STRUKTUR DAN SIFAT-SIFAT K-ALJABAR

Skripsi

disajikan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

Deni Nugroho

4111412056

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2017

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, kecuali yang secara tertulis dirujuk dalam skripsi ini dan disebutkan dalam daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan perundang-undangan.

Semarang, Maret 2017

METERAI TEMPEL TGL. 20 DDE47AEF474939057 6000 ENAM RIBU RUPIAH

Deni Nugroho
NIM 4111412056

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Struktur dan Sifat-Sifat K-aljabar

Disusun oleh

Deni Nugroho

NIM 4111412056

Telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES pada tanggal 9 Maret 2017.

Panitia :

Ketua	Sekretaris
Prof. Dr. Zaenuri, S. E., M. Si., Akt.	Drs. Arief Agoestanto, M. Si.
NIP 196412231988031001	NIP 196807221993031005

Ketua Penguji

Dra. Kristina Wijayanti, MS
NIP 196012171986012001

Anggota Penguji/Pembimbing I	Anggota Penguji/Pembimbing II
Dra. Rahayu Budhiati V, M. Si.	Drs. Mashuri, M.Si.
NIP 196406131988032002	NIP 196708101992031003

MOTTO

- Tiap-tiap diri bertanggung jawab atas apa yang telah diperbuatnya (Al Mudattsir: 38).
- Satu-satunya kepastian yang ada hanyalah ketidakpastian.
- Tak apa jika kau meniru orang yang kau hormati, tetapi jangan bertindak layaknya kau adalah dia.
- Jika kebersamaan adalah suatu keinginan, maka sendirian adalah suatu keharusan. Antara kebersamaan dan sendirian juga merupakan suatu kebutuhan.

PERSEMBAHAN

- Untuk kedua orang tua tercinta Ibu Darmiasih dan Bapak Ali Ahmadi.
- Untuk kakakku Didi Kurniawan dan adik-adikku Alfin Hidayat dan Rizqi Amalia.
- Teman-teman Kontrakan, Dhani, Tiko, Azam, Hengky, Irfan, Syahrudin, Zaidin, Taufik, Umar, Isro'.
- Teman-teman Matholi'ul Huda, Karyanto, Fathillah, Uswah.
- Untuk teman-teman Matematika Angkatan 2012.
- Untuk Universitas Negeri Semarang (Unnes).

KATA PENGANTAR

Puji Syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan hidayah-Nya sehingga skripsi yang berjudul “Struktur dan Sifat-Sifat K-Aljabar” dapat terselesaikan dengan baik. Penyelesaian skripsi ini dimaksudkan untuk melengkapi persyaratan agar memperoleh gelar Sarjana Sains Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.

Sehubungan dengan pelaksanaan penelitian sampai tersusunnya skripsi ini, dengan rasa rendah hati disampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada yang terhormat:

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum., Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si., Akt., Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si., Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
4. Drs. Mashuri, M.Si., selaku Ketua Prodi Matematika, Dosen Wali dan Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, nasehat, saran, dan dorongan selama penyusunan skripsi ini.
5. Dra. Rahayu Budhiati Veronica selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, nasehat, saran, dan dorongan selama penyusunan skripsi ini.
6. Dra. Kristina Wijayanti, M.S selaku Dosen Penguji yang telah memberikan penilaian dan saran dalam perbaikan skripsi ini.

7. Staf Dosen Matematika dan Staf Tata Usaha Universitas Negeri Semarang yang telah membekali dengan berbagai ilmu selama mengikuti perkuliahan sampai akhir penulisan skripsi ini.
8. Ibu dan Bapak tercinta, Ibu Darmiasih dan Bapak Ali Ahmadi yang senantiasa memberikan dukungan dan doa yang tiada putusnya.
9. Teman-teman Matematika angkatan 2012 yang berjuang bersama untuk mewujudkan cita-cita.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah memberikan bantuan.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari pembaca. Semoga amal baik dari semua pihak yang terlibat mendapat pahala yang berlipat dari Allah SWT. Amin.

Semarang,   Maret 2017

Penulis

ABSTRAK

Nugroho, Deni. 2017. *Struktur dan Sifat-Sifat K-Aljabar*. Skripsi, Matematika, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang. Pembimbing I: Dra. Rahayu Budhiati Veronica, M.Si, Pembimbing II: Drs. Mashuri, M.Si.

Kata Kunci: Operasi biner, grup, K-aljabar, K-subaljabar, dan K-homomorfisma.

K-aljabar merupakan struktur aljabar $< G,*,\odot,e >$, di mana G merupakan grup terhadap operasi biner $*$ dengan elemen identitas e, operasi $\odot$ didefinisikan oleh $\forall x,y \in G, x \odot y = x * y^{-1}$, dan memenuhi kelima aksioma dari K-aljabar. Konsep yang terdapat dalam K-aljabar hampir sama dengan konsep yang terdapat dalam grup. Jika dalam grup terdapat konsep subgrup dan homomorfisma grup, maka dalam K-aljabar terdapat konsep K-subaljabar dan K-homomorfisma.

Penelitian ini membahas mengenai struktur dan sifat-sifat yang terkait dengan K-aljabar, K-subaljabar, dan K-homomorfisma. Tujuan penelitian ini adalah menjelaskan struktur dan sifat-sifat dari kajian K-aljabar, K-subaljabar, dan K-homomorfisma.

Penelitian ini menggunakan metode kajian pustaka. Dengan cara mengumpulkan berbagai sumber dan teorema-teorema yang mendukung pada kajian K-aljabar.

Pada penelitian ini dapat disimpulkan:1) Dalam K-aljabar berlaku sifat-sifat berikut: hukum kanselasi; K-aljabar dapat dibangun oleh grup komutatif atau grup tak komutatif. 2) K-subaljabar memiliki sifat sebagai berikut: misalkan $< G,*,\odot,e >$ K-aljabar dan $g \in G$; Jika H suatu subgrup dari G, maka $H_{g^2} = \{g \odot (g \odot x) | x \in H\}$ adalah suatu K-subaljabar dari $< G,*,\odot,e >$. 3) Homomofisma K-aljabar $\varphi : A_1 \to A_2$ memiliki sifat-sifat sebagai berikut: $\forall x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ berlaku $\varphi(e_1) = e_2$; $\varphi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \varphi(x_1)$; $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$; dan jika H_1 adalah K-subaljabar dari A_1 maka $\varphi(H_1)$ adalah K-subaljabar dari A_2.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar abstrak adalah bidang matematika yang mempelajari struktur aljabar, seperti grup, ring, medan, modul, ruang vektor, dan aljabar medan. Frasa aljabar abstrak diciptakan pada awal abad ke-20 untuk membedakannya dengan bidang yang biasa disebut sebagai aljabar, yaitu studi aturan manipulasi rumus dan ekspresi aljabar yang melibatkan variabel dan bilangan riil atau kompleks, yang saat ini lebih sering disebut sebagai aljabar elementer.

Teori grup merupakan salah satu bidang kajian aljabar abstrak yang mempelajari struktur himpunan. Sebuah himpunan tak kosong dengan satu operasi biner dapat dinyatakan sebagai grup jika operasi biner pada himpunan tersebut memenuhi sifat assosiatif, adanya elemen identitas, dan setiap anggota himpunan tersebut mempunyai invers (Milne, 2013).

Grup digunakan dalam dunia matematika dan ilmu pengetahuan alam. Dalam bidang kimia, grup dapat digunakan untuk mengklasifikasikan simetri molekul serta mengidentifikasi titik molekul tersebut. Grup juga diterapkan dalam bidang kriptografi yaitu untuk sistem kriptografi kunci publik.

Misalkan $G =< G,*>$ suatu grup terhadap operasi biner $*$. Jika e adalah elemen identitas pada G dan untuk setiap x, y di G didefinisikan operasi $x \odot y = x * y^{-1}$ sedemikian sehingga operasi tersebut merupakan operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu maka G akan membentuk struktur aljabar yang dinamakan K-aljabar (Dar & Akram, 2006).

K-aljabar dibagi menjadi dua kelas berdasarkan grup pembangunnya, yaitu Q-aljabar apabila grup yang membangun K-aljabar adalah grup yang komutatif dan B-Aljabar apabila grup yang membangun K-aljabar adalah grup yang tidak komutatif (Dar & Akram, 2006).

Hal yang menarik dalam K-aljabar adalah konsepnya yang hampir sama dengan konsep grup. Jika dalam grup terdapat konsep subgrup dan homomorfisma, maka dalam K-aljabar juga terdapat konsep K-subaljabar dan K-homomorfisma. Oleh karena itu, dalam pengembangan pembahasannya, penulis tertarik untuk membahas dan mengkaji kembali strukur dan sifat-sifat yang terkait dengan K-aljabar.

Dalam penelitian ini akan dibahas mengenai struktur dan sifat-sifat yang terkait dengan K-aljabar.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis merumuskan beberapa masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana struktur dan sifat-sifat terkait K-aljabar?
2. Bagaimana struktur dan sifat-sifat terkait K-subaljabar?
3. Bagaimana struktur dan sifat-sifat terkait homomorfisma K-aljabar?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, penulis bertujuan untuk:

1. Menjelaskan struktur dan sifat-sifat terkait K-aljabar.
2. Menjelaskan struktur dan sifat-sifat terkait K-subaljabar.
3. Menjelaskan struktur dan sifat-sifat terkait homomorfisma K-aljabar.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi Penulis

   Penelitian ini digunakan sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan tentang teori terkait K-aljabar, untuk pengembangan dalam permasalahan matematika, khususnya pada bidang aljabar.

2. Bagi Lembaga

   Hasil penelitian ini dapat digunakan untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya jurusan matematika untuk bidang aljabar.

3. Bagi Pengembangan Ilmu

   Hasil penelitian ini dapat digunakan untuk bahan referensi bagi pihak yang ingin mengetahui lebih banyak tentang teori-teori terkait K-aljabar serta pengembangan dari teori-teori tersebut.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi disusun dalam tiga bagian utama, yaitu bagian awal, bagian inti, dan bagian akhir skripsi.

1.5.1 Bagian Awal

Dalam penulisan skripsi ini, bagian awal berisi halaman judul, pernyataan, pengesahan, motto dan persembahan, kata pengantar, abstrak, daftar isi, dan daftar tabel.

1.5.2 Bagian Inti

Bagian inti dari penulisan skripsi ini adalah isi skripsi yang terdiri dari lima bab, yaitu:

BAB 1: PENDAHULUAN

Berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, sistematika penulisan.

BAB 2: TINJAUAN PUSTAKA

Berisi tentang himpunan, operasi biner, teori grup, dan konsep dasar K-aljabar.

BAB 3: METODE PENELITIAN

Berisi tentang prosedur atau langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi kajian pustaka, merumuskan masalah, pemecahan masalah, penarikan kesimpulan.

BAB 4: HASIL DAN PEMBAHASAN

Berisi tentang definisi-definisi dan teorema-teorema tentang K-aljabar, K-subaljabar, dan homomorfisma K-aljabar.

BAB 5: PENUTUP

Berisi simpulan dan saran dari penulisan skripsi ini.

1.5.3 Bagian Akhir

Berisi daftar pustaka sebagai acuan penulisan yang memberikan informasi tentang buku dan literatur lain yang digunakan dalam skripsi ini serta lampiran yang mendukung kelengkapan skripsi.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Definisi 2.1 (Judson, 2013)

Himpunan adalah suatu kumpulan objek yang didefinisikan dengan jelas. Objek-objek dalam himpunan tersebut dinamakan elemen atau anggota himpunan. Himpunan dinotasikan dengan huruf kapital, seperti A atau X; jika a adalah elemen dari himpunan A, ditulis $a \in A$.

Untuk membentuk suatu himpunan, beberapa cara yang dapat digunakan adalah menyebutkan anggota-anggotanya, menyebutkan syarat anggota-anggotanya, dan dengan notasi pembentuk himpunan.

Contoh 2.1

Dengan menyebutkan anggota-anggotanya:

$A = \{1,3,5,7\}$.

Dengan menyebutkan syarat enggota-anggotanya:

$A =$ Himpunan empat bilangan ganjil pertama.

Dengan notasi pembentuk himpunan:

$A = \{x | x < 8, x \text{ bilangan asli ganjil}\}$.

Jelas 3 anggota himpunan A, dapat ditulis $3 \in A$. 2 bukan anggota A, dapat ditulis $2 \notin A$.

Jika A dan B himpunan maka A dikatakan himpunan bagian sejati (*proper subset*) dari B jika dan hanya jika setiap anggota A merupakan anggota B (dapat ditulis $A \subseteq B$) dan $A \neq B$. Notasi yang biasa digunakan adalah $A \subset B$.

Dua himpunan dikatakan sama jika dan hanya jika keduanya mengandung elemen yang sama. Hal itu berarti bahwa $A = B$ jika dan hanya jika setiap anggota A juga menjadi anggota B dan sebaliknya setiap anggota B juga menjadi anggota A. Untuk membuktikan $A = B$ maka haruslah dibuktikan bahwa $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Komplemen himpunan A adalah semua anggota dalam semesta yang bukan anggota A. Notasi komplemen A adalah A^c. Secara matematik dapat ditulis sebagai $A^c = \{x | x \in U \text{ dan } x \notin A\}$.

Gabungan (*union*) dua himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya terdiri atas semua anggota dari himpunan A atau B. Notasi yang digunakan adalah $A \cup B$, yang secara matematik dapat ditulis $A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$.

Irisan (intersection) dari dua himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang anggotanya terdiri atas anggota himpunan A yang juga merupakan anggota B. Dalam hal ini digunakan notasi $A \cap B$. Secara matematik dapat ditulis $A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$.

2.2 Operasi Biner

Definisi 2.2 (Anton, 2000)

Misalkan A dan B himpunan tak kosong, $f: A \to B$ disebut pemetaan (fungsi) jika dan hanya jika untuk setiap elemen di A mempunyai pasangan di B, dan untuk setiap dua elemen sama dari A mempunyai pasangan yang sama di B. Secara matematis dapat ditulis:

$f: A \to B$ fungsi jika dan hanya jika

1. $\forall x \in A$ berlaku $f(x) \in B$
2. $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 = x_2$, berlaku $f(x_1) = f(x_2)$

Definisi 2.3 (Setiawan, 2011)

Misalkan $f: A \to B$ pemetaan:

1. Pemetaan f disebut injektif (satu-satu) jika dan hanya jika:

   $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$, berlaku $f(x_1) \neq f(x_2)$, atau

   $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2)$ berlaku$x_1 = x_2$.
2. Pemetaan f disebut surjektif (pada) jika:

   $\forall y \in B\ \exists x \in A \ni f(x) = y$.
3. Pemetaan f disebut bijektif (korespondensi satu-satu) jika f injektif dan surjektif.
4. Permutasi pada himpunan A adalah pemetaan bijektif $A \to A$.

Definisi 2.4 (Setiawan, 2011)

Operasi biner $*$ pada himpunan tak kosong A adalah pemetaan dari setiap pasangan berurutan (a, b) di $A \times A$ dengan tepat satu elemen $a * b$ di A.

Sifat-sifat operasi biner

Misalkan $*$ operasi biner pada himpunan tak kosong A

1. Operasi biner $*$ dikatakan bersifat komutatif jika $a * b = b * a, \forall a, b \in A$
2. Operasi biner $*$ dikatakan bersifat assosiatif jika

   $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in A$
3. Elemen $e \in A$ dikatakan elemen identitas untuk $*$ pada A jika

   $e * a = a * e = a, \forall a \in A$
4. Elemen $a \in A$ dikatakan mempunyai invers b untuk $*$ pada A jika

   $a * b = b * a = e$, b disebut invers untuk a, dapat dinotasikan dengan $b = a^{-1}$.

2.3 Teori Grup

2.3.1 Grup

Definisi 2.5 (Milne, 2013)

Suatu grup (*group*) $< G, * >$ terdiri dari himpunan tak kosong G bersama dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan pada G dan memenuhi:

1) Operasi biner $*$ bersifat assosiatif
2) Terdapat elemen identitas $e \in G$ untuk $*$ pada G
3) $\forall a \in G \; \exists a^{-1} \in G \ni a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, (setiap elemen di G mempunyai invers)

Contoh 2.2:

$\mathbb{Z}$ merupakan grup terhadap operasi $+$.

Penyelesaian:

Operasi $+$ pada $\mathbb{Z}$ bersifat tertutup karena $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a + b \in \mathbb{Z}$.

Operasi $+$ pada $\mathbb{Z}$ bersifat assosiatif karena

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a + b) + c = a + (b + c)$.

$0 \in \mathbb{Z}$ merupakan elemen identitas untuk $+$ pada $\mathbb{Z}$ karena

$\forall a \in \mathbb{Z}, a + 0 = 0 + a = a$.

$\forall a \in \mathbb{Z}, \exists (-a) \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$, $-a \in \mathbb{Z}$ merupakan invers untuk $a \in \mathbb{Z}$.

Jadi $\mathbb{Z}$ merupakan grup terhadap operasi $+$ karena memenuhi aksioma-aksioma yang berlaku pada grup, dapat dinotasikan dengan $< \mathbb{Z}, + >$.

Definisi 2.6 (Setiawan, 2011)

Order dari grup G adalah banyaknya elemen grup G, dinyatakan dengan $|G|$.

Definisi 2.7 (Fraleigh, 1989)

Grup G dikatakan abelian jika operasi biner $*$ bersifat komutatif.

Contoh 2.3:

Berdasarkan **contoh 2.2** diperoleh bahwa $< \mathbb{Z}, + >$ merupakan suatu grup.

$< \mathbb{Z}, + >$ juga merupakan grup abelian karena $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a + b = b + a$.

Teorema 2.1 (Fraleigh, 1989)

Misalkan $< G,* >$ grup, dan $a, b, c \in G$:

1. Jika $a * b = a * c$ maka $b = c$ (hukum kanselasi kiri).
2. Jika $b * a = c * a$ maka $b = c$ (hukum kanselasi kanan).

Bukti:

1. Hukum kanselasi kiri

   Diberikan $a * b = a * c$.

   Karena G grup dan $a \in G$ maka $\exists a^{-1} \ni a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ dengan e identitas.

   Akibatnya

   $a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$

   Dengan menggunakan hukum assosiatif diperoleh

   $(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$

   Dengan hukum invers diperoleh

   $e * b = e * c$

   Dengan hukum identitas diperoleh

   $b = c$.

2. Analog untuk hukum kanselasi kanan.

Teorema 2.2 (Fraleigh 1989)

Misalkan G grup

1. Elemen identitas pada G adalah tunggal.
2. Invers elemen pada G adalah tunggal.

Bukti:

1. Misalkan e_1 dan e_2 elemen identitas untuk $*$ pada G.

   Akan ditunjukkan bahwa $e_1 = e_2$.

   Penyelesaian

   Karena e_1 dan e_2 merupakan elemen identitas di G, maka

   $\forall x \in G$ berlaku $x * e_1 = e_1 * x = x$

   $\forall y \in G$ berlaku $y * e_2 = e_2 * y = y$

   Karena $e_1 \in G$ berlaku $e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1$

   Karena $e_2 \in G$ berlaku $e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2$

   Akibatnya $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$

   Jadi $e_1 = e_2$.

2. Misalkan a dan b merupakan invers dari x di G.

   Akan ditunjukkan bahwa $a = b$.

   Karena a dan b merupakan invers dari x di G, maka

   $a * x = x * a = e$

   $b * x = x * b = e$

   Diperoleh

   $e = e$

   $a * x = b * x$

   Dengan menggunakan hukum kanselasi kanan diperoleh

   $a = b$.

2.3.2 Subgrup

Definisi 2.8 (Block, 2009)

Misalkan G grup, $S \subseteq G, S \neq \emptyset$ dan operasi biner $*$ di S bersifat tertutup. Himpunan S disebut subgrup G jika S merupakan grup terhadap operasi biner $*$ pada G.

Teorema 2.3 (Block, 2009)

Misalkan G grup dan $S \subseteq G, S \neq \emptyset$. S subgrup G jika dan hanya jika:

1. $e \in S$
2. S tertutup terhadap operasi biner pada G
3. Untuk sebarang $x \in S$, inversnya $x^{-1} \in S$.

Bukti:

($\Rightarrow$)

Diketahui G grup dan $S \subseteq G, S \neq \emptyset$. S subgrup G. Akan ditunjukkan S memenuhi syarat 1 sampai 3.

1. Dengan mengingat definisi S subgrup maka S merupakan grup sehingga identitasnya $e' \in S$.

   Akan ditunjukkan bahwa $e' = e$ yaitu elemen identitas dalam G.

   Karena e' elemen identitas dalam S maka $e'e' = e'$.

   Dengan menggunakan sifat identitas dari e maka $e' = e'e$ sehingga

$$e'e' = e'e$$

   Dengan hukum kanselasi didapat $e' = e$.

2. Karena S grup maka S tertutup pada operasi biner dalam G.
3. Misalkan x sebarang elemen S.

   Karena S grup maka x mempunyai invers x' dalam S.

Dengan mengingat ketunggalan dari suatu invers maka $x' = x^{-1}$ yaitu invers dalam G.

$(\Leftarrow)$

Diketahui G grup dan $S \subseteq G, S \neq \emptyset$. S memenuhi syarat 1 sampai 3. Akan ditunjukkan S subgrup G.

Syarat 1 sampai 3 merupakan tiga syarat supaya suatu himpunan merupakan grup.

Syarat lain yang harus dipenuhi adalah hukum assosiatif.

Karena $(ab)c = a(bc)$ untuk semua elemen dalam G maka tentu saja berlaku untuk semua elemen dalam $S \subseteq G$.

Karena S juga merupakan grup, maka S subgrup G.

2.3.3 Homomorfisma Grup

Definisi 2.9 (Setiawan, 2011)

Misalkan $< G,* >$ dan $< H,\cdot >$ grup. Pemetaan $f: G \rightarrow H$ dinamakan homomorfisma grup jika f mengawetkan operasi, yaitu:

$f(x * y) = f(x) \cdot f(y)\ \forall x, y \in G$.

Ada beberapa definisi khusus mengenai homomorfisma grup pada fungsi f yaitu apabila fungsi f surjektif, maka homomorfisma f dari G ke H disebut epimorfisma. Apabila fungsi f injektif maka homomorfisma f disebut monomorfisma, sedangkan apabila fungsi f bijektif, maka homomorfisma f disebut isomorfisma.

Contoh 2.4:

Misalkan $< G,\cdot >$ suatu grup abelian dengan n bilangan bulat tertentu, akan ditunjukkan bahwa $f: G \to G$ dengan $f(x) = x^n$ mendefinisikan suatu homomorfisma.

Penyelesaian:

Jelas $f(xy) = (xy)^n$ (definisi f)

$= x^n y^n$ (komutatif)

$= f(x)f(y)$ (definisi f)

sehingga f mengawetkan operasi. Jadi f merupakan homomorfisma.

Teorema 2.4 (Setiawan, 2011)

Misalkan $\varphi: G \to G'$ suatu homomorfisma grup, maka:

a. $\varphi(e) = e'$, dengan e dan e' berturut-turut menyatakan elemen identitas dari grup G dan G'.

b. $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}, \forall a \in G$.

Bukti:

Diketahui $\varphi: G \to G'$ suatu homomorfisma grup.

a. Karena $ee = e$. Maka $\varphi(e)\varphi(e) = \varphi(e)$.

   Berakibat $\varphi(e) = e'$.

b. $\forall a \in G$ berlaku $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

   Diketahui $\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1})\varphi(a) = \varphi(e) = e'$.

   Karena invers dari $\varphi(a)$ di G tunggal.

   Maka $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$.

2.4 Konsep Dasar K-Aljabar

Struktur aljabar merupakan himpunan tak kosong dengan paling sedikit satu operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma yang berlaku. Salah satu struktur aljabar tersebut adalah K-aljabar. K-aljabar dibangun atas grup dengan menggunakan operasi biner $\odot$ pada $< G,*>$, sehingga untuk setiap x, y di G didefinisikan $x \odot y = x * y^{-1}$ dan e adalah elemen identitas di G.

Definisi 2.10 (Dar & Akram, 2006)

Misalkan $< G,*>$ suatu grup dan pada G didefinisikan operasi $\odot$ sedemikian sehingga $\forall x, y \in G, x \odot y = x * y^{-1}$ maka akan membentuk struktur aljabar baru yaitu $< G,*,\odot, e >$. Suatu $< G,*,\odot, e >$ dinamakan K-aljabar, jika G adalah grup dengan order lebih dari 2 dan $\forall x, y, z \in G$ berlaku:

(C1) $(x \odot y) \odot (x \odot z) = \big(x \odot ((e \odot z) \odot (e \odot y))\big) \odot x$

(C2) $x \odot (x \odot y) = \big(x \odot (e \odot y)\big) \odot x$

(C3) $x \odot x = e$

(C4) $x \odot e = x$

(C5) $e \odot x = x^{-1}$

Dengan operasi $\odot$ yang didefinisikan tersebut, dapat disimpulkan bahwa G bersifat tertutup terhadap operasi $\odot$.

Contoh 2.5:

Misalkan $< \mathbb{Z}, + >$ adalah grup dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada $\mathbb{Z}$, dengan $a \odot b = a + (-b)$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa $< \mathbb{Z}, +, \odot, 0 >$ adalah K-aljabar.

Penyelesaian:

Jelas $|\mathbb{Z}| \approx \infty$, jadi $\mathbb{Z}$ adalah grup dengan order lebih 2.

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$,

(C1) Akan ditunjukkan bahwa

$$(a \odot b) \odot (a \odot c) = \big(a \odot ((e \odot c) \odot (e \odot b))\big) \odot a$$

Ruas kiri $= (a \odot b) \odot (a \odot c)$

$= \big(a + (-b)\big) \odot \big(a + (-c)\big)$

$= (a - b) + \big(-(a - c)\big)$

$= (a - b) + (c - a)$

$= c - b$

Ruas kanan $= \big(a \odot ((e \odot c) \odot (e \odot b))\big) \odot a$

$= \big(a \odot ((-c) \odot (-b))\big) \odot a$

$= \big(a \odot ((-c) + b)\big) \odot a$

$= (a + \big((-b) + c\big) + (-a)$

$= (a - b) + (c - a)$

$= c - b$

Karena $(a \odot b) \odot (a \odot c) = c - b$ dan

$\big(a \odot \big((e \odot c) \odot (e \odot b)\big)\big) \odot a = c - b$ maka

$(a \odot b) \odot (a \odot c) = \big(a \odot \big((e \odot c) \odot (e \odot b)\big)\big) \odot a.$

(C2) Akan ditunjukkan bahwa

$a \odot (a \odot b) = \big(a \odot (e \odot b)\big) \odot a$

Ruas kiri $= a \odot (a \odot b)$

$= a \odot (a - b)$

$= a + (b - a)$

$= b$

Ruas kanan $= \big(a \odot (e \odot b)\big) \odot a$

$= \big(a \odot (-b)\big) \odot a$

$= (a + b) + (-a)$

$= b$

Karena $a \odot (a \odot b) = b$ dan

$\big(a \odot (e \odot b)\big) \odot a = b$ maka

$a \odot (a \odot b) = \big(a \odot (e \odot b)\big) \odot a.$

(C3) $a \odot a = a + (-a)$ (definisi $\odot$)

$= a - a$

$= 0$

Jadi $a \odot a = 0.$

(C4) $a \odot 0 = a + 0$

$= a$

Jadi $a \odot 0 = a$.

(C5) $0 \odot a = 0 + (-a)$ (definisi $\odot$)

$= -a$

Jadi $0 \odot a = -a$.

Karena kelima aksioma terpenuhi, maka $< \mathbb{Z}, +, \odot, 0 >$ adalah K-aljabar.

Jika $< G, * >$ merupakan grup komutatif, maka aksioma 1 dan 2 menjadi:

(C1) $(x \odot y) \odot (x \odot z) = z \odot y$

(C2) $x \odot (x \odot y) = y$

Contoh 2.6

Berdasarkan **contoh 2.5** didapat $< \mathbb{Z}, +, \odot, 0 >$ merupakan K-aljabar, karena $< \mathbb{Z}, + >$ merupakan grup komutatif, akan ditunjukkan apakah C1 dan C2 terpenuhi.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}$

(C1) $(x \odot y) \odot (x \odot z) = \big(x + (-y)\big) \odot \big(x + (-z)\big)$

$= (x - y) + \big(-(x - z)\big)$

$= (x - y) + (z - x)$

$= (x - x) + (z - y)$

$= z + (-y)$

$= z \odot y$

(C2) $x \odot (x \odot y) = x \odot \big(x + (-y)\big)$

$= x + \big(-(x - y)\big)$

$= x + (y - x)$

$= y$

Jadi, C1 dan C2 terpenuhi untuk grup komutatif $< \mathbb{Z}, + >$.

BAB 5

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

1. Dalam struktur K-aljabar $< G,*,\odot, e >$ berlaku sifat-sifat berikut.

   a. Hukum kanselasi kiri dan kanselasi kanan.

   b. Misalkan $< G,* >$ grup komutatif. Jika $< G,*,\odot, e >$ adalah suatu K-aljabar, maka $\forall x, y, z \in G$ berlaku:

      i. $(e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x = e \odot (x \odot y)$

      ii. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$

      iii. $e \odot (e \odot x) = x$

      iv. $x \odot (e \odot y) = y \odot (e \odot x)$

   c. Jika G merupakan K-aljabar komutatif, maka $\forall x, y, z \in G$ berlaku:

      i. $(x \odot y) \odot z = (x \odot z) \odot y$,

      ii. $\big(x \odot (x \odot y)\big) \odot y = e$,

      iii. $e \odot (x \odot y) = (e \odot x) \odot (e \odot y)$.

   d. Misalkan $< G,*,\odot\ e >$ suatu K-aljabar. Jika $< G,* >$ tidak komutatif, maka $\forall x, y, z, u, v \in G$ berlaku:

      i. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = \big(x \odot (e \odot v) \odot (e \odot y)\big) \odot u$

      ii. $(x \odot y) \odot z = x \odot \big(z \odot (e \odot y)\big)$

      iii. $e \odot (e \odot x) = x$

      iv. $e \odot (x \odot y) = y \odot x$

v. $x \odot y = e \Leftrightarrow x = y$

2. Dalam struktur K-subaljabar berlaku sifat-sifat sebagai berikut.

   a. Jika H himpunan bagian tak kosong dan merupakan K-subaljabar dari $< G,*,\odot, e >$, maka H juga merupakan K-aljabar.

   b. Misalkan $< G,*,\odot, e >$ adalah suatu K-aljabar dan $g \in G$. Jika H suatu subgrup dari G, maka $H_{g^2} = \{g \odot (g \odot x) | x \in H\}$ adalah suatu K-subaljabar dari $< G,*,\odot, e >$.

3. Dalam struktur homomorfisma K-aljabar berlaku sifat berikut.

   Misalkan $A_1 =< G_1,*,\odot, e_1 >$ dan $A_2 =< G_2,*,\odot, e_2 >$, A_1 K-aljabar komutatif, serta $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$ suatu K-homomorfisma, berlaku sifat-sifat berikut:

   i. $\varphi(e_1) = e_2$

   ii. $\forall x_1 \in A_1, \varphi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \varphi(x_1)$

   iii. $\forall x_1, x_2 \in A_1, \varphi(x_1 \odot x_2) = e_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

   iv. Jika H_1 adalah K-subaljabar dari A_1 maka $\varphi(H_1)$ adalah K-subaljabar dari A_2.

   v. Jika H_2 adalah K-subaljabar dari A_2, maka $\varphi^{-1}(H_2)$ adalah K-subaljabar dari A_1.

5.2 Saran

Saran yang dapat diberikan untuk penelitian berikutnya adalah menurunkan sifat-sifat pada K-aljabar terhadap subkelas dari K-aljabar yaitu Q-aljabar dan B-aljabar, demikian juga subkelas dari Q-aljabar yaitu BCK-aljabar, BCI-aljabar dan BCH-aljabar.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 2000. *Dasar-dasar Aljabar Linear*. Batam: Interaksara.

Block, N. J. 2009. *Abstract Algebra with Applications*. New Jersey: Prentice-Hall Inc.

Dar, K. H dan Akram, M. 2006. *On Subclasses of K(G)-algebras.* Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. 33:235-240.

________________________. 2007. *On K-Homomorphisms of K-Algebras.* IMF. 46:2283-2293.

________________________. 2010. *Characterization of K-algebras by self maps II.* Annals of University of Craiova, Math and Computer Science Series. 37:96-103.

Dar, K. H dkk. 2006. *A note on left K(G)-algebras*. SEA Bull. Math. 2006:30.

Fraleigh, J. B. 1989. *A First Course in Abstract Algebra*. Columbia: Addison-Wesley.

Handam, A.H. 2012. *Soft K(G)-Algebras*. Tamkang Journal of Mathematics. 2012:43:203-213.

Judson, T.W. 2013. *Abstract Algebra Theory and Applications*. Stephen F. Austin State University.

Milne, J.S. 2013. *Group Theory.* Course Notes. Tersedia di: http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/

Setiawan, A. 2011. *Aljabar Abstrak (Teori Grup dan Teori Ring).* Salatiga: UKSW.