leftrightarrow 1b = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 0$$

Jadi apabila $ab = 0$ maka a=0 atau b=0.

Dengan demikian F tidak memuat pembagi nol, sehingga dapat disimpulkan bahwa F merupakan daerah integral.

Definisi 2.6.6

Misalkan R ring. Bilangan bulat positif terkecil n sehingga $na = 0 \forall\, a \in R$, dinamakan karakteristik dari R. Apabila tidak terdapat n yang memenuhi sifat tersebut maka R dikatakan mempunyai karakteristik nol.

Contoh 2.6.2

Dipunyai ring Z. Dalam Z tidak terdapat n bilangan bulat positif terkecil sehingga $na = 0 \forall\, a \in R$ maka Z mempunyai karakteristik nol.

Perhatikan ring R. Dalam ring untuk setiap elemen di R pasti mempunyai invers pada operasi penjumlahan. Terdapat beberapa sifat di R yang berkaitan dengan invers penjumlahan sebagaimana dijelaskan dalam Teorema 2.6.2.

Teorema 2.6.2

Jika R ring dengan elemen netral 0, maka untuk setiap $a, b \in R$ memenuhi

i) $a0 = 0a = 0$.

ii) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.

iii) $(-a)\,(-b) = ab$.

Bukti

i) Ambil sebarang $a \in R$

a. Akan ditunjukkan $a0 = 0$.

Oleh sebab 0 elemen netral operasi penjumlahan di R, diperoleh $a0 = a(0 + 0)$.

Diperoleh $a0 = a0 + a0$

$\Leftrightarrow a0 + 0 = a0 + a0$

Berdasarkan hukum kanselasi diperoleh $a0 = 0$.

b. Akan ditunjukkan $0a = 0$.

Oleh sebab 0 elemen netral operasi penjumlahan di R, diperoleh $0a = (0 + 0)a$.

Diperoleh $0a = 0a + 0a$

$\Leftrightarrow 0a + 0 = 0a + 0a$

Berdasarkan hukum kanselasi diperoleh $a0 = 0$.

ii) Ambil sebarang $a, b \in R$

a. Akan ditunjukkan $a\,(-b) = -(ab\,)$.

Oleh sebab $-b$ invers penjumlahan dari b, dan

$a(b + (-b)\,) = ab + a(-b\,)$, diperoleh $a0 = ab + a\,(-\ b\,)$.

Diperoleh $0 = ab + a(-\ b\,)$.

Diperoleh $a(-\ b\,)$ merupakan invers dari ab.

Oleh sebab$-(ab\,)$ merupakan invers dari ab, berdasarkan sifat ketunggalan invers diperoleh $-ab = a(-b\,)$.

b. Akan ditunjukkan $(-a)b = -(ab\,)$.

Oleh sebab $-a$ invers penjumlahan dari a, dan

$(-a + a)b = (-a)b + ab$, diperoleh $0b = (-a)b + ab$.

Diperoleh $0 = (-a)b + ab$.

Diperoleh $(-a)b$ merupakan invers dari ab.

Oleh sebab $-(ab\,)$ merupakan invers dari ab, berdasarkan sifat ketunggalan invers diperoleh diperoleh $(-a)b =-(ab\,)$.

iii) Ambil sebarang $a, b \in R$.

Akan ditunjukkan $(-a)(-b) = ab$.

Oleh sebab $a + (-a) = 0$, dan $b + (-b) = 0$, diperoleh $a\,(-b + b) = (a + (-a))(-b)$.

Diperoleh $a\,(-b) + ab = a(-b) + (-a(-b))$.

Berdasarkan hukum kanselasi kiri diperoleh $ab = (-a)(-b)$.

Dalam ring R, terdapat himpunan bagian dari R yang mempunyai struktur sama dengan operasi yang didefiniskan pada R, sebagaimana dijelaskan dalam Definisi 2.6.7.

Definisi 2.6.7

Misalkan R ring. Himpunan bagian tak kosong S dari R merupakan subring dari R apabila S merupakan ring terhadap operasi yang didefinisikan pada R.

Perhatikan Definisi 2.6.7. Karena S himpunan bagian dari R, maka ada beberapa sifat yang secara otomatis diturunkan dari R. Oleh sebab itu untuk membuktikan S adalah subring dari R hanya perlu beberapa syarat yang harus dibuktikan, hal ini dijelaskan dalam Teorema 2.6.3.

Teorema 2.6.3

Himpunan bagian tak kosong S dari ring R merupakan subring dari R jika dan hanya jika

i) $\forall a, b \in S$, berlaku $ab \in S$

ii) $\forall a, b \in S$, berlaku $a - b \in S$

Bukti

$\Rightarrow$ Diketahui S subring dari R.

Oleh sebab S subring maka S ring terhadap operasi yang didefinisikan di R. Diperoleh S tertutup terhadap operasi perkalian, dan setiap elemen di S pasti mempunyai invers terhadap penjumlahan di S.

Jadi i), ii) dipenuhi

$\Leftarrow$ Diketahui i) dan ii)

Berdasarkan ii) diperoleh (S,+) merupakan subgrup.

Karena (R,+) grup komutatif maka (S,+) subgrup komutatif.

Berdasarkan i), diperoleh bahwa operasi perkalian bersifat tertutup di S.

Oleh sebab $S \subset R$ maka sifat asosiatif pada operasi perkalian berlaku di S.

Diperoleh (S,·) semigrup.

Oleh sebab $S \subset R$ maka sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan berlaku di S.

Jadi terbukti bahwa S subring dari R.

Irisan kedua subring dari ring R merupakan subring di R, sebagaimana dijelaskan dalam Teorema 2.6.4.

Teorema 2.6.4

Misalkan R ring. Jika A dan B subring di R, maka $A \cap B$ subring di R.

Bukti

i) Ditunjukkan $A \cap B$ bukan himpunan kosong.

Oleh sebab A ,B subring di R, maka $0 \in A$ dan $0 \in B$.

Jadi $0 \in A \cap B$.

Jadi $A \cap B$ bukan himpunan kosong.

ii) Ambil sebarang $a, b \in A \cap B$.

Akan ditunjukkan $a - b \in A \cap B$.

Oleh sebab a ,$b \in A \cap B$ berarti a ,$b \in A$ dan a ,$b \in B$.

Oleh sebab A dan B subring di R diperoleh $a - b \in A$ dan $a - b \in B$.

Jadi $\forall a, b \in A \cap B$, berlaku $a - b \in A \cap B$.

iii) Ambil sebarang a ,$b \in A \cap B$.

Akan ditunjukkan $ab \in A \cap B$.

Oleh sebab $a, b \in A \cap B$ maka $a, b \in A$ dan $a, b \in B$.

Oleh sebab A dan B subring dari R maka $ab \in A$ dan $ab \in B$.

Jadi $ab \in A \cap B$.

Berdasarkan i), ii), dan iii) dapat disimpulkan $A \cap B$ subring di R.

Dalam pembahasan sebelumnya telah dikaji tentang subring. Untuk pembahasan selanjutnya akan dikaji mengenai ideal ring, sebagaimana dijelaskan dalam Definisi 2.6.8.

Definisi 2.6.8

Misalkan R ring. Himpunan bagian tak kosong I dari R dinamakan ideal di R apabila memenuhi

i) (I,+) merupakan subgrup dari (R,+)

ii) untuk setiap $r \in R$ dan $i \in I$ berlaku $ri \in I$

iii) untuk setiap $r \in R$ dan $i \in I$ berlaku $ir \in I$.

Jika I memenuhi i), dan ii), maka I dinamakan ideal kiri. Jika I memenuhi i), dan iii), maka I dinamakan ideal kanan.

Irisan kedua ideal di ring R merupakan ideal di R, sebagaimana dijelaskan dalam Teorema 2.6.4.

Teorema 2.6.4.

Misalkan R ring. Jika I_1 dan I_2 ideal di R, maka $I_1 \cap I_2$ ideal di R.

Bukti

Akan ditunjukkan $I_1 \cap I_2$ merupakan ideal di R.

i) Akan ditunjukkan $(I_1 \cap I_2, +)$ subgrup dari (R,+).

a. Oleh sebab I_1 dan I_2 ideal di R, maka $0 \in I_2$ dan $0 \in I_1$.

   Jadi $0 \in I_1 \cap I_2$.

   Jadi $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$

b. Oleh sebab I_1 dan I_2 ideal di R, maka $I_1 \cap I_2 \subset R$

c. Ambil sebarang $a, b \in I_1 \cap I_2$.

   Akan ditunjukkan $a - b \in I_1 \cap I_2$.

   Oleh sebab $a, b \in I_1 \cap I_2$, maka $a, b \in I_1$, dan $a, b \in I_2$.

   Oleh sebab I_1, I_2 ideal di R diperoleh $a - b \in I_1$ dan $a - b \in I_2$.

   Diperoleh $a - b \in I_1 \cap I_2$.

   Jadi $\forall a, b \in I_1 \cap I_2$, berlaku $a - b \in I_1 \cap I_2$.

   Berdasarkan a, b, dan c diperoleh $(I_1 \cap I_2, +)$ merupakan subgrup dari (R,+).

ii) Ambil sebarang $a \in I_1 \cap I_2$ dan $h \in R$.

Akan ditunjukkan $ah \in I_1 \cap I_2$.

Oleh sebab $a \in I_1 \cap I_2$ maka $a \in I_1$ dan $a \in I_2$.

Oleh sebab I_1, I_2 ideal di R, maka $ah \in I_1$ dan $ah \in I_2$.

Diperoleh $ah \in I_1 \cap I_2$.

Jadi $\forall a \in I_1 \cap I_2$ dan $h \in R$ berlaku $ah \in I_1 \cap I_2$.

iii) Ambil sebarang $a \in I_1 \cap I_2$ dan $h \in R$.

Akan ditunjukkan $ha \in I_1 \cap I_2$.

Oleh sebab $a \in I_1 \cap I_2$ maka $a \in I_1$ dan $a \in I_2$.

Oleh sebab I_1, I_2 ideal di R, diperoleh $ha \in I_1$ dan $ha \in I_2$

Diperoleh $ha \in I_1 \cap I_2$.

Jadi $\forall a \in I_1 \cap I_2$ dan $h \in R$ berlaku $ha \in I_1 \cap I_2$

Berdasarkan i), ii), dan iii) diperoleh $I_1 \cap I_2$ ideal di R.

Definisi 2.6.9

Misalkan R ring komutatif dan $a \in R$. Ideal $I = \{ra | r \in R\}$ merupakan ideal utama yang dibangun oleh a, dan disimbolkan dengan $\langle a \rangle$.

Definisi 2.6.10

Suatu daerah integral R dinamakan derah ideal utama apabila setiap ideal di R merupakan ideal utama.

Setiap ring R paling sedikit memiliki dua ideal yaitu {0} dan R. Dari beberapa ideal di ring terdapat ideal yang mempunyai sifat khusus, sebagaimana dijelaskan dalam Definisi 2.6.11 dan Definisi 2.6.12.

Definisi 2.6.11

Misalkan R ring. Ideal M di R dikatakan ideal maksimal apabila $M \neq R$ dan untuk setiap ideal I di R dengan $M \subset I \subset R$ maka $I = M$ atau $I = R$.

Definisi 2.6.12

Misalkan R ring. Jika R komutatif dan P ideal di R maka P dikatakan ideal prima apabila $ab \in P$, mengakibatkan $a \in P$ atau $b \in P$.

Teorema 2.6.5

Misalkan R ring dengan elemen satuan, dan I ideal di R. Jika I memuat elemen unit maka I=R.

Bukti

Misalkan u elemen unit di I.

Maka terdapat $v \in R$ sehingga $uv = 1$.

Oleh sebab $u \in I, v \in R$ dan I merupakan ideal di R, maka $1 = uv \in I$.

Ditunjukkan I=R

i) Oleh sebab I ideal di R maka $I \subset R$

ii) Ambil sebarang $r \in R$

Oleh sebab $1 \in I$ maka $r = r.1 \in I$

Oleh sebab $\forall r \in R$ berlaku $r \in I$, diperoleh $R \subset I$.

Jadi $R \subset I$.

Berdasarkan i) dan ii) dapat disimpulkan bahwa I=R.

Teorema 2.6.6

Misalkan R ring. Jika M dan N keduanya ideal di R, maka

$M + N = \{m + n | m \in M, n \in N\}$ ideal di R.

Bukti

i) Ditunjukkan $(M + N, +)$ subgrup dari R.

a. Akan ditunjukkan M+N bukan himpunan kosong.

Oleh sebab M dan N ideal di R maka $0 \in M$, dan $0 \in N$.

Diperoleh $0 = 0+0 \in M + N$.

Jadi $M + N \neq \emptyset$.

b. Oleh sebab M dan N ideal di R maka $M + N \subset R$.

c. Ambil sebarang $a, b \in M + N$.

Ditunjukkan $a - b \in M + N$.

Oleh sebab $a, b \in M + N$ maka $a = m_1 + n_1$, $b = m_2 + n_2$ untuk suatu $m_1, m_2 \in M$ dan $n_1, n_2 \in N$.

Jelas $a - b = (m_1 + n_1) - (m_2 + n_2)$

$= (m_1 - m_2) + (n_1 - n_2)$

Oleh sebab M dan N ideal di R maka (M,+) dan (N,+) subgrup dari (R,+) sehingga $m_1 - m_2 \in M$, dan $n_1 - n_2 \in N$.

Jadi $a - b \in M + N$.

Jadi $\forall a, b \in M + N$, berlaku $a - b \in M + N$.

Berdasarkan a, b, dan c dapat disimpulkan bahwa $(M + N,+)$ subgrup dari (R,+).

ii) Ambil sebarang $a \in M + N$, dan $r \in R$.

Ditunjukkan $ar \in M + N$.

Oleh sebab $a \in M + N$, diperoleh $a = m_1 + n_1$ untuk suatu $m_1 \in M$ dan $n_1 \in N$.

Diperoleh $ar = (m_1 + n_1)r = (m_1 r + n_1 r)$.

Oleh sebab M dan N ideal di R maka $m_1 r \in M$, dan $n_1 r \in N$.

Diperoleh $ar = (m_1 r + n_1 r) \in M + N$.

Jadi $\forall a \in M + N$, dan $r \in R$, berlaku $ar \in M + N$.

iii) Ambil sebarang $a \in M + N$, dan $r \in R$.

Ditunjukkan $ra \in M + N$.

Oleh sebab $a \in M + N$, diperoleh $a = m_1 + n_1$ untuk suatu $m_1 \in M$ dan $n_1 \in N$.

Diperoleh $ra = r(m_1 + n_1) = (rm_1 + rn_1)$

Oleh sebab M dan N ideal di R maka $rm_1 \in M$, dan $rn_1 \in N$.

Diperoleh $ra = (rm_1 + rn_1) \in M + N$.

Jadi $\forall a \in M + N$, dan $r \in R$, berlaku $ra \in M + N$.

Berdasarkan i), ii), dan iii) maka dapat disimpulkan bahwa $M + N = \{m + n | m \in M, n \in N\}$ merupakan ideal di R.

Teorema 2.6.7

Jika R ring dan I ideal dari R, maka $R/I = \{r + I | r \in R\}$ dengan operasi

i) $(a + H) + (b + H) = (a + b) + H$

ii) $(a + H)(b + H) = ab + H$ untuk setiap $a, b \in R$, membentuk ring.

Bukti

i) Akan ditunjukkan (R/I,+) merupakan grup komutatif.

a. Ambil sebarang $x, y \in R / I$.

Akan ditunjukkan $x + y \in R / I$.

Diperoleh $x = (r_1 + I), y = (r_2 + I)$ untuk suatu $r_1, r_2 \in R$.

Diperoleh $x + y = (r_1 + I) + (r_2 + I)$

$= (r_1 + r_2) + I$

Oleh sebab R ring dan $r_1, r_2 \in R$ maka $r_1 + r_2 \in R$.

Jadi $x\ y \in R / I$.

Jadi $\forall\ x, y \in R / I$ berlaku $x + y \in R / I$.

b. Ambil sebarang $x, y, z \in R / I$.

Akan ditunjukkan $(x + y) + z = x + (y + z)$

Diperoleh $x = (r_1 + I), y = (r_2 + I)$, dan $z = (r_3 + I)$

untuk suatu $r_1, r_2, r_3 \in R$.

Diperoleh $(x + y) + z = \big((r_1 + I) + (r_2 + I)\big) + (r_3 + I)$

$=((r_1 + r_2) + I) + (r_3 + I)$

$= (r_1 + r_2 + r_3) + I$.

$=(r_1 + I) + ((r_2 + r_3) + I)$

$= (r_1 + I) + ((r_2 + I) + (r_3 + I))$

$= x + (y + z)$.

Jadi $(x + y) + z = x + (y + z)$.

c. Akan ditunjukkan I elemen netral di R/I.

Ambil sebarang $x \in R$.

Akan ditunjukkan $x + I = x$.

Diperoleh $x = (r_1 + I)$, untuk suatu $r_1 \in R$.

Diperoleh $x + I = (r_1 + I) + I$

$=(r_1 + I)$

$= x.$

Diperoleh $I + x = I + (r_1 + I)$

$=(r_1 + I)$

$= x.$

Diperoleh $x + I = I + x = x.$

Jadi $\forall x \in R/I$, berlaku $x + I = I + x = x.$

Jadi I merupakan elemen netral di $R/I.$

d. Ambil sebarang $x \in R / I.$

Akan ditunjukkan $\exists -x \in R / I \ni x + (-x) = (-x) + x = I.$

Diperoleh $x = (r + I)$ untuk suatu $r \in R.$

Oleh sebab R ring maka

$\exists -r \in R \ni r + (-r) = (-r) + r = 0$, dengan 0

merupakan elemen netral operasi penjumlahan.

Misalkan $-x = (-r + I).$

Diperoleh $x + -x = (r + I) + (-r + I)$

$= (r + (-r)) + I)$

$= 0 + I$

$= I$

Jadi $-x$ invers di $x.$

Jadi $\forall x \in R/I \exists -x \in R / I \ni x + (-x) = (-x) + x = I.$

e. Ambil sebarang $x, y \in R / I.$

Akan ditunjukkan $x + y = y + x$.

Diperoleh $x = (r_1 + I), y = (r_2 + I)$ untuk suatu $r_1, r_2 \in R$.

Diperoleh $x + y = (r_1 + I) + (r_2 + I)$

$= (r_1 + r_2) + I$.

Oleh sebab R ring maka operasi penjumlahan pada R bersifat komutatif, sehingga diperoleh

$$(r_1 + r_2) + I = (r_2 + r_1) + I$$

$$= (r_2 + I) + (r_1 + I)$$

$$= y + x.$$

Jadi $x + y = y + x$.

Berdasarkan a, b, c, d, dan e diperoleh bahwa $(R/I, +)$ merupakan grup abelian.

ii) Akan ditunjukkan (R/I,·) merupakan semigrup.

a. Ambil sebarang $x, y \in R/I$.

Akan ditunjukkan $xy \in R/I$.

Diperoleh $x = (r_1 + I), y = (r_2 + I)$ untuk suatu $r_1, r_2 \in R$.

Diperoleh $xy = (r_1 + I)(r_2 + I)$

$= (r_1 r_2) + I$

Oleh sebab R ring dan $r_1, r_2 \in R$ maka $r_1 r_2 \in R$.

Jadi $x\,y \in R\,/\,I$.

Jadi $\forall\, x, y \in R\,/\,I$ berlaku $xy \in R\,/\,I$.

b. Ambil sebarang $x, y, z \in R\,/\,I$.

Akan ditunjukkan $(x\,y)\,z = x\,(yz)$

Diperoleh $x = (r_1 + I)$,$y = (r_2 + I)$, dan $z = (r_3 + I)$

untuk suatu $r_1, r_2, r_3 \in R$.

Diperoleh $(x\ y)\ z = \big((r_1 + I)(r_2 + I)\big)(r_3 + I)$

$=((r_1\ r_2) + I)(r_3 + I)$

$= (r_1 r_2 r_3) + I.$

$=(r_1 + I)\ ((r_2\ r_3) + I)$

$= (r_1 + I)((r_2 + I)(r_3 + I))$

$= x\ (yz).$

Jadi $(x\ y)\ z = x\ (yz)$.

Berdasarkan a, dan b diperoleh bahwa (R/I,·) merupakan semigrup.

iii) Akan ditunjukkan (R/I,+,·) memenuhi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

a. Ambil sebarang $x, y, z \in R/I$.

Akan ditunjukkan $(x + y)\ z = x\ y + y\ z$.

Diperoleh $(x + y)\ z = ((r_1 + I) + (r_2 + I))\ (r_3 + I)$

$=((r_1 + r_2 + I)\ (r_3 + I)$

$= (r_1 + r_2) r_3 + I$

$= (r_1\ r_3 + r_2 r_3) + I$

$=(r_1\ r_3 + I) + (r_2\ r_3 + I)$

$= \big((r_1 + I)\ (r_3 + I)\big) + (r_2 + I)\ (r_3 + I))$

$= (x\ z\ +\ y\ z)$

Jadi $(x\ +\ y)\ z\ =\ x\ z +\ y\ z$.

b. Ambil sebarang $x, y, z \in R/I$.

Akan ditunjukkan $x(y+ z) = x\ y + x\ z$.

Diperoleh $x(y+ z) = (r_1 + I)((r_2 + I) + (r_3 + I))$

$=((r_1 + I)\ ((r_2 + r_3) + I)$

$= r_1 (r_2 + r_3) + I$

$= (r_1\ r_2 + r_1 r_3) + I$

$=(r_1\ r_2 + I) + (r_1\ r_3 + I)$

$= \big((r_1 + I)\ (r_2 + I)\big) + (r_1 + I)\ (r_3 + I))$

$= (x\ z + y\ z)$

Jadi $x(y+ z) = x\ y + x\ z$.

Berdasarkan a dan b diperoleh $(R/I, +,\cdot)$ memenuhi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

Berdasarkan i), ii), dan iii) dapat disimpulkan bahwa R/I merupakan ring.

Definisi 2.6.13

Jika R ring dan I ideal dari R maka ring R/I terhadap operasi yang dinyatakan pada Teorema 2.6.7 dinamakan ring faktor dari R modulo I. Elemen dari R/I berbentuk $r + I$ dan disimbolkan dengan $\bar{r}$.

Teorema 2.6.8

Misalkan R ring komutatif dengan elemen satuan dan M ideal dari R. Ideal M merupakan ideal maksimal jika dan hanya jika R/M field.

Bukti

$\Rightarrow$Diketahui M ideal maksimal.

Ambil sebarang $\bar{a} = a + M \in R - \{\bar{0}\}$.

Karena $a + M \neq \overline{0}$ maka $a \notin M$.

Dibentuk $\langle a \rangle$ + M.

Diperoleh $\langle a \rangle$ + M ideal dari R dan M $\subset \langle a \rangle$+ M.

Karena $a \notin$ M maka $\langle a \rangle + M \neq M$.

Karena M ideal maksimal maka $\langle a \rangle + M = R$.

Akibatnya $1 \in \langle a \rangle + M$.

Jadi 1 = $ra + m$ untuk suatu r $\in R$ dan $m \in M$.

Diperoleh $\overline{1} = \overline{ra} + \overline{m}$

$= (ra + M) + M$

$= ra + M$

$= (r + M)\ (a + M)$

Jadi $(a + M)$ merupakan invers dari $r + M$ sehingga setiap elemen tak nol di R mempunyai invers.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa R /M merupakan field.

⇐Misalkan R /M field.

Maka $\overline{1} \in R$ / M – $\{\overline{0}\}$.

Akibatnya 1 $\notin$ M.

Jadi M $\neq R$.

Ambil sebarang I ideal dari R dengan M $\subset$ I $\subset R$.

Misalkan I $\neq R$.

Ditunjukkan I = M.

Karena I $\neq R$ maka 1 $\notin$ I.

Ambil sebarang r $\in$ I.

Ditunjukkan r ∈ M.

Andaikan r ∉ M.

Maka $\bar{r} \neq \bar{0}$.

Karena R/M field maka terdapat $\bar{s} \in R$ /M sehingga $\bar{r}\bar{s} = \bar{I}$.

Karena I ideal dari R, r ∈ I dari s ∈ R maka $rs \in I$.

Jadi 1 ∈ I sehingga I = R.

Kontradiksi dengan I ≠ R.

Dengan demikian haruslah r ∈ M.

Jadi I ⊂ M.

Karena M ⊂ I dan I ⊂ M maka dapat disimpulkan bahwa I = M.

Jadi terbukti bahwa M merupakan ideal maksimal dari R.

Teorema 2.6.9

Misalkan R ring komutatif dengan elemen satuan dan P ideal dari R. Ideal P dikatakan ideal prima jika dan hanya jika R/P dearah integral.

Bukti

⇒ Dipunyai P ideal prima

Akan ditunjukkan R/P daerah integral.

Ambil sebarang $x, y \in R/P$ dengan $xy = \bar{0}$.

Akan ditunjukkan $x = \bar{0}$, atau $y = \bar{0}$.

Oleh sebab $x, y \in R/P$, diperoleh $x = r_1 + P, y = r_2 + P$, untuk suatu $r_1, r_2 \in R$.

Diperoleh $xy = (r_1 + P)(r_2 + P) = (r_1 r_2) + P = \bar{0}$.

Oleh sebab $(r_1 r_2) + P = \bar{0}$, dan P ideal di R diperoleh $(r_1 r_2) \in P$.

Oleh sebab P ideal prima dan $(r_1 r_2) \in P$, diperoleh $r_1 \in P$, atau $r_2 \in P$.

Misalkan $r_1 \in P$.

Diperoleh $x = r_1 + P = 0 + P = \bar{0}$.

Diperoleh x adalah elemen netral di R/P.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa R/P tidak memuat pembagi nol, sehingga dapat disimpulkan bahwa R/P merupakan daerah integral.

$\Leftarrow$ Dipunyai R/P daerah integral.

Ambil sebarang $ab \in R$ dengan $ab \in P$.

Akan ditunjukkan $a \in P$ atau $b \in P$.

Oleh sebab $ab \in P$, diperoleh $(ab) + P = \bar{0}$.

Diperoleh $(ab) + P = (a + P)(b + P)$.

Oleh sebab R/P daerah integral diperoleh untuk setiap $x, y \in R/P$ dengan $xy = \bar{0}$ maka $x = \bar{0}$, atau $y = \bar{0}$.

Diperoleh $x = a + P, y = b + P$, untuk suatu $a, b \in R$.

Misalkan $x = \bar{0}$.

Diperoleh $a + P = \bar{0}$.

Oleh sebab $a + P = \bar{0}$, dan P ideal di R diperoleh $a \in P$.

Jadi $\forall ab \in P$, berlaku $a \in P$ atau $b \in P$.

Jadi P ideal prima.

Ada beberapa akibat dari berlakunya Teorema 2.6.9 dan Teorema 2.6.9, sebagaimana dijelaskan dalam Akibat 2.6.1.

Akibat 2.6.1

Misalkan R ring komutatif dengan elemen satuan dan I ideal dari R. Jika I ideal maksimal maka I ideal prima.

Bukti

Dipunyai I ideal maksimal.

Akan ditunjukkan I ideal prima.

Oleh sebab I ideal maksimal, berdasarkan Teorema 2.6.8 diperoleh R/I merupakan field.

Oleh sebab R/I field, berdasarkan Teorema 2.6.1 diperoleh R/I merupakan daerah integral.

Oleh sebab R/I daerah integral, berdasarkan Teorema 2.6.9 diperoleh bahwa I merupakan ideal prima.

Jadi terbukti bahwa I merupakan ideal prima.

2.7 Semiring

Semiring merupakan perluasan dari ring dengan mengurangi syarat keberadaan invers pada operasi penjumlahan.

Definisi 2.7.1

Himpunan tak kosong R dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan semiring apabila memenuhi kondisi sebagai berikut

a. $(R,+)$ monoid komutatif

b. $(R,\cdot)$ monoid

c. $(R,+,\cdot)$ memenuhi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan

d. untuk setiap $r \in R$ berlaku $0r = 0 = r0$, dimana 0 merupakan elemen netral operasi penjumlahan.

Contoh 2.7.1

Dipunyai ring Z. Akan ditunjukkan Z merupakan semiring.

Untuk menunjukkan Z semiring, tinggal ditunjukkan Z mempunyai elemen identitas pada operasi perkalian dan untuk setiap $a \in Z$ berlaku $oa = ao = 0$, dengan 0 elemen netral operasi penjumlahan di H.

Oleh sebab Z merupakan himpunan bilangan bulat, elemen identitas pada operasi perkalian adalah 1.

Oleh sebab Z ring maka untuk setiap $a \in Z$ berlaku $oa = ao = 0$, dengan 0 elemen netral operasi penjumlahan di H.

Jadi Z merupakan semiring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

Contoh 2.7.2

Misalkan N adalah himpunan bilangan cacah. Akan ditunjukkan N dengan operasi perkalian dan penjumlahan, merupakan semiring.

i) Ditunjukkan $(N, +)$ merupakan monoid komutatif.

a. Ambil sebarang $a, b \in N$.

Akan ditunjukkan $a + b \in N$.

Oleh sebab N himpunan bilangan cacah, diperoleh $a + b \in N$.

Jadi $\forall a, b \in N$, berlaku $a + b \in N$.

Jadi operasi penjumlahan pada N bersifat tertutup.

b. Ambil sebarang $a, b, c \in N$.

Ditunjukkan $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Oleh sebab N himpunan bilangan cacah maka berlaku

$(a+b)+c = a+(b+c)$.

Jadi $\forall a, b, c \in N$, berlaku $(a+b)+c = a+(b+c)$.

Jadi operasi penjumlahan pada S bersifat asosiatif.

c. Ditunjukkan $(N, +)$ mempunyai elemen netral.

Jelas elemen netral operasi penjumlahan pada bilangan cacah adalah 0.

d. Ditunjukkan operasi penjumlahan pada N bersifat komutatif

Jelas oleh sebab N merupakan himpunan bilangan cacah, maka operasi penjumlahan bersifat komutatif.

Jadi berdasarkan a, b, c, dan d $(N, +)$ merupakan monoid komutatif.

ii) Ditunjukkan $(N, \cdot)$ merupakan monoid.

a. Ambil sebarang $a, b \in N$.

Akan ditunjukkan $ab \in N$.

Oleh sebab N merupakan himpunan bilangan cacah berlaku $ab \in N$.

Jadi $\forall a, b \in N$, berlaku $ab \in N$.

Jadi operasi perkalian pada S bersifat tertutup.

b. Ambil sebarang $a, b, c \in N$.

Ditunjukkan $(ab)c = a(bc)$.

Oleh sebab N himpunan bilangan cacah maka berlaku $(ab)c = a(bc)$.

Jadi $\forall a, b, c \in N$, berlaku $(ab)c = a(bc)$.

Jadi operasi perkalian pada N bersifat asosiatif.

c. Ditunjukkan $(N,\cdot)$ mempunyai elemen satuan.

Jelas dalam bilangan cacah, 1 merupakan elemen satuan dalam operasi perkalian.

Berdasarkan a, b, c dapat disimpulkan bahwa (N,·) merupakan monoid.

iii) Ditunjukkan $(N, +,\cdot)$ memenuhi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

a. Ambil sebarang $a, b, c \in N$.

Ditunjukkan $a(b + c) = ab + ac$.

Oleh sebab N merupakan himpunan bilangan cacah maka berlaku $a(b + c) = ab + ac$.

Jadi $\forall a, b, c \in N$, berlaku $a(b + c) = ab + ac$.

b. Ambil sebarang $a, b, c \in N$.

Ditunjukkan $(a + b)c = ac + bc$.

Oleh sebab N merupakan himpunan bilangan cacah maka berlaku $(a + b). c = a. c + b. c$.

Jadi $\forall a, b, c \in N$, berlaku $(a + b)c = ac + bc$.

Berdasarkan a dan b dapat disimpulkan bahwa $(N, +,\cdot)$ memenuhi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

iv) Ditunjukkan $\forall a \in N$ berlaku $a0 = 0a = 0$ dengan 0 elemen netral dalam operasi penjumlahan.

Ambil sebarang $a \in N$.

Akan ditunjukkan $a0 = 0a = 0$.

Oleh sebab N merupakan bilangan cacah maka $a0 = 0a = 0$.

Berdasarkan i), ii), iii) dan iv) dapat disimpulkan bahwa N merupakan semiring terhadap operasi perkalian dan penjumlahan.

Definisi 2.7.2

Misalkan R semiring. Suatu semiring R dikatakan semiring komutatif apabila (R,·) merupakan monoid komutatif.

Definisi 2.7.3

Himpunan bagian tak kosong S dari semiring R merupakan subsemiring apabila S semiring terhadap operasi yang didefinisikan pada R.

Perhatikan Definisi 2.7.3. Ada beberapa syarat dalam operasi perkalian dan operasi penjumlahan di semiring yang secara otomatis diturunkan. Dengan adanya penurunan sifat tersebut, untuk membuktikan bahwa suatu himpunan bagian dari semiring merupakan subsemiring tidak harus dibuktikan secara keseluruhan syarat-syarat yang dipenuhi pada semiring. Hal ini sebagaimana dijelaskan dalam Teorema 2.7.1.

Teorema 2.7.1

Misalkan R semiring. Himpunan bagian tak kosong S dari R merupakan subsemiring jika dan hanya jika

i) $0 \in S$

ii) $a + b \in S \quad \forall a, b \in S$

iii) $ab \in S \quad \forall a, b \in S$

iv) $1 \in S$

Bukti

$\Rightarrow$Dipunyai S subsemiring dari R.

Akan ditunjukkan syarat i), ii), iii), dan iv) terpenuhi.

Oleh sebab S subsemiring maka S semiring terhadap operasi yang di definisikan di R maka syarat i), ii), iii), dan iv) terpenuhi.

$\Leftarrow$ Dipunyai i), ii), iii), dan iv).

Akan ditunjukkan S subsemiring.

Berdasarkan i) diperoleh S mempunyai elemen netral.

Berdasarkan ii) diperoleh S tertutup pada operasi penjumlahan.

Oleh sebab R semiring dan $S \subset R$ maka sifat komutatif dan asosiatif pada penjumlahan diturunkan.

Diperoleh S merupakan monoid komutatif pada operasi penjumlahan.

Berdasarkan iii) maka S tertutup pada operasi perkalian.

Berdasarkan iv) maka S mempunyai elemen satuan pada operasi perkalian

Oleh sebab R semiring dan $S \subset R$ maka sifat asosiatif pada perkalian berlaku pada S.

Jadi S merupakan monoid pada operasi perkalian.

Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan terpenuhi di S karena $S \subset R$.

Oleh sebab R semiring dan $S \subset R$ maka $\forall a \in S$ berlaku $0a = a0 = 0$, dengan 0 elemen netral operasi penjumlahan di S.

Jadi terbukti S subsemiring.

Contoh 2.7.3

Dipunyai semiring Z. Misalkan N himpunan bilangan cacah. Akan ditunjukkan N dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan subsemiring dari Z.

Oleh sebab N himpunan bilangan cacah dan Z himpunan bilangan bulat maka $N \subset Z$.

Dalam Contoh 2.7.2 telah ditunjukkan bahwa N tertutup pada operasi perkalian dan penjumlahan. Telah ditunjukkan pula dalam Contoh 2.7.2 bahwa N mempunyai elemen netral operasi penjumlahan yaitu 0, dan elemen identitas operasi perkalian yaitu 1.

Berdasarkan Teorema 2.7.1 diperoleh N subsemiring dari Z.

Definisi 2.7.4

Himpunan bagian tak kosong I dari semiring S merupakan ideal di S apabila memenuhi

i) $\forall a, b \in I$ berlaku $a + b \in I$

ii) $\forall a \in I$ dan $r \in S$ berlaku $ra \in I$

iii) $\forall a \in I$ dan $r \in S$ berlaku $ar \in I$.

Apabila I memenuhi sifat i) dan ii) maka I disebut ideal kiri.

Apabila I memenuhi sifat i) dan iii) maka I disebut ideal kanan.

Contoh 2.7.4

Dipunyai N semiring. Akan ditunjukkan I=3N merupakan ideal di N.

Bukti

i) Ambil sebarang $a, b \in I$.

Akan ditunjukkan $a + b \in I$.

Oleh sebab $a, b \in I$, maka $a = 3n_1, b = 3n_2$ untuk suatu $n_1, n_2 \in N$.

Diperoleh $a + b = 3n_1 + 3n_2 = 3(n_1 + n_2)$.

Oleh sebab $n_1, n_2 \in N$ maka $n_1 + n_2 \in N$.

Diperoleh $a + b \in I$.

Jadi $\forall a, b \in I$, berlaku $a + b \in I$.

ii) Ambil sebarang $a \in I, b \in N$.

Akan ditunjukkan $ab \in I$

Oleh sebab $a \in I$, maka $a = 3n_1$, dimana $n_1 \in N$.

Diperoleh $ab = 3n_1 b$.

Oleh sebab N himpunan bilangan cacah, maka $n_1 b \in N$, sehingga $ab \in I$.

Jadi $\forall a \in I, b \in N$, berlaku $ab \in I$.

iii) Ambil sebarang $a \in I$, dan $b \in N$.

Akan ditunjukkan $ba \in I$

Oleh sebab $a \in I$, maka $a = 3n_1$, dimana $n_1 \in N$.

Diperoleh $ba = b3n_1$=$3bn_1$

Oleh sebab S himpunan bilangan cacah, maka $bn_1 \in N$, diperoleh $ba \in I$.

Jadi $ba \in I$.

Jadi $\forall a \in I, b \in N$, berlaku $ba \in I$.

Berdasarkan i), ii), dan iii) diperoleh bahwa I merupakan ideal di N.

Definisi 2.7.5

Ideal I dari semiring S merupakan ideal prima jika dan hanya jika $\forall A, B$ ideal di S dan $AB \subseteq I$ maka berlaku $A \subseteq I,$ atau $B \subseteq I$.

Contoh 2.7.5

Dipunyai semiring N. Akan ditunjukkan I=3N merupakan ideal prima di N.

Ambil sebarang A,B ideal di H dengan $AB \subset I$.

Akan ditunjukkan $A \subset I$, atau $B \subset I$.

Diperoleh $AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$.

Ambil sebarang $ab \in AB$, untuk suatu $a \in A, b \in B$.

Akan ditunjukkan $a \in I$ atau $b \in I$

Oleh sebab $AB \subset I$, diperoleh $ab \in 3N$.

Oleh sebab $ab \in 3N$, diperoleh $ab = 3n$, untuk suatu $n \in N$.

Oleh sebab 3 bilangan prima, dan N himpunan bilangan cacah diperoleh $a \in 3N$ atau $b \in 3N$.

Jadi $\forall a \in A, b \in B,$ dan $ab \in AB$ berlaku $a \in I$ atau $b \in I$.

Jadi diperoleh $A \subset I$, atau $B \subset I$.

Jadi dapat disimpulkan bahwa I merupakan ideal prima.

Definisi 2.7.6

Ideal I dari semiring S merupakan ideal semiprima jika dan hanya jika untuk setiap ideal A dari S, dan $A^2 \subseteq I$ maka $A \subseteq I$.

Contoh 2.7.6

Dipunyai semiring N. Akan ditunjukkan I=3N merupakan ideal semiprima di N.

Ambil sebarang A ideal di N dengan $A^2 \subseteq I$.

Akan ditunjukkan $A \subseteq I$.

Diperoleh $AA = \{aa|a \in A\}$.

Ambil sebarang $aa \in AA$, untuk suatu $a \in A$.

Akan ditunjukkan $a \in I$.

Oleh sebab $AA \subset I$, diperoleh $aa \in 3N$.

Oleh sebab $aa \in 3N$, diperoleh $aa = 3n$, untuk suatu $n \in N$.

Oleh sebab 3 bilangan prima, dan N himpunan bilangan cacah diperoleh $a \in 3N$.

Jadi $a \in A$, dan $aa \in AA$, berlaku $a \in I$.

Jadi $A \subset I$.

Jadi dapat disimpulkan bahwa I merupakan ideal semiprima.

Dari contoh ideal prima dan ideal semiprima di atas diperoleh bahwa setiap ideal prima merupakan ideal semiprima, hal ini dijelaskan dalam Akibat 2.7.1

Akibat 2.7.1

Setiap ideal prima I pada semiring S merupakan ideal semiprima.

Dipunyai I ideal prima di S.

Akan ditunjukkan I merupakan ideal semiprima.

Oleh sebab I ideal prima, maka untuk setiap A,B ideal di S dan $AB \subset I$ berlaku $A \subset I$ atau $B \subset I$.

Misalkan $B = A$, dan $AA \subset I$.

Oleh sebab I ideal prima maka berlaku $A \subset I$.

Jadi I merupakan ideal semiprima.

Dalam ring R terdapat ideal maksimal, dalam semiring juga terdapat ideal maksimal. Tidak ada perbedaan definisi antara ideal maksimal di ring dan ideal maksimal di semiring, sebagaimana dijelaskan dalam Definisi 2.7.7.

Definisi 2.7.7

Misalkan R semiring. Ideal M di R dikatakan ideal maksimal apabila $M \neq R$ dan untuk setiap ideal I di R dengan $M \subset I \subset R$ maka $I = M$ atau $I = R$.

Contoh 2.7.7

Dipunyai semiring N. Akan ditunjukkan I=3N merupakan ideal maksimal di N.

Misalkan I bukan ideal maksimal di N.

Oleh sebab I bukan ideal maksimal, maka terdapat ideal lain di N yang memuat I.

Pilih $a \in I$, dengan $a = 3$.

Oleh sebab $a = 3$, dan 3 adalah bilangan prima, maka tidak ada ideal lain yang memuat 3 selain N dan I.

Kontradiksi dengan pernyataan I bukan ideal maksimal.

Jadi I merupakan ideal maksimal di N.

BAB 5

PENUTUP

Pada bab ini berisi simpulan dan saran-saran yang dapat diambil berdasarkan pembahasan-pembahasan pada bab sebelumnya.

5.1 Simpulan

Dari pembahasan bab sebelumnya, penulis dapat mengambil simpulan bahwa sifat-sifat yang berlaku di ring atau semiring belum tentu berlaku pada hemiring. Sama halnya dalam ideal hemiring, tidak semua sifat yang berlaku pada ideal semiring, dan ideal ring juga berlaku pada ideal hemiring. Berikut adalah sifat- sifat yang berlaku pada hemiring dan ideal hemiring.

1. Sifat-sifat yang berlaku pada hemiring adalah sebagai berikut.
   a. Misalkan H hemiring. Jika A m-sistem di H, maka A merupakan p-sistem.
   b. Himpunan bagian tak kosong I dari hemiring H merupakan p-sistem jika dan hanya jika I gabungan dari m-sistem.
2. Sifat-sifat yang berlaku pada ideal hemiring adalah sebagai berikut
   a. Misalkan R hemiring. Kondisi dibawah ini ekuivalen
      i) R multiplikatif regular
      ii) $HI = H \cap I \; \forall$ ideal kiri I dan ideal kanan H dari R
      iii) Ideal (R) merupakan multiplikatif idempoten

iv) $H \cap K \subseteq HK$ untuk setiap ideal H dan ideal kanan K

v) Jika K merupakan ideal kanan dari R yang termuat di ideal H dari R maka $K \subseteq HK$

b. Misalkan H hemiring, dan I ideal di H. Kondisi berikut ekuivalen

   i) I ideal prima

   ii) $\{ahb|h \in H\} \subseteq I$ jika dan hanya jika $a \in I$ atau $b \in I$

   iii) Jika $a, b \in H$ dan $(a)(b) \subseteq I$ maka berlaku $a \in I$ atau $b \in I$

c. Misalkan H hemiring, dan I ideal di H. Kondisi berikut ekuivalen

   i) I ideal semiprima

   ii) $\{ara|r \in H\} \subseteq I$ jika dan hanya jika $a \in I$

d. Setiap ideal semiprima dari hemiring H merupakan semisubtaktiv.

5.2 Saran

Dalam pembahasan sebelumnya telah ditunjukkan bahwa tidak semua ideal maksimal di hemiring merupakan ideal prima. Penulis tidak mengkaji lebih dalam mengenai syarat apa yang harus ditambahkan agar setiap ideal maksimal di hemiring merupakan ideal prima. Saran yang dapat diberikan untuk penelitian berikutnya adalah mengkaji syarat yang harus dipenuhi ideal maksimal di hemiring sehingga sifat tersebut dapat berlaku.

DAFTAR PUSTAKA

Fraleigh, John B. 2000. *A first Course in abstract algebra*. Filipina: Pearson Education Asia.

Giri, R.D & B.R Chide. 2014. Prime Radical In Ternary Hemirings. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 94 (5): 631-647.

Giri, R.D & B.R Chide. 2014. Prime Radical Theory of Hemirings. *International Journal of Algebra*, 8 (6): 293-310.

Golan. 1999. *Semiring and Their Aplication.* Israel: Kluwer Academic Publisher.

Golan. 2003. *Semiring and Affine Equations over them:Teory and Aplication*. Israel: Kluwer Academic Publisher.

Grillet, Pierre Antonie. 1998. *Algebra*. New York: John Wiley And Sons

Gupta V, J.N Chaundhari. 2008. Characterization Of Weakly Prime Subtractive Ideals In Semirings. *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica (New Series)*. 3(2): 347-352.

Isnarto. 2005. *Pengantar Teori Ring*. Semarang: Universitas Negeri Semarang.

Isnarto. 2009. *Pengantar Teori Grup*. Semarang: Universitas Negeri Semarang.

Lang, Serge.1965. A*lgebra*. New York: Addison-Wesley Publising Company.

Lescot, Paul. 2014. Prime And Primary Ideals In Semirings. *Osaka J. Math.* 52 (2015): 721–736.

Lescot, Paul. 2014. Prime And Primary Ideals In Semirings. *Osaka J. Math.* 52(2015): 721–736.

Mas'oed, Fadli. 2013. *Struktur Aljabar*. Jakarta Barat: Akademia Permata

Olson, D M. 1978. A Note on The Homomorphism Therem For Hemirings. *Internal. J. Math. & Math. Sci.* 1(1978)439-445.

Setiawan, Adi. 2011. *Aljabar Abstrak (Teori Grup Dan Teori Ring)*. Salatiga: Universitas Kristen Satya Wacana.

Setiawan, Adi. 2014. *Dasar-Dasar Aljabar Modern:Teori Grup & Teori Ring*. Salatiga: Tisara Grafika.

Shabir, Muhammad, Rukhanda.A. 2013. Characterizations of Hemirings by the Properties of Their k-Ideals. *Applied Mathematics Scientific research*. 4: 753-768.

Sukirman, Soebagio Soeharti. 1993. *Struktur Aljabar*. Jakarta: Penerbit Universitas Terbuka.

Sukirman. 2003. *Pengantr Aljabar Abstrak*. Yogyakarta : Universitas Negeri Malang.

Sukirman. 2005. *Pengantr Aljabar Abstrak*. Malang: Universitas Negeri Yogyakarta.

Wahyuni, Sri, Indah, E.W & Diah J.E.P. 2013. *Pengentar Struktur Aljabar II*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Yazarli, H, Mehmet Ali. 2013. On the centroid of prime semirings. *Turkish Journal of Mathematics*. 37: 577-584.

Yiara, P, Phakakorn P. 2015. On Prime and Left Prime Ideals in Semirings. *Asian Journal of Applied Sciences*. 3: 364-369.