KEBERLAKUAN SIFAT ARMENDARIZ PADA RING POLINOMIAL MIRING

Skripsi

disusun sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

Irvan Kurniawan

4111413019

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2017

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, kecuali yang secara tertulis dirujuk dalam skripsi ini dan disebutkan dalam daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan.

Semarang, 16 Juni 2017

METERAI TEMPEL
47E47ADC002842735
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Irvan Kurniawan

4111413019

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Keberlakuan Sifat Armendariz Pada Ring Polinomial Miring

disusun oleh

Irvan Kurniawan

4111413019

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA Universitas Negeri Semarang pada tanggal 31 Mei 2017.

Panitia,

Ketua

Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si., Akt.

NIP. 196412231988031001

Sekretaris

Drs. Arief Agoestanto, M.Si

NIP. 196807221993031005

Ketua Penguji

Dra. Kristina Wijayanti, M.S

NIP. 196012171986012001

Anggota Penguji/

Pembimbing I

Dr. Isnarto, M.Si

NIP. 196902251994031001

Anggota Penguji/

Pembimbing II

Drs. Mashuri, M.Si

NIP. 196708101992031003

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan

(QS. Al Insyirah: 6)

Yakinlah ada sesuatu yang menantimu selepas banyak kesabaran (yang kau jalani) yang akan membuatmu terpana hingga kau lupa betapa pedihnya rasa sakit

(Ali bin Abi Tholib)

Kepuasan itu terletak pada usaha, bukan pada pencapaian hasil. Berusaha keras adalah kemenangan besar

(Gandhi)

PERSEMBAHAN

Untuk kedua orang tuaku, Bapak Dedi Suryana dan Ibu Ngatmi, Kakakku, Dadang Shodiqin dan Adikku, Ervin Febriansyah

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang senantiasa memberikan kemudahan dalam setiap langkah. Shalawat serta salam senantiasa dihaturkan kepada Nabi Muhammad SAW, keluarga, sahabat dan orang-orang yang senantiasa berjalan di jalan kebenaran. Atas izin Allah SWT dan dengan dukungan dari berbagai pihak, skripsi dengan judul "Keberlakuan Sifat Armendariz Pada Ring Polinomial Miring" ini dapat diselesaikan.

Penyusunan skripsi ini dapat diselesaikan berkat kerjasama, bantuan, dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum., Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Prof. Dr. Zaenuri, S.E, M.Si, Akt., Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si., Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.
4. Drs. Mashuri, M.Si., Ketua Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, sekaligus selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, pengarahan dan saran-saran selama penyusunan skripsi ini.
5. Dr. Isnarto, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, pengarahan dan saran-saran selama penyusunan skripsi ini.
6. Dra. Kristina Wijayanti, M.S., selaku Dosen Penguji yang telah memberikan penilaian dan saran dalam perbaikan skripsi ini.

7. Dr. Rochmad, M.Si., selaku Dosen Wali saya yang telah memberikan bimbingan dan arahan.
8. Dosen-dosen Matematika Universitas Negeri Semarang yang telah membekali penulis dengan berbagai ilmu selama mengikuti perkuliahan sampai akhir penulisan skripsi ini.
9. Keluarga tercinta yang selalu memberikan dorongan dan semangat.
10. Teman-teman Matematika 2013 yang telah berjuang bersama-sama.
11. Sahabat-sahabat yang selalu memberikan semangat.
12. Semua pihak yang telah membantu dalam penelitian ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan maupun penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, oleh sebab itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun dari semua pihak.

Semarang, Juni 2017

Penulis

ABSTRAK

Kurniawan, Irvan. 2017. *Keberlakuan Sifat Armendariz Pada Ring Polinomial Miring*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Pembimbing Utama Dr. Isnarto, M.Si dan Pembimbing Pendamping Drs. Mashuri, M.Si.

Kata Kunci: Sifat Armendariz, Ring polinomial miring, dan Ring α-rigid

Misalkan R suatu ring dan $f(x), g(x) \in R[x]$ dengan $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$. Rege dan Chhawchharia menyatakan bahwa suatu ring R dikatakan memiliki sifat Armendariz apabila $f(x)g(x) = 0$ maka $a_i b_j = 0$ untuk setiap i,j. Penelitian ini dimaksudkan untuk mengetahui struktur ring yang memenuhi sifat Armendariz serta keberlakuan dari sifat Armendariz pada ring polinomial miring. Ring polinomial miring atas ring R dalam indeterminate x adalah himpunan polinomial $f(x) = \sum_{i}^{\infty} a_i x^i$ yang memenuhi aturan perkalian $xa = \alpha(a)x + \delta(a), \forall a \in R$, dengan α adalah endomorfisma ring R dan δ adalah α-derivatif. Ring Polinomial miring dengan α dan δ disimbol dengan $R[x; \alpha, \delta]$. Pada penelitian ini, ring polinomial miring dibatasi pada ring polinomial miring dengan $\delta = 0$ atau disimbolkan dengan $R[x; \alpha]$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa daerah integral dan field memenuhi sifat Armendariz, serta apabila R ring α-rigid maka sifat Armendariz berlaku pada ring polinomial miring $R[x; \alpha]$.

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{N}$	: Himpunan semua bilangan asli
$\mathbb{Z}$	: Himpunan semua bilangan bulat
$\mathbb{R}$	: Himpunan semua bilangan real
$\mathbb{C}$	: Himpunan semua bilangan kompleks
$\mathbb{R}^+$	: Himpunan semua bilangan real positif
$M_{2x2}(\mathbb{R})$	: Himpunan semua matrik berordo 2×2 dengan entri bilangan real
$< G,*>$	: Grup dengan himpunan G dan operasi biner $*$
$< R,+,.>$	: Ring dengan himpunan R dan operasi biner penjumlahan dan perkalian
$R[x]$	: Ring polinomial dengan koefisien di R dan indeterminate x
α	: Endomorfisma dari suatu ring
δ	: α-derivatif dari suatu ring
$R[x;\alpha,\delta]$	: Ring polinomial miring dengan koefisien di R, indeterminate x, endomorfisma ring α dan α-derivatif δ
$R[x;\alpha]$	: Ring polinomial miring dengan koefisien di R dan indeterminate x, endomorfisma ring α dan α-derivatif $\delta = 0$
$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$	: Himpunan yang semua anggotanya berbentuk $a + b\sqrt{-5}$ dimana $a, b \in \mathbb{Z}$

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Grup merupakan struktur dasar dalam mempelajari struktur aljabar. Dalam mempelajari struktur aljabar diperlukan adanya suatu himpunan dan operasi yang dikenakan pada himpunan tersebut. Grupoid merupakan himpunan tak kososng yang dikenakan suatu operasi biner $*$. Apabila pada grupoid operasi $*$ bersifat assosiatif maka himpunan tersebut dinamakan semigrup. Grup adalah suatu himpunan tak kosong yang dikenakan satu operasi biner $*$ yang memenuhi aksioma : (1) operasi $*$ bersifat assosiatif, (2) operasi $*$ memiliki elemen identitas, dan (3) setiap elemennya memiliki invers terhadap operasi $*$. Apabila di dalam grup operasi $*$ bersifat komutatif, maka grup tersebut dinamakan grup komutatif atau grup abelian (Fraleigh, 1989). Grup dengan himpunan G dan operasi $*$ disimbolkan dengan $< G,*>$. Apabila pada grup ditambahkan suatu operasi biner dan beberapa aksioma, maka dapat dibentuk struktur aljabar yang disebut ring.

Suatu himpunan R dengan operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian (.) dikatakan ring apabila himpunan R merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan dan semigrup terhadap operasi perkalian, serta bersifat distributif perkalian terhadap penjumlahan. Ring R dengan kedua operasi tersebut biasa ditulis dengan $< R,+,.>$. Jika pada operasi perkalian bersifat komutatif, maka ring $< R, +, . >$ dinamakan ring komutatif (Fraleigh, 1989). Dari ring ini dapat dibentuk suatu ring polinomial.

Misalkan R ring, suatu polinomial $f(x)$ dengan koefisien di R adalah jumlahan tak hingga $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ dengan $a_i = 0$ kecuali sebanyak berhingga nilai i. Selanjutnya a_i dinamakan koefisien dari $f(x)$. Himpunan semua polinomial dalam indeterminate x dan koefisien di R disimbolkan dengan R[x]. Himpunan R[x] dengan operasi penjumlahan dan perkalian pada polinomial membentuk suatu ring polinomial (Fraleigh, 1989).

Terkait ring polinomial ini, Armendariz mengemukakan suatu lemma sebagai berikut. Misalkan R adalah ring tereduksi, $f(x), g(x) \in R[x]$ dengan $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$. Selanjutnya $f(x)g(x) = 0$ jika dan hanya jika $a_i b_j = 0$, untuk setiap i,j (Armendariz, 1974). Dari lemma Armendariz ini Rege dan Chhawchharia (1997), memperkenalkan suatu ring Armendariz yaitu, suatu ring R dikatakan memiliki sifat Armendariz (ring Armendariz) apabila setiap $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ memenuhi $f(x)g(x) = 0$ maka $a_i b_j = 0$ untuk setiap i,j. Struktur dan sifat dari ring Armendariz telah banyak dikaji oleh para peneliti. Kim dan Lee (2000) menjelaskan hubungan antara ring Armendariz dan ring tereduksi, Antoine (2008) mempelajari himpunan elemen nilpoten pada ring Armendariz dan memperkenalkan nil-Armendariz sebagai generalisasinya, serta Kwak *et al.* (2012) mengkaji tentang sifat Armendariz pada ideal dari suatu ring.

Pada tahun 1933, Ore memperkenalkan ring polinomial yang tidak komutatif, ring ini biasa disebut dengan ring polinomial miring (*skew polynomial ring*). Dalam ring polinomial miring, perkalian antar polinomial didasari oleh perkalian $xa = \alpha(a)x + \delta(a)$, dimana α adalah suatu endomorfisma ring dan δ adalah suatu α-derivatif. Suatu δ merupakan α-derivatif apabila δ suatu endomorfisma grup dan berlaku $\delta(ab) = \alpha(a)\delta(b) + \delta(a)b$. Ring polinomial miring dengan α dan δ disimbolkan dengan $R[x;\ \alpha, \delta]$, untuk kasus $\delta = 0$ ring polinomial miring disimbolkan dengan $R[x;\ \alpha]$ yang disebut juga *Ore extension of endomorphism type* (Hong *et al.*, 2000).

Telah banyak penelitian yang dilakukan oleh para ahli terkait ring polinomial miring. Beberapa peneliti telah mengembangkan kelas ring polinomial miring ke dalam kelas ring yang lebih besar dan bahkan sebagian peneliti telah menggunakan ring polinomial miring dalam dunia aplikasi. Dalam teori sistem kontrol, ring polinomial miring digunakan untuk memahami perilaku sistem kontrol linear dengan mentransfer sistem kontrol linear (klasik) ke dalam sistem kontrol linear abstrak (Amir, 2011).

Struktur dari ring polinomial miring ini menarik untuk dikaji oleh para peneliti. Amir (2010) mengkaji tentang ideal maksimal dari suatu ring polinomial miring dengan ring tumpuannya merupakan daerah bilangan bulat Gauss. Amir (2012 dan 2013) menjelaskan tentang pembentukan ring polinomial miring dari suatu quaternion dan juga pembentukan ring polinomial miring bersusun atas automorfisma pada ring polinomial miring. Nam *et al.* (2013) mengkaji tentang struktur dasar dari hasil kali koefisien-koefisien pada ring polinomial miring.

Berdasarkan uraian diatas, penulis tertarik untuk mengkaji tentang ring polinomial miring yang dikaitkan pada sifat Armendariz. Dalam penelitian ini dibahas tentang keberlakuan dari sifat Armendariz pada ring polinomial miring.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian diatas, permasalahan yang akan dibahas pada penelitian ini adalah :

1. Struktur ring manakah yang memenuhi sifat Armendariz?
2. Bagaimanakah keberlakuan sifat Armendariz pada ring polinomial miring?

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini struktur ring yang dikaji adalah daerah integral dan field, serta ring polinomial miring dengan $\delta = 0$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Mengetahui struktur ring yang memenuhi sifat Armendariz, dan
2. Mengetahui keberlakuan sifat Armendariz pada ring polinomial miring.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah penulis dapat mengetahui keberlakuan dari sifat Armendariz pada ring polinomial miring, sehingga dapat memberikan celah pada peneliti lain unuk melakukan penelitian pada topik yang sama.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini disusun dalam tiga bagian utama, yaitu bagian awal, bagian inti, dan bagian akhir skripsi.

1.6.1 Bagian Awal

Bagian awal skripsi ini berisi halaman judul, pernyataan, pengesahan, motto dan persembahan, kata pengantar, abstrak, daftar isi, dan daftar simbol.

1.6.2 Bagian Inti

Bagian inti dari skripsi ini adalah isi skripsi yang terdiri dari lima bab, yaitu:

BAB 1 PENDAHULUAN

Dalam bab ini dipaparkan mengenai latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, serta sistematika penulisan.

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

Berisi tentang teori-teori yang mendukung topik penelitian, yaitu berupa definisi, teorema, proposisi, lemma, dan contoh-contoh yang berhubungan dengan topik penelitian.

BAB 3 METODE PENELITIAN

Berisi tentang prosedur atau langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini, meliputi kajian pustaka, perumusan masalah, pemecahan masalah, dan penarikan simpulan.

BAB 4 PEMBAHASAN

Berisi pembahasan dari rumusan masalah, yang meliputi pembuktian proposisi-proposisi yang digunakan untuk menjawab rumusan masalah.

BAB 5 PENUTUP

Berisi simpulan dan saran dari penulis.

1.6.3 Bagian Akhir

Berisi daftar pustaka sebagai acuan penulisan yang memberikan informasi tentang buku dan literatur lain yang digunakan dalam skripsi ini.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Teori Himpunan

2.1.1 Himpunan

Himpunan merupakan kumpulan suatu objek yang mempunyai ciri dan karakteristik yang sama. Objek-objek ini biasa disebut anggota atau unsur atau elemen dari himpunan tersebut. Suatu himpunan umumnya dinotasikan dengan huruf kapital, misal A,B,C,...,X,Y,Z. Sedangkan unsur atau elemen dari suatu himpunan umumnya dinotasikan dengan huruf kecil, misal a,b,c,k.

Misalkan x menyatakan suatu anggota dari himpunan A maka dinotasikan dengan "$x \in A$" dan misalkan y menyatakan bukan anggota dari A maka dinotasikan dengan "$y \notin A$". Himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong, dan dinotasikan dengan $\emptyset$ atau $\{\}$.

Contoh 1

Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat.

Ditulis $\mathbb{Z}$ = {...,-2,-1,0,1,2,...}, jelas $6 \in \mathbb{Z}$, tetapi $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Definisi 1 (Arifin, 2000)

Himpunan X dikatakan subhimpunan dari himpunan Y jika untuk setiap $x \in X$ berlaku $x \in Y$.

Tanda untuk subhimpunan adalah $\subseteq$. Untuk X subhimpunan dari Y dinotasikan dengan $X \subseteq Y$.

Contoh 2

Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat dan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan real. Himpunan $\mathbb{Z}$ merupakan subhimpunan dari himpunan $\mathbb{R}$ karena setiap elemen di $\mathbb{Z}$ merupakan elemen di $\mathbb{R}$, atau dinotasikan dengan $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

Salah satu cara membentuk himpunan adalah dengan kali silang. Misalkan dua himpunan tak kosong A dan B, untuk setiap unsur $a \in A$ dan $b \in B$ dapat dibentuk pasangan berurutan (a, b). Kali silang himpunan A dan B, dinotasikan dengan $A \times B$, adalah himpunan semua pasangan berurutan (a, b), yaitu $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

2.1.2 Pemetaan

Apabila diberikan dua himpunan tak kosong A dan B, unsur di himpunan A dapat dikaitkan dengan unsur di himpunan B, cara mengaitkan unsur di A dan unsur di B dinamakan pemetaan/fungsi, sebagaimana dinyatakan dalam definisi berikut,

Definisi 2 (Arifin, 2000)

Misal diketahui dua himpunan tak kosong S dan T, pemetaan/fungsi f dari S ke T, ditulis $f: S \to T$, adalah suatu cara mengaitkan setiap elemen $x \in S$ dengan tepat satu elemen $y \in T$.

Contoh 3

Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{2,4,6,8,9,16\}$. Didefinisikan suatu aturan yang memasangkan himpunan A ke himpunan B, $f: A \to B$ dan $g: A \to B$ dengan $f(x) = 2x, \forall x \in A$ dan $g(x) = x^2, \forall x \in A$. Jelas $f(x)$ merupakan pemetaan/fungsi sebab setiap elemen di A dikaitkan dengan tepat satu elemen di B. Sedangkan $g(x)$ bukan pemetaan/fungsi sebab $1 \in A$ tetapi 1 tidak memiliki pasangan di B.

Bayangan atau peta dari pemetaan $f: S \to T$ adalah himpunan semua elemen $y \in T$ yang merupakan hasil pemetaan dari elemen $x \in S$. Sedangkan unsur $x \in S$ yang dipetakan oleh f menjadi unsur $y \in T$ disebut prapeta.

Definisi 3 (Arifin, 2000)

Pemetaan $f: S \to T$ disebut pemetaan pada atau surjektif jika untuk setiap $y \in T$ maka terdapat elemen $x \in S$ yang memenuhi $f(x) = y$.

Definisi 4 (Arifin, 2000)

Pemetaan $f: S \to T$ disebut pemetaan satu-satu atau injektif jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in S$.

Definisi 5 (Sukirman, 2005)

Pemetaan yang sekaligus surjektif dan injektif disebut pemetaan bijektif (satu-satu dan pada).

Contoh 4

Misal $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat dan C adalah himpunan semua bilangan cacah. Pemetaan $f: \mathbb{Z} \rightarrow C$ didefinisikan dengan $f(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{Z}$. Pemetaan f merupakan pemetaan surjektif, sebab setiap elemen di C merupakan peta dari elemen di $\mathbb{Z}$, dengan kata lain setiap $y \in C$ terdapat elemen $x \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $f(x) = y$. Pemetaan f bukan pemetaan injektif, sebab ada $1, -1 \in \mathbb{Z}$ dengan $1 \neq -1$ tetapi $f(1) = 1 = f(-1)$. Dengan kata lain, ada dua elemen tak sama di $\mathbb{Z}$ yang dipetakan ke elemen yang sama di C. Jadi, f bukan pemetaan bijektif.

Contoh 5

Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat dan $\mathbb{N}$ adalah himpunan semua bilangan asli. Pemetaan $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ didefinisikan dengan $g(x) = 2x - 5, \forall x \in \mathbb{N}$. Pemetaan g merupakan pemetaan injektif. Ambil sebarang $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ dengan $f(x_1) = f(x_2)$. Jelas $f(x_1) = f(x_2)$ mengakibatkan $2x_1 - 5 = 2x_2 - 5$, sehingga diperoleh $x_1 = x_2$. Jadi, untuk setiap x_1 dan x_2 di $\mathbb{N}$, jika $f(x_1) = f(x_2)$, maka berlaku $x_1 = x_2$. Pemetaan g bukan pemetaan surjektif sebab ada $0 \in \mathbb{Z}$ tetapi tidak ada elemen di $\mathbb{N}$ yang dipetakan ke 0. Jadi, g bukan pemetaan bijektif.

Contoh 6

Misalkan $\mathbb{R}$ himpunan semua bilangan real. Pemetaan $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $h(x) = 4x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

Pemetaan h injektif, sebab untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $h(a) = h(b)$ berlaku $4a + 3 = 4b + 3$ sehingga $a = b$.

Pemetaan h juga surjektif sebab jika $d \in \mathbb{R}$, ada $c \in \mathbb{R}$ dengan $c = \frac{d-3}{4}$ sedemikian sehingga $h(c) = h(\frac{d-3}{4}) = 4(\frac{d-3}{4}) + 3 = d$.

Oleh sebab h injektif dan surjektif maka h pemetaan bijektif.

2.2 Teori Grup

Struktur aljabar merupakan cabang ilmu matematika yang mengkaji tentang himpunan dan operasi yang dikenakan pada himpunan tersebut. Grup merupakan struktur aljabar yang mengkaji himpunan dan sebuah operasi yang biasa disebut dengan operasi biner.

2.2.1 Operasi Biner

Definisi 6 (Durbin, 1979)

Operasi biner $*$ pada himpunan S merupakan pemetaan dari $S \times S$ ke S atau pemetaan $(a, b) \longmapsto a * b, \forall a, b \in S$.

Definisi 7 (Durbin, 1979)

Misalkan operasi $*$ pada S adalah suatu operasi biner,

1. Operasi $*$ pada S bersifat komutatif apabila $a * b = b * a, \forall a, b \in S$.
2. Operasi $*$ pada S bersifat assosiatif apabila $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in S$.
3. Elemen $e \in S$ dikatakan elemen identitas untuk operasi $*$ pada S jika $a * e = e * a = a, \forall a \in S$.
4. Jika terdapat $b \in S$ sedemikian hingga $a * b = b * a = e$, maka b disebut invers dari a terhadap operasi $*$.

Contoh 7

Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat. Operasi $+$ (penjumlahan) pada $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner, sebab jumlahan dari dua bilangan bulat adalah suatu bilangan bulat juga, yaitu apabila $a, b \in \mathbb{Z}$ berakibat $a + b \in \mathbb{Z}$.

Misalkan $\mathbb{N}$ adalah himpunan semua bilangan asli. Operasi – (pengurangan) pada $\mathbb{N}$ bukan operasi biner, pilih $1, 5 \in \mathbb{N}$, jelas $1 - 5 = -4$, oleh sebab $-4 \notin \mathbb{N}$ maka operasi pengurangan pada $\mathbb{N}$ bukan operasi biner.

2.2.2 Grup

Himpunan tak kosong G bersama-sama dengan operasi biner $*$ dinamakan grupoid. Apabila operasi biner $*$ pada himpunan G bersifat assosiatif, maka himpunan G dinamakan semigrup. Semigrup yang memiliki elemen identitas terhadap operasi biner dinamakan monoid, apabila operasi biner bersifat komutatif maka dinamakan monoid abelian (Sukirman, 2005).

Contoh 8

Misalkan $\mathbb{N}$ adalah himpunan semua bilangan asli. Didefinisikan operasi perkalian pada $\mathbb{N}$. Oleh sebab operasi perkalian merupakan operasi biner pada $\mathbb{N}$, maka himpunan $\mathbb{N}$ bersama-sama dengan operasi perkalian merupakan grupoid. Pada bilangan asli operasi perkalian bersifat assosiatif, dan terdapat $1 \in \mathbb{N}$ yang merupakan elemen identitas terhadap operasi perkalian pada $\mathbb{N}$. Jadi $\mathbb{N}$ bersama-sama operasi perkalian membentuk struktur monoid. Oleh sebab operasi perkalian pada bilangan asli bersifat komutatif maka $\mathbb{N}$ dengan operasi perkalian merupakan monoid abelian.

Definisi 8 (Durbin, 1979)

Misalkan G adalah himpunan yang tidak kosong dan operasi $*$ pada G adalah suatu operasi biner. Himpunan G bersama-sama dengan operasi biner $*$ ditulis $< G,* >$ adalah suatu grup jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

i. Operasi $*$ bersifat assosiatif pada G
   $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c),$
ii. Operasi $*$ memiliki elemen identitas pada G
   $\exists\, e \in G \ni \forall a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$,
iii. Setiap elemen di G memiliki invers terhadap operasi $*$
   $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \ni a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$

Dengan kata lain, suatu grup $< G,* >$ merupakan suatu monoid yang setiap elemen di G memiliki invers di G juga.

Definisi 9 (Durbin, 1979)

Jika G suatu grup dan operasi biner $*$ bersifat komutatif, maka grup G disebut grup komutatif atau grup abelian.

Contoh 9

Misalkan $\mathbb{C}$ adalah himpunan semua bilangan kompleks yang semua anggotanya berbentuk $a + bi$ dengan $a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$. Akan ditunjukkan $\mathbb{C}$ terhadap operasi penjumlahan membentuk struktur grup.

Jelas $\mathbb{C}$ bukan himpunan kosong. Akan ditunjukkan : (i) operasi penjumlahan pada $\mathbb{C}$ merupakan operasi biner, (ii) Operasi penjumlahan pada $\mathbb{C}$ bersifat assosiatif, (iii) Operasi penjumlahan memiliki elemen identitas di $\mathbb{C}$, dan (iv) Setiap elemen di $\mathbb{C}$ memiliki invers di $\mathbb{C}$ terhadap operasi penjumlahan.

i. Operasi penjumlahan pada $\mathbb{C}$ merupakan operasi biner

   Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{C}$ dengan $x = a_1 + b_1 i$ dan $y = a_2 + b_2 i$ dimana $a_1, b_1 a_2, b_2 \in \mathbb{R}$.

   Diperoleh

   $x + y = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)$

   $\quad\quad = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

   Oleh sebab $a_1, b_1 a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ diperoleh $a_1 + a_2, b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$.

   Jadi $x + y = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \in \mathbb{C}$.

   Penjumlahan pada $\mathbb{C}$ merupakan operasi biner.

ii. Operasi penjumlahan pada $\mathbb{C}$ bersifat assosiatif

   Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{C}$ dengan $x = a_1 + b_1 i$, $y = a_2 + b_2 i$ dan $z = a_3 + b_3 i$ dengan $a_1, b_1 a_2, b_2, a_3, b_3 \in \mathbb{R}$.

Diperoleh

$$(x+y)+z = \big((a_1+a_2)+(b_1+b_2)i\big)+a_3+b_3i$$

$$= (a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)i$$

$$x+(y+z) = (a_1+b_1i)+\big((a_2+a_3)+(b_2+b_3)i\big)$$

$$= (a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)i$$

Jadi, $(x+y)+z = x+(y+z), \forall x,y,z \in \mathbb{C}$ dengan kata lain operasi penjumlahan pada $\mathbb{C}$ bersifat assosiatif.

iii. Operasi penjumlahan memiliki elemen identitas di $\mathbb{C}$

Jelas $0 \in \mathbb{R}$ sehingga $0+0.i = 0 \in \mathbb{C}$. Jadi, $0 \in \mathbb{C}$.

Ambil sebarang $x \in \mathbb{C}$ dengan $x = a+bi$ dimana $a,b \in \mathbb{R}$.

Jelas $0+x = 0+(a+bi) = a+bi = (a+bi)+0 = x+0 = x$.

Terdapat $0 \in \mathbb{C} \ni 0+x = x+0 = x, \forall x \in \mathbb{C}$.

Jadi, 0 merupakan elemen identitas di $\mathbb{C}$.

iv. Setiap elemen di $\mathbb{C}$ memiliki invers di $\mathbb{C}$ terhadap operasi penjumlahan

Ambil sebarang $x \in \mathbb{C}$ dengan $x = a+bi$ dimana $a,b \in \mathbb{R}$.

Oleh sebab $a,b \in \mathbb{R}$ diperoleh $-a,-b \in \mathbb{R}$ sehingga $-x = -a-bi \in \mathbb{C}$.

Diperoleh $x+(-x) = (a+bi)+(-a-bi) = 0$.

Jadi, $\forall x \in \mathbb{C}\ \exists -x \in \mathbb{C} \ni x+(-x) = 0$.

Setiap elemen di $\mathbb{C}$ memiliki invers.

Berdasarkan i, ii, iii, dan iv maka himpunan $\mathbb{C}$ terhadap operasi penjumlahan membentuk struktur grup.

Contoh 10

Diberikan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat dan $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ adalah suatu himpunan yang semua anggotanya berbentuk $a + b\sqrt{-5}$ dimana $a, b \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ terhadap penjumlahan membentuk struktur grup abelian.

Jelas $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ bukan himpunan kosong, sebab $0 = 0 + 0\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Akan ditunjukkan : (i) operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ merupakan operasi biner, (ii) Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ bersifat assosiatif, (iii) Operasi penjumlahan memiliki elemen identitas di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, (iv) Setiap elemen di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ memiliki invers di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ terhadap operasi penjumlahan, dan (v) operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ bersifat komutatif.

i. Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ merupakan operasi biner

   Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, dengan $x = a_1 + b_1\sqrt{-5}$ dan $y = a_2 + b_2\sqrt{-5}$ dimana $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$.

   Diperoleh

   $$\begin{aligned} x + y &= \left(a_1 + b_1\sqrt{-5}\right) + \left(a_2 + b_2\sqrt{-5}\right) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{-5} \end{aligned}$$

   Oleh sebab $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ maka $a_1 + a_2 \in \mathbb{Z}$ dan $b_1 + b_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga $x + y = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

   Jadi, operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ merupakan operasi biner.

ii. Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ bersifat assosiatif

Jelas operasi penjumlahan pada $\mathbb{C}$ bersifat assosiatif. Oleh sebab $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \subset \mathbb{C}$ dan operasi penjumlahan pada $\mathbb{C}$ bersifat assosiatif, maka operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ bersifat assosiatif.

iii. Operasi penjumlahan memiliki elemen identitas di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

Jelas $0 \in \mathbb{Z}$ sehingga $0 + 0.\sqrt{-5} = 0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Jadi, $0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

Ambil sebarang $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dengan $x = a + b\sqrt{-5}$ dimana $a, b \in \mathbb{Z}$.

Jelas $0 + x = x + 0 = \left(a + b\sqrt{-5}\right) + 0 = a + b\sqrt{-5} = x$

Terdapat $0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \ni 0 + x = x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Jadi, 0 merupakan elemen identitas di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

iv. Setiap elemen di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ memiliki invers terhadap operasi penjumlahan

Ambil sebarang $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dengan $x = a + b\sqrt{-5}$ dimana $a, b \in \mathbb{Z}$.

Oleh sebab $a, b \in \mathbb{Z}$ diperoleh $-a, -b \in \mathbb{Z}$.

$-x = -a - b\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Diperoleh $x + (-x) = \left(a + b\sqrt{-5}\right) + \left(-a - b\sqrt{-5}\right) = 0$.

Jadi, $\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \exists -x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \ni x + (-x) = 0$.

Setiap elemen di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ memiliki invers.

v. Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ bersifat komutatif

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, dengan $x = a_1 + b_1\sqrt{-5}$ dan $y = a_2 + b_2\sqrt{-5}$ dimana $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$.

Diperoleh

$$x + y = \left(a_1 + b_1\sqrt{-5}\right) + \left(a_2 + b_2\sqrt{-5}\right)$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{-5}$$

$$= (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)\sqrt{-5} \text{ (operasi penjumlahan pada } \mathbb{Z} \text{ komutatif)}$$

$$= \left(a_2 + b_2\sqrt{-5}\right) + \left(a_1 + b_1\sqrt{-5}\right)$$

$$= y + x$$

Jadi, $\forall x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sedemikian sehingga $x + y = y + x$.

Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ bersifat komutatif.

Berdasarkan i,ii,iii,iv, dan v himpunan $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dengan operasi penjumlahan membentuk struktur grup abelian.

Contoh 11

Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ terhadap operasi perkalian tidak membentuk struktur grup, sebab elemen 0 di $\mathbb{R}$ tidak memiliki invers terhadap perkalian.

Teorema 1 (Fraleigh, 1989)

Jika G grup dengan operasi biner $*$, maka hukum kanselasi kiri dan kanan berlaku di G, yaitu $a * b = a * c$ mangakibatkan $b = c$ dan $b * a = c * a$ mangakibatkan $b = c$ dimana $a, b, c \in G$.

Bukti

Oleh sebab $a \in G$ dan G grup, diperoleh $a^{-1} \in G$, dimana a^{-1} merupakan invers dari a di G.

Diperoleh

$a * b = a * c \Leftrightarrow a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$ (kedua ruas dikalikan a^{-1})

$\Leftrightarrow (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$ (operasi $*$ bersifat assosiatif)

$\Leftrightarrow e * b = e * c$ (menggunakan invers)

$\Leftrightarrow b = c$ (elemen identitas)

$b * a = c * a \Leftrightarrow (b * a) * a^{-1} = (c * a) * a^{-1}$ (kedua ruas dikalikan a^{-1})

$\Leftrightarrow b * (a * a^{-1}) = c * (a * a^{-1})$ (operasi $*$ bersifat assosiatif)

$\Leftrightarrow b * e = c * e$ (menggunakan invers)

$\Leftrightarrow b = c$ (elemen identitas)

Jadi, hukum kanselasi kiri dan kanan berlaku di G.

2.2.3 Homomorfisma Grup

Definisi 10 (Fraleigh, 1989)

Misalkan G dan G' grup, suatu pemetaan $\varphi: G \to G'$ merupakan homomorfisma grup jika $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \forall a, b \in G$.

Contoh 12

Diketahui grup $< \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], + >$ dan $< \mathbb{Z}, + >$, didefinisikan suatu pemetaan $\varphi: \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{Z}$ dengan aturan $\varphi\left(a + b\sqrt{-5}\right) = b, \forall\, a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Akan ditunjukkan bahwa φ homomorfisma grup.

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dengan $x = a_1 + b_1\sqrt{-5}\,, y = a_2 + b_2\sqrt{-5}$ dimana . $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$

Diperoleh

$$\varphi(x+y) = \varphi\left(\left(a_1 + b_1\sqrt{-5}\right) + \left(a_2 + b_2\sqrt{-5}\right)\right)$$

$$= \varphi\left((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{-5}\right)$$

$$= b_1 + b_2$$

$$= \varphi\left(a_1 + b_1\sqrt{-5}\right) + \varphi\left(a_2 + b_2\sqrt{-5}\right)$$

$$= \varphi(x) + \varphi(y)$$

Jadi, $\forall x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ $\ni \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

φ suatu homomorfisma grup.

Contoh 13

Diketahui grup $< \mathbb{Z}, + >$ dan pemetaan $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan aturan $\varphi(x) = x - 1$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan φ bukan homomorfisma grup.

Pilih $1, 2 \in \mathbb{Z}$.

Jelas $\varphi(1) = 1 - 1 = 0$ dan $\varphi(2) = 2 - 1 = 1$.

Diperoleh $\varphi(1) + \varphi(2) = 0 + 1 = 1$

$\varphi(1+2) = \varphi(3) = 3 - 1 = 2$

Jadi $\varphi(1+2) \neq \varphi(1) + \varphi(2)$..

Definisi 11 (Fraleigh, 1989)

Misalkan G dan G' grup, $\varphi: G \to G'$ suatu homomorfisma grup. Apabila φ pemetaan injektif, maka φ disebut monomorfisma grup. Apabila φ pemetaan surjektif, maka φ disebut epimorfisma grup. Apabila φ pemetaan bijektif, maka φ disebut isomorfisma grup.

Contoh 14

Diberikan grup $< \mathbb{Z}, + >$ dan $< \mathbb{Z}_6, + >$, suatu pemetaan $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$ dengan aturan $\varphi(x) = \bar{x}$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan φ suatu epimorfisma grup.

Akan ditunjukkan φ suatu homomorfisma grup

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$.

Diperoleh

$$\begin{aligned} \varphi(a+b) &= \overline{(a+b)} \\ &= \bar{a} + \bar{b} \\ &= \varphi(a) + \varphi(b) \end{aligned}$$

Jadi, $\forall a, b \in \mathbb{Z} \ni \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

φ suatu homomorfisma grup.

Akan ditunjukkan φ suatu pemetaan surjektif

Ambil sebarang $y \in \mathbb{Z}_6$ dengan $y = \bar{a}$ untuk suatu $a \in \mathbb{Z}$.

Pilih $x = a$

Diperoleh

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(a) \\ &= \bar{a} \\ &= y \end{aligned}$$

Jadi, $\forall y \in \mathbb{Z}_6 \ \exists\, x \in \mathbb{Z} \ni y = \varphi(x)$.

φ pemetaan surjektif.

Oleh sebab φ homomorfisma dan φ surjektif, maka φ suatu epimorfisma.

Contoh 15

Diberikan grup $<\mathbb{Z},+>$ dan $<\mathbb{R},+>$, suatu pemetaan $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ dengan aturan $\varphi(x)=2x,\forall x\in\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan φ suatu monomorfisma.

Akan ditunjukkan φ suatu homomorfisma grup

Ambil sebarang $a,b\in\mathbb{Z}$.

Diperoleh

$$
\begin{aligned}
\varphi(a+b) &= 2(a+b)\\
&= 2a+2b\\
&= \varphi(a)+\varphi(b)
\end{aligned}
$$

Jadi, $\forall a,b\in\mathbb{Z}\ni\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$.

φ merupakan homomorfisma grup.

Akan ditunjukkan φ suatu pemetaan yang injektif

Ambil sebarang $a,b\in\mathbb{Z}$ dengan $\varphi(a)=\varphi(b)$

Diperoleh

$$
\begin{aligned}
&\varphi(a)=\varphi(b)\\
\Leftrightarrow\ &2a=2b\\
\Leftrightarrow\ &a=b
\end{aligned}
$$

Jadi, $\forall a,b\in\mathbb{Z},\varphi(a)=\varphi(b)$ mengakibatkan $a=b$.

φ pemetaan injektif.

Oleh sebab φ homomorfisma dan φ injektif, maka φ suatu monomorfisma.

Contoh 16

Diberikan grup $<\mathbb{R}^+,.>$ dan $<\mathbb{R},+>$, suatu pemetaan $\varphi:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dengan aturan $\varphi(x) = \ln x\,, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Akan ditunjukkan φ suatu isomorfisma.

Akan ditunjukkan φ homomorfisma

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Diperoleh

$$\begin{aligned}\varphi(ab) &= \ln ab\\ &= \ln a + \ln b\\ &= \varphi(a) + \varphi(b)\end{aligned}$$

Jadi, $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \ni \varphi(ab) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

φ merupakan homomorfisma.

Akan ditunjukkan φ suatu pemetaan bijektif

i. Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{R}^+$ dengan $\varphi(a) = \varphi(b)$

   Diperoleh

   $$\begin{aligned}\varphi(a) = \varphi(b) &\Leftrightarrow \ln a = \ln b\\ &\Leftrightarrow a = b\end{aligned}$$

   Jadi, $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \varphi(a) = \varphi(b)$ mengakibatkan $a = b$.

   φ pemetaan yang injektif.

ii. Ambil sebarang $y \in \mathbb{R}$

   Pilih $x = e^y$

Diperoleh

$\varphi(x) = \varphi(e^y)$

$= \ln e^y$

$= y$

Jadi, $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = e^y \in \mathbb{R}^+$ sedemikian hingga $y = \varphi(x)$.

φ pemetaan surjektif.

Berdasarkan i dan ii, φ pemetaan yang bijektif.

Oleh sebab φ homomorfisma dan φ bijektif, maka φ suatu isomorfisma.

Definisi 12 (Fraleigh, 1989)

Suatu homomorfisma dari suatu grup ke dalam dirinya sendiri dinamakan Endomorfisma dan suatu Endomorfisma yang bijektif dinamakan Automorfisma.

Contoh 17

Diberikan grup $< \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], + >$ dan pemetaan $\varphi: \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dengan aturan $\varphi(a + b\sqrt{-5}) = a - b\sqrt{-5}, \forall a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Akan ditunjukkan φ suatu endomorfisma.

Akan diitunjukkan φ suatu homomorfisma

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dengan $x = a_1 + b_1\sqrt{-5}$ dan $y = a_2 + b_2\sqrt{-5}$ dimana $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$.

Diperoleh

$$\varphi(x+y) = \varphi\left(\left(a_1 + b_1\sqrt{-5}\right) + \left(a_2 + b_2\sqrt{-5}\right)\right)$$

$$= \varphi\left((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{-5}\right)$$

$$= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)\sqrt{-5}$$

$$= \left(a_1 - b_1\sqrt{-5}\right) + \left(a_2 - b_2\sqrt{-5}\right)$$

$$= \varphi\left(a_1 + b_1\sqrt{-5}\right) + \varphi\left(a_2 + b_2\sqrt{-5}\right)$$

$$= \varphi(x) + \varphi(y)$$

Jadi, $\forall x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ berakibat $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

φ suatu homomorfisma grup.

Oleh sebab φ homomorfisma dari suatu grup kedalam dirinya sendiri, maka φ merupakan endomorfisma.

Contoh 18

Dari Contoh 17 akan ditunjukkan bahwa φ suatu automorfisma.

Berdasarkan Contoh 17 φ suatu endomorfisma

Akan ditunjukkan φ pemetaan yang bijektif

i. Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dengan $\varphi(x) = \varphi(y)$

   Jelas $x = a_1 + b_1\sqrt{-5}$ dan $y = a_2 + b_2\sqrt{-5}$ dimana $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$.

   Diperoleh

   $$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow a_1 - b_1\sqrt{-5} = a_2 - b_2\sqrt{-5}$$

   $$\Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ dan } b_1 = b_2$$

   Jadi, $a_1 + b_1\sqrt{-5} = a_2 + b_2\sqrt{-5} \Leftrightarrow x = y$.

Oleh sebab $\forall x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\varphi(x) = \varphi(y)$ sedemikian hingga $x = y$, maka φ pemetaan injektif.

ii. Ambil sebarang $y = a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

Pilih $x = a - b\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Diperoleh

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi\left(a - b\sqrt{-5}\right)\\ &= a + b\sqrt{-5}\\ &= y\end{aligned}$$

Oleh sebab $\forall y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\exists x = a - b\sqrt{-5}$ sedemikian hingga $y = \varphi(x)$, maka φ pemetaan surjektif.

Berdasarkan i dan ii φ merupakan pemetaan bijektif.

Oleh sebab φ endomorfisma dan φ pemetaan bijektif maka φ merupakan suatu automorfisma.

2.3 Teori Ring

Apabila pada grup ditambahkan satu operasi biner dan beberapa aksioma, maka diperoleh struktur aljabar yang baru. Struktur aljabar ini dinamakan ring.

2.3.1 Ring

Definisi 13 (Fraleigh, 1989)

Suatu ring $< R, +, . >$ adalah himpunan R yang bersama dengan dua operasi biner + dan . yang berturut-turut disebut penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan pada R dengan memenuhi aksioma sebagai berikut :

1. Grup $< R, + >$ merupakan grup abelian,
2. Operasi perkalian bersifat assosiatif,
3. $\forall a, b, c \in R$ berlaku, hukum distributif kiri, $a.(b + c) = a.b + a.c$ dan hukum distributif kanan, $(a + b).c = a.c + b.c$.

Contoh 19

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dan operasi penjumlahan (+) dan perkalian (.). Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ bersama-sama operasi penjumlahan dan perkalian membentuk struktur ring.

Berdasarkan Contoh 10 (i) diperoleh operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ merupakan operasi biner.

Ditunjukkan operasi perkalian pada $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ merupakan operasi biner

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dengan $x = a_1 + b_1\sqrt{-5}$, $y = a_2 + b_2\sqrt{-5}$ dimana $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$.

Diperoleh

$$\begin{aligned} x.y &= \left(a_1 + b_1\sqrt{-5}\right).\left(a_2 + b_2\sqrt{-5}\right) \\ &= a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{-5} + a_2b_1\sqrt{-5} - 5b_1b_2 \\ &= (a_1a_2 - 5b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{-5} \end{aligned}$$

Oleh sebab $a_1, a_2, b_1, b_2, -5 \in \mathbb{Z}$ maka $a_1a_2 - 5b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1 \in \mathbb{Z}$.

Jadi, $x.y = (a_1a_2 - 5b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Operasi perkalian pada $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ merupakan operasi biner.

1. Berdasarkan Contoh 10 $< \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], + >$ merupakan grup abelian
2. Akan ditunjukkan operasi perkalian pada $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ bersifat assosiatif

   Oleh sebab $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \subset \mathbb{C}$ dan $\mathbb{C}$ terhadap operasi perkalian bersifat assosiatif, maka $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ terhadap operasi perkalian bersifat assosiatif juga.
3. Akan ditunjukkan hukum distributif berlaku di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

   Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dengan $x = a_1 + b_1\sqrt{-5}$, $y = a_2 + b_2\sqrt{-5}$ dan $z = a_3 + b_3\sqrt{-5}$ dimana $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}$

   i. Akan ditunjukkan hukum distributif kiri berlaku

   $$\begin{aligned} x.(y+z) &= \left(a_1 + b_1\sqrt{-5}\right)\left[\left(a_2 + b_2\sqrt{-5}\right) + \left(a_3 + b_3\sqrt{-5}\right)\right] \\ &= \left(a_1 + b_1\sqrt{-5}\right)\left[(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)\sqrt{-5}\right] \\ &= a_1(a_2 + a_3) - 5b_1(b_2 + b_3) + a_1(b_2 + b_3)\sqrt{-5} + \\ &\quad b_1(a_2 + a_3)\sqrt{-5} \\ &= \left(a_1a_2 - 5b_1b_2 + a_1b_2\sqrt{-5} + b_1a_2\sqrt{-5}\right) + \left(a_1a_3 - \right. \\ &\quad \left. 5b_1b_3 + a_1b_3\sqrt{-5} + b_1a_3\sqrt{-5}\right) \\ &= \left(a_1 + b_1\sqrt{-5}\right)\left(a_2 + b_2\sqrt{-5}\right) + \left(a_1 + b_1\sqrt{-5}\right)\left(a_3 + \right. \\ &\quad \left. b_3\sqrt{-5}\right) \\ &= x.y + x.z \end{aligned}$$

   Jadi, hukum distributif kiri berlaku

ii. Akan ditunjukkan hukum distributif kanan berlaku

$(x+y).z = \left[\left(a_1+b_1\sqrt{-5}\right)+\left(a_2+b_2\sqrt{-5}\right)\right]\left(a_3+b_3\sqrt{-5}\right)$

$= \left[(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{-5}\right]\left(a_3+b_3\sqrt{-5}\right)$

$= (a_1+a_2)a_3 - 5(b_1+b_2)b_3 + (a_1+a_2)b_3\sqrt{-5} +$

$(b_1+b_2)a_3\sqrt{-5}$

$= a_1a_3 + a_2a_3 - 5b_1b_3 - 5b_2b_3 + a_1b_3\sqrt{-5} + a_2b_3\sqrt{-5} +$

$b_1a_3\sqrt{-5} + b_2a_3\sqrt{-5}$

$= \left(a_1a_3 - 5b_1b_3 + a_1b_3\sqrt{-5} + b_1a_3\sqrt{-5}\right) + \left(a_2a_3 -\right.$

$\left.5b_2b_3 + a_2b_3\sqrt{-5} + b_2a_3\sqrt{-5}\right)$

$= \left(a_1+b_1\sqrt{-5}\right)\left(a_3+b_3\sqrt{-5}\right) + \left(a_2+b_2\sqrt{-5}\right)\left(a_3 +\right.$

$\left.b_3\sqrt{-5}\right)$

$= x.z + y.z$

Hukum distributif kanan berlaku

Jadi, $\forall x,y,z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ berlaku hukum distributif kiri dan kanan

Berdasarkan 1,2, dan 3 maka $< \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]\ ,+,\ . >$ membentuk struktur ring.

Teorema 2 (Fraleigh, 1989)

Jika R suatu ring dengan 0 merupakan identitas pada penjumlahan, maka untuk setiap $a, b \in R$ berlaku :

1. $0a = a0 = 0$,
2. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$,
3. $(-a)(-b) = ab$.

Bukti

1. Oleh sebab R ring, maka diperoleh

   $a0 + a0 = a(0 + 0) = a0 = a0 + 0$

   Jadi, $a0 + a0 = a0 + 0$ berdasarkan hukum kanselasi pada R maka $a0 = 0$.

2. Untuk menunjukkan $a(-b) = -(ab)$ cukup ditunjukkan $a(-b) + ab = 0$

   $a(-b) + ab = a(-b + b) = a0 = 0$

   Jadi $a(-b) + ab = 0$ sehingga $a(-b) = -(ab)$.

3. Berdasarkan sifat 2 diperoleh :

   $(-a)(-b) = -\big(a(-b)\big)$

   Untuk menunjukkan $-\big(a(-b)\big) = ab$ cukup ditunjukkan bahwa $-\big(a(-b)\big) + \big(-(ab)\big) = 0$.

   $$\begin{aligned} -\big(a(-b)\big) + \big(-(ab)\big) &= -\big(a(-b)\big) + \big(a(-b)\big) \\ &= (-a + a)(-b) \\ &= 0(-b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Jadi $-\big(a(-b)\big) + \big(-(ab)\big) = 0$ sehingga $(-a)(-b) = ab$.

Definisi 14 (Fraleigh, 1989)

Suatu ring yang operasi perkaliannya bersifat komutatif disebut ring komutatif. Sedangkan suatu ring yang memiliki elemen identitas terhadap operasi perkalian disebut ring dengan elemen satuan.

Contoh 20

Akan ditunjukkan bahwa ring $<\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]\,,+,\;.>$ merupakan ring komutatif.

Berdasarkan Contoh 19 $<\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]\,,+,\;.>$ merupakan suatu ring. Akan ditunjukkan pada operasi perkalian berlaku sifat komutatif.

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dengan $x = a_1 + b_1\sqrt{-5}$ dan $y = a_2 + b_2\sqrt{-5}$ dimana $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$.

$x.y = \left(a_1 + b_1\sqrt{-5}\right).\left(a_2 + b_2\sqrt{-5}\right)$

$\quad = a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{-5} + b_1a_2\sqrt{-5} - 5b_1b_2$

$\quad = (a_1a_2 - 5b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{-5}$

Oleh sebab pada himpunan $\mathbb{Z}$ berlaku sifat komutatif, maka diperoleh

$x.y = (a_1a_2 - 5b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{-5}$

$\quad = (a_2a_1 - 5b_2b_1) + (b_2a_1 + a_2b_1)\sqrt{-5}$

$\quad = \left(a_2 + b_2\sqrt{-5}\right).\left(a_1 + b_1\sqrt{-5}\right)$

$\quad = y.x$

Jadi pada operasi perkalian berlaku sifat komutatif.

Ring $<\mathbb{Z}[\sqrt{-5}],+,\;.>$ merupakan ring komutatif.

Contoh 21

$<\mathbb{Z}[\sqrt{-5}],+,.>$ merupakan ring dengan elemen satuan, dengan elemen satuan di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ adalah 1.

Ambil sebarang $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dengan $x = a + b\sqrt{-5}$ dimana $a, b \in \mathbb{Z}$.

Jelas $1 = 1 + 0\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}$.

Diperoleh

$1. x = 1.\left(a + b\sqrt{-5}\right)$

$\quad = 1. a + 1. b\sqrt{-5}$

$\quad = a + b\sqrt{-5}$

$\quad = x$

Oleh sebab $< \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], +, . >$ ring komutatif maka $1. x = x. 1 = x$.

Jadi, terdapat $1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], \ni 1. x = x. 1 = x, \forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

1 elemen identitas terhadap perkalian di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Jadi, $< \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], +, . >$ merupakan ring dengan elemen satuan, dengan elemen satuan di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ adalah 1.

Definisi 15 (Fraleigh, 1989)

Misalkan R ring dengan elemen satuan $1 \neq 0$, elemen $u \in R$ dikatakan unit di R jika u memiliki invers perkalian di R. Dengan kata lain u unit di R jika $u \in R, \exists\, v \in R \ni uv = 1$.

Contoh 22

1 merupakan unit di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, sebab $1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\exists\, 1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sehingga $1.1 = 1$.

$1 + \sqrt{-5}$ bukan unit di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, sebab tidak ada $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sedemikian hingga $\left(1 + \sqrt{-5}\right). x = 1$.

Ambil sebarang $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dengan $x = a + b\sqrt{-5}$ dimana $a, b \in \mathbb{Z}$.

Andaikan $\left(1 + \sqrt{-5}\right). x = 1$

Jelas $(1+\sqrt{-5})(a+b\sqrt{-5})=1$

$\Leftrightarrow a+b\sqrt{-5}+a\sqrt{-5}-5b=1$

$\Leftrightarrow (a-5b)+(a+b)\sqrt{-5}=1$ ...(*)

Kondisi (*) terpenuhi apabila $a-5b=1$ dan $a+b=0$, sehingga diperoleh $a=-b$ dan $-b-5b=1 \Leftrightarrow -6b=1 \Leftrightarrow b=-\frac{1}{6}$. Jadi $a=\frac{1}{6}$ dan $b=-\frac{1}{6}$. Hasil ini kontradiksi dengan fakta bahwa $a,b\in\mathbb{Z}$. Jadi tidak ada $x\in\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sedemikian hingga $(1+\sqrt{-5}).x=1$.

Definisi 16 (Fraleigh, 1989)

Misalkan R ring dengan elemen satuan $1\neq 0$, R dikatakan ring pembagian jika setiap elemen tak nol di R merupakan unit. Dengan kata lain R ring pembagian jika $\forall u\in R, u\neq 0$ maka u unit di R.

Definisi 17 (Fraleigh, 1989)

Ring R dikatakan Field (Lapangan) apabila R ring pembagian yang komutatif.

Contoh 23

Himpunan bilangan real terhadap operasi penjumlahan dan perkalian membentuk suatu ring dengan elemen satuan 1. Ring $<\mathbb{R},+,.>$ merupakan ring pembagian, sebab $\forall a\in\mathbb{R}, a\neq 0, \exists \frac{1}{a}\in\mathbb{R} \ni a.\frac{1}{a}=1$. Oleh sebab $<\mathbb{R},+,.>$ merupakan ring komutatif maka $<\mathbb{R},+,.>$ merupakan suatu Field (Lapangan).

Definisi 18 (Fraleigh, 1989)

Apabila a dan b elemen tak nol di ring R sedemikian hingga $ab=0$, maka a dan b disebut pembagi nol.

Teorema 3 (Fraleigh, 1989)

Hukum kanselasi pada ring R berlaku jika dan hanya jika R tidak memuat pembagi nol.

Bukti

($\Rightarrow$) Diketahui R ring dan hukum kanselasi berlaku di R

Akan ditunjukkan R tidak memuat pembagi nol

Untuk menunjukkan R tidak memuat pembagi nol, cukup ditunjukkan apabila $\forall a, b \in R, ab = 0$ maka $a = 0 \vee b = 0$.

Ambil sebarang $a, b \in R$ dengan $ab = 0$.

Misal $a \neq 0$ diperoleh $ab = 0 \Leftrightarrow ab = a.0$ berdasarkan hukum kanselasi kiri diperoleh $b = 0$.

Misal $b \neq 0$ diperoleh $ab = 0 \Leftrightarrow ab = 0.b$ berdasarkan hukum kanselasi kanan diperoleh $a = 0$.

Jadi, $\forall a, b \in R, ab = 0$ berakibat $a = 0 \vee b = 0$

R tidak memuat pembagi nol.

($\Leftarrow$) Diketahui R ring dan R tidak memuat pembagi nol

Akan ditunjukkan hukum kanselasi berlaku di R

Ambil sebarang $a, b, c \in R, a \neq 0$.

Misalkan $ab = ac$.

$$ab = ac \Leftrightarrow ab - ac = 0$$

$$\Leftrightarrow a(b - c) = 0$$

Oleh sebab R tidak memuat pembagi nol dan $a \neq 0$ maka $b - c = 0 \Leftrightarrow b = c$.

Misalkan $ba = ca$

$ba = ca \Leftrightarrow ba - ca = 0$

$\Leftrightarrow (b - c)a = 0$

Oleh sebab R tidak memuat pembagi nol dan $a \neq 0$ maka $b - c = 0 \Leftrightarrow b = c$.

Jadi, hukum kanselasi berlaku di R.

Definisi 19 (Fraleigh, 1989)

Misalkan R ring komutatif dengan elemen satuan $1 \neq 0$, ring R dikatakan daerah integral apabila R tidak memuat pembagi nol.

Teorema 4 (Fraleigh, 1989)

Setiap field merupakan daerah integral.

Bukti

Misal F sebarang field.

Jelas F ring komutatif yang memiliki elemen satuan.

Akan ditunjukkan F tidak memuat pembagi nol

Ambil sebarang $a, b \in F, ab = 0$.

Kasus $a \neq 0$, oleh sebab F field, maka ada $a^{-1} \in F \ni a.a^{-1} = 1$

Jelas $ab = 0 \Leftrightarrow a^{-1}ab = a^{-1}0$

$\Leftrightarrow (a^{-1}a)b = 0$

$\Leftrightarrow 1.b = 0$

$\Leftrightarrow b = 0$

Kasus $b \neq 0$, oleh sebab F field, maka ada $b^{-1} \in F$ sehingga $b.b^{-1} = 1$

Jelas $ab = 0 \Leftrightarrow abb^{-1} = 0b^{-1}$

$\Leftrightarrow a(bb^{-1}) = 0$

$\Leftrightarrow a.1 = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$

Jadi $\forall a, b \in F, ab = 0$ berakibat $a = 0 \vee b = 0$.

Jadi, F tidak memuat pembagi nol.

F adalah ring komutatif dengan elemen satuan $1 \neq 0$ yang tidak memuat pembagi nol, dengan kata lain F suatu daerah integral.

Contoh 24

Dari Contoh 23 ring $< \mathbb{R}, +, . >$ adalah suatu field, berdasarkan Teorema 4 maka ring $< \mathbb{R}, +, . >$ merupakan daerah integral.

Definisi 20 (Antoine, 2008)

Misalkan R ring dan $a \in R$, a dikatakan elemen nilpoten di R apabila terdapat bilangan bulat positif n sehingga $a^n = 0$.

Definisi 21 (Krempa, 1996)

Ring R dikatakan ring tereduksi jika R tidak memiliki elemen nilpoten selain nol. Dengan kata lain apabila $a^2 = 0$ maka $a = 0, \forall a \in R$.

Contoh 25

Ring $< \mathbb{R}, +, . >$ dan ring $< \mathbb{Z}_3, +, . >$ merupakan ring tereduksi sebab tidak memiliki elemen nilpoten selain nol.

Ring $< M_{2x2}(\mathbb{R}), +, . >$ dan $< \mathbb{Z}_4, +, . >$ merupakan ring tak tereduksi sebab $\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dengan $t \neq 0$ merupakan elemen nilpoten di $M_{2x2}(\mathbb{R})$ dan $\overline{2}$ merupakan elemen nilpoten di $\mathbb{Z}_4$.

2.3.2 Homomorfisma Ring

Definisi 22 (Fraleigh, 1989)

Misalkan R dan R' ring, suatu pemetaan $\varphi: R \rightarrow R'$ dikatakan homomorfisma ring apabila untuk setiap $a, b \in R$ memenuhi :

1. $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$,
2. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Contoh 26

Diberikan ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dan pemetaan $\varphi: \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, dengan aturan $\varphi(a + b\sqrt{-5}) = a - b\sqrt{-5}$. Akan ditunjukkan φ suatu homomorfisma ring.

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dengan $x = a_1 + b_1\sqrt{-5}$ dan $y = a_2 + b_2\sqrt{-5}$ dimana $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$.

1. $\varphi(x+y) = \varphi\left((a_1 + b_1\sqrt{-5}) + (a_2 + b_2\sqrt{-5})\right)$

$$= \varphi\left((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{-5}\right)$$

$$= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)\sqrt{-5}$$

$$= (a_1 - b_1\sqrt{-5}) + (a_2 - b_2\sqrt{-5})$$

$$= \varphi(a_1 + b_1\sqrt{-5}) + \varphi(a_2 + b_2\sqrt{-5})$$

$$= \varphi(x) + \varphi(y)$$

2. $\varphi(xy) = \varphi\left(\left(a_1 + b_1\sqrt{-5}\right)\left(a_2 + b_2\sqrt{-5}\right)\right)$

$$= \varphi\left((a_1a_2 - 5b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{-5}\right)$$

$$= (a_1a_2 - 5b_1b_2) - (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{-5}$$

$$= \left(a_1 - b_1\sqrt{-5}\right)\left(a_2 - b_2\sqrt{-5}\right)$$

$$= \varphi(x)\varphi(y)$$

Berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa φ suatu homomorfisma ring.

Definisi 23 (Fraleigh, 1989)

Misalkan R dan R' ring, $\varphi: R \to R'$ suatu homomorfisma ring. Apabila φ pemetaan injektif, maka φ disebut monomorfisma ring. Apabila φ pemetaan surjektif, maka φ disebut epimorfisma ring. Apabila φ pemetaan bijektif, maka φ disebut isomorfisma ring.

Contoh 27

Dari contoh 26, akan di tunjukkan bahwa φ suatu isomorfisma ring.

Berdasarkan Contoh 26 φ suatu homomorfisma ring dan berdasarkan Contoh 18 φ merupakan pemetaan yang bijektif jadi φ suatu isomorfisma ring.

Definisi 24 (Fraleigh, 1989)

Suatu homomorfisma ring dari suatu ring ke dalam dirinya sendiri dinamakan Endomorfisma ring dan suatu Endomorfisma ring yang bijektif dinamakan Automorfisma.

Contoh 28

Dari Contoh 26 φ suatu endomorfisma ring sebab φ suatu homomorfisma ring yang memetakan ke dalam dirinya sendiri. Oleh sebab φ merupakan pemetaan yang bijektif maka φ suatu automorfisma ring.

2.4 Ring Polinomial

2.4.1 Ring Polinomial

Definisi 25 (Fraleigh, 1989)

Misalkan R ring. Suatu polinomial $f(x)$ dengan koefisien di R adalah bentuk penjumlahan tak hingga

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

dimana $a_i \in R, a_i = 0$ untuk semua kecuali berhingga banyak nilai i. Selanjutnya a_i disebut koefisien dari $f(x)$. Jika untuk beberapa $i \geq 0$ sedemikian hingga $a_i \neq 0$, maka nilai i terbesar dinamakan derajat dari $f(x)$. Jika semua $a_i = 0$ maka derajat dari $f(x)$ tidak terdefinisi.

Contoh 29

$p(x) = 3x^5 + 2x^2 + 5$ merupakan polinomial yang mempunyai derajat 5. Sedangkan $q(x) = 3e^x + 4\ln x + \sin x$ bukan suatu polinomial.

Teorema 5 (Fraleigh, 1989)

Himpunan $R[x]$ suatu polinomial dengan peubah tak diketahui x dan koefisien di R adalah ring atas penjumlahan dan perkalian polinomial.

Bukti

i. Jelas $< R[x], + >$ merupakan grup abelian.

ii. Berdasarkan definisi operasi perkalian pada polinom jelas bahwa operasi perkalian bersifat tertutup, jadi operasi perkalian pada polinomial merupakan operasi biner.

iii. Ditunjukkan operasi perkalian bersifat assosiatif

Ambil sebarang $p(x), q(x), r(x) \in R[x]$ dengan $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$, dan $r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

Diperoleh :

$$\begin{aligned}
[p(x)q(x)]r(x) &= \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)\right] \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right) x^n\right] \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{s} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right) c_{s-n}\right] x^s \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{i+j+k=s} a_i b_j c_k\right] x^s \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{s} a_{s-m} \left(\sum_{j=0}^{m} b_j c_{m-j}\right) x^s\right] \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} b_j c_{m-j}\right) x^m\right] \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)\right] \\
&= p(x)[q(x)r(x)]
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa operasi perkalian pada $R[x]$ bersifat assosiatif.

iv. Ditunjukkan kedua operasi bersifat distributif

Ambil sebarang $p(x), q(x), r(x) \in R[x]$ dengan $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$, dan $r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

Diperoleh :

$$p(x)[q(x) + r(x)] = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)\right]$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left[\sum_{l=0}^{\infty}(b_l + c_l)x^l\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i(b_{n-i} + c_{n-i})\right)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}(a_i b_{n-i} + a_i c_{n-i})\right)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i c_{n-i}\right)x^n$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)$$

$$= p(x)q(x) + p(x)r(x)$$

Jadi sifat distributif kiri berlaku, dengan cara yang sama diperoleh distributif kanan juga berlaku.

Berdasarkan i,ii,iii, dan iv maka $R[x]$ merupakan ring terhadap penjumlahan dan perkalian pada polinomial.

Apabila R komutatif maka $R[x]$ komutatif dan jika 1 adalah elemen satuan di R, maka $1 = 1 + 0x + 0x^2 + \cdots$ merupakan elemen satuan di $R[x]$.

Lemma 1 (Armendariz, 1974)

Misalkan R adalah ring tereduksi dan $f(x), g(x) \in R[x]$, dengan $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$. Kemudian $f(x)g(x) = 0$ jika dan hanya jika $a_i b_j = 0$ untuk setiap $0 \le i \le n, 0 \le j \le m$.

Bukti

Misalkan $f(x)g(x) = 0$ dan $n = m$. Diperoleh persamaan sebagai berikut $a_0b_0 = 0;\ a_1b_0 + a_0b_1 = 0; \dots ; a_nb_0 + \dots + a_0b_n = 0$. Oleh sebab R tereduksi diperoleh $a_0b_0 = 0$ jika dan hanya jika $b_0a_0 = 0$. Apabila persamaan $a_1b_0 + a_0b_1 = 0$ dikalikan dengan b_0 dari kiri, maka diperoleh $b_0a_1b_0 = 0$. Oleh sebab R tereduksi dan $(a_1b_0)^2 = a_1b_0a_1b_0 = 0$ diperoleh $a_1b_0 = 0$ dan $b_0a_1 = 0$. Dengan cara yang sama pada persamaan-persamaan yang lain, diperoleh $a_ib_0 = 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$.

Dengan demikian, kita dapat menyederhanakan persamaan-persamaan di atas menjadi $a_0b_1 = 0;\ a_1b_1 + a_0b_2 = 0; \dots ; a_{n-1}b_1 + \dots + a_0b_n = 0$. Diperoleh $a_0b_1 = 0$ mengakibatkan $b_1a_0 = 0$. Kalikan dengan b_1 dari kiri pada persamaan $a_1b_1 + a_0b_2 = 0$, diperoleh $b_1a_1b_1 = 0$. Dengan cara yang sama seperti sebelumnya diperoleh $a_ib_1 = 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$. Apabila proses tersebut dilanjutkan, maka diperoleh $a_ib_j = 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$. Jadi apabila $f(x)g(x) = 0$ maka $a_ib_j = 0$ untuk setiap $0 \leq i \leq n$ dan $0 \leq j \leq m$. Untuk konvers dari pernyataan tersebut tentu saja berlaku.

Apabila pada ring R berlaku $f(x), g(x) \in R[x]$, dengan $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j$, dan $f(x)g(x) = 0$ mengakibatkan $a_ib_j = 0$ untuk setiap $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$, maka ring R dikatakan memiliki sifat Armendariz.

Contoh 30

Ring $\mathbb{R}$ merupakan ring tereduksi. Jadi apabila $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, dengan $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j$, dan $f(x)g(x) = 0$ mengakibatkan $a_ib_j = 0$ untuk setiap $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$.

2.4.2 Ring Polinomal Miring

Definisi 26 (Goodearl & Warfield, 2004)

Misalkan R suatu ring, α suatu endomorfisma ring R, α-derivatif di R adalah suatu endomorfisma grup δ di R sehingga $\delta(ab) = \alpha(a)\delta(b) + \delta(a)b, \forall a, b \in R.$

Contoh 31

Diberikan ring $< \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], +, . >$, suatu pemetaan $\alpha: \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dengan aturan $\alpha\left(a + b\sqrt{-5}\right) = a - b\sqrt{-5}$, dan didefinisikan pemetaan $\delta: \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dengan aturan $\delta\left(a + b\sqrt{-5}\right) = b$. Akan ditunjukkan bahwa δ merupakan α-derivatif pada $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Berdasarkan Contoh 17 diperoleh α suatu endomorfisma ring.

Akan ditunjukkan δ suatu endomorfisma grup

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dengan $x = a_1 + b_1\sqrt{-5}$ dan $y = a_2 + b_2\sqrt{-5}$ dimana $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$.

Diperoleh

$$\begin{aligned}
\delta(x + y) &= \delta\left(\left(a_1 + b_1\sqrt{-5}\right) + \left(a_2 + b_2\sqrt{-5}\right)\right) \\
&= \delta\left((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{-5}\right) \\
&= (b_1 + b_2) \\
&= \delta\left(a_1 + b_1\sqrt{-5}\right) + \delta\left(a_2 + b_2\sqrt{-5}\right) \\
&= \delta(x) + \delta(y)
\end{aligned}$$

Jadi, δ suatu homomorfisma grup, oleh sebab δ memetakan ke dalam dirinya sendiri maka δ suatu endomorfisma grup.

Akan ditunjukkan $\delta(xy) = \alpha(x)\delta(y) + \delta(x)y, \forall x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

$$\delta(xy) = \delta\left((a_1 + b_1\sqrt{-5})(a_2 + b_2\sqrt{-5})\right)$$

$$= \delta\left((a_1a_2 - 5b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{-5}\right)$$

$$= a_1b_2 + b_1a_2$$

$$\alpha(x)\delta(y) + \delta(x)y = \alpha(a_1 + b_1\sqrt{-5})\delta(a_2 + b_2\sqrt{-5}) + \delta(a_1 + b_1\sqrt{-5})(a_2 + b_2\sqrt{-5})$$

$$= (a_1 - b_1\sqrt{-5})b_2 + b_1(a_2 + b_2\sqrt{-5})$$

$$= a_1b_2 - b_1b_2\sqrt{-5} + b_1a_2 + b_1b_2\sqrt{-5}$$

$$= a_1b_2 + b_1a_2$$

Jadi, $\delta(xy) = \alpha(x)\delta(y) + \delta(x)y$

Oleh sebab δ suatu endomorfisma grup dan berlaku $\delta(xy) = \alpha(x)\delta(y) + \delta(x)y,\ \forall x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Jadi δ merupakan α-derivatif di ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Contoh 32

Diberikan R suatu ring, endomorfisma ring $\alpha: R \to R$, dan pemetaan $\delta: R \to R$ dengan aturan $\delta(a) = 0, \forall a \in R$. Akan ditunjukkan bahwa δ merupakan α-derivatif di R.

i. Jelas α suatu endomorfisma ring

ii. Akan ditunjukkan δ suatu endomorfisma grup

  Ambil sebarang $a, b \in R$.

  Diperoleh

  $$\delta(a + b) = 0 = 0 + 0 = \delta(a) + \delta(b)$$

Jadi δ suatu homomorfisma grup yang memetakan ke dirinya sendiri dengan kata lain, δ suatu endomorfisma grup.

iii. Ambil sebarang $a, b \in R$

Diperoleh

$\delta(ab) = 0$, dan

$\alpha(a)\delta(b) + \delta(a)b = \alpha(a).0 + 0.b = 0 + 0 = 0$

Jadi $\delta(ab) = \alpha(a)\delta(b) + \delta(a)b, \forall a, b \in R.$

Berdasarkan i,ii, dan iii diperoleh bahwa δ merupakan α-derivatif di R.

Definisi 27 (Amir, 2012)

Misalkan *R* adalah suatu ring dengan identitas 1, α adalah suatu endomorfisma dari *R*, dan δ adalah suatu α-derivatif, ring polinomial miring disimbol dengan $R[x; \alpha, \delta]$, dalam indeterminate *x,* adalah ring yang terdiri dari polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_i \in R$ untuk semua i yang memenuhi aturan perkalian: $xa = \alpha(a)x + \delta(a), \forall a \in R$.

Contoh 33

Dari Contoh 21 diperoleh $< \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], +, . >$ merupakan ring dengan elemen satuan 1. Dari Contoh 28 pemetaan $\alpha: \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, dengan aturan $\alpha(a + b\sqrt{-5}) = a - b\sqrt{-5}$ merupakan endomorfisma ring dari $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Dari Contoh 31 pemetaan $\delta: \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dengan $\delta(a + b\sqrt{-5}) = b$ merupakan α-derivatif. Jadi, dapat dibentuk suatu ring polinomial miring , $(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])[x; \alpha, \delta]$.

Contoh 34

Dari Contoh 33 Akan ditunjukkan bahwa ring polinomial miring tidak komutatif.

Pilih $(1+2\sqrt{-5})x, (2+\sqrt{-5})x \in \left(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]\right)[x;\alpha,\delta]$

Diperoleh

$$\begin{aligned}
\left[(1+2\sqrt{-5})x\right]\left[(2+\sqrt{-5})x\right] &= (1+2\sqrt{-5})x(2+\sqrt{-5})x \\
&= (1+2\sqrt{-5})\left[x(2+\sqrt{-5})\right]x \\
&= (1+2\sqrt{-5})\left[\alpha(2+\sqrt{-5})x+\delta(2+\sqrt{-5})\right]x \\
&= (1+2\sqrt{-5})\left[(2-\sqrt{-5})x+1\right]x \\
&= \left[(1+2\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})x+(1+2\sqrt{-5})\right]x \\
&= (12+3\sqrt{-5})x^2+(1+2\sqrt{-5})x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[(2+\sqrt{-5})x\right]\left[(1+2\sqrt{-5})x\right] &= (2+\sqrt{-5})x(1+2\sqrt{-5})x \\
&= (2+\sqrt{-5})\left[x(1+2\sqrt{-5})\right]x \\
&= (2+\sqrt{-5})\left[\alpha(1+2\sqrt{-5})x+\delta(1+2\sqrt{-5})\right]x \\
&= (2+\sqrt{-5})\left[(1-2\sqrt{-5})x+2\right]x \\
&= \left[(2+\sqrt{-5})(1-2\sqrt{-5})x+2(2+\sqrt{-5})\right]x \\
&= (12-3\sqrt{-5})x^2+(4+2\sqrt{-5})x
\end{aligned}$$

Diperoleh $\left[(2+\sqrt{-5})x\right]\left[(1+2\sqrt{-5})x\right] \neq \left[(1+2\sqrt{-5})x\right]\left[(2+\sqrt{-5})x\right]$

sehingga $\left(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]\right)[x;\alpha,\delta]$ tidak komutatif.

BAB 5

PENUTUP

5.1 Simpulan

Berdasarkan rumusan masalah dan hasil yang diperoleh dari pembahasan maka dapat diambil simpulan sebagai berikut:

1. Daerah integral memenuhi sifat Armendariz, artinya apabila R daerah integral dan $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ dengan $f(x)g(x) = 0$ maka $a_i b_j = 0$ untuk setiap i,j. Akibatnya field juga memenuhi sifat Armendariz. Jadi daerah integral dan field merupakan ring Armendariz.
2. Apabila R ring α-rigid maka sifat Armendariz berlaku pada ring polinomial miring $R[x;\alpha]$. Misalkan R ring α-rigid dengan $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$. Apabila $f(x)g(x) = 0$ maka $a_i b_j = 0$ untuk setiap i,j. Akibatnya setiap ring α-rigid merupakan ring α-skew Armendariz.

5.2 Saran

1. Peneliti lain dapat mengkaji struktur ring selain daerah integral dan field yang memenuhi sifat Armendariz.
2. Dalam skripsi ini mengkaji mengenai keberlakuan sifat Armendariz pada ring polinomial miring dengan δ merupakan α-derivatif nol, peneliti lain dapat mengkaji pada ring polinomial miring dengan δ bukan α-derivatif nol atau ring polinomial miring $R[x;\alpha,\delta]$.

DAFTAR PUSTAKA

Amir, K.A. 2010. Ideal Maksimal dan Prima dari Gelanggang Polinom Miring atas Daerah Bilangan Bulat Gauss. *Makara Sains,* 14(2) :184-187.

Amir, K.A. 2011. *Struktur Ideal Prima dan Gelanggang Faktor dari Gelanggang Polinom Miring Atas Daerah Dedekind.* Disertasi. Bandung : Institut Teknologi Bandung.

Amir, K.A. 2012. Pembentukan Gelanggang Polinom Miring dari Quaternion. *Kaunia,* VIII(2) : 99-106.

Amir, K.A. 2013. Pembuktian Automorfisma pada Gelanggang Polinom Miring untuk Pembentukan Gelanggang Polinom Miring Bersusun. *Kaunia,* IX(1) : 63-69.

Antoine, Ramon. 2008. Nilpotent Elements and Armendariz Rings. *Journal of Algebra* 319 : 3128-3140.

Arifin, Ahmad. 2000. *Aljabar.* Bandung : Institut Teknologi Bandung.

Armendariz, Efraim. 1974. A note on extentions of Baer and P.P. rings. *J. Austra. Math. Soc 18* : 470-473.

Durbin, John R. 1979. *Modern Algebra An Introduction*. New York : John Wiley & Sons.

Fraleigh, J.B. 1989. *A First Course in Abstract Algebra* (4th ed.). Reading : addison Wesley Publishing Company.

Goodearl, K.R., Warfield, J.R. 2004. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings* (2nd ed.). London : Cambridge University Press.

Hong, C.Y.,Kim, N.K., Kwak, T.K. 2000. Ore Extensions of Baer and p.p.-rings. *Journal of Pure and Applied Algebra,* 151 : 215-226.

Hong, C.Y.,Kim, N.K., Kwak, T.K. 2003. On Skew Armendariz Rings. *Comm. Algebra,* 31 : 103-122.

Kim, N.K., Lee, Y. 2000. Armendariz Rings and Reduced Rings. *Journal of Algebra* 223 : 477-488.

Krempa, Jan. 1996. Some Example of Reduced Rings. *Algebra Colloquium,* 3 :289-300.

Kwak, K.T., Lee, Y., Yun, S.J. 2012. The Armendariz Property on Ideals. *Journal of algebra* 354 : 121-135.

Nam, B.S., Ryu, S.J., Yun, S.J. 2013. On Coefficients Of Nilpotent Polynomials in Skew Polynomial Rings. *Korean J. Math,* 21 (4) : 421-428.

Rege, M.B., Chhawchharia, S. 1997. Armendariz Rings. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 73(1997) 14-17.

Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang : Universitas Negeri Malang.