PERBANDINGAN ESTIMATOR OPTIMAL MENGGUNAKAN METODE *LEAST TRIMMED SQUARE* (LTS) DAN *SCALE* (S) PADA *RESPONSE SURFACE METHODOLOGY*

Skripsi

disusun sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

Ainur Rohmawati

4111413003

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2017

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan.

Semarang, 11 September 2017

METERAI TEMPEL AE139AEF211570335 6000 ENAM RIBU RUPIAH

Ainur Rohmawati

(4111413003)

ii

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Perbandingan Estimator Optimal Menggunakan Metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan *Scale* (S) Pada *Response Surface Methodology*

disusun oleh

Ainur Rohmawati

4111413003

telah dipertahankan dihadapan sidang panitia ujian skripsi FMIPA UNNES pada hari Senin tanggal 11 September 2017

Panitia,

Ketua

Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si., Akt.
NIP. 196412231988031001

Sekretaris

Drs. Arief Agoestanto, M.Si.
NIP. 196807221993031005

Ketua Penguji

Dr. Scolastika Mariani, M.Si.
NIP. 196502101991022001

Anggota Penguji
Pembimbing 1

Dr. Nur Karomah Dwidayati, M. Si.
NIP. 196605041990022001

Anggota Penguji
Pembimbing 2

Drs. Sugiman, M.Si.
NIP. 196401111989011001

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

1. Setiap manusia mempunyai jalan masing-masing untuk menuju kesuksesan.
2. Allah tidak akan mengubah nasib suatu kaum kecuali kaum itu sendiri yang mengubah apa-apa yang pada diri mereka (QS. Ar-Ra'd: 11).
3. Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kadar kesanggupannya (QS. Al-Baqarah: 286).

PERSEMBAHAN

Untuk Bapak, Ibu, Dosen-dosen, Kakak, Sahabat dan Teman-Teman.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah Subhanahuwata'ala atas segala nikmat dan karunia-Nya serta tidak lupa sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada baginda Nabi besar Muhammad SAW, sahabat beserta keluarganya sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi dengan judul "Perbandingan Estimator Optimal Menggunakan Metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan *Scale* (S) Pada *Response Surface Methodology*". Skripsi ini merupakan salah satu syarat bagi setiap mahasiswa Universitas Negeri Semarang Jurusan Matematika yang akan menyelesaikan studi Sarjana tingkat I.

Pemilihan judul skripsi ini dilatar belakangi oleh rasa ingin tahu penulis terhadap estimator yang *robust* terhadap adanya *outlier* pada metode permukaan respon. Untuk itulah penulis mencoba untuk mengulas lebih dalam permasalahan tersebut.

Pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimaksasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum., selaku Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Prof. Dr. Zaenuri S.E., M.Si., Akt., selaku Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si., selaku ketua Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang.
4. Drs. Mashuri, M.Si., selaku ketua Program Studi Matematika Universitas Negeri Semarang.
5. Dr. Nur Karomah Dwidayati, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan arahan, petunjuk, bimbingan, koreksi dan dorongan dalam penyusunan Skripsi ini.
6. Drs. Sugiman, M.Si., selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan arahan, petunjuk, bimbingan, koreksi dan membantu dalam memecahkan

masalah - masalah yang penulis hadapi sehingga Skripsi ini dapat terselesaikan.

7. Dr. Scolastika Mariani, M.Si., selaku Dosen Penguji yang telah memberikan penilaian dan saran dalam perbaikan skripsi.
8. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang yang telah memberikan bekal ilmu yang bermanfaat bagi penulis.
9. Staf Tata Usaha Universitas Negeri Semarang yang telah banyak membantu penulis selama mengikuti perkuliahan dan penulisan skripsi ini.
10. Bapak Siswanto dan Ibu Wartini atas jasa-jasanya yang selalu sabar dan tidak pernah lelah memberikan dukungan, do'a, kasih sayang dan perhatian yang sangat besar serta sangat berarti bagi penulis semenjak kecil.
11. Kakak perempuanku Nur Sholikhah yang selalu memberi semangat dan dukungan.
12. Teman-teman Program Studi Matematika angkatan 2013 yang memberikan motivasi, semangat dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini.
13. Teman-teman kos dan sahabat-sahabatku yang tidak kalah pentingnya memberikan dukungan hingga skripsi ini terselesaikan.

Akhir kata penulis berharap semoga skripsi ini dapat berguna dan bermanfaat bagi pembaca.

Semarang,11 September 2017

Penulis

ABSTRAK

Rohmawati, Ainur. 2017. Perbandingan Estimator Optimal Menggunakan Metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan *Scale* (S) Pada *Response Surface Methodology*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Pembimbing Utama Dr. Nur Karomah Dwidayati, M.Si., dan Pembimbing Pendamping Drs. Sugiman, M.Si.

Kata kunci: Metode Permukaan Respon, *Outlier*, Regresi *Robust*, *Least Trimmed Square* (LTS), *Scale* (S).

Estimasi parameter model orde dua pada metode permukaan respon sering digunakan Metode Kuadrat Terkecil (MKT). Namun Metode Kuadrat Terkecil (MKT) sangat peka terhadap adanya penyimpangan asumsi pada data karena adanya *outlier*. Oleh karena itu diperlukan suatu metode yang tahan terhadap adanya *outlier* yaitu regresi *robust*. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui estimator terbaik regresi *robust* metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan *Scale* (S) pada metode permukaan respon dengan kriteria nilai R^2 dan *Mean Square Error* (MSE) dari masing-masing metode.

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data *Degradation of rate Chloramphenicol* dengan menggunakan rancangan percobaan *Central Composite Design* (CCD). *Chloramphenicol* (CAP) *degradation rate* (Y) sebagai variabel respon dan PH (X_1), TiO_2 *concentration* (X_2) dan *Chloramphenicol* (CAP) *initial concentration* (X_3) merupakan variabel bebas. Berdasarkan hasil analisis data diketahui bahwa metode *Least Trimmed Square* (LTS) memperoleh nilai R^2 lebih besar dan *Mean Square Error* (MSE) lebih kecil dibandingkan metode *Scale* (S) maka dapat disimpulkan bahwa metode *Least Trimmed Square* (LTS) merupakan estimator yang lebih baik dalam mengestimasi parameter pada metode permukaan respon. Hasil estimasi menggunakan metode *Least Trimmed Square* (LTS) dapat dilihat pada persamaan berikut:

$$\hat{Y} = 87{,}3062 - 0{,}2657X_1 + 0{,}9151X_2 + 0{,}0038X_3 - 1{,}1727X_1^2 - 2{,}5831X_2^2 - 0{,}8006X_3^2 - 0{,}2033X_1X_2 + 0{,}738X_1X_3 + 2{,}5614X_2X_3$$

Kondisi optimum *Degradation rate of Chloramphenicol* yang diperoleh berdasarkan metode *Least Trimmed Square* (LTS) terjadi pada pengaturan PH sebesar 7,28, TiO_2 *concentration* sebesar 2,17 g/L, dan CAP *initial concentration* sebesar 17,98 mg/L yang menghasilkan *Degradation rate of Chloramphenicol* sebesar 87,85%.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR SIMBOL

Y = Variabel respon

x_i = Variabel bebas; $i = 1,2,3, \ldots, k$

ε_i = Residual; $i = 1,2,3, \ldots, k$

β_i = Koefisien parameter model ; $i = 1,2,3, \ldots, k$

β_{ii} = Koefisien kuadratik dari variabel ke-*i* ; $i = 1,2,3, \ldots, k$

β_{ij} = Koefisien interaksi dari interaksi variabel bebas ke-*i* dan *j*

SS_T = Jumlah kuadrat total

SS_R = Jumlah kuadrat regresi

SS_E = Jumlah kuadrat error

σ^2 = Varian

n = Banyaknya pengamatan

p = Banyaknya parameter

k = Derajat kebebasan

MS_R = Kuadrat rata-rata regresi

MS_E = Kuadrat rata-rata sisa (error)

R^2 = Koefisien determinasi

C_{jj} = Element diagonal matriks $(\mathbf{X'X})^{-1}$.

b_j = Koefisien regresi, $j = 1,2, \ldots m$

SS_{PE} = Jumlah kuadrat kesalahan murni

SS_{LOF} = Jumlah kuadrat *Lack of Fit*

$\bar{y}$	= Rata-rata dari n_i pengamatan pada x_i
$\mathbf{X}_s$	= Titik Stasioner
w_i	= Variabel independen baru hasil transformasi
$\hat{y}_s$	= Harga taksiran y pada titik stasioner $\mathbf{X}_s$
λ_i	= Konstanta yang merupakan eigen value dari matriks **B**, $i = 1,2,\ldots,k$
h_{ii}	= Elemen diagonal ke-i dari matriks $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X}$

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Berbagai penelitian dalam bidang matematika antara lain melakukan analisis untuk mengetahui hubungan suatu variabel dengan variabel lainnya. Analisis yang dapat digunakan antara lain analisis korelasi dan analisis regresi. Analisis korelasi digunakan untuk mengetahui seberapa kuat hubungan antara dua variabel atau lebih, sedangkan analisis regresi digunakan untuk mengetahui pengaruh antara satu variabel dengan variabel lainnya dengan menggunakan suatu hubungan linear berbentuk garis lurus (model linear) (Sukestiyarno, 2014: 156-164). Namun, pada kasus pengoptimalan variabel yang diteliti, analisis regresi ternyata tidak cukup untuk menyelesaikannya, sehingga Box dan Wilson (1951) melakukan pendekatan statistik secara sistematis yang menghasilkan metode permukaan respon (*Response Surface Methodology*).

Metode permukaan respon (MPR) adalah kumpulan dari teknik-teknik statistik dan matematis yang berguna untuk pemodelan dan analisis permasalahan tentang beberapa variabel bebas yang mempengaruhi variabel respon dan bertujuan untuk mengoptimumkan respon (Montgomery, 2001:427). Menurut Eryson (2006), metode permukaan respon adalah suatu teknik-teknik statistika yang berguna untuk menduga pengaruh linear kuadratik dan interaksi faktor antar variabel yang ada serta mengoptimumkan respon tersebut dengan menggunakan jumlah data percobaan yang minim. Metode permukaan respon merupakan metode rancangan percobaan yang dapat digunakan untuk mengembangkan, memperbaiki dan mengoptimalkan proses (Myers, *et al*. 2009:19).

Metode permukaan respon dapat digunakan untuk mencari suatu fungsi pendekatan yang cocok untuk meramalkan respon yang akan datang dan menentukan nilai- nilai variabel bebas yang mengoptimumkan respon yang telah dipelajari (Jati, 2011). Secara umum ada tiga tahapan utama dalam MPR, yaitu: 1) pengumpulan data, melalui pemilihan strategi rancangan percobaan yang tepat, 2) estimasi parameter pada model/pemodelan data, melalui pemilihan metode pemodelan regresi yang tepat, dan 3) optimasi/analisis permukaan respon, untuk mengidentifikasi pengaturan dari variabel bebas yang mengoptimalkan variabel respon.

Pada dasarnya metode permukaan respon hampir sama dengan analisis regresi linear yaitu menggunakan prosedur estimasi parameter fungsi respon berdasarkan metode kuadrat terkecil (*Least Square Method*). Perbedaan metode permukaan respon dengan analisis regresi adalah dalam hal analisis respon diperluas dengan menerapkan teknik-teknik matematik untuk menentukan titik-titik optimum agar dapat ditentukan respon yang optimum (Montgomery, 2001). Respon yang optimum dapat berupa respon maksimum, minimum atau titik pelana sesuai dengan tujuannya.

Metode perrmukaan respon mempunyai dua bentuk persamaan yaitu fungsi berorde satu dan fungsi berorde dua. Fungsi orde satu digunakan bila hubungan antara respon dengan perlakuan berbentuk linear yang merupakan model regresi linear. Fungsi orde dua digunakan bila hubungan antara respon dengan perlakuan berbentuk kuadratik, sehingga model fungsi ini disebut juga model kuadratik. Fungsi orde dua lebih banyak digunakan dalam metode permukaan respon karena bekerja dengan baik dalam memecahkan permasalahan permukaan respon.

Pemodelan dalam metode permukaan respon biasanya menggunakan metode kuadrat terkecil atau *Ordinary Least Square* (OLS) dalam estimasi parameternya. Namun, metode ini sangat peka terhadap adanya penyimpangan asumsi pada data jika data mengandung *outlier*. Salah satu asumsi penting dalam analisis regresi adalah asumsi normalitas, asumsi tersebut sering dilanggar karena adanya *outlier* (Widodo, dkk. 2013). Menurut Akbar (2007) data yang mengandung *outlier* akan memperbesar standar residual sehingga estimasi parameter akan menyesatkan dan model yang diperoleh tidak dapat digunakan. Oleh karena itu diperlukan suatu model regresi yang tahan terhadap adanya *outlier*.

Rousseeuw (1987) memperkenalkan pendekatan regresi *robust* yang dapat digunakan saat terdapat *outlier* pada data dan model yang dihasilkan akan tahan terhadap *outlier*. Beberapa metode regresi *robust* antara lain, *Maximum Likelihood* (M), *Least Median Square* (LMS), *Least Trimmed Square* (LTS), *Scale* (S) dan *Method of Moment* (MM).

Regresi *robust* dengan metode *Least Trimmed Square* (LTS) lebih efisien dibandingkan dengan metode *Least Median Square* (LMS) karena *Least Median*

Square (LMS) berkinerja buruk dari sudut pandang efisiensi asimtotik (memiliki tingkat konvergensi yang lambat) (Rousseuw & Leroy, 1987: 15). Metode *Least Trimmed Square* (LTS) memiliki fungsi objektif yang lebih halus sehingga akan lebih sensitif terhadap efek lokal dan mempunyai nilai *breakdown* yang paling tinggi (Yaffe, 2002). Kelebihan dari metode *Least Trimmed Square* (LTS) adalah tidak mempengaruhi sifat estimasi meskipun banyaknya *outlier* bertambah (Azizah dkk.,2013).

Penelitian oleh Wulandari dkk. (2013) mensimulasikan data menggunakan 20 observasi dengan satu variabel bebas untuk membandingkan metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan M untuk mengatasi data *outlier*. Hasil simulasi tersebut menunjukkan bahwa metode *Least Trimmed Square* (LTS) memberikan hasil lebih baik daripada metode M dan metode OLS (*Ordinary Least Square*) dalam mengatasi permasalahan *outlier* karena mampu memberikan estimasi koefisien regresi yang cocok dan rata-rata kuadrat sisaan yang kecil.

Cankaya dan Abaci (2015) melakukan penelitian untuk menentukan model regresi data yang mengandung *outlier* dengan ukuran sampel yang berbeda. Beberapa metode yang dibandingkan untuk estimasi parameter adalah metode LTS, S, M, dan MM. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode LTS merupakan metode terbaik dalam estimasi parameter regresi dengan data yang mengandung *outlier* dengan ukuran sampel yang berbeda.

Metode *Scale* (S) merupakan metode dengan *high breakdown point* yang diperkenalkan oleh Rousseuw dan Yohai (1984). *Breakdown point* merupakan ukuran kerobustan dari tehnik *robust*. Metode *Scale* (S) ini bertujuan untuk meminimalkan *scale* (simpangan baku). Penelitian oleh Susanti, *et al*. (2014) membandingkan metode M, S dan MM untuk mencari model regresi terbaik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode S merupakan metode yang paling baik dibandingkan dengan metode M dan metode MM.

Berdasarkan latar belakang di atas, regresi *robust* merupakan regresi yang tahan terhadap adanya *outlier*, maka dari itu dalam penelitian ini akan ditunjukkan perbandingan estimator antara metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan *Scale* (S) pada metode permukaan respon. Metode terbaik diperoleh berdasarkan nilai R^2 dan *Mean Square Error* (MSE). Penelitian ini akan menggunakan bantuan *software* Minitab 16 dan SAS 9.1.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang diuraikan di atas, maka permasalahan yang muncul dalam penelitian ini adalah :

a. Manakah antara metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan *Scale* (S) yang lebih baik dalam mengestimasi parameter dalam metode permukaan respon?
b. Bagaimana kondisi optimum yang dihasilkan oleh metode terbaik yang telah diperoleh?

1.3 Pembatasan Masalah

Batasan masalah yang dilakukan pada penelitian ini adalah:

a. Peneliti menggunakan model orde dua, karena bekerja dengan baik dalam memecahkan permasalahan permukaan respon dengan model kuadratiknya.
b. Estimasi parameter model orde dua pada metode permukaan respon menggunakan metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan *Scale* (S).

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah :

a. Mengetahui estimator terbaik antara metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan *Scale* (S) pada metode permukaan respon.
b. Mengetahui dan memahami kondisi optimum pada metode permukaan respon oleh metode terbaik antara metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan *Scale* (S).

1.5 Manfaat Penelitian

1.5.1 Bagi Mahasiswa

1. Penelitian ini sebagai bahan studi kasus bagi mahasiswa tentang masalah estimator optimal pada metode permukaan respon jika terdapat outlier dalam data.

2. Penelitian ini sebagai bahan pertimbangan bagi peneliti selanjutnya terutama yang berhubungan dengan estimasi parameter yang *robust* terhadap *outlier* pada metode permukaan respon, untuk mendapatkan respon yang paling optimal.

1.5.2 Bagi Pembaca

1. Mengetahui dan memahami regresi *robust* metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan *Scale* (S).
2. Mengetahui dan memahami penerapan metode regresi *robust* terbaik antara metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan *Scale* (S) pada metode permukaan respon.
3. Dapat membandingkan regresi *robust* terbaik antara metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan *Scale* (S) pada metode permukaaan respon.

1.6 Sistematika Penulisan Skripsi

Secara garis besar skripsi ini dibagi menjadi tiga bagian (bab) yaitu bagian awal skripsi, bagian isi skripsi dan bagian akhir skripsi. Berikut ini dijelaskan masing-masing bagian skripsi.

(1) Bagian Awal Skripsi

Bagian awal skripsi meliputi halaman judul, pernyataan keaslian tulisan, pengesahan, motto dan persembahan, kata pengantar, abstrak, daftar isi, daftar gambar, daftar tabel dan daftar lampiran.

(2) Bagian Isi Skripsi

Bagian isi skripsi secara garis besar terdiri dari lima bab, yaitu:

BAB 1 PENDAHULUAN

Berisi mengenai latar belakang, rumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan skripsi.

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi kajian teori yang mendasari dan berhubungan dengan pemecahan masalah. Teori-teori tersebut digunakan untuk memecahkan masalah yang diangkat dalam skripsi ini. Teori yang digunakan adalah regresi, metode permukaan respon, *outlier*, regresi *robust* dan ukuran pemilihan model terbaik.

BAB 3 METODE PENELITIAN

Bab ini mengulas metode yang digunakan dalam penelitian berisi langkah-langkah yang dilakukan untuk memecahkan masalah yaitu fokus penelitian, studi pustaka, pengumpulan data, analisis data dan penarikan kesimpulan.

BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi mengenai penyelesaian dari masalah yang diungkapkan.

BAB 5 PENUTUP

Bab ini berisi tentang simpulan dari pembahasan dan saran yang berkaitan dengan simpulan.

(3) Bagian Akhir Skripsi

Bagian akhir skripsi meliputi daftar pustaka yang memberikan informasi tentang buku sumber serta literatur yang digunakan dan lampiran-lampiran yang mendukung skripsi.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Regresi

Regresi merupakan suatu metode statistika yang digunakan untuk menyelidiki pola hubungan antara dua variabel atau lebih variabel, yaitu variabel *dependent* (variabel terikat atau variabel respon) Y dan variabel *independent* (variabel bebas atau variabel *explanatory*) *X*. Regresi linear sederhana adalah regresi linear yang terdiri dari satu variabel respon dan satu variabel bebas. Bentuk umum model regresi linear sederhana adalah (Sen & Srivastava, 1990:5):

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i\ ,\ \ \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \text{ dengan } i = 1,2, \dots, n \tag{2.1}$$

Sedangkan regresi linear berganda adalah regresi linear yang terdiri dari satu variabel respon dan lebih dari satu variabel bebas. Bentuk umum model regresi linear berganda dengan k variabel bebas adalah (Sen & Srivastava 1990:6):

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i \ \text{ dengan } i = 1,2, \dots, n \tag{2.2}$$

Keterangan:

y_i: Pengamatan pada variabel respon

x_{ik} : Pengamatan pada variabel bebas

β_k: Parameter

ε_i: Residual

Persamaan (2.2) dapat ditulis sebagai

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i$$
$$= \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i \text{ , } i = 1,2,\dots,n. \quad (2.3)$$

Dalam notasi matriks persamaan (2.3) dapat ditulis

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.4)$$

dengan

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Persamaan (2.4) merupakan bentuk umum persamaan regresi dalam lambang matriks. Dalam bentuk umum ini, **Y** merupakan vektor respon $n \times 1$, **X** menyatakan matriks peubah bebas ukuran $n \times (k+1)$, $\boldsymbol{\beta}$ merupakan vektor parameter ukuran $(k+1) \times 1$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ merupakan vektor galat dengan ukuran $n \times 1$. Ada sebanyak $k + 1$ parameter yang harus ditaksir dari data termasuk β_0.

Metode kuadrat terkecil dipilih untuk mengestimasi parameter β sehingga jumlah kuadrat error ε_i diminimalkan (Myres *et al*., 2009: 44). Fungsi kuadrat terkecil dirumuskan sebagi berikut:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij} \right)^2 \quad (2.5)$$

Untuk mencari vektor $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_k)'$ taksiran dari vektor parameter $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)'$ dengan cara menurunkan persamaan (2.5) secara parsial tehadap $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ dan samakan dengan nol.

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij} \right) = 0 \quad (2.6a)$$

dan

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_j} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{k}\beta_j x_{ij}\right)x_{ij} = 0 \qquad (2.6b)$$

dengan $j = 1,2,\dots,k$. Dengan mengganti semua parameter dengan penaksirnya maka persamaan (2.6a) dan (2.6b) dapat ditulis sebagai:

$$\begin{array}{c}
nb_0 + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{i1} + b_2\sum_{i=1}^{n} x_{i2} + \dots + b_k\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0\sum_{i=1}^{n} x_{i1} + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 + b_2\sum_{i=1}^{n} x_{i2}x_{i1} + \dots + b_k\sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{ik} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{i1} \\
b_0\sum_{i=1}^{n} x_{i2} + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{i2} + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{i2}^2 + \dots + b_k\sum_{i=1}^{n} x_{i2}x_{ik} = \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_{i2} \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
b_0\sum_{i=1}^{n} x_{ik} + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{ik} + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{i2}x_{ik} + \dots + b_k\sum_{i=1}^{n} x_{ik}^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{ik}
\end{array} \qquad (2.7)$$

Persamaan (2.7) disebut **persamaan normal**, jika ditulis dalam lambang matriks maka bentuknya menjadi:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})\mathbf{b} = \mathbf{X}'\mathbf{Y} \qquad (2.8)$$

Bila $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ tidak singulir maka ada balikannya (inversinya), sehingga estimasi parameter β dengan metode kuadrat terkecil yaitu:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \qquad (2.9)$$

2.2 Metode Permukaan Respon

2.2.1 Pengertian

Metode permukaan respon (MPR) adalah kumpulan teknik statistik dan matematika yang berguna untuk mengembangkan, meningkatkan dan mengoptimalkan proses. Metode permukaan respon juga memiliki peranan penting dalam desain, pengembangan, dan formulasi produk baru, serta dalam perbaikan desain produk yang sudah ada (Myers *et al*., 2009:19). Dengan rancangan percobaan dan analisis eksperimen yang cermat, metode permukaan respon berusaha untuk mencari sebuah respon dari sejumlah prediktor atau variabel bebas yang mempengaruhi variabel respon (Box & Draper, 2007:1).

Jika suatu eksperimen melibatkan k buah variabel bebas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ dengan variabel respon Y, maka dapat ditulis ke dalam bentuk persamaan berikut (Rahmawaty & Susanto, 2014):

$$Y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) \tag{2.10}$$

Jika kita menunjukkan respon yang diharapkan menjadi (Pai *et al*., 2010):

$$E(Y) = f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \hat{Y} \tag{2.11}$$

Maka permukaan respon disajikan oleh:

$$\hat{Y} = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) \tag{2.12}$$

Dalam beberapa kasus, baik model orde pertama atau orde kedua digunakan. Pada kasus terdapat dua variabel bebas, model orde pertamanya adalah (Myers *et al*., 2009: 22-23):

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \tag{2.13}$$

Model orde pertama cenderung digunakan karena hasil pendekatan permukaan respon berada pada wilayah yang terdapat sedikit lengkungan. Persamaan (2.13) disebut model interaksi utama, karena hanya mencakup efek utama dari dua variabel x_1 dan x_2. Jika ada interaksi antara variabel-variabel ini, dapat ditambahkan ke model orde pertama dengan mudah sebagai berikut:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 \tag{2.14}$$

Persamaan (2.14) tersebut merupakan model orde pertama dengan interaksi.

Jika terdapat kelengkungan maka orde pertama saja tidak cukup kuat, sehingga kemungkinan diperlukan sebuah model yang dapat mengatasinya, yaitu model orde kedua. Pada kasus dua variabel, model orde keduanya adalah:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 \tag{2.15}$$

Model orde kedua banyak digunakan dalam metode permukaan respon karena memiliki beberapa kelebihan, diantaranya adalah sebagai berikut:

1. Model orde kedua sangat fleksibel. Model ini dapat berubah kedalam bentuk fungsi sesuai dengan kebutuhan, sehingga akan bekerja dengan baik sebagai pendekatan ke permukaan respon yang benar.
2. Model orde kedua sangat mudah untuk mengestimasi parameter.
3. Model orde kedua bekerja dengan baik dalam memecahkan permasalahan permukaan respon.

Secara umum, model orde pertama adalah:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \tag{2.16}$$

dan model orde kedua adalah:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i}^{k} \sum_{j}^{k} \beta_{ij} x_i x_j \quad , i < j \tag{2.17}$$

Sebelum dilakukan regresi dilakukan transformasi data untuk masing-masing variabel bebas dengan menggunakan persamaan (Psomas, *et al.*, 2007):

$$kode\ level = \frac{nilai\ \ level - \frac{nilai\ level\ tertinggi + nilai\ level\ terendah}{2}}{\frac{nilai\ level\ tertinggi - nilai\ level\ terendah}{2}} \tag{2.18}$$

2.2.2 Tujuan Permukaan Respon

Tujuan eksperimen dengan menggunakan metode permukaan respon antara lain (Rahmawaty & Susanto, 2014):

1. Mencari fungsi respon sebagai model yang menunjukkan hubungan antara variabel-variabel bebas dan variabel-variabel respon.
2. Menentukan nilai stasioner yaitu nilai dari variabel bebas yang menghasilkan respon yang optimal.

2.2.3 Orde Pertama

Langkah pertama dari metode permukaan respon adalah menemukan hubungan antara respon Y dengan variabel independen x_i melalui persamaan polinomial orde satu (Nuryanti & Salimy,2008). Variabel-variabel independen dinotasikan dengan $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Model orde pertama permukaan respon dapat ditulis (Zang, *et al*., 2016):

$$Y = \beta_0 + \beta_i x_i + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon \qquad (2.19)$$

dengan :

Y : Variabel respon

β_i : Koefisien parameter model ; $i = 1,2,3, \ldots, k$

x_i : Variabel bebas ; $i = 1,2,3, \ldots, k$

ε : Kesalahan (error) yang bersifat acak dan secara identik dan saling bebas (*independent identically distributed–iid*) dengan distribusi $N(0, \sigma^2)$.

2.2.4 Orde Kedua

Pada keadaan mendekati respon, model orde kedua atau lebih biasanya disyaratkan pada keadaan mendekati respon karena adanya lengkungan (*curvature*) dalam permukaan (Nuryanti & Salimy, 2008). Adanya lengkungan tersebut dapat dirumuskan model polinomial dengan derajat yang lebih tinggi seperti misalnya model polinomial orde kedua berikut:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_i \sum_j \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad ; \ i < j \qquad (2.20)$$

Keterangan:

Y : Variabel respon

β_i: Koefisien parameter model ; $i = 1,2,3, \dots, k$

x_i: Variabel bebas ; $i = 1,2,3, \dots, k$

β_{ii}: Koefisien kuadratik dari variabel ke –i ; $i = 1,2,3, \dots, k$

β_{ij}: Koefisien interaksi dari interaksi variabel bebas ke-i dan j

ε: Kesalahan (error) yang bersifat acak dan secara identik dan saling bebas (*independent identically distributed –iid*) dengan distribusi normal pada nilai rataan 0 dan varian σ^2 . Dinyatakan dengan $\varepsilon \approx iid$ N (0, σ^2).

2.2.5 Uji Hipotesis pada Metode Permukaan Respon

2.2.5.1 Uji Signifikansi

Uji signifikansi pada regresi digunakan untuk menentukan variabel-variabel bebas memberikan sumbangan yang berarti dalam model atau tidak. Hipotesis:

H_0: $\beta_i = 0, \beta_{ii} = 0, \beta_{ij} = 0$

H_1: $\beta_i \neq 0$ untuk suatu i, $\beta_{ii} \neq 0$ untuk suatu i, $\beta_{ij} \neq 0$ untuk suatu i atau j

Kriteria pengujian:

Jika $F_h \leq F_{\alpha,k,n-k-1}$ maka H_0 diterima dan jika $F_h > F_{\alpha,k,n-k-1}$ maka H_0 ditolak.

Penolakan H_0 menunjukkan bahwa setidaknya satu variabel bebas signifikan terhadap model. Prosedur uji signifikansi melibatkan partisi total jumlah kuadrat $SS_T = \sum_{i=1}^{n}(y_i - y)^2$ kedalam jumlah kuadrat model dan jumlah kuadrat residual, sehingga

$$SS_T = SS_R + SS_E \tag{2.21}$$

$$\sigma^2 = \frac{SS_E}{n-p} \tag{2.22}$$

Keterangan:

SS_T: Jumlah kuadrat total

SS_R: Jumlah kuadrat regresi

SS_E: Jumlah kuadrat error

σ^2: Varian

n: Banyaknya pengamatan

p: Banyaknya parameter

Untuk F_h dapat dicari menggunakan rumus

$$F_h = \frac{\frac{SS_R}{k}}{\frac{SS_E}{n-k-1}} = \frac{MS_R}{MS_E} \tag{2.23}$$

Keterangan:

k: Derajat kebebasan

MS_R: Kuadrat rata-rata regresi

MS_E : Kuadrat rata-rata sisa (error)

Cara lain yaitu menggunakan pendekatan *P-Value* untuk pengujian hipotesis, dengan demikian menolak H_0 jika *P-Value* untuk F_h statistik kurang dari α. Uji signifikansi menggunakan *P-Value* untuk F_h statistik. Uji signifikansi dapat dilihat pada Tabel 2.1, langkah pengujian ini disebut analisis varian (ANOVA) karena didasarkan pada dekomposisi total variabilitas dalam variabel respon *Y*.

Tabel 2.1 Analisis Varian (ANOVA)

Variasi sumber	Jumlah Kuadrat	Derajat kebebasan	Kuadrat rata-rata	F_h	$P\text{-}Value$
Regresi	SS_R	K	MS_R	$\frac{MS_R}{MS_E}$	$P\text{-}Value$ dari F_h
Error atau Sisa	SS_E	*n-k-1*	MS_E		
Total	SS_T	*n-1*			

Formula untuk menghitung SS_E adalah:

$$SS_E = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} \tag{2.24}$$

karena

$$SS_T = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n} \tag{2.25}$$

Persamaan (2.24) dapat ditulis ulang sebagai

$$SS_E = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n} - \left[\mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}\right] \tag{2.26}$$

atau

$$SS_E = SS_T - SS_R \tag{2.27}$$

Oleh karena itu, jumlah kuadrat regresi adalah

$$SS_R = \mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n} \tag{2.28}$$

dan jumlah kuadrat total adalah

$$SS_T = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n} \tag{2.29}$$

Koefisien determinasi R^2 didefinisikan

$$R^2 = \frac{SS_R}{SS_T} = 1 - \frac{SS_E}{SS_T} \tag{2.30}$$

R^2 adalah ukuran jumlah pengurangan variabilitas y yang diperoleh menggunakan variabel bebas $x_1, x_2, \ldots, x_k$ dalam model. Nilai R^2 yang besar tidak selalu menyiratkan bahwa regresi memiliki model terbaik. Penambahan variabel dalam model akan selalu meningkatkan R^2, terlepas dari variabel tambahan tersebut signifikan secara statistik atau tidak, karena R^2 selalu meningkat ketika terdapat penambahan pada model, beberapa model regresi lebih memilih untuk menggunakan R^2 *adjusted* statistik yang didefinisikan sebagai berikut:

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{\frac{SS_E}{n-p}}{\frac{SS_T}{n-1}} = 1 - \frac{n-1}{n-p}\left(1 - R^2\right) \tag{2.31}$$

2.2.5.2 Uji Individual (Uji t)

Uji individual (uji t) berguna untuk mengetahui keberartian regresi antara tiap-tiap variabel bebas terdapat pengaruh atau tidak terhadap variabel terikat.

Hipotesis:

H_0: $\beta_i = 0, \beta_{ii} = 0$, untuk i $\beta_{ij} = 0$ untuk i dan j

H_1: $\beta_j \neq 0$

Kriteria pengujian:

Jika $|t_h| \leq t_{\alpha/2,n-k-1}$ maka H_0 diterima dan jika $|t_h| > t_{\alpha/2,n-k-1}$ maka H_0 ditolak.

Untuk t_h dapat dicari dengan rumus

$$t_h = \frac{b_j}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}} \tag{2.32}$$

Keterangan:

C_{jj} : Element diagonal matriks $(\mathbf{X'X})^{-1}$.

$\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}$: Standar error dari koefisien regresi b_j atau $se(b_j) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}$

Persamaan (2.32) dapat ditulis menjadi

$$t_h = \frac{b_j}{se(b_j)} \tag{2.33}$$

2.2.5.3 Uji Lack of Fit

Lack of Fit adalah model yang belum tepat atau tidak terdapat kecocokan antara data dengan model (Sembiring, 2003: 144). Diperlukan sumber khusus untuk mendapatkan penaksir σ^2 yang tak bias dan tidak tergantung pada model. Sumber khusus itu adalah replikasi yang dengan sengaja dibuat dalam rancangan penelitian. Replikasi dibedakan dengan pengulangan pengukuran (Sembiring, 2003: 145). Tujuannya untuk mengukur variasi pada suatu nilai x. Jumlah kuadrat yang muncul dari replikasi disebut jumlah kuadrat galat murni, sedangkan jumlah kuadrat akibat belum cocoknya model disebut jumlah kuadrat kekurangcocokan. Jadi, bila ada replikasi, maka jumlah kuadrat sisa dapat diuraikan atas kedua komponennya.

$$SS_E = SS_{PE} + SS_{LOF} \tag{2.34}$$

dimana

SS_{PE} : Jumlah kuadrat kesalahan murni

SS_{LOF} : Jumlah kuadrat *Lack of Fit*

Pengujian *Lack of Fit* adalah sebagai berikut:

Hipotesis:

H_0 : Model sesuai (tidak ada *Lack of Fit*)

H_1 : Model tidak sesuai (ada *Lack of Fit*)

Kriteria pengujian:

Apabila $F_h \leq F_{m-p,n-m}$ maka terima H_0 dan apabila $F_h > F_{m-p,n-m}$ maka tolak H_0.

Pengujian *Lack of Fit* dapat dilihat pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Uji *Lack of Fit*

Sumber Keragaman	Jumlah Kuadrat	Derajat kebebasan	Kuadrat tengah	F_h
Lack of Fit	SS_{LOF}	$(n-k-1)-m$	MS_{LOF}	$\frac{MS_{LOF}}{MS_{PE}}$
Galat Murni	SS_{PE}	m	MS_{PE}	

dengan rumus-rumus pada jumlah kuadrat (Myers, *et al.*, 2004: 98-100)

$$SS_{PE} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2 \tag{2.35}$$

dengan

$\bar{y}$: Rata-rata dari n_i pengamatan pada x_i

n_i: Pengamatan ke-*i* pada x_i , $i = 1,2, \dots m$

y_{ij}: Respon ke-*j* terhadap $x_i, i = 1,2, \dots m$ dan $j = 1,2, \dots, n_i$

x_i: Variabel bebas $i = 1,2, \dots, m$

dan

$$SS_{LOF} = SS_E - SS_{PE} \tag{2.36}$$

Sedangkan untuk F_h dapat dicari menggunakan rumus

$$F_h = \frac{\frac{SS_{LOF}}{(n-k-1)-m}}{\frac{SS_{PE}}{m}} = \frac{MS_{LOF}}{MS_{PE}} \tag{2.37}$$

2.2.6 Penentuan Titik Stasioner

Misalkan ingin didapatkan nilai $x_1, x_2, \dots, x_k$ yang mengoptimalkan respon yang diprediksikan. Jika nilai-nilai optimal ini ada, maka Y pada persamaan orde dua (2.20) merupakan himpunan yang beranggotakan $x_1, x_2, \dots, x_k$ sedemikian sehingga turunan parsialnya (Montgomery, 2001: 436):

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial x_1} = \frac{\partial \hat{Y}}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial \hat{Y}}{\partial x_k} = 0 \tag{2.38}$$

Dalam notasi matriks, persamaan (2.20) dapat dinyatakan sebagai berikut (Montgomery, 2001: 440):

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \mathbf{X'b} + \mathbf{X'BX} \tag{2.39}$$

dengan

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{11} & \frac{\hat{\beta}_{12}}{2} & \cdots & \frac{\hat{\beta}_{1k}}{2} \\ \frac{\hat{\beta}_{12}}{2} & \hat{\beta}_{22} & \cdots & \frac{\hat{\beta}_{2k}}{2} \\ & & \ddots & \vdots \\ \frac{\hat{\beta}_{1k}}{2} & \frac{\hat{\beta}_{2k}}{2} & & \hat{\beta}_{kk} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{b}$ $(k \times 1)$ merupakan vektor koefisien regresi pada orde pertama, sedangkan $\mathbf{B}$ $(k \times k)$ adalah matriks simetris yang elemen diagonal utamanya merupakan kuadratik murni $\hat{\beta}_{ii}$ dan elemen-elemen selain diagonal utamanya adalah ½ dari koefisien kuadratik campuran ($\hat{\beta}_{ij}, i \neq j$).Turunan dari $\hat{Y}$ terhadap vektor **X** adalah sama dengan $\mathbf{0}$, sehingga dinyatakan dengan :

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{b} + 2\mathbf{BX} = \mathbf{0} \tag{2.40}$$

Titik-titik stasioner merupakan solusi dari persamaan (2.40) yaitu :

$$\mathbf{X}_s = -\frac{1}{2}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \tag{2.41}$$

Substitusi persamaan (2.41) ke persamaan (2.39) diperoleh nilai respon optimal yang diprediksikan terjadi pada titik-titik stasioner, yaitu:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \mathbf{X}_s'\mathbf{b} + \mathbf{X}_s'\mathbf{B}\mathbf{X}_s$$

$$= \hat{\beta}_0 + \mathbf{X}_s'\mathbf{b} + \mathbf{X}_s'\mathbf{B}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\right)$$

$$= \hat{\beta}_0 + \mathbf{X}_s'\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{X}_s'\mathbf{b}$$

$$= \hat{\beta}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{X}_s'\mathbf{b} \tag{2.42}$$

2.2.7 Karakteristik Permukaan Respon

Setelah menemukan titik stasioner, biasanya diperlukan identifikasi karakteristik respon pada titik tersebut yaitu dengan mentransformasikan fungsi respon dari titik asal $x(0,0,\ldots,0)$ ke titik stasioner $\mathbf{X_s}$ dan sekaligus merotasikan sumbu koordinatnya, sehingga dihasilkan fungsi respon sebagai berikut (Montgomery, 2001:454):

$$\hat{Y} = \hat{y}_s + \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \cdots + \lambda_k w_k^2 \tag{2.43}$$

Keterangan:

w_i : Variabel independen baru hasil transformasi

$\hat{y}_s$: Harga taksiran y pada titik stasioner $\mathbf{X}_s$

λ_i: Konstanta yang merupakan eigen value dari matriks **B**, $i = 1,2,\ldots,k$

Karakteristik permukaan respon pada metode permukaan respon dilakukan di daerah optimum setelah mendapatkan titik stasioner. Penentuan karakteristik respon ini digunakan untuk mengetahui apakah jenis titik stasioner yang didapatkan berupa titik minimum, maksimum, atau titik pelana, ditentukan dari harga λ_i sebagai berikut (Myers *et al.*, 2009: 406):

1. Jika nilai λ_i semua negatif maka $\mathbf{X_s}$ adalah titik maksimum respon.
2. Jika nilai λ_i semua positif maka $\mathbf{X_s}$ adalah titik minimum respon.
3. Jika nilai λ_i berbeda tanda maka $\mathbf{X_s}$ adalah titik pelana (*saddle point*).

2.3 *Outlier*

Dalam beberapa kasus, respon yang diamati mungkin tidak tampak sesuai dengan model yang dipasanag pada sebagian besar data. Beberapa kasus yang tidak dapat mengikuti model yang sama akibat sisaan data disebut *outlier* (Weisberg, 2005:194). Penentuan *outlier* menggunakan model rata-rata pergeseran *outlier*. Misalkan kasus-i adalah calon *outlier*, diasumsikan fungsi rata-rata untuk semua kasus lain adalah $E\left(Y \middle| X = x_j\right) = x_j'\beta$, tetapi untuk kasus i fungsi rata-ratanya adalah $E(Y|X = x_i) = x_i'\beta + \delta$. Respon yang diharapkan untuk kasus-i digeser oleh sejumlah δ dan uji $\delta = 0$ adalah uji untuk *outlier* tunggal dalam kasus-i. Dalam perkembangan, diasumsikan $Var(Y|X) = \sigma^2$.

Kasus dengan residual besar merupakan calon untuk *outlier*, namun tidak semua kasus dengan residual besar merupakan *outlier*, karena error ε_i yang besar akan terjadi dengan frekuensi yang ditentukan oleh distribusi probabilitas yang dihasilkan. Identifikasi *outlier* relatif dilakukan terhadap model tertentu. Jika bentuk model di modifikasi, status kasus individu sebagai *outlier* dapat berubah, sehingga beberapa *outlier* akan memiliki efek lebih besar pada perkiraan regresi.

Keberadaan data yang mengandung *outlier* akan mengganggu dalam proses analisis data dan harus dihindari dalam banyak hal. Dalam kaitannya dengan analisis regresi, *outlier* dapat menyebabkan residual yang besar, varians data menjadi lebih besar serta taksiran interval memiliki rentang yang lebar (Paludi, 2009).

Ada berbagai macam metode yang dapat digunakan untuk mendeteksi adanya outlier yang berpengaruh dalam koefisien regresi diantaranya adalah dengan Nilai Pengaruh *Laverage Values*, TRES, DFFITS dan *Cook's Distance* (Candrawati, 2013). Namun dalam skripsi ini pendeteksian *outlier* yang akan dibahas menggunakan metode DFFITS dan *Cook's Distance*.

2.3.1 Pengujian *outlier* dengan uji DFFITS

Menurut Montgomery and Peck (1992), rumus $DFFITS_i$ sebagai berikut:

$$(DFFITS_i) = t_i \left(\frac{h_{ii}}{1-h_{ii}}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ untuk } i = 1,2,\dots,n \tag{2.44}$$

dimana t_i adalah *R-student (studentized deleted residual)* untuk kasus ke-i,

dengan

$$t_i = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{s_i^2(1-h_{ii})}} \; i = 1,2,\dots,n \tag{2.45}$$

$$s_i^2 = \frac{(n-p)MSE - \frac{\varepsilon_i^2}{1-h_{ii}}}{n-p-1} \tag{2.46}$$

$$MSE = \frac{y'y - \beta'X'y}{n-k-1} \tag{2.47}$$

Keterangan:

ε_i : residual ke-i

h_{ii} : Elemen diagonal ke-i dari matriks $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$

k : banyaknya parameter.

n : banyaknya observasi

Disebut *outlier* jika nilai $|DFFITS| > 1$ untuk data yang berukuran kecil sampai sedang dan $|DFFITS| > 2\sqrt{\frac{p}{n}}$ untuk data yang berukuran besar (Candraningtyas, dkk., 2013).

2.3.2 *Cook's Distance*

Cook's Distance diperkenalkan oleh Cook pada tahun 1997 (Weisberg, 1987: 119). *Cook's Distance* merupakan salah satu ukuran untuk mendeteksi adanya *outlier* dalam data dengan menampilkan nilai jarak Cook dengan rumus:

$$D_i = \frac{\varepsilon_i^2 h_{ii}}{pMSE(1-h_{ii})^2} \tag{2.48}$$

dengan ε_i adalah residual ke-i, MSE adalah rata-rata jumlah kuadrat residual h_{ii} merupakan nilai *Leverage* (diagonal matriks $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$) untuk kasus ke-i dan p banyaknya variabel independen ditambah konstan. Suatu data yang mempunyai nilai $D_i > \frac{4}{n}$ disebut *outlier*.

2.4 Regresi *Robust*

Regresi *robust* merupakan metode regresi yang digunakan ketika distribusi dari sisaan tidak normal atau ada beberapa *outlier* yang berpengaruh pada model. Metode ini merupakan alat penting untuk menganalisis data yang dipengaruhi oleh *outlier* sehingga dihasilkan model yang tahan terhadap *outlier*. Dalam regresi *robust* terdapat beberapa metode seperti *Maximum Likelihood* (M), *Least Median*

Square (LMS), *Least Trimmed Square* (LTS), *Scale* (S) dan *Method of Moment* (MM).

Dengan adanya *outlier* pada data mengakibatkan model regresi tidak memenuhi asumsinya dan model regresi tidak cocok (*fit*) terhadap data yang akan dimodelkan, karena nilai koefisien dari model regresi tersebut dipengaruhi oleh adanya *outlier*. Sehingga model yang dihasilkan tidak dapat digunakan untuk memprediksi, dan *outlier* pada regresi harus diatasi.

Ordinary Least Square (OLS) bukan merupakan prosedur regresi yang *robust* terhadap adanya *outlier*, karena estimasinya menjadi tidak sesuai meskipun hanya dengan kehadiran satu *outlier* dalam data (Rousseeuw & Leroy, 1987). Pada regresi *robust*, taksiran yang *robust* terhadap *outlier* (tidak terpengaruh oleh adanya *outlier*) akan dicari sehingga *outlier* yang ada tidak perlu dikeluarkan dari analisis. Metode *robust* yang akan digunakan pada penelitian ini adalah *Least Trimmed Square* (LTS) dan *Scale* (S).

2.4.1 Metode *Maximum Likelihood* (M)

Menurut Montgomery dan Peck (1992) pada umumnya regresi robust metode M dilakukan dengan meminimalkan fungsi obyektif (ρ) dari fungsi residualnya (ε_i). Fungsi tersebut dapat dilihat dalam persamaan (Susanti, *et al.*, 2014):

$$\hat{\beta}_M = \min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \rho(\varepsilon_i) = \min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \rho\left(y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\beta_j\right) \qquad (2.49)$$

Estimasi koefisien regresi dengan metode M dilakukan dengan estimasi kuadrat terkecil dengan pembobot iteratif. Prosedur estimasi ini membutuhkan proses iterasi dimana pembobot akan berubah pada tiap iterasinya. Prosedur tersebut dinamakan *Iteratively Reweighted Least Squares* (IRLS) (Pradewi & Sudarno 2012).

2.4.2 *Least Median Square* (LMS)

Metode *Least Median Square* (LMS) merupakan metode dengan nilai *breakdown* tinggi yang diperkenalkan oleh Rousseuw pada tahun 1984. Metode LMS adalah suatu metode estimasi parameter regresi *robust* dengan meminimumkan median dari kuadrat residual yaitu (Rousseeuw & Leroy, 1987: 14):

$$\min_{\beta}(med\ \varepsilon_i^2) \tag{2.50}$$

dengan ε_i^2 adalah kuadrat residual hasil taksiran dengan metode kuadrat terkecil.

2.4.3 *Least Trimmed Square* (LTS)

Menurut Rousseeuw (1987) metode *Least Trimmed Square* (LTS) mampu mengatasi pencilan (*outlier*) yang disebabkan baik oleh variabel bebas maupun variabel terikatnya. LTS diusulkan oleh Rousseeuw (1987) sebagai alternatif *robust* untuk mengatasi kelemahan metode kuadrat terkecil, yaitu dengan menggunakan sebanyak h ($h \leq n$) kuadrat residual yang diturunkan nilainya

(Suyanti & YL Sukestiyarno, 2014). Estimasi LTS diperoleh dengan menyelesaikan:

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^{h} (\varepsilon_i^2) \tag{2.51}$$

dengan $h = \frac{n+p+1}{2}$ $(\frac{n}{2} < h < n)$

keterangan:

ε_i^2: Kuadrat residual ke-i, yang diurutkan dari nilai terkecil hingga paling besar

$\varepsilon_1^2 \leq \varepsilon_2^2 \leq \cdots \varepsilon_i^2 \leq \cdots \leq \varepsilon_h^2 \leq \cdots \leq \varepsilon_n^2$

n: Jumlah pengamatan.

p: Jumlah parameter.

Jumlah h menunjukkan sejumlah subset data dengan kuadrat fungsi objektif terkecil. Nilai h akan membangun *breakdown point* yang besar sebanding dengan 50%. Algoritma LTS menurut Rousseeauw dan Van Driessen (1999) dalam Willems dan Aelst (2005) adalah gabungan FAST-LTS dan C-*Steps*, yaitu dengan mengestimasi parameter β dengan metode kuadrat terkecil kemudian menentukan residual dari data. Setelah itu menghitung $\sum_{i=1}^{h_0} (\varepsilon_i^2)$ dengan $h_0 = \frac{n+p+1}{2}$ pengamatan dengan nilai ε_i^2 terkecil. Tahapan-tahapan tersebut dilakukan sampai diperoleh nilai fungsi objektif terkecil dan konvergen.

2.4.4 Metode *Scale* (S)

Metode *Scale* (S) pertama kali diperkenalkan oleh Rousseeuw dan Yohai (1984), dan dinamakan S karena metode ini berdasarkan pada skala sisaan dari metode M. Metode *Scale* (S) didefinisikan sebagai $\hat{\beta}_s = \min_{\beta} \hat{\sigma}_s(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ dengan menentukan nilai estimator skala robust $(\hat{\sigma}_s)$ yang minimum dan memenuhi (Susanti *et al*., 2014):

$$min \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\beta}{\hat{\sigma}_s}\right) \tag{2.52}$$

dengan

$$\hat{\sigma}_s = \sqrt{\frac{1}{nK}\sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i^2} \tag{2.53}$$

$K = 0{,}199$, $w_i = w_\sigma(u_i) = \frac{\rho(u_i)}{u_i^2}$, dan dipilih estimasi awal

$$\hat{\sigma}_s = \frac{median|\varepsilon_i - median(\varepsilon_i)|}{0{,}6745} \tag{2.54}$$

Pemilihan konstanta 0,6745 membuat $\hat{\sigma}$ suatu estimator yang mendekati tak bias dari σ jika *n* besar dan sisaan berdistribusi normal. Penyelesaian persamaan (2.52) adalah dengan cara mencari turunannya terhadap β sehingga diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\psi\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\beta}{\hat{\sigma}_s}\right) = 0 \qquad j = 0,1, \dots, k \tag{2.55}$$

ψ adalah fungsi turunan dari ρ:

$$\psi(u_i) = \rho'(u_i) = \begin{cases} u_i\left[1 - \left(\frac{u_i}{c}\right)^2\right]^2 & , |u_i| \le c \\ 0 & , |u_i| > c \end{cases} \tag{2.56}$$

dengan w_i merupakan fungsi pembobot *Tukey Bisquare.*

$$w_i(u_i) = \frac{\psi(u_i)}{u_i} = \begin{cases} \dfrac{u_i\left(1-\left(\frac{u_i}{c}\right)^2\right)^2}{u_i} & ,|u_i| \le c \\ 0 & ,|u_i| > c \end{cases}$$

$$w_i(u_i) = \begin{cases} \left(1-\left(\frac{u_i}{c}\right)^2\right)^2 & ,|u_i| \le c \\ 0 & ,|u_i| > c \end{cases} \tag{2.57}$$

dengan $u_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}_s}$ dan $c = 4{,}685$. Persamaan (2.55) dapat diselesaikan dengan metode MKT terboboti secara iterasi yang dinamakan IRLS (*Iteratively Reweighted Least Squares*). Dalam menggunakan IRLS, diasumsikan bahwa suatu estimasi awal $\hat{\beta}^0$ dan $\hat{\sigma}_i$ suatu skala estimasi. Untuk j parameter, dengan j adalah jumlah parameter yang akan diestimasi maka

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} w_i^0 \left(y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij} \beta^0 \right) = 0 \qquad j = 0,1,\dots,k \tag{2.58}$$

dalam notasi matriks, persamaan (2.58) dapat ditulis menjadi

$$\mathbf{X}'\mathbf{W}_\mathbf{i}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{W}_\mathbf{i}\mathbf{Y} \tag{2.59}$$

dengan W_i adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan elemen-elemen diagonal yang berisi pembobot. Persamaan (2.58) dikenal sebagai persamaan *Weigthed Least Squares* (WLS). Penyelesaian persamaan tersebut akan memberikan estimator untuk $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ yaitu $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{W}_\mathbf{i}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{W}_\mathbf{i}\mathbf{Y})$.

Adapun algoritma perhitungan nilai metode *Scale* (S) sebagai berikut :

1. Menghitung parameter $\hat{\beta}$ dengan OLS.
2. Menghitung nilai residual $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$.

3. Menghitung nilai

$$\hat{\sigma}_s = \begin{cases} \dfrac{median|\varepsilon_i - median(\varepsilon_i)|}{0,6745} & ,iterasi = 1 \\ \sqrt{\dfrac{1}{nK}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i^2} & ,iterasi > 1 \end{cases}$$

dengan $K = 0,199$

4. Menghitung nilai $u_i = \frac{\varepsilon_i}{\hat{\sigma}_s}$
5. Menghitung pembobot

$$w_i = \begin{cases} \left[1 - \left(\dfrac{u_i}{1,547}\right)^2\right]^2 & ,|u_i| \le 4,685 \\ 0 & ,|u_i| > 4,685 \end{cases}$$

6. Menghitung parameter $\hat{\beta}_s$ dengan metode WLS dengan pembobot w_i
7. Mengulangi langkah 2-6 sampai diperoleh nilai $\hat{\beta}_s$ yang konvergen.

2.4.5 *Method Of Moment* (MM)

Regresi *robust* MM (*Method of Moment*) diperkenalkan oleh Yohai (1987). Metode ini merupakan kombinasi antara metode penduga regresi robust high breakdown value dengan efisiensi yang tinggi. Estimator MM merupakan gabungan antara metode S yang mempunyai nilai *breakdown* tinggi dengan metode M yang mempunyai efisiensi yang tinggi sehingga metode ini memenuhi kriteria yang diharapkan untuk suatu regresi *robust*. Estimasi MM diperoleh dengan menyelesaikan (Candrawati, 2013):

$$\arg\min \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{y_i - \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\hat{\beta}_j}{s_S}\right) \tag{2.60}$$

$\hat{\beta}_j$ merupakan penduga MM dan s_s adalah simpangan baku penduga MM yang bernilai tetap dan diperoleh dari simpangan baku penduga S, sedangkan ρ adalah

$$\rho(u_i) = \begin{cases} \frac{u_i^2}{2} - \frac{u_i^4}{2c^2} + \frac{u_i^6}{6c^4}, & |u_i| \leq c \\ \frac{c^2}{6}, & |u_i| \leq c \end{cases} \tag{2.61}$$

Adapun algoritma perhitungan nilai metode MM sebagai berikut :

1. Menghitung parameter $\hat{\beta}$ dengan OLS.
2. Menghitung nilai sisaan $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$ dari estimasi S
3. Menghitung nilai $\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_s$
4. Menghitung nilai $u_i = \frac{\varepsilon_i}{\hat{\sigma}_i}$
5. Menghitung nilai pembobot

$$w_i = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{u_i}{4{,}685}\right)^2\right]^2, & |u_i| \leq 4{,}685; \\ 0 \ , & |u_i| > 4{,}685. \end{cases}$$

6. Menghitung parameter $\hat{\beta}_{MM}$ dengan metode WLS dengan pembobot w_i.
7. Mengulangi langkah 5-8 sampai diperoleh nilai $\hat{\beta}_{MM}$ yang konvergen.

2.5 Ukuran Pemilihan Model Terbaik

Pada regresi linear, besarnya variasi variabel respon tergantung pada banyaknya variabel yang terlibat dalam model. Hal tersebut tentunya sangat menyulitkan dalam menentukan besarnya pengaruh suatu variabel bebas terhadap variabel respon (Sembiring, 2003:188). Oleh karena itu diperlukan pemilihan model terbaik dengan beberapa metode yaitu metode seleksi maju (*Forward Selection*), metode penyisihan (*Backward Elemination*) dan metode bertahap (*Stepwise Regression*) dan metode semua kombinasi yang mungkin (*All Possible Subset*). Menurut Sembiring, metode semua kombinasi yang mungkin (*All Possible Subset*) merupakan metode yang lebih baik dibandingkan metode yang lain. Kriteria yang digunakan dalam metode *All Possible Subset* adalah dengan melihat nilai R^2, *Mean Square Error* (MSE) dan Cp Mallows. Ketiga kriteria tersebut saling berkaitan erat satu sama lain sehingga ketiganya memberikan informasi yang sama.

Dalam penelitian ini, digunakan kriteria R^2 dan *Mean Square Error* (MSE) untuk mendapatkan model terbaiknya. R-*square* (R^2) merupakan salah satu ukuran yang sederhana dan sering digunakan untuk menguji kualitas suatu persamaan garis regresi (Gujarati, 2004:81). Nilai R-*square* (R^2) memberikan gambaran tentang kesesuaian variabel independen dalam memprediksi variabel dependen. *Mean Square Error* (MSE) merupakan kriteria paling penting yang digunakan untuk mengevaluasi kinerja estimator serta untuk menyampaikan konsep bias, presisi dan ketepatan dalam estimasi statistik (Lestari, 2016). Kriteria *Mean Square Error* (MSE) akan menghasilkan titik optimal yang mendekati target dengan variansi terkecil. Semakin kecil nilai *Mean Square Error* (MSE) maka semakin baik kecocokan suatu persamaan dengan data.

2.6 Penelitian Terdahulu

Sebagai bahan pertimbangan dalam penelitian ini akan dicantumkan beberapa hasil penelitian terdahulu oleh beberapa peneliti yang pernah penulis baca di antaranya :

a. Jurnal yang berjudul "Optimasi Kekuatan *Torque* pada Lampu TL" yang ditulis oleh Akbar dan Lailatul pada tahun 2007, membahas tentang optimalisasi dengan menggunakan metode permukaan respon. Dalam etimasi parameter digunakan metode LTS. Hasil yang didapat adalah Metode LTS merupakan metode yang robust terhadap *outlier* sehingga estimasi parameter yang dihasilkan lebih akurat dan didapatkan kondisi optimum kekuatan *torque*.

b. Jurnal yang berjudul "Metode Permukaan Respon dan Aplikasinya pada Optimsi Eksperimen Kimia" yang ditulis oleh Nuryanti dan Salimy pada tahun 2008, jurnal ini membahas tentang optimalisasi eksperimen kimia dengan metode permukaan respon. Metode kuadrat terkecil digunakan untuk mengestimasi parameter dalam penelitian ini yang hasilnya adalah nilai respon yang optimum.

c. Jurnal yang berjudul "Perbandingan Metode *Least Trimmed Squares* dan Penaksir M dalam Mengatasi Permasalahan Data Pencilan" yang ditulis oleh Wulandari pada tahun 2013, jurnal ini membandingkan metode LTS (*Least Trimmed Square*) dan metode M untuk mengatasi data pencilan. Penelitan ini mensimulasi empat kelompok data yang terdiri dari 20 observasi dengan satu variabel terikat. Hasil yang didapatkan adalah metode LTS memberikan hasil lebih baik daripada metode M dan metode OLS dalam mengatasi permasalahan *outlier* karena mampu memberikan estimasi koefisien regresi yang cocok dan rata-rata kuadrat sisaan yang kecil. Simulasi juga menunjukkan bahwa metode M lebih baik daripada metode OLS karena solusi metode M menggunakan iterasi *weigthed least squares* sehingga menghasilkan model dan koefisien regresi yang cocok.

d. Prosiding yang berjudul “Aplication of M-Estimation for Response Surface Model With Data *Outlier*s “ yang ditulis oleh Widodo dkk. pada tahun 2013, yang membahas tentang aplikasi penaksir-M untuk metode permukaan respon dengan data yang mengandung *outlier*. Hasilnya adalah untuk kasus data hasil percobaan pada metode permukaan respon yang mengandung *outliers*, penaksir M dapat diterapkan untuk menaksir model permukaan respon.

e. Jurnal yang berjudul “Perbandingan Regresi *Robust* Metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan Metode MM untuk Metode Model Penilaian Aset Modal (Studi Kasus PT. Telekomunikasi Indonesia (Persero), Tbk.) “ yang ditulis oleh Putri pada tahun 2014, yang membahas perbandingan regresi *robust* metode *Least Trimmed Square (LTS)* dan metode-MM untuk estimasi model penilaian aset modal menggunakan kriteria *Root Mean Square Error* dan salah baku. Berdasarkan kriteria *Root Mean Square Error* dan salah baku, metode LTS lebih direkomendasikan daripada metode-MM untuk menduga parameter sistematik suatu saham.

f. Jurnal yang berjudul "M Estimation, S Estimation, and MM Estimation In Robust Regression " yang ditulis oleh Susanti, *et al*. pada tahun 2014. Jurnal ini membandingkan metode M, metode S, dan metode MM dalam regresi *robust* untuk menentukan model regresi terbaik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode S merupakan metode paling baik.

g. Jurnal yang berjudul " A Comparative Study of Some Estimation Methods in Simple Linear Regression Model for Different Sample Sizes in Presence of Outliers" yang ditulis oleh Cankaya dan Samet pada tahun 2015, yang membahas tentang penentuan model regresi sederhana pada data dengan *outlier* dan ukuran sampel yang berbeda. Variabel yang digunakan yaitu lingkar dada dan berat badan domba pada masa sapih. Beberapa metode yang dibandingkan untuk estimasi parameter adalah LTS (*Least Trimmed Square*), metode S, metode M, metode MM. Hasil penelitian menunjukkan bahwa LTS merupakan metode terbaik dalam estimasi parameter regresi dengan *outlier* serta ukuran sampel yang berbeda.

h. Jurnal yang berjudul " Optimization of Parameters on Photocatalytic Degradation of Chloramphenicol Using TiO_2 as Photocatalyst by Response Surface Methodology" yang ditulis oleh Zhang, *et al*. pada tahun 2010 yang membahas tentang optimasi parameter menggunakan metode permukaan respon dengan estimasi metode kuadrat terkecil. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode permukaan respon merupakan alat yang berguna untuk mengoptimalkan kondisi proses CAP dengan fotokatalis TiO_2.

i. Jurnal yang berjudul " Optimization Study of Xanthan Gum Production using Response Surface Methodology" yang ditulis oleh Psomas, *et al*. pada tahun 2007 yang membahas tentang optimasi parameter menggunakan metode permukaan respon dengan estimasi metode kuadrat terkecil. Hasil penelitian menunjukkan kondisi optimum yang mengakibatkan nilai variabel respon bernilai maksimum.

2.7 Kerangka Berfikir

Regresi merupakan suatu metode statistika yang digunakan untuk mengetahui hubungan antara variabel satu dengan variabel lainnya yang ditunjukkan dengan suatu model linear. Namun, dalam beberapa kasus diperlukan suatu metode yang digunakan untuk mengoptimalkan respon, maka dari itu terdapat suatu pendekatan statistik yang dapat digunakan yaitu metode permukaan respon. Metode permukaan respon merupakan suatu metode yang digunakan untuk memperoleh kondisi optimum suatu respon dari sejumlah variabel bebas dengan rancangan dan analisis percobaan yang cermat.

Terdapat dua fungsi dalam metode permukaan respon akan tetapi dalam penelitian ini hanya akan digunakan fungsi orde dua karena lebih baik dalam memecahkan permasalahan permukaan respon. Metode permukaan respon hampir sama dengan analisis regresi, namun dalam analisisnya digunakan tehnik-tehnik matematika untuk menentukan respon yang optimum.

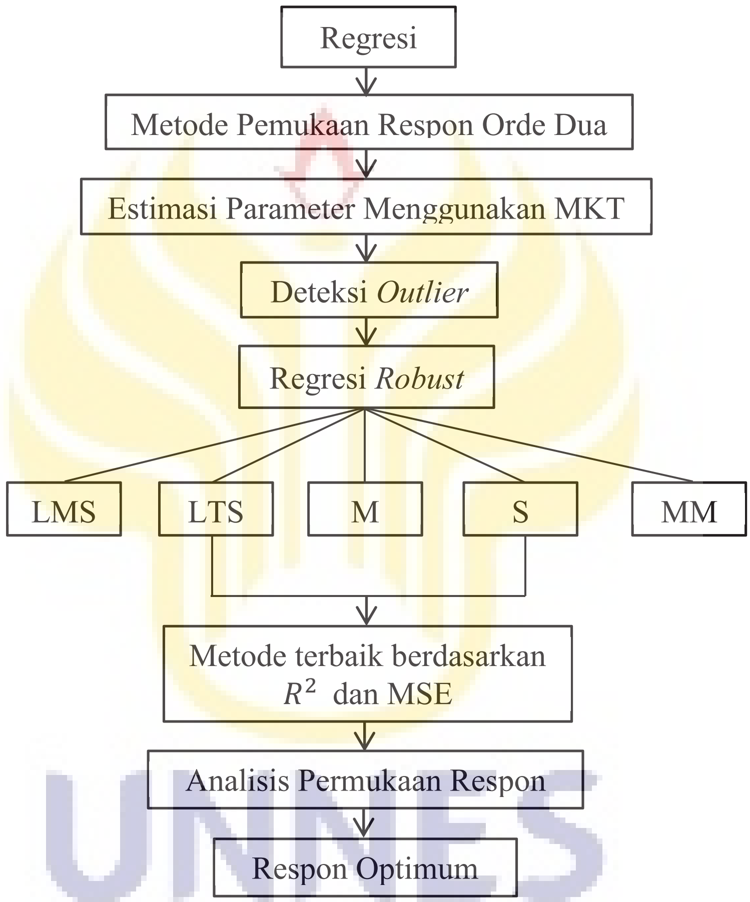
Metode kuadrat terkecil merupakan metode yang baik dalam estimasi parameter model regresi termasuk pada metode permukaan respon. Dalam beberapa kasus, estimasi oleh MKT terjadi penyimpangan karena adanya *outlier*, yang menyebabkan estimasi parameternya kurang tepat. Oleh karena itu dilakukan pendeteksian dalam data untuk mengetahui adanya *outlier* dalam data. Ketika data mengandung *outlier* maka diperlukan suatu pendekatan model regresi yang tahan terhadap adanya *outlier* yaitu regresi *robust*.

Regresi *robust* merupakan regresi yang tahan terhadap adanya *outlier* sehingga estimasi parameternya tidak menyimpang dan model yang diperoleh dapat digunakan untuk analisis selanjutnya. Beberapa metode dari regresi *robust* antara lain, *Maximum Likelihood* (M), *Least Median Square* (LMS), *Least Trimmed Square* (LTS), *Scale* (S) dan *Method of Moment* (MM).

Metode *Least Trimmed Square* (LTS) merupakan metode dengan nilai *breakdown point* yang paling tinggi. Ide dasar dari metode *Least Trimmed Square* (LTS) adalah meminimalkan residual terpangkas dari data. Metode *Scale* (S) juga merupakan metode dengan nilai *breakdown point* yang tinggi dengan ide dasar dari metode ini adalah meminimalkan simpangan baku (*scale*). Penelitian ini akan difokuskan pada metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan *Scale* (S) dimana keduanya merupakan metode regresi *robust* dengan nilai *breakdown* tinggi.

Berdasarkan perbandingan nilai R^2 dan *Mean Square Error* (MSE) dari metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan *Scale* (S) diperoleh metode terbaik yang akan digunakan untuk analisis permukaan respon. Tujuan dari analisis permukaan respon adalah untuk memperoleh respon yang optimum.

Alur kerangka berfikir disajikan dalam diagram alur yang disajikan dalam Gambar 2.1. berikut ini :



Gambar 2.1. Diagram Alur Kerangka Berfikir

BAB 5

PENUTUP

5.1 Simpulan

Berdasarkan rumusan masalah dan dari hasil pembahasan, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Pada regresi *robust* yang digunakan untuk estimasi parameter model orde dua pada metode permukaan respon, metode *Least Trimmed Square* (LTS) lebih baik dibandingkan metode *Scale* (S). Hal ini dapat dilihat dari nilai R^2 metode *Least Trimmed Square* (LTS) lebih besar dibandingkan metode *Scale* (S) dan nilai *Mean Square Error* (MSE) metode *Least Trimmed Square* (LTS) yang lebih kecil dibandingkan metode *Scale* (S). Hasil estimasi oleh metode *Least Trimmed Square* (LTS) dapat dilihat pada persamaan berikut:

$$\hat{Y} = 87{,}3062 - 0{,}2657X_1 + 0{,}9151X_2 + 0{,}0038X_3 - 1{,}1727X_1^2 - 2{,}5831X_2^2 - 0{,}8006X_3^2 - 0{,}2033X_1X_2 + 0{,}738X_1X_3 + 2{,}5614X_2X_3$$

2. Berdasarkan hasil estimasi parameter metode *Least Trimmed Square* (LTS) diperoleh kondisi optimum dari *Degradation rate of Chloramphenicol* terjadi pada pengaturan PH sebesar 7,28, TiO_2 *concentration* sebesar 2,17 g/L, dan CAP *initial concentration* sebesar 17,98 mg/L. Pengaturan tersebut

menyebabkan kondisi respon berada di titik maksimum dan menghasilkan *Degradation rate of Chloramphenicol* sebesar 87,85%.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan dalam penelitian ini, ada beberapa saran yang dapat digunakan untuk penelitian selanjutnya, antara lain:

1. Pada pembahasan ini hanya mengkaji estimasi parameter model orde dua pada metode permukaan respon. Regresi *robust* metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan *Scale* (S) digunakan dalam penelitian ini. Adapun metode lain dalam regresi *robust*, maka dari itu ada baiknya dilakukan estimasi parameter model orde dua pada metode permukaan respon menggunakan metode lain yang ada dalam regresi *robust*.
2. Untuk memperoleh *Degradation rate of Chloramphenicol* yang optimum sebaiknya menggunakan pengaturan PH sebesar 7,28, TiO_2 *concentration* sebesar 2,17 g/L, dan CAP *initial concentration* sebesar 17,98 mg/L.

DAFTAR PUSTAKA

Akbar, M. S. & M. Lailatul. 2007. Optimasi Kekuatan *Torque* pada Lampu TL. Institut Sepuluh November: *Jurnal Ilmiah Sains dan Teknologi*. Vol.6 No.3.

Azizah, dkk. 2013. Analisis Sifat Metode *Least Trimmed Squares* (LTS) Pada Regresi Linear Berganda Yang Mengandung Pencilan dengan Berbagai Ukuran Contoh. Universitas Brawijaya: *Jurnal Mahasiswa Statistik*. Vol.1 No.4.

Box, George E.P. & Norman R. Draper. 2007. *Response Surface, Mixtures and Ridge Analyses (2th* ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Candraningtyas, Sherly dkk. 2013. Regresi *Robust* MM-Estimator untuk Penanganan Pencilan Pada Regresi Linier Berganda.Universitas Diponegoro: *Journal Gaussian*. Vol.2 No.4.

Candrawati, E. D. & Eni S. 2013. Perbandingan Penduga *Method Of Moment* (MM) Dan *Least Trimmed Square* (LTS) dalam Regresi *Robust* Linier Berganda. Universitas Brawijaya: *Jurnal Mahasiswa Statistik*.

Cankaya, S. Dan S. H. Abaci. 2015. A Comparative Study of Some Estimation Methods in Simple Linear Regression Model for Different Sample Sizes in Presence of *Outlier*s. *Turkish Journal of Agriculture-Food Science ang Technology*, 3(6): 380-386.

Eryson. 2006. *Perancangan Program Aplikasi untuk Percobaan dengan Menggunakan Metoda Respon Permukaan Berfaktor Dua*. Skripsi. Tangerang: Universitas Bina Nusantara.

Gujarati, Damodar. 2004. *Ekonometrika*. Jakarta: Erlangga.

Jati, Andrian. 2011. Metode Permukaan Respon. Online. Tersedia di http://andrianjati.blogspot.co.id/2011/12/metode-permukaan-respon-rsm.html [diakses 28-03-2016]

Lestari, Edriani dkk. 2016. Pemilihan Model Regresi Linear Multivariat Terbaik dengan Kriteria *Mean Square Error* dan *Akaike's Information Criterion*. Samarinda: *Prosiding Seminar Sains dan Teknologi FMIPA Unmul*.

Montgomery, Douglas C. Dan Peck E. A. 1992. *Introduction To Linear Regression Analysis, 2nd Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Montgomery, Douglas C. 2001. *Design and Analysis of Experiments (5th* ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Myers, Raymond H. *Et al*. 2009. *Response Surface Methodology (3th* ed.). Canada: John Wiley & Sons, Inc.

Nuryanti & Djati H. Salimy. 2008. Metode Permukaan Respon dan Aplikasinya pada Optimasi Eksperimen Kimia. *Risalah Lokakarya Komputasi dalam Sains dan Teknologi Nuklir*: 373-391.

Pai, Dayananda *et al*. 2010. Application of Response Surface Methodology on Surface Roughness in Grinding of Aerospace Materials (6061Al-15Vol%SiC_{25P}). *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*: Vol. 5 No.6.

Paludi, Salman. 2009. *Identifikasi dan Pengaruh Keberadaan Data Pencilan (outlier)*. Jakarta: Majalah Ilmiah Panorama Nusantara.

Pradewi, E. D. & Sudarno. 2012. Kajian Estimasi-M IRLS menggunakan Fungsi Pembobot Huber dan Bisquare Tukey pada Data Ketahanan Pangan di Jawa Tengah. *Media Statistika*: Vol.5 No.1: 1-10.

Psomas, S.K. *et al*. 2007. Optimization Study of Xanthan Gum Production Using Response Surface Methodology. *Biochemical Engineering Journal*, 35: 273-280.

Putri, Dina Eka. 2014. Perbandingan Regresi Robust Metode *Least Trimmed Square* (LTS) dan Metode MM untuk Estimasi Model Penilaian Aset Modal. Universitas Brawijaya: *Jurnal Mahasiswa Statistik*. Vol. 2 No.3.

Rahmawaty, Fitri & Hery Tri Susanto. 2014. Penerapan Metode Permukaan Respon untuk Optimalisasi Proses *Sealing* Pada Pengemas Produk Makanan Jelly. Universitas Negeri Surabaya: *Jurnal Mahasiswa Statistik*. Vol. 3, No.1.

Rousseeuw, Peter J. & Annick M. Leroy. 1987. *Robust Regression And Outlier Detection*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Sembiring, R.K. 2003. *Analisis Regresi*. Bandung: ITB.

Sen, Ashish & Muni Srivastava. *Regression Analysis: Theory, Methods and Applications*. 1990. New York: Springer-Verlag New Tork, Inc.

Sukestiyarno. 2014. *Statistika Dasar*. Yogyakarta: ANDI OFFSET.

Susanti, Yuliana *et al*. 2014. M Estimation, S Estimation, and MM Estimation In Robust Regression. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 91(3): 349-360.

Suyanti & YL Sukestiyarno. 2014. Deteksi *Outlier* Menggunakan Diagnosa Regresi Berbasis Estimator Parameter *Robust*. Semarang: *UNNES Journal of Mathematic*. 3(2).

Weisberg, Sanford. 2005. *Applied Linear Regression (3th* ed.). Canada: John Wiley & Sons, Inc.

Widodo, dkk. 2013. *Aplication Of M-Estimation For Response Surface Model With Data Outliers*. Universitas Diponegoro: Prosiding Seminar Nasional.

Willems, Gert & Stefan Van Aelst. 2005. Fast and Robust Bootstrap for LTS. *Computational Statistics & Data Analysis*, 48: 703-715.

Wulandari, Sri *et al*. 2013. Perbandingan Metode *Least Trimmed Squares* dan Penaksir M dalam Mengatasi Permasalahan Data Pencilan. *Saintia Matematika*. 1(1): 73-85.

Yaffe, R. A. 2002. Robust Regression Analysis: Some Popular Statistical Package Options. *Information Technology Services*. www.nyu.edu/lts/socsci/docs/robustreg2.pdf.

Zhang, Junwei *et al*. 2010. Optimization of Parameters on Photocatalytic Degradation Of Chloramphenicol Using TiO_2 as Photocatalyist by Response Surface Methodology. *Journal of Enviromental Sciences*, 22(8): 1281-1289.

Zhang, Peng *et al*. 2016. Molding Process Design for Asphalt Mixture Based on Response Surface Methodology. *Journal of Material in Civil Engineering*.