PENERAPAN BUKTI TANPA KATA PADA BIDANG MATEMATIKA

skripsi

disajikan sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika

oleh

Prahetsy Two Era Putri
4150405507

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2011

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Penerapan Bukti Tanpa Kata pada Bidang Matematika

disusun oleh

Nama : Prahetsy Two Era Putri

NIM : 4150405507

telah dipertahankan dihadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES pada tanggal 27 Januari 2011.

Panitia:

Ketua	Sekertaris
Dr. Kasmadi Imam S., M.S. NIP. 195111151979031001	Drs. Edy Soedjoko, M.Pd NIP. 195604191987031001

Ketua Penguji

Dr. Rochmad, M.Si
NIP. 195711161987011001

Anggota Penguji/ Pembimbing Utama	Anggota Penguji/ Pembimbing Pendamping
Prof. Dr. YL. Sukestiyarno NIP. 195904201984031002	Drs. Sugiman, M.Si NIP. 196401111989011001

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya yang diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dirujuk dalam skripsi ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Semarang, Januari 2011

Prahetsy Two Era Putri
NIM 4150405507

MOTO DAN PERSEMBAHAN

Moto:

- Keutamaan akal ialah hikmah kebijaksanaan dan keutamaan hati ialah keberanian. (M. Ryan Saputra)
- Harta yang paling menguntungkan ialah SABAR. Teman yang paling akrab adalah AMAL. Pengawal peribadi yang paling waspada DIAM. Bahasa yang paling manis SENYUM. Dan ibadah yang paling indah tentunya KHUSYUK. (M. Ryan Saputra)
- Keberhasilan seseorang jangan hanya dilihat dari hasilnya saja tetapi lihatlah seberapa besar usaha yang dilakukan olehnya.

Persembahan:

Skripsi ini kupersembahkan kepada:

1. Ayah dan Ibu tercinta, atas semua doa, kasih sayang dan motivasi sepanjang nafasku berhembus.
2. Kakak-adikku (Prashida & Pratidina) yang selalu kukangeni dan selalu bisa membuat indah setiap suasana.
3. Semua Keluarga besarku yang senantiasa medoakan & memberiku semangat.
4. Mohamad Afiffudin yang selalu mendoakan, memberi semangat dan menemaniku disaat suka maupun duka.
5. Teman-teman Kost Langgeng selalu menjadi keluarga dalam diri dan hatiku, yang mampu memberikan surga seindah surgaku kala aku di rumah.
6. Teman-teman MatPar'05 yang tak hanya memberiku kebahagiaan dan kenyamanan ketika aku belajar, tetapi juga membuka mataku betapa indahnya kebersamaan.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberi rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Penerapan Bukti Tanpa Kata pada Bidang Matematika" ini dengan baik.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang.

Dalam kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini. Dalam kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Sudijono Sastroatmodjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Dr. Kasmadi Imam S, M.Si, selaku Dekan FMIPA UNNES.
3. Drs. Edy Soedjoko, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
4. Prof. Dr. YL. Sukestiyarno, Pembimbing utama yang telah sabar dalam memberikan petunjuk, dorongan dan semangat sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Drs. Sugiman, M.Si, Pembimbing pendamping yang telah sabar dalam memberikan petunjuk, dorongan dan semangat sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

6. Bapak/Ibu dosen yang telah membantu dan menularkan ilmunya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Bapak, Ibu dan kakak-adikku tercinta yang telah memberikan dukungan, kasih sayang dan do'anya kepada penulis hingga terselesaikannya skripsi ini.
8. Teman-temanku Math'05
9. Semua pihak yang telah mendukung dan membantu proses terselesaikannya skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Manusia tidaklah ada yang sempurna, karena kesempurnaan hanyalah milik Tuhan YME. Sebagai mahluk yang lemah penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih banyak kekurangan dan jauh dari kesempurnaan. Untuk itu masukkan berupa kritik, saran dan pendapat yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kemajuan pendidikan khususnya matematika.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis khususnya, rekan-rekan, mahasiswa, para pemerhati matematika dan kepada pembaca pada umumnya.

Semarang, Januari 2011

Penulis

ABSTRAK

Putri, Prahetsy Two Era. 2011. *Penerapan Bukti Tanpa Kata pada Bidang Matematika*. Skripsi, Jurusan Matematika FMIPA UNNES.
Prof. Dr. YL. Sukestiyarno dan Drs. Sugiman, M.Si

Kata kunci: Aritmatika, Aljabar, Geometri, Trigonometri, Bukti Tanpa Kata

Matematika sebagai ilmu pengetahuan dengan penalaran deduktif mengandalkan logika dalam meyakinkan akan kebenaran suatu pernyataan. Membuktikan kebenaran suatu teorema tidak lain adalah membuktikan kebenaran suatu kalimat logika. Bukti bukanlah sesuatu yang mudah karena lebih banyak melibatkan simbol dan penyataan logika dari pada berhadapan dengan angka-angka yang biasanya dianggap sebagai karakter matematika. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana penggunaan bukti tanpa kata untuk memperoleh ide, gagasan, dan intuisi dalam rangka pembuktian secara deduktif pada bidang aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri.

Teorema-teorema yang dibuktikan di dalam penelitian ini meliputi bidang aritmatika: 1) Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $2+4+6+\cdots+(2n)=n^2+n$. 2) Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $1+2+\ldots+(n-1)+n+(n-1)+2+1 = n^2$. Bidang aljabar: 1) Untuk $x^2 + ax = (x + a/2)^2 - (a/2)^2$. 2) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$. 3) $(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (a-b-c)^2 = (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2$. Bidang geometri: 1) Jumlah sudut dalam segitiga sama dengan 180^o. 2) pada segitiga siku-siku, kuadrat hipotenusa (sisi miring) adalah sama dengan jumlah kuadrat dari kaki-kakinya (sisi-sisi yang saling tegak lurus). 3) teorema perbandingan perpotongan garis berat pada satu segitiga. Bidang trigonometri: 1) sin (x-y) = sin x cos y – cos x sin y. 2) $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$. 3) $c^2=(b\sin\theta)^2+(a-b\cos\theta)^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$. Beberapa teorema tersebut dibuktikan dengan menggunakan bukti tanpa kata, yang pembuktiannya dengan menggunakan gambar-gambar, sesuai dengan bentuk teorema yang akan dibuktikan.

Hasil yang didapat dalam penelitian bukti tanpa kata pada bidang aritmetika didasarkan pada pembuktian sederhana yaitu *fubini*, bukti tanpa kata pada bidang aljabar didasarkan pada operasi penjumlahan dan pengurangan luas bangun, bukti tanpa kata pada bidang geometri didasarkan pada definisi kesejajaran, pembuktian teorema pythagoras dengan cara kesebangunan, dan pembuktian teorema garis berat, garis bagi, dan garis tinggi pada segitiga, dan bukti tanpa kata pada bidang trigonometri didasarkan pada operasi pengurangan, pembagian, dan teorema pythagoras pada fungsi trigonometri. Dari hasil pembuktian tanpa kata tersebut sebagian bukti sebagai bukti alternatif pembuktian disamping pembuktian secara analitis.

DAFTAR ISI

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika sebagai ilmu pengetahuan dengan penalaran deduktif mengandalkan logika dalam meyakinkan akan kebenaran suatu pernyataan. Faktor intuisi dan pola berfikir induktif banyak berperan pada proses awal dalam merumuskan suatu konjektur *(conjecture)* yaitu dugaan awal dalam matematika. Proses penemuan dalam matematika dimulai dengan pencarian pola dan struktur, contoh kasus dan objek matematika lainnya. Selanjutnya semua informasi dan fakta yang terkumpul secara individual ini dibangun suatu koherensi untuk kemudian disusun suatu konjektur. Setelah konjektur dapat dibuktikan kebenarannya, maka selanjutnya ia menjadi suatu Teorema.

Pernyataan-pernyataan matematika seperti definisi, teorema dan pernyataan lainnya pada umumnya berbentuk kalimat logika, dapat berupa implikasi, biimplikasi, negasi atau berupa kalimat berkuantor. Operator logika seperti konjungsi, disjungsi, implikasi, bimplikasi juga sering termuat dalam suatu pernyataan matematika. Jadi membuktikan kebenaran suatu teorema tidak lain adalah membuktikan kebenaran suatu kalimat logika. (Baeti, 2010: 1)

Pada tahap awal, pekerjaan memahami bukti bukanlah sesuatu yang mudah karena pembuktian lebih banyak melibatkan simbol dan penyataan logika dari pada berhadapan dengan angka-angka yang biasanya dianggap sebagai karakter matematika. Kenyataan inilah menjadikan seseorang malas untuk memahami bukti dalam matematika. Alasan lainnya adalah pekerjaan membuktikan dianggap lebih sulit dan kurang menarik. Padahal banyak manfaat yang dapat diperoleh pada pengalaman membuktikan ini, salah satunya adalah melatih *logically thinking* dalam belajar matematika.

Dalam pembuktian matematika terdapat beberapa metode pembuktian sederhana dengan menggunakan aturan-aturan logika dasar. Metode pembuktian yaitu memainkan peranan penting dalam matematika, misalnya bukti langsung, bukti tak langsung, bukti dengan kontradiksi, bukti ketunggalan, penyanggahan bukti dengan *counter example*, bukti dengan induksi matematika, bukti biimplikasi. Selain metode-metode tersebut, dalam matematika juga terdapat metode pembuktian yang jarang dijumpai dalam pembuktian-pembuktian pada teorema-teorema, yaitu bukti tanpa kata-kata.

Sebuah bukti tanpa kata dapat dianggap sebagai ’bukti’ yang menggunakan visual representasi, yaitu gambar atau visual lainnya. Berarti untuk menunjukkan ide matematika, persamaan atau teorema dalam rangka pembuktian secara deduktif. Tidak mengandung kata-kata apapun selain simbol numerik dan geometris gambar. Pada umumnya, bukti tanpa kata-kata adalah gambaran atau diagram yang membantu pembaca melihat mengapa suatu pernyataan matematis mungkin benar.

Menafsir sebuah bukti tanpa kata-kata memerlukan penjelasan yang menarik karena diberbagai gagasan matematika tidak selalu jelas dengan bukti tanpa kata-kata. Dalam penelitian ini akan dibahas bagaimana cara membuktikan teori-teori yang ada dalam matematika dengan bantuan gambar. Metode ini dilakukan semata-mata hanya untuk memperoleh ide, gagasan, dan intuisi dalam rangka pembuktian secara deduktif. Metode ini disebut pembuktian tanpa kata.

Bukti tanpa kata-kata dapat digunakan dibanyak bidang matematika. Di sini yang akan dibahas tentang penerapan bukti tanpa kata di berbagai bidang matematika antara lain aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri.

Aritmetika atau aritmatika atau dulu disebut Ilmu Hitung merupakan cabang tertua (atau pendahulu) matematika yang mempelajari operasi dasar bilangan. Oleh orang awam, kata “aritmetika” sering dianggap sebagai sinonim dari Teori Bilangan. Operasi dasar aritmetika adalah penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian, walaupun operasi-operasi lain yang lebih canggih (seperti persentase, akar kuadrat, pemangkatan, dan logaritma) kadang juga dimasukkan ke dalam kategori ini. Perhitungan dalam aritmetika dilakukan menurut suatu urutan operasi yang menentukan operasi aritmetika yang mana lebih dulu dilakukan. Aritmetika bilangan asli, bilangan bulat, bilangan rasional, dan bilangan real umumnya dipelajari oleh anak sekolah yang mempelajari algoritma manual aritmetika. Namun demikian, banyak orang yang lebih suka menggunakan alat-alat seperti kalkulator, komputer, atau sempoa untuk melakukan perhitungan aritmetika. (Wikipedia bahasa Indonesia, Ensiklopedia bebas).

Sedangkan kombinatorial adalah cabang matematika yang mempelajari pengaturan objek-objek. Solusi yang diperoleh dengan kombinatorial ini jumlah cara pengaturan objek-objek tertentu di dalam kumpulannya. Secara umum, terdapat dua kaidah utama dalam kombinatorial, yaitu kaidah perkalian dan kaidah penjumlahan.

Bukti kombinatorial metode yang didasarkan pada dua prinsip perhitungan sederhana yaitu (1) jika akan menghitung benda-benda disatu set dalam dua cara yang berbeda, maka akan diperoleh hasil yang sama atau disebut prinsip *fubini*, contoh: Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $2+4+6+\cdots+(2n)=n^2+n$. (2) jika dua set objek berada dalam keadaan satu ke satu atau korespondensi satu-satu maka akan memiliki jumlah elemen yang sama disebut prinsip *cantor*, contoh: Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. Untuk bukti tanpa kata yang membuktikan beberapa torema tentang angka, seperti pada deret aritmetika. Wawasan dapat diperoleh dengan mewakili angka sebagai set objek. Dalam bukti tanpa kata, biasanya menggunakan titik, kotak, bola, kubus, dan benda-benda yang lain.

Aljabar berasal dari Bahasa Arab "al-jabr" yang berarti "pertemuan", "hubungan" atau "perampungan" adalah cabang matematika yang dapat dicirikan sebagai generalisasi dari bidang aritmetika. Aljabar juga merupakan nama sebuah struktur aljabar abstrak, yaitu aljabar dalam sebuah bidang. Ada beberapa jenis aljabar yaitu (1) Aljabar dasar, yang mencatat sifat-sifat operasi bilangan real, menggunakan simbol sebagai "pengganti" untuk menandakan konstanta dan variabel, dan mempelajari aturan tentang ungkapan dan persamaan matematis yang melibatkan simbol-simbol tersebut; (2) Aljabar abstrak, yang secara aksiomatis mendefinisikan dan menyelidiki struktur aljabar seperti kelompok matematika, cincin matematika dan matematika bidang; (3) Aljabar linear, yang mempelajari sifat-sifat khusus ruang vektor (termasuk matriks); (4) Aljabar universal, yang mempelajari sifat-sifat yang dimiliki semua struktur aljabar; (5) Aljabar komputer, yang mengumpulkan manipulasi simbolis benda-benda matematis.

Geometri adalah bagian dari matematika yang mengambil berat persoalan mengenai size, bentuk, dan kedudukan relatif dari rajah dan sifat ruang. Geometri lahir sebagai salah satu sumber dari beberapa matematika terapan yang ada selama ini. Pada mulanya, geometri hanya dipergunakan sebagai ilmu praktis dan keahlian teknik. Diantaranya seperti pada masyarakat Babilonia dan Mesir yang menggunakan geometri sebagai pengukuran praktis pada pertanian kemudian diperluas untuk perhitungan panjang ruas garis, mencari luas dan menghitung isi atau volume benda tertentu. Selanjutnya geometri terus berkembang menjadi pengetahuan yang disusun secara menarik dan logis. (Wallance, 1972: 1).

Trigonometri (dari bahasa Yunani trigonom = tiga sudut dan metro = mengukur) adalah sebuah cabang matematika yang berhadapan dengan sudut segitiga dan fungsi trigonometri seperti sinus, cosinus, dan tangen. Trigonometri memiliki hubungan dengan geometri, meskipun ada ketidaksetujuan tentang apa hubungannya. Bagi beberapa orang, trigonometri adalah bagian dari geometri. (Wikipedia bahasa Indonesia, Ensiklopedia bebas). Dengan inilah penulis bermaksud untuk meneliti bagaimanakah penggunaan bukti tanpa kata yang diterapkan pada bidang aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri.

1.2 Permasalahan

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah: bagaimana penggunaan bukti tanpa kata yang diterapkan pada bidang matematika antara lain aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri?

1.3 Pembatasan Masalah

Untuk membatasi ruang lingkup permasalahan pada penulisan skripsi ini, diberikan batasan bahwa masalah yang akan dikaji adalah teorema deret aritmetika pada bidang aritmetika; teorema penjumlahan luas bangun datar pada bidang aljabar; teorema jumlah sudut dalam segitiga, pythagoras, dan perbandingan perpotongan garis berat dalam saru segitiga pada bidang geometri; dan teorema sudut $\frac{1}{2}tan$ dan fungsi trigonometri pada bidang trigonometri.

1.4 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dalam penelitian ini adalah membuktikan teorema pada bidang aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri dengan menggunakan bukti tanpa kata.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1.5.1 Bagi Mahasiswa

1. Dapat mengembangkan teori yang didapatkan dibangku kuliah.
2. Mengetahui berbagai macam metode pembuktian yang digunakan dalam matematika.

3. Mengetahui bahwa teorema dalam matematika juga dapat dibuktikan dengan menggunakan bidang aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri tanpa kata.

1.5.2 Bagi Pembaca

1. Memperoleh informasi yang berkaitan dengan kemajuan pengetahuan matematika.
2. Masukan bagi pembaca bahwa dalam membuktikan suatu teorema tidak hanya dapat dibuktikan dengan bukti aljabar, tetapi juga dapat digunakan bukti tanpa kata.

1.5.3 Bagi Universitas

Sebagai sarana untuk penelitian dan pengembangan, terutama yang berkaitan dengan tugasnya sebagai lembaga pendidikan.

1.6 Sistematika Skripsi

Penulisan skripsi ini secara garis besar dibagi menjadi tiga bagian yaitu bagian awal, bagian isi dan bagian akhir.

Bagian awal memuat halaman judul, abstrak, halaman pengesahan, halaman motto dan persembahan, kata pengantar, daftar isi, daftar tabel, daftar gambar, dan daftar lampiran.

Bagian inti terdiri dari lima bab, adapun kelima bab tersebut adalah sebagai berikut.

1. Bab 1 Pendahuluan

   Pada bab pendahuluan ini berisi alasan pemilihan judul, permasalahan, tujuan dan manfaat penelitian, dan garis besar sistematika skripsi.

2. Bab 2 Landasan Teori

   Landasan teori merupakan teori-teori yang mendasari pemecahan masalah yang disajikan.

3. Bab 3 Metode Penelitian

   Bab ini meliputi empat hal, yaitu studi literatur dan studi kasus, analisis pengumpulan data, analisis data dan penarikan kesimpulan.

4. Bab 4 Hasil Penelitian dan Pembahasan

   Pada bab ini berisi pembahasan dari permasalahan yang disajikan yang terbagi menjadi dua sub bagian, yaitu hasil penelitian dan pembahasan.

5. Bab 5 Penutup
6. Pada bab ini memuat simpulan dan saran. Bagian akhir skripsi ini berisi daftar pustaka dan lampiran-lampiran.

Bagian akhir berisikan daftar pustaka sebagai acuan penulis dan lampiran-lampiran yang mendukung kelengkapan skripsi.

BAB 2

LANDASAN TEORI

2.1 Bidang Ilmu Matematika

Kata “matematika” berasal dari kata *máthema* dalam bahasa Yunani yang diartikan sebagai “sains, ilmu pengetahuan atau belajar” juga *mathematikós* yang diartikan sebagai “suka belajar”. Disiplin utama dalam matematika didasarkan pada kebutuhan perhitungan dalam perdagangan, pengukuran tanah dan memprediksi peristiwa dalam astronomi. Ketiga kebutuhan ini secara umum berkaitan dengan ketiga pembagian umum bidang matematika: studi tentang struktur, ruang dan perubahan. (http://www.google.matematika.com)

Pelajaran tentang struktur dimulai dengan bilangan, pertama dan yang sangat umum adalah bilangan natural dan bilangan bulat dan operasi arimetikanya, yang semuanya itu dijabarkan dalam aljabar dasar. Sifat bilangan bulat yang lebih mendalam dipelajari dalam teori bilangan. Investigasi metode-metode untuk memecahkan persamaan matematika dipelajari dalam aljabar abstrak, yang antara lain, mempelajari tentang ring dan field, struktur yang menggeneralisasi sifat-sifat yang umumnya dimiliki bilangan. Konsep vektor, digeneralisasi menjadi vektor ruang dipelajari dalam aljabar linear, yang termasuk dalam dua cabang: struktur dan ruang.

Ilmu tentang ruang berawal dari geometri, yaitu geometri Euclid dan trigonometri dari ruang tiga dimensi (yang juga dapat diterapkan ke dimensi lainnya), kemudian belakangan juga digeneralisasi ke geometri Non-euclid yang memainkan peran sentral dalam teori relativitas umum. Beberapa permasalahan rumit tentang konstruksi kompas dan penggaris akhirnya diselesaikan dalam teori Galois.

Bidang ilmu modern tentang geometri diferensial dan geometri aljabar menggeneralisasikan geometri ke beberapa arah: geometri diferensial menekankan pada konsep fungsi, derivatif, *smoothness* dan arah, sementara dalam geometri aljabar, objek-objek geometris digambarkan dalam bentuk sekumpulan persamaan polinomial. Teori grup mempelajari konsep simetri secara abstrak dan menyediakan kaitan antara studi ruang dan struktur. Topologi menghubungkan studi ruang dengan studi perubahan dengan berfokus pada konsep kontinuitas.

Mengerti dan mendeskripsikan perubahan pada kuantitas yang dapat dihitung adalah suatu yang biasa dalam ilmu pengetahuan alam, dan kalkulus dibangun sebagai alat untuk tujuan tersebut. Konsep utama yang digunakan untuk menjelaskan perubahan variabel adalah fungsi. Banyak permasalahan yang berujung secara alamiah kepada hubungan antara kuantitas dan laju perubahannya, dan metoda untuk memecahkan masalah ini adalah topik dari persamaan differensial.

Untuk merepresentasikan kuantitas yang kontinu digunakanlah bilangan real, dan studi mendetail dari sifat-sifatnya dan sifat fungsi nilai real dikenal sebagai analisis real. Untuk beberapa alasan, amat tepat untuk menyamaratakan bilangan kompleks yang dipelajari dalam analisis kompleks. Analisis fungsional memfokuskan perhatian pada (secara khas dimensi tak terbatas) ruang fungsi, meletakkan dasar untuk mekanika kuantum di antara banyak hal lainnya.

Saat pertama kali komputer disusun, beberapa konsep teori yang penting dibentuk oleh matematikawan, menimbulkan bidang teori komputabilitas, teori kompleksitas komputasional, teori informasi dan teori informasi algoritma. Kini banyak pertanyaan-pertanyaan itu diselidiki dalam ilmu komputer teoritis. Matematika diskret ialah nama umum untuk bidang-bidang penggunaan matematika dalam ilmu komputer.

Bidang-bidang penting dalam matematika terapan ialah statistik, yang menggunakan teori probabilitas sebagai alat dan memberikan deskripsi itu, analisis dan perkiraan fenomena dan digunakan dalam seluruh ilmu. Analisis bilangan menyelidiki teori yang secara tepat guna memecahkan bermacam masalah matematika secara bilangan pada komputer dan mengambil kekeliruan menyeluruh ke dalam laporan.

Definisi memainkan peranan penting dalam matematika. Topik-topik baru matematika selalu diawali dengan membuat definisi baru. Sebagai contoh, teori fungsi kompleks diawali dengan mendefinisikan bilangan imajiner i, yaitu $i^2 = -1$. Berangkat dari definisi dihasilkan sejumlah Teorema beserta akibat-akibatnya. teorema-teorema inilah yang perlu dibuktikan. Pada kasus sederhana, kadangakala teorema pada suatu buku ditetapkan sebagai definisi pada buku yang lain, begitu juga sebaliknya. Dalam membuktikan sebuah teorema dapat digunakan berbagai macam cara sesuai dengan bentuk teorema yang akan dibuktikan. Metoda pembuktian dalam matematika yang biasa digunakan yaitu bukti langsung, bukti tak langsung, bukti dengan kontradiksi, bukti ketunggalan, penyanggahan bukti dengan *counter example*, bukti dengan induksi matematika, bukti biimplikasi dan juga bukti tanpa kata. Bukti tanpa kata sudah lama muncul, tetapi jarang digunakan untuk membuktikan sebuah teorema karena kebanyakan orang membuktikan teorema dengan bukti aljabar. Selanjutnya, untuk memahami materi selanjutnya dibutuhkan prasyarat pengetahuan logika matematika.

Cakupan pengkajian yang disebut sebagai sejarah matematika adalah terutama berupa penyelidikan terhadap asal muasal temuan baru di dalam matematika, di dalam ruang lingkup yang lebih sempit berupa penyelidikan terhadap metode dan notasi matematika baku di masa silam.

Sebelum zaman modern dan pengetahuan yang tersebar global, contoh-contoh tertulis dari pembangunan matematika yang baru telah mencapai kemilaunya hanya di beberapa tempat. Tulisan matematika terkuno yang pernah ditemukan adalah Plimpton 322 (Matematika Babilonia yang berangka tahun 1900 SM), Lembaran Matematika Moskow (Matematika Mesir yang berangka tahun 1850 SM), Lembaran Matematika Rhind (Matematika Mesir yang berangka tahun 1650 SM), dan Shulba Sutra (Matematika India yang berangka tahun 800 SM). (http://www.google.matematika.com)

Semua tulisan yang bersangkutan memusatkan perhatian kepada apa yang biasa dikenal sebagai teorema Pythagoras, yang kelihatannya sebagai hasil pembangunan matematika yang paling kuno dan tersebar luas setelah aritmetika dasar dan geometri.

Pengertian matematika sangat sulit didefinsikan secara akurat. Pada umumnya orang awam hanya akrab dengan satu cabang matematika elementer yang disebut aritmetika atau ilmu hitung yang secara informal dapat didefinisikan sebagai ilmu tentang berbagai bilangan yang bisa langsung diperoleh dari bilangan-bilangan bulat 0, 1, -1, 2, – 2, …, dst, melalui beberapa operasi dasar: tambah, kurang, kali dan bagi.

Ada pendapat terkenal yang memandang matematika sebagai pelayan dan sekaligus raja dari ilmu-ilmu lain. Sebagai pelayan, matematika adalah ilmu dasar yang mendasari dan melayani berbagai ilmu pengetahuan lain. Sejak masa sebelum masehi, misalnya jaman Mesir kuno, cabang tertua dan termudah dari matematika (aritmetika) sudah digunakan untuk membuat piramida, digunakan untuk menentukan waktu turun hujan, dsb.

Sebagai raja, perkembangan matematika tak tergantung pada ilmu-ilmu lain. Banyak cabang matematika yang dulu biasa disebut *matematika murni*, dikembangkan oleh beberapa matematikawan yang mencintai dan belajar matematika hanya sebagai hobi tanpa memperdulikan fungsi dan manfaatnya untuk ilmu-ilmu lain. Dengan perkembangan teknologi, banyak cabang-cabang matematika murni yang ternyata kemudian hari bisa diterapkan dalam berbagai ilmu pengetahuan dan teknologi mutakhir. Cabang matematika tersebut diantaranya adalah aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri.

2.1.1 Aritmetika

Aritmetika (kadang salah dieja sebagai aritmatika) (dari kata bahasa Yunani *arithnos* = angka) atau dulu disebut ilmu hitung merupakan cabang (atau pendahulu) matematika yang mempelajari *operasi* dasar bilangan. Oleh orang awam, kata "aritmetika" sering dianggap sebagai sinonim dari teori bilangan. Operasi dasar aritmetika adalah penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian, walaupun operasi-operasi lain yang lebih canggih (seperti persentase, akar kuadrat, pemangkatan, dan logaritma) kadang juga dimasukkan ke dalam kategori ini. Perhitungan dalam aritmetika dilakukan menurut suatu urutan operasi yang menentukan operasi aritmetika yang mana lebih dulu dilakukan.

Aritmetika bilangan asli, bilangan bulat, bilangan rasional, dan bilangan real umumnya dipelajari oleh anak sekolah, yang mempelajari algoritma manual aritmetika. Namun demikian, banyak orang yang lebih suka menggunakan alat-alat seperti kalkulator, komputer, atau sempoa untuk melakukan perhitungan aritmetika.

Perkembangan terakhir di Indonesia berkembang mempelajari aritmetika dengan bantuan metoda jarimatika, yakni menggunakan jari-jari tangan untuk melakukan operasi kali-bagi-tambah-kurang.

2.1.1.1 Barisan Aritmetika

Barisan aritmetika adalah suatu barisan dengan selisih (beda) antara dua suku yang berurutan selalu tetap.

Bentuk umum:

$U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$ atau

$a, (a + b), (a + 2b), \ldots, (a + (n - 1)b)$

Pada barisan aritmetika, berlaku $U_n - U_{n-1} = b$ sehingga $U_n = U_{n-1} + b$

Suku ke-n barisan aritmetika adalah Un = a + (n - 1)b dimana U_n = Suku ke-n

a = suku pertama, b = beda dan n = banyaknya suku.

2.1.1.2 Deret Aritmetika

Jika diketahui $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$ merupakan suku-suku dari suatu barisan aritmetika, maka $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ disebut **deret aritmetika,** dengan $U_n = a + (n-1)b$.

Deret aritmetika adalah jumlah suku-suku dari barisan aritmetika.

Bentuk umum:

$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ atau

$a + (a+b) + (a+2b) + \ldots + (a+(n-1)b)$

jika S_n merupakan jumlah n suku pertama dari suatu deret aritmetika, maka rumus umum untuk S_n dapat ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$

Maka

$$S_n = a + (a+b) + (a+2b) + \ldots + (a+(n-1)b)$$

$$S_n = U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \ldots + a \quad +$$

$$2\,S_n = \underbrace{(a+U_n) + (a+U_n) + (a+U_n) + \ldots + (a+U_n)}_{\text{Penjumlahan sebanyak n suku}}$$

$$2\,S_n = n(a+U_n) \rightarrow S_n = \frac{1}{2}n\,(a+U_n)$$

$$S_n = \frac{1}{2}n\,[a + (a+(n-1)b)]$$

$$S_n = \frac{1}{2}n\,[2a + (n-1)b]$$

Jadi, rumus umum jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah:

$$S_n = \frac{1}{2}n\,[2a + (n-1)b].$$

dimana U_n = Suku ke-n

a = Suku pertama

b = beda

n = banyaknya suku

(Noormandiri, 2006:249)

2.1.2 Aljabar

Aljabar berasal dari Bahasa Arab "al-jabr" yang berarti "pertemuan", "hubungan" atau "perampungan" adalah cabang matematika yang dapat dicirikan sebagai generalisasi dari bidang aritmetika. Aljabar juga merupakan nama sebuah struktur aljabar abstrak, yaitu aljabar dalam sebuah bidang. Ada beberapa jenis aljabar yaitu (1) Aljabar dasar, yang mencatat sifat-sifat operasi bilangan real, menggunakan simbol sebagai "pengganti" untuk menandakan konstanta dan variabel, dan mempelajari aturan tentang ungkapan dan persamaan matematis yang melibatkan simbol-simbol tersebut; (2) Aljabar abstrak, yang secara aksiomatis mendefinisikan dan menyelidiki struktur aljabar seperti kelompok matematika, cincin matematika dan matematika bidang; (3) Aljabar linear, yang mempelajari sifat-sifat khusus ruang vektor (termasuk matriks); (4) Aljabar universal, yang mempelajari sifat-sifat yang dimiliki semua struktur aljabar; (5) Aljabar komputer, yang mengumpulkan manipulasi simbolis benda-benda matematis.

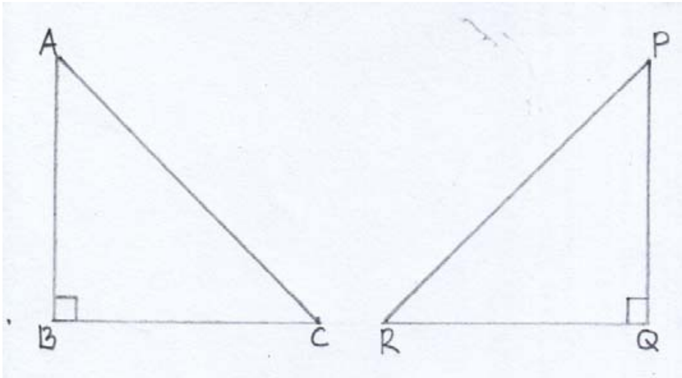
2.1.3 Geometri

Geometri adalah bagian dari matematika yang mengambil persoalan mengenai size, bentuk, dan kedudukan relatif dari rajah/kesalahan dan sifat ruang. Geometri lahir sebagai salah satu sumber dari beberapa matematika terapan yang ada selama ini. Pada mulanya, geometri hanya dipergunakan sebagai ilmu praktis dan keahlian teknik. Diantaranya seperti pada masyarakat Babilonia dan Mesir yang menggunakan geometri sebagai pengukuran praktis pada pertanian kemudian diperluas untuk perhitungan panjang ruas garis, mencari luas dan menghitung isi atau volume benda tertentu. Selanjutnya geometri terus berkembang menjadi pengetahuan yang disusun secara menarik dan logis. (Wallance, 1972: 1).

Sudut dalam geometri adalah besaran rotasi suatu ruas garis dari satu titik pangkalnya ke posisi yang lain. Selain itu, dalam bangun dua dimensi yang beraturan, sudut dapat pula diartikan sebagai ruang antara dua buah ruas garis lurus yang saling berpotongan. Jumlah sudut pada lingkaran 360°. jumlah sudut pada segitiga siku-siku 180°. Besar sudut pada persegi/segi empat 360°.Untuk mengukur sudut dapat digunakan busur derajat. (Mulyati, 1996: 32).

Teorema konkruensi (≅) sudut siku-siku:

Jika diketahui $\angle ABC$ siku-siku dan $\angle PQR$ siku-siku maka $\angle ABC \cong \angle PQR$



Bukti:

Diketahui $\angle ABC$ siku-siku maka menurut definisi $\angle ABC = 90^0$.

Demikian pula diketahui $\angle PQR$ siku-siku maka $\angle PQR = 90^0$.

Menggunakan sifat simetris: karena $\angle PQR = 90^0$ maka $90^0 = \angle PQR$.

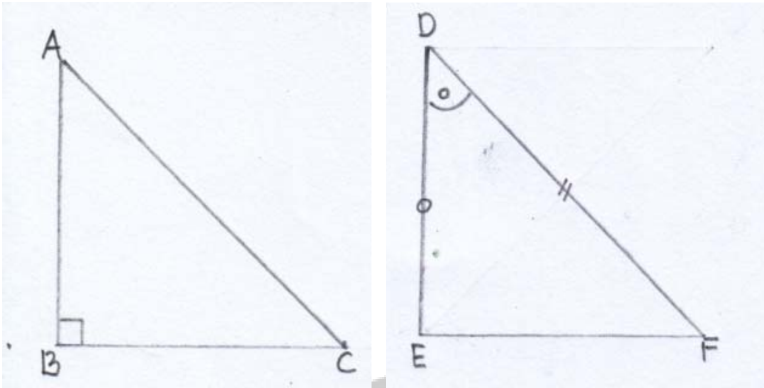
Karena $\angle ABC = 90^0$ dan $90^0 = \angle PQR$ menurut sifat transitif relasi "=" maka $\angle ABC = \angle PQR$, sehingga menurut definisi konkruensi sudut disimpulkan $\angle PQR \cong \angle PQR$.

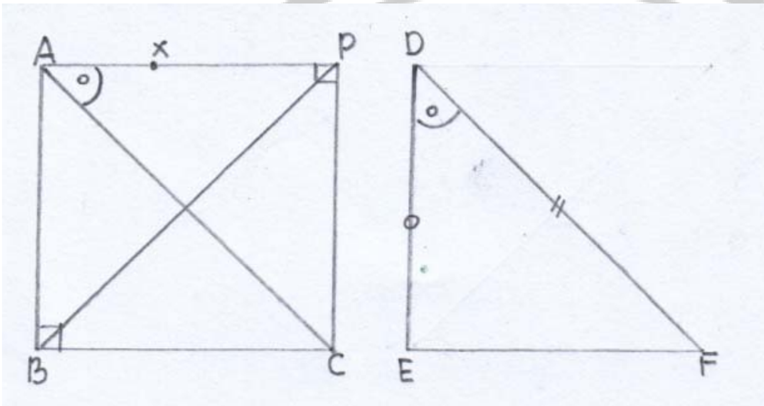
Teorema konkruensi segitiga siku-siku:

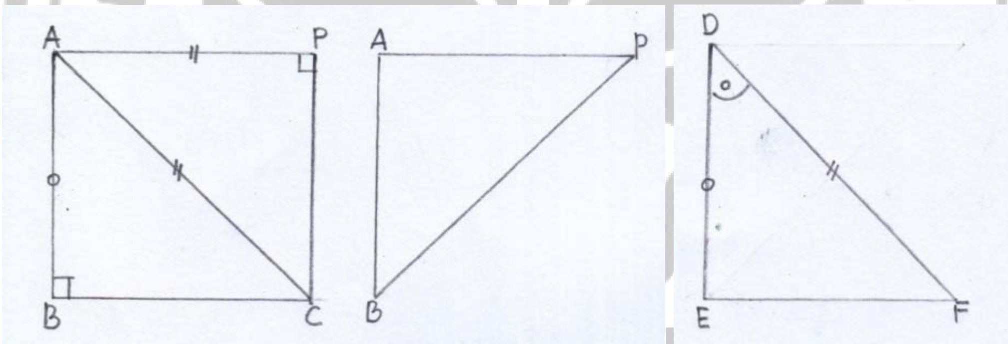
Dua segitiga siku-siku disebut konkruen jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik sudut-titik sudutnya, sehingga hipotenusa dan salah satu kakinya pada segitiga pertama konkruen dengan bagian-bagian korespondingnya pada segitiga kedua.

Diketahui $\Delta\, ABC$ siku-siku di B, $\Delta\, DEF$ siku-siku di E, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

Dibuktikan: $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$







Bukti:

Menurut aksioma konstruksi sudut di A terdapat $\angle XAC \cong \angle EDF$.

Menurut aksioma $\overrightarrow{AX}$ dapat diperpanjang sehingga $\overline{AP} \cong \overline{DE}$.

Menurut aksioma melalui P dan C ada $\overleftrightarrow{PC}$. Pandang $\Delta\, APC$ dan $\Delta\, DEF$, karena $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ (diketahui), $\angle XAC \cong \angle EDF$ (dibuat), dan $\overline{AP} \cong \overline{DE}$ (dikonstruksi) maka menurut aksioma Ss.Sd.Ss $\Delta\, APC \cong \Delta\, DEF$. Akibatnya $\angle APC \cong \angle DEF$.

Diketahui $\Delta\ DEF$ siku-siku di E sehingga m$\angle DEF$ = 90^0. Karena $\angle APC \cong \angle DEF$ maka $\angle APC$ = 90^0.

Menurut aksioma dapat dibuat $\overleftrightarrow{BP}$ garis melalui B dan P, kemudian perhatikan ΔABP. Karena $\overline{AP} \cong \overline{DE}$ dan diketahui $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ sehingga $\overline{AP} \cong \overline{AB}$ maka menurut Teorema segitiga samakaki $\angle ABP \cong \angle APB$.

Diketahui $\Delta\ ABC$ siku-siku di B maka $\angle ABC$ = 90^0, sehingga $\angle ABC = \angle APC$ demikian pula $\angle CPB \cong \angle CBP$.

Pandang ΔBPC karena $\angle CPB \cong \angle CBP$ maka menurut *convers* Teorema segitiga samakaki $\overline{PC} \cong \overline{BC}$.

Perhatikan ΔAPC dan ΔABC, karena $\overline{PC} \cong \overline{BC}$, $\angle APC \cong \angle DEF$, dan $\overline{PC} \cong \overline{BC}$ maka $\Delta APC \cong \Delta ABC$ (aksioma Ss.Sd.Ss).

Karena $\Delta APC \cong \Delta DEF$ dan $\Delta APC \cong \Delta ABC$ maka $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

2.1.4 Trigonometri

Trigonometri (dari bahasa Yunani trigonom = tiga sudut dan metro = mengukur) adalah sebuah cabang matematika yang berhadapan dengan sudut segitiga dan fungsi trigonometri seperti sinus, cosinus, dan tangen. Trigonometri memiliki hubungan dengan geometri, meskipun ada ketidaksetujuan tentang apa hubungannya. Bagi beberapa orang, trigonometri adalah bagian dari geometri.

Hubungan fungsi trigonometri

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1_{\#}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}\#$$

Penjumlahan

sin (A+B) = sin A cos B + cos A sin B

sin (A-B) = sin A cos B - cos A sin B

cos (A+B) = cos A cos B - sin A sin B

cos (A-B) = cos A cos B + sin A sin B

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$ #

Rumus setengah sudut

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$ #

#

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$ #

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$ #

2.2 Teorema dalam Matematika

Teorema adalah pernyataan yang harus dibuktikan kebenarannya. Dengan menggunakan definisi dan asumsi sebagai alasan, kita mendeduksi atau membuktikan teorema-teorema dasar. Setiap menggunakan teorema baru untuk membuktikan lebih banyak teorema lagi, proses deduksi akan terus berkembang. Namun demikian, jika suatu teorema baru digunakan untuk membuktikan teorema sebelumnya, urutan logika akan menjadi tidak sistematis.

Teorema "jumlah ukuran sudut-sudut suatu segitiga sama dengan 180^0" digunakan untuk membuktikan "jumlah ukuran sudut-sudut suatu pentagon adalah 540^0". Selanjutnya, hal ini membuat orang bisa membuktikan bahwa "setiap sudut suatu pentagon beraturan berukuran 108^0". Namun demikian, urutan logika akan menjadi kacau jika kita mencoba untuk menggunakan teorema terakhir untuk membuktikan Teorema yang pertama atau Teorema yang kedua.

Dalam bidang aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri terdapat banyak torema yang pembuktiannya digunakan dengan metoda pembuktian matematika dan juga dapat dibuktikan dengan bukti tanpa kata.

Beberapa teorema pada matematika biasanya dibuktikan dengan bukti langsung, bukti tak langsung, bukti dengan kontradiksi, bukti ketunggalan, penyanggahan bukti dengan *counter example*, bukti dengan induksi matematika, bukti biimplikasi, tetapi tidak semua teorema pada matematika dapat dibuktikan dengan bukti tanpa kata, disini akan disajikan beberapa teorema pada bidang aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri yang dapat dibuktikan dengan bukti tanpa kata.

2.2.1 Teorema untuk Bidang Aritmetika antara lain:

Teorema 1.

Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. (Alsina, C & Nelsen, R. 2010: 72)

Teorema 2.

Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = n^2 + n$.

Teorema 3.

Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $1+2+ \ldots +(n-1)+ n + (n-1) + 2 + 1 = n^2$. (Alsina, C & Nelsen, R. 2010: 74)

2.2.2 Teorema untuk Bidang Aljabar antara lain:

Teorema 1.

Buktikan $x^2 + ax = (x + a/2)^2 - (a/2)^2$. (Alsina, C & Nelsen, R. 2010: 19)

Teorema 2.

Buktikan $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$. (Alsina, C & Nelsen, R. 2010: 20)

Teorema 3.

Buktikan $(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (a-b-c)^2 = (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2$. (Alsina, C & Nelsen, R. 2010: 21).

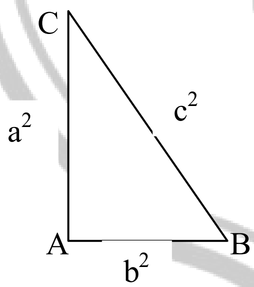
2.2.3 Teorema untuk Bidang Geometri antara lain:

Teorema 1.

Buktikan jumlah sudut dalam segitiga sama dengan 180^o. (Alsina, C & Nelsen, R. 2010: 14)

Teorema 2.

Pada segitiga siku-siku, buktikan $c^2 = a^2 + b^2$. (Alsina, C & Nelsen, R. 2010: 8)



<u>Teorema 3.</u>

1. Buktikan perpotongan garis berat dalam satu segitiga perbandingannya 2:1. (Alsina, C & Nelsen, R. 2010: 13)

2.2.4 Teorema untuk Bidang Trigonometri antara lain:

<u>Teorema 1.</u>

Buktikan sin (x-y) = sin x cos y – cos x sin y. (Alsina, C & Nelsen, R. 2010: 30)

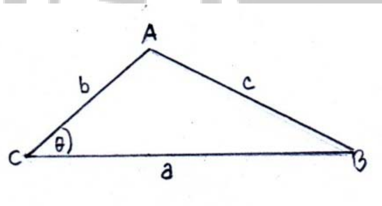
<u>Teorema 2</u>.

Buktikan $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$. (Alsina, C & Nelsen, R. 2010: 35)

<u>Teorema 3.</u>

Buktikan $c^2 = (b\sin\theta)^2 + (a - b\cos\theta)^2$

$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$. (Alsina, C & Nelsen, R. 2010: 31)



2.3 Pembuktian Teorema

Pembuktian Teorema disini dilakukan dengan 2 (dua) cara yaitu dengan cara matematis dan dengan bukti tanpa kata atau pembuktian dengan gambar.

2.3.1 Bukti dengan Cara Matematis

Bukti dengan cara matematis yaitu pembuktian secara berurutan menggunakan bukti langsung maupun menggunakan teori-teori sebelumnya.

2.3.1.1 Pembuktian Teorema secara Matematis untuk Bidang Aritmetika.

1. Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Bukti:

Untuk n $= 1$

Jelas $p(1) = 1 = 1^2$

Jadi p(1) benar.

Misal p(k) benar.

Jadi $p(k) = 1 + 3 + ... + (2k - 1) = k^2$

Jelas $p(k+1) = 1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) + (2(k+1) - 1)$

$= k^2 + 2k + 2 - 1$

$= k^2 + 2k + 1$

$= (k+1)^2$

Jadi p(k+1) benar apabila p(k) benar.

2. Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = n^2 + n$.

Bukti:

Untuk n $= 1$

Jelas $p(1) = 2 = 1^2 + 1$

Jadi p(1) benar.

Misal p(k) benar.

Jadi $p(k) = 2 + 4 + 6 + ... + (2k) = k^2 + k$

Jelas $p(k+1) = 2 + 4 + 6 + ... + (2k) + (2(k+1))$

$= k^2 + k + 2k + 2$

$= k^2 + 3k + 2$

$= (k+1)^2 + (k+1)$

Jadi p(k+1) benar apabila p(k) benar.

3. Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $1+2+ \ldots +(n-1)+ n + (n-1) + 2 + 1 = n^2$.

Bukti:

Untuk k = 1

Jelas $p(1) = 1^2 + 1$

Jadi p(1) benar.

Misal p(k) benar.

Jadi $p(k) = 1+2+ \ldots +(k-1)+ k + (k-1) + 2 + 1 = k^2$

Jelas $p(k+1) = 1 + 2 + \ldots +(k-1) + k + (k-1) + \ldots + 2 + 1 + (k+1) + k$

$= k^2 + k + 1 + k$

$= k^2 + 2k + 1$

$= (k+1)^2$

2.3.1.2 Pembuktian Teorema secara Matematis untuk Bidang Aljabar.

1. Buktikan $x^2 + ax = (x + a/2)^2 - (a/2)^2$

Bukti:

$x^2 + ax = x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2$

$= x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2$

$= (x^2 + \frac{1}{2}ax) + (\frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}a^2) - \frac{1}{4}a^2$

$= x(x + \frac{1}{2}a) + \frac{1}{2}a(x + \frac{1}{2}a) - \frac{1}{4}a^2$

$= (x + \frac{1}{2}a)(x + \frac{1}{2}a) - \frac{1}{4}a^2$

$= (x + \frac{1}{2}a)^2 - (\frac{a}{2})^2$

2. Buktikan $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

Bukti:

(a+b) (a+b) + (a-b) (a-b) = $a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2$

$= 2a^2 + 2b^2$

$= 2(a^2 + b^2)$

3. Buktikan

$(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (a - b - c)^2 = (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2$

Bukti:

$(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (a - b - c)^2$

$= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) + (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc) + (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc) + (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc)$

$= 4(a^2 + b^2 + c^2) + (2ab + 2ab - 2ab - 2ab) + (2ac - 2ac + 2ac - 2ac) + (2bc - 2bc - 2bc + 2bc)$

$= (a^2 + b^2 + c^2)$

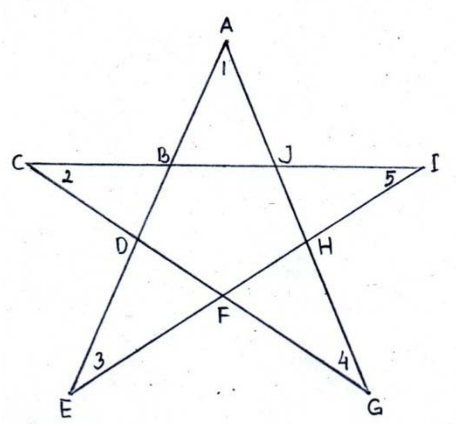
$= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$

$= (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2$

2.3.1.3 Pembuktian Teorema secara Matematis untuk Bidang Geometri.

1. Buktikan jumlah sudut dalam segitiga sama dengan 180^0.

Bukti:



Lihat ΔEHA

Jelas $\angle EHA = 180^0 - (\angle 1 + \angle 3)$

Jelas $\angle JHI = 180^0 - \angle EHA$

$= 180 - (180 - (\angle 1 + \angle 3))$

$= \angle 1 + \angle 3$

Lihat ΔCJG

Jelas $\angle CJG = 180^0 - (\angle 2 + \angle 4)$

Jelas $\angle IJH = 180^0 - \angle CJG$

$= 180 - (180 - ((-\angle 2 + \angle 4))$

$= \angle 2 + \angle 4$

Jelas $\angle HIJ = \angle 5$

$\angle JHI = \angle 1 + \angle 3$

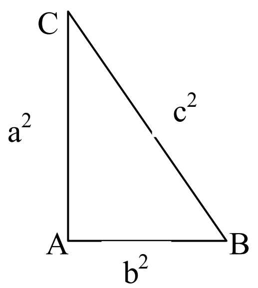
$\angle IJH = \angle 2 + \angle 4$

Jelas $\angle HIJ + \angle JHI + \angle IJH = 180$

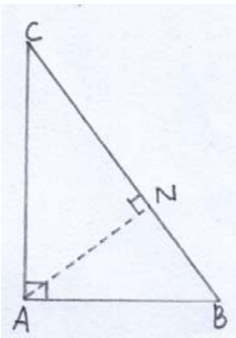
$\angle 5 + \angle 1 + \angle 3 + \angle 2 + \angle 4 = 180$

$\Leftrightarrow \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180$

2. Pada segitiga siku-siku, buktikan $c^2 = a^2 + b^2$



Bukti:



Lihat ΔANC dan ΔABC

$\frac{AC}{BC} = \frac{NC}{AC}$

AC^2 = BC * NC .... (i)

Lihat ΔBNA dan ΔABC

$\frac{AB}{BC} = \frac{BN}{AB}$

AB^2 = BC * BN .... (ii)

Dari (i) dan (ii) diperoleh:

$AC^2 + AB^2$= BC * NC + BC * BN

= BC (NC + BN)

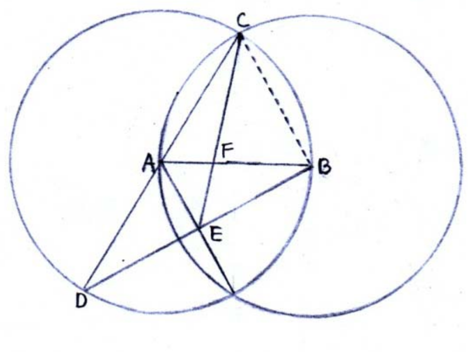
= BC * BC

= BC^2

$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$ (terbukti).

3. Buktikan perpotongan garis berat dalam satu segitiga perbandingannya 2:1.

Bukti:



Lihat ΔAED dan ΔCDB

$\frac{DE}{DB} = \frac{AE}{BC}$

$\frac{1}{2} = \frac{AE}{BC}$

Lihat ΔAEF dan ΔBCF

$\frac{AF}{FB} = \frac{1}{2}$

2AF = FB

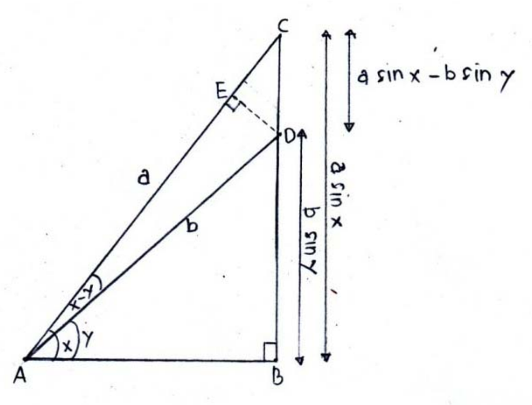
AF : AB = 1 : 3

AF = $\frac{1}{3}\overline{AB}$.

2.3.1.4 Pembuktian Teorema secara Matematis untuk Bidang Trigonometri.

1. Buktikan sin (x-y) = sin x cos y – cos x sin y.

Bukti:



Sin(x-y) = $\frac{ED}{b}$

$\frac{ED}{CD} = \frac{AB}{AC}$

$\Leftrightarrow$ ED = $\frac{b\cos y\,(a\sin x - b\sin y)}{a}$

Jelas sin (x-y) = $\dfrac{\frac{b\cos y\,(a\sin x - b\sin y)}{a}}{b}$

$= \frac{b\cos y(a\sin x - b\sin y)}{a.b}$

$= \frac{\cos y\; a\sin x - b\cos x\sin y\;\; \sin y}{a}$

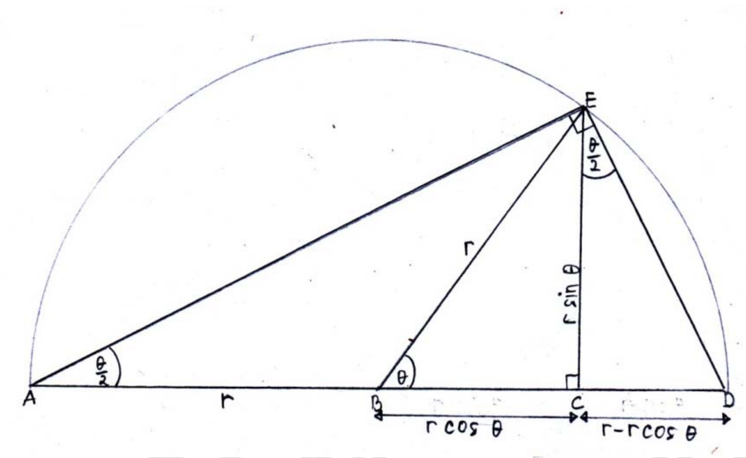
$= \frac{a\cos y\sin x - a\cos x\sin y}{a}$

$= \frac{a(\sin x\cos y - \cos x\sin y)}{a}$

= sin x cos y – cos x sin y.

2. Buktikan $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$.

Bukti:



Lihat ΔADE dan ΔCDE

$\angle AED = \angle ECD$ (siku-siku)

$\angle ADE = \angle CDE$ (berimpit)

Jadi $\Delta ADE \cong \Delta CDE$

Akibatnya $\angle EAD = \angle CED$

$\sin\theta = \frac{CE}{r} \Leftrightarrow CE = r \sin\theta$

$\cos\theta = \frac{BC}{r} \Leftrightarrow BC = r \cos\theta$

Pada ΔACE: $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{CE}{r+BC} \Leftrightarrow \frac{r \sin\theta}{r+r\cos\theta} = \frac{r\sin\theta}{r(1+\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ (i)

Pada ΔECD: $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{CD}{EC} = \frac{r-BC}{r\sin\theta} = \frac{r-r\cos\theta}{r\sin\theta} = \frac{r(1-\cos\theta)}{r\sin\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ (ii)

Dari (i) dan (ii) diperoleh $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$.

3. Buktikan $c^2 = (b \sin\theta)^2 + (a - b\cos\theta)^2$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Bukti:

$c^2 = (b \sin\theta)^2 + (a - b\cos\theta)^2$

$$= b^2 sin^2\theta + a^2 - 2ab\ cos\theta + b^2 cos^2\theta$$

$$= a^2 + b^2 sin^2\theta + b^2 cos^2\theta - 2ab\ cos\theta$$

$$= a^2 + b^2(sin^2\theta + cos^2\theta) - 2ab\ cos\theta$$

$$= a^2 + b^2\ (1) - 2ab\ cos\theta$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\ cos\theta$$

2.3.2 Pembuktian dengan Gambar (Bukti Tanpa Kata)

Di dalam matematika terdapat teorema-teorema yang perlu dibuktikan. Untuk membuktikannya dapat digunakan beberapa metode yang pembuktiannya dengan menggunakan aljabar. Pembuktian dengan menggunakan aljabar sudah banyak digunakan dan sudah tidak asing lagi bagi orang-orang awam. Oleh karena itu dalam penelitian ini akan menggunakan sebuah metode pembuktian yang baru agar tidak membosankan yaitu bukti tanpa kata.

Bukti tanpa kata yaitu bukti yang dibatasi dengan menggunakan gambar atau visual lainnya. Berarti untuk menunjukkan ide matematika, persamaan atau teorema. Tidak mengandung kata-kata apapun selain simbol numerik dan geometris gambar. (C. Alsina & R. Nelsen, 2010: 119)

Pada umumnya, bukti tanpa kata-kata adalah gambaran atau diagram yang membantu pembaca melihat mengapa suatu pernyataan matematis mungkin benar. Bukti tanpa kata-kata memerlukan penjelasan yang menarik diberbagai gagasan matematika tidak selalu jelas dengan bukti tanpa kata-kata. Dalam penelitian ini akan dibahas bagaimana cara membuktikan teori-teori yang ada dalam matematika dengan bantuan gambar. Metode ini dilakukan semata-mata hanya untuk memperoleh ide, gagasan, dan intuisi dalam rangka pembuktian secara deduktif.

Pada dasarnya tujuan pembuktian baik dengan menggunakan bukti aljabar ataupun dengan bukti tanpa kata adalah sama, yaitu membuktikan sebuah teorema menjadi benar. Tujuan digunakannya bukti tanpa kata adalah untuk memperoleh ide, gagasan, dan intuisi yang dapat mempermudah dalam melakukan pembuktian secara deduktif. Sebagai masukan bagi pembaca bahwa dalam membuktikan suatu teorema tidak hanya dapat dibuktikan dengan bukti aljabar, tetapi juga dapat digunakan bukti tanpa kata.

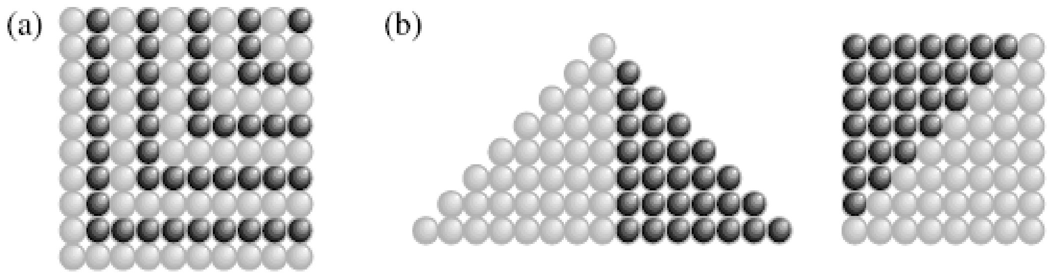
Hubungan bukti aljabar dengan bukti tanpa kata adalah seiring atau beriringan, karena beberapa teorema dalam matematika dapat dibuktikan dengan kedua metode tersebut. Yang membedakan hanyalah cara pembuktiannya, pada bukti aljabar yaitu membuktikan Teorema dengan menguraikan beberapa kata atau kalimat, yang biasanya diawali dengan kata "dipunyai, ambil sembarang, tulis, maka, jelas, dan lain-lain". Sedangkan pada bukti tanpa kata, bukti cukup dengan gambar yang menjelaskan.

2.3.2.1 Bukti Tanpa Kata pada Bidang Aritmetika Teorema 1.

Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

(Alsina, C & Nelsen, R. 2010: 119)

Bukti: Diberikan dua bukti kombinatorial pada gambar berikut.



Gambar 2

Pembuktian Teorema 2 menggunakan bukti kombinatiorial tanpa kata dengan bentuk bola-bola. Pada Gambar 2a, menghitung bola digunakan dua cara, pertama sebagai persegi panjang bola dan yang kedua menghitung jumlah bola disetiap L-wilayah yang berbentuk bola dan berwarna sama (prinsip *fubini*).

Pada Gambar 2a terlihat bahwa bola-bola disusun persegi dan diberi warna berbeda serta diberi garis siku atau berbentuk L-wilayah sesuai dengan warna masing-masing bola. Sehingga dapat diketahui jika setiap bentuk L dijumlahkan maka akan menghasilkan n^2 bola. Misalnya: penjumlahan 2 bentuk L, yaitu 1 bola ditambah 3 bola maka akan menghasilkan 4 bola = 2^2 bola yang berbentuk persegi dengan ukuran sisinya 2 bola. Penjumlahan 3 bentuk L, yaitu 1 bola + 3 bola + 5 bola maka akan menghasilkan 9 bola = 3^2 bola yang berbentuk persegi dengan ukuran sisinya 3 bola. Penjumlahan 3 bentuk L, yaitu 1 bola + 3 bola + 5 bola + 7 bola maka akan menghasilkan 16 bola = 4^2 bola yang berbentuk persegi dengan ukuran sisinya 4 bola dan penjumlahan- penjumlahan bentuk L seterusnya. Jadi jika 1 bola+ 3 bola+ 5 bola + 7 bola +…+ (2n bola – 1 bola) = n^2 bola.

Jadi bilangan ganjil positif jika dijumlahkan akan menghasilkan n^2.

Jadi terbukti bahwa $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Gambar 2b, terlihat korespondensi satu-satu (diilustrasikan oleh warna bola) antara panjang segitiga bola dalam baris dengan banyak bola 1, 3, 5, …, (2n – 1) bola yang jika dijumlahkan akan menghasilkan n^2 bola dan sebuah panjang persegi bola. Kedua cara ini biasa disebut prinsip *cantor*.

Jadi $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

2.4 Topik Penelitian

Dalam penelitian ini akan dibahas mengenai pembuktian tanpa kata pada 4 (empat) bidang matematika yaitu aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri. Pada keempat bidang penelitian tersebut akan dibahas beberapa teorema untuk masing-masing bidang penelitian diantaranya adalah teorema pada bidang aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri.

2.4.1 Aritmetika

Teorema bidang aritmetika yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Buktikan untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = n^2 + n$.
2. Buktikan untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $1+2+ \ldots +(n-1)+ n + (n-1) + 2 + 1 = n^2$.

2.4.2 Aljabar

Teorema bidang aljabar yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

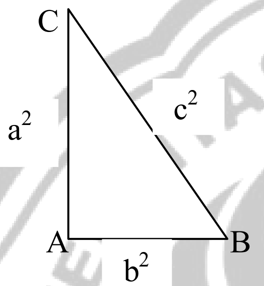
1. Buktikan $x^2 + ax = (x + a/2)^2 - (a/2)^2$
2. Buktikan $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$

3. Buktikan $(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (a-b-c)^2 = (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2$

2.4.3 Geometri

Teorema bidang geometri yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Buktikan jumlah sudut dalam segitiga sama dengan 180^o.
2. Pada segitiga siku-siku, buktikan $c^2 = a^2 + b^2$



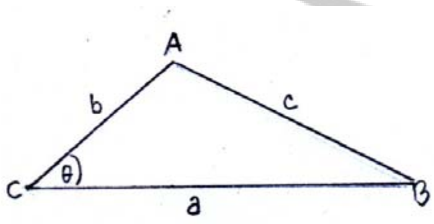
3. Buktikan perpotongan garis berat dalam satu segitiga perbandingannya 2:1.

2.4.4 Trigonometri

Teorema bidang trigonometri yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Buktikan sin (x-y) = sin x cos y – cos x sin y.
2. Buktikan $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$.
3. Buktikan $c^2 = (b\sin\theta)^2 + (a - b\cos\theta)^2$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

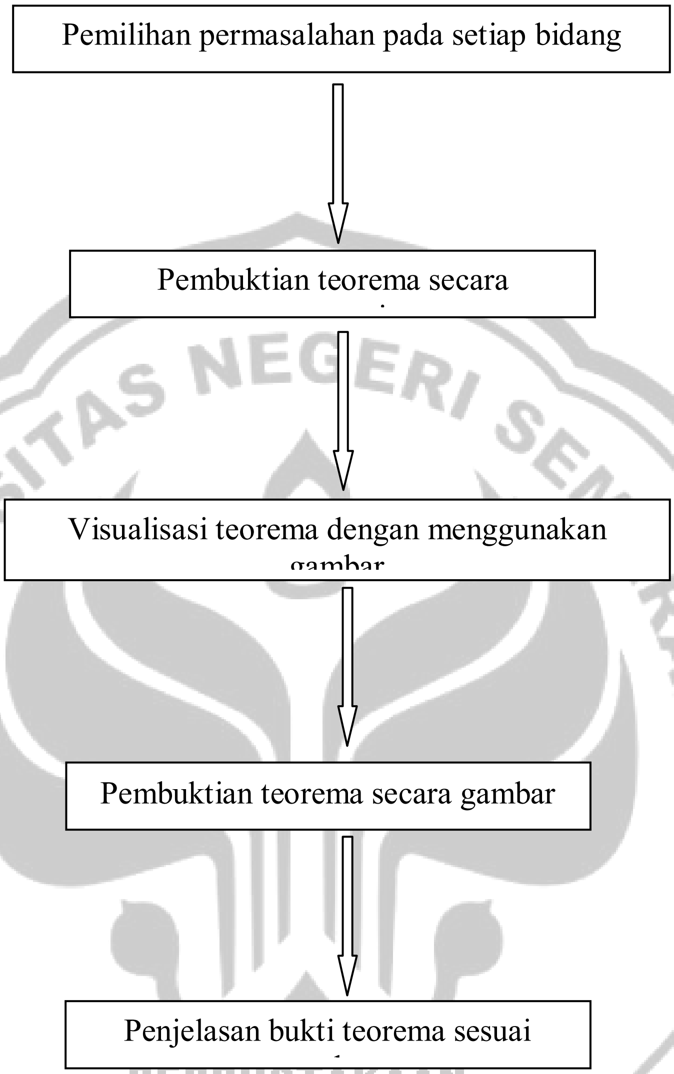


2.5 Kerangka Berfikir dan Hipotesis

Metoda pembuktian dalam matematika terdiri dari beberapa macam metode, salah satunya bukti tanpa kata. Bukti tanpa kata sudah lama muncul, tetapi tidak sering digunakan untuk membuktikan bahkan tidak ada orang yang membuktikan suatu teorema dengan bukti tanpa kata. Sekarang kebanyakan teorema-teorema dibuktikan dengan menggunakan bukti aljabar atau dengan penjabaran-penjabaran. Bukti dengan menggunakan aljabar artinya teorema dibuktikan dengan menggunakan metoda pembuktian matematika, misalnya bukti langsung, bukti tak langsung, induksi matematika, dan lain-lain.

Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan dalam membuktikan suatu teorema matematika. Diantaranya bukti kombinatorial (aritmetika), aljabar, geometri, dan trigonometri tanpa kata. Metode bukti tanpa kata yaitu bukti yang dibatasi dengan menggunakan gambar atau visual lainnya biasanya menggunakan titik, kotak, bola, kubus dan benda-benda yang mudah diambil.

Secara bagan proses penelitiannya sebagai berikut:



Dalam tulisan ini akan digunakan bukti tanpa kata dalam membuktikan teorema pada bidang aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri. Teorema-teorema pada penelitian ini dibatasi hanya pada teorema-teorema berikut.

1. Pada bidang aritmetika:

    a. Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $2+4+6+\cdots+(2n)=n^2+n$.

b. Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $1+2+ \ldots +(n-1)+ n + (n-1) + 2 + 1 = n^2$.

2. Pada bidang aljabar:

a. Buktikan $x^2 + ax = (x + a/2)^2 - (a/2)^2$.

b. Buktikan $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$.

c. Buktikan $(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (a-b-c)^2 = (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2$

3. Pada bidang geometri:

a. Buktikan jumlah sudut dalam segitiga sama dengan 180^o.

b. Pada segitiga siku-siku, buktikan $c^2 = a^2 + b^2$.

c. Buktikan perpotongan garis berat dalam satu segitiga perbandingannya 2:1.

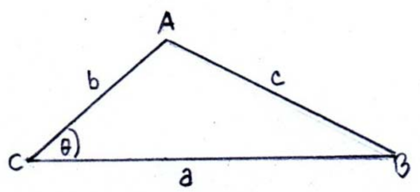
4. Pada bidang trigonometri:

a. Buktikan sin (x-y) = sin x cos y – cos x sin y.

b. Buktikan $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$.

c. Buktikan $c^2 = (b\sin\theta)^2 + (a - b\cos\theta)^2$

$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$.



BAB 3

METODE PENELITIAN

Untuk dapat mencapai tujuan penelitian yang telah ditetapkan dan agar penelitian berjalan dengan lancar maka metode dan peracangan penelitian memegang peranan yang sangat penting sebab dengan metode penelitian akan diperoleh data yang lengkap untuk memecahkan masalah yang dihadapi.

3.1 Menemukan Masalah

Dalam tahap ini dicari pustaka dan dipilih bagian dari sumber pustaka sebagai suatu masalah.

3.2 Merumuskan Masalah

Masalah yang dipilih harus *"researchable"* dalam arti masalah tersebut dapat diteliti, masalah perlu dirumuskan secara jelas, karena dengan perumusan yang jelas, penelitian diharapkan dapat mengetahui variabel-variabel apa yang akan diukur dan apakah alat-alat ukur yang sesuai untuk mencapai tujuan penelitian. Dengan rumusan masalah yang jelas, akan dapat dijadikan penuntun bagi langkah-langkah selanjutnya. Salah satu karakteristik formulasi pertanyaan penelitian yang baik yaitu pertanyaan penelitian harus *clear*. Artinya pertanyaan penelitian yang diajukan hendaknya disusun dengan kalimat yang jelas, artinya membingungkan. (Fraenkel dan Wallen, 1990:23). Dengan pertanyaan yang jelas akan mudah mengidentifikasi variabel-variabel apa yang ada dalam pertanyaan penelitian. Dalam mengidentifikasi istilah tersebut dapat dengan:

1. *Constitutive Definition,* yakni dengan pendekatan kamus (*dictionary approach*),
2. Contoh atau *by example*
3. *Operational Definition,* yakni mendefinisikan istilah atau variable penelitian secara spesifik, rinci dan operasional.

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah: bagaimana penggunaan bukti tanpa kata yang diterapkan pada bidang aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri.

Sebuah bukti tanpa kata dapat dianggap sebagai ’bukti’ yang menggunakan visual representasi, yaitu gambar atau visual lainnya. Berarti untuk menunjukkan ide matematika, persamaan atau teorema. Tidak mengandung kata-kata apapun selain simbol numerik dan geometris gambar. Dalam bukti tanpa kata biasanya menggunakan titik, kotak, bola, kubus dan benda-benda yang lain.

Dalam matematika biasanya teorema-teorema dibuktikan dengan menggunakan bukti aljabar. Disini akan ditunjukan bahwa beberapa teorema pada bidang aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri dapat dibuktikan dengan bukti tanpa kata.

3.3 Studi Pustaka

Jurnal-jurnal penelitian merupakan laporan hasil-hasil penelitian yang dapat dijadikan sumber masalah, karena laporan penelitian yang baiknya tentunya mencantumkan rekomendasi untuk penelitian yang lebih lanjut, yang berkaitan dengan penelitian tersebut. Suatu penelitian sering tidak mampu memecahkan semua masalah yang ada, karena keterbatasan penelitian. Hal ini menuntut adanya penelitian lebih lanjut dengan mengangkat masalah-masalah yang belum dijawab. Selain jurnal penelitian bacaan lain seperti buku-buku juga dapat dijadikan sumber masalah.

3.4 Analisis dan Pemecahan Masalah

3.4.1 Sumber Data

Sumber data primer merupakan data yang diperoleh langsung dari sumbernya dicermati dan dicatat pertama kalinya.

Data sekunder merupakan data yang tidak di usahakan sendiri oleh peneliti tetapi diperoleh oleh pihak lain.

Dalam penelitian ini data diperoleh dari jurnal yang menjelaskan tentang bukti tanpa kata-kata, yaitu membuktikan suatu teorema pada bidang aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri dengan menggunakan bukti tanpa kata.

3.4.2 Analisis Data

Langkah-langkah yang dilakukan dalam menganalisis data dapat dilakukan dengan memadukan teori-teori yang ada dalam buku dengan pengerjaan dengan cara lain.

Dalam bukti-bukti pada matematika terdapat beberapa metode yang pembuktiannya dengan menggunakan uraian atau aljabar. Disini teorema-teorema khususnya pada bidang aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri akan dibuktikan dengan bukti tanpa kata yang pembuktiannya dengan menggunakan bukti visual representasi, yaitu gambar atau visual lainnya.

3.4.3 Pengambilan Keputusan

Pengambilan keputusan dilaksanakan setelah penelitian ini dilakukan.

3.5 Penarikan Simpulan

Dari sekumpulan analisis yang dilakukan sebelumnya, maka dapat ditarik sebuah simpulan, penarikan simpulan ini berdasarkan penelitian yang dilakukan.

BAB 4

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

4.1 Hasil Penelitian

Hasil-hasil yang didapat dalam penelitian ini diperoleh dengan membuktikan beberapa teorema pada bidang aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri. Teorema pada bidang aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri adalah salah satu sebagai panggilan untuk bukti yang menjelaskan yaitu sebuah representasi visual atau bukti tanpa kata-kata. Untuk menemukan sebuah solusi teorema di bukti tanpa kata-kata, maka digunakan suatu gambar yang berfungsi untuk meyakinkan atau untuk mencerahkan. Sehingga bukti tanpa kata dapat disebut bukti dengan gambar sebagai penjelasan.

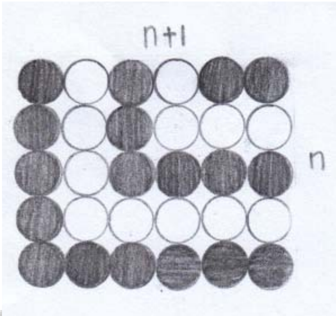
Ini ditunjukkan pada pembuktian dengan menggunakan gambar-gambar seperti: titik, kotak, bola-bola, kubus, limas segitiga, bentuk piramida, segitiga dan bentuk benda-benda lainnya. Penggunaan bentuk-bentuk gambar tersebut tergantung pada bentuk teorema yang akan dibuktikan. Sehingga teorema tersebut dijelaskan dengan menggunakan gambar yang sesuai.

4.1.1 Bukti Tanpa Kata pada Bidang Aritmetika

Teorema 2.

Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = n^2 + n$.

Bukti: Diberikan bukti kombinatorial pada gambar berikut.



Pembuktian Teorema 2 di atas menggunakan bukti kombinatiorial tanpa kata dengan bentuk bola-bola. Pada gambar di atas, menghitung jumlah bola disetiap L-wilayah yang berbentuk bola dan berwarna sama (prinsip *fubini*).

Pada Gambar di atas terlihat bahwa bola-bola disusun dalam bentuk persegi panjang dan diberi warna berbeda serta diberi garis siku atau berbentuk L-wilayah sesuai dengan warna masing-masing bola. Sehingga dapat diketahui jika setiap bentuk L dijumlahkan maka akan menghasilkan n^2+n bola. Misalnya: penjumlahan 2 bentuk L, yaitu 2 bola ditambah 4 bola maka akan menghasilkan 6 bola = $2^2 + 2$ bola yang berbentuk persegi panjang dengan ukuran sisinya 2 bola dan 2 + 1 bola. Penjumlahan 3 bentuk L, yaitu 2 bola + 4 bola + 6 bola maka akan menghasilkan 12 bola = $3^2 + 3$ bola yang berbentuk persegi panjang dengan ukuran sisinya 3 bola dan 3 + 1 bola. Penjumlahan 4 bentuk L, yaitu 2 bola + 4 bola + 6 bola + 8 bola maka akan menghasilkan 20 bola = $4^2 + 4$ bola yang berbentuk persegi panjang dengan ukuran sisinya 4 bola dan 4 + 1 bola, dan penjumlahan- penjumlahan bentuk L seterusnya.

Jika 2 bola+ 4 bola+ 6 bola + 8 bola +…+ (2n bola) = $n^2 + n$ bola.

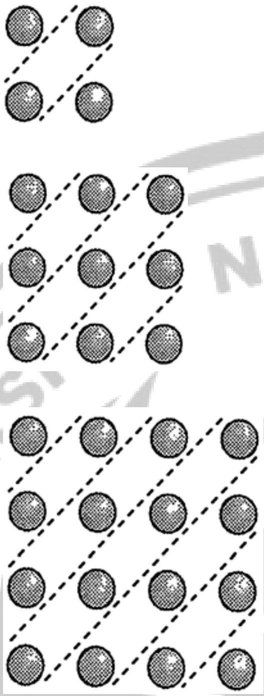
Maka bilangan genap positif jika dijumlahkan akan menghasilkan $n^2 + n$.

Jadi terbukti bahwa $2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = n^2 + n$.

Teorema 3.

Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $1+2+ \ldots +(n-1)+ n + (n-1) + 2 + 1 = n^2$.

Bukti: Diberikan bukti kombinatorial tanpa kata pada gambar berikut.



(a) **$1 + 2 + 1 = 2^2$**

(b) **$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$**

(c) **$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$**

Gambar 3

Pada Gambar 3a, jelas terdapat empat buah bola yang disusun dalam bentuk persegi dengan panjang sisinya dua bola. Pada persegi tersebut diberi garis-garis diagonal, sehingga diperoleh jumlah bola 1, 2 dan 1. Jika bola dijumlahkan akan menghasilkan $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$.

Gambar 3b, persegi dengan panjang sisinya tiga buah bola dan pada persegi tersebut diberi garis-garis diagonal sehingga diperoleh jumlah-jumlah bola 1, 2, 3, 2 dan 1. Jika bola-bola tersebut dijumlahkan akan menghasilkan $1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 = 3^2$.

Gambar 3c, persegi dengan panjang sisinya empat buah bola dan pada persegi tersebut diberi garis-garis diagonal sehingga diperoleh jumlah-jumlah bola 1, 2, 3, 4, 3, 2 dan 1. Jika bola-bola tersebut dijumlahkan akan menghasilkan $1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16 = 4^2$.

Untuk persegi dengan panjang sisi lima buah bola, maka dihasilkan $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25 = 5^2$. Pola berlaku seterusnya untuk n bilangan bulat positif.

Demikian geometris pembenaran dalam hal daerah persegi dengan ukuran panjang sisinya merupakan jumlah bola yang menjelaskan pernyataan,

$1+2 + \ldots + (n-1) + n + (n-1) + 2 + 1 = n^2$.

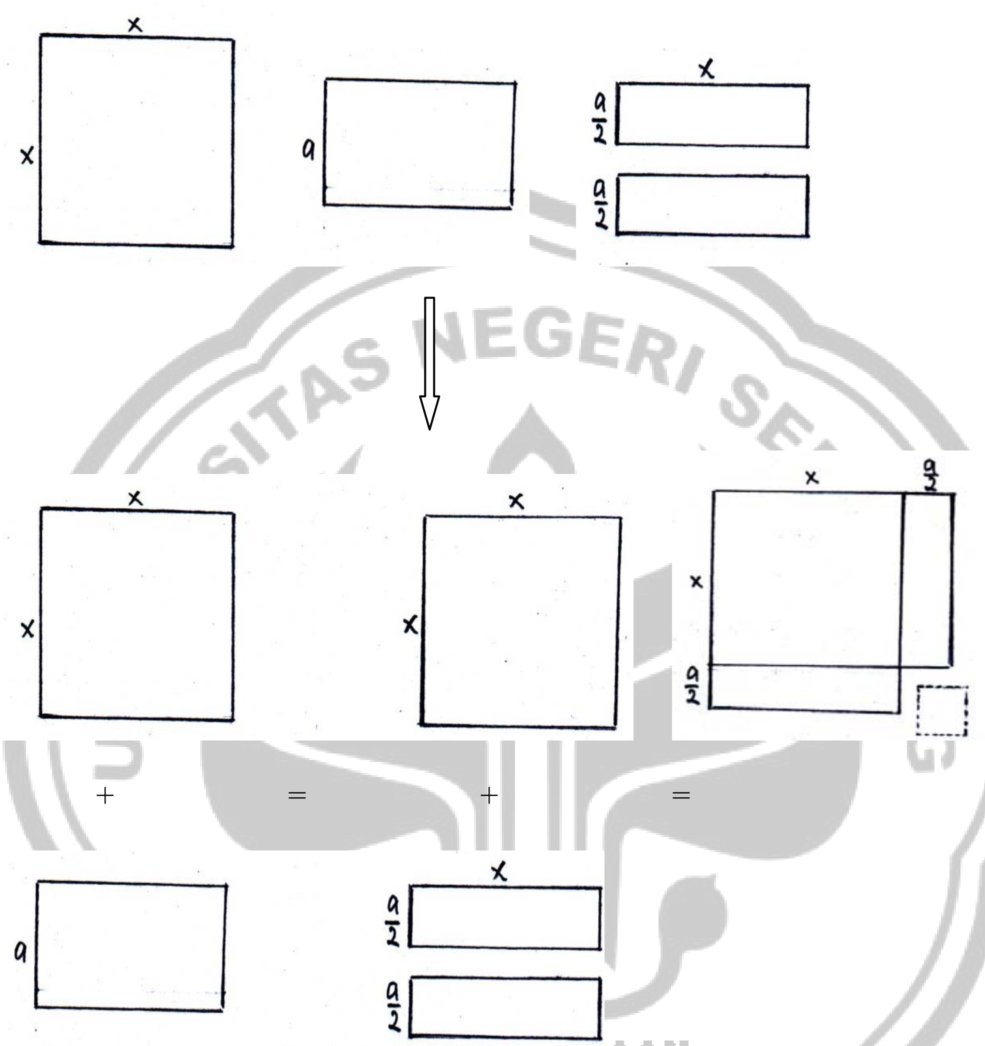
4.1.2 Bukti Tanpa Kata pada Bidang Aljabar

Teorema 1.

Buktikan $x^2 + ax = (x + a/2)^2 - (a/2)^2$

Bukti:

Dipunyai:



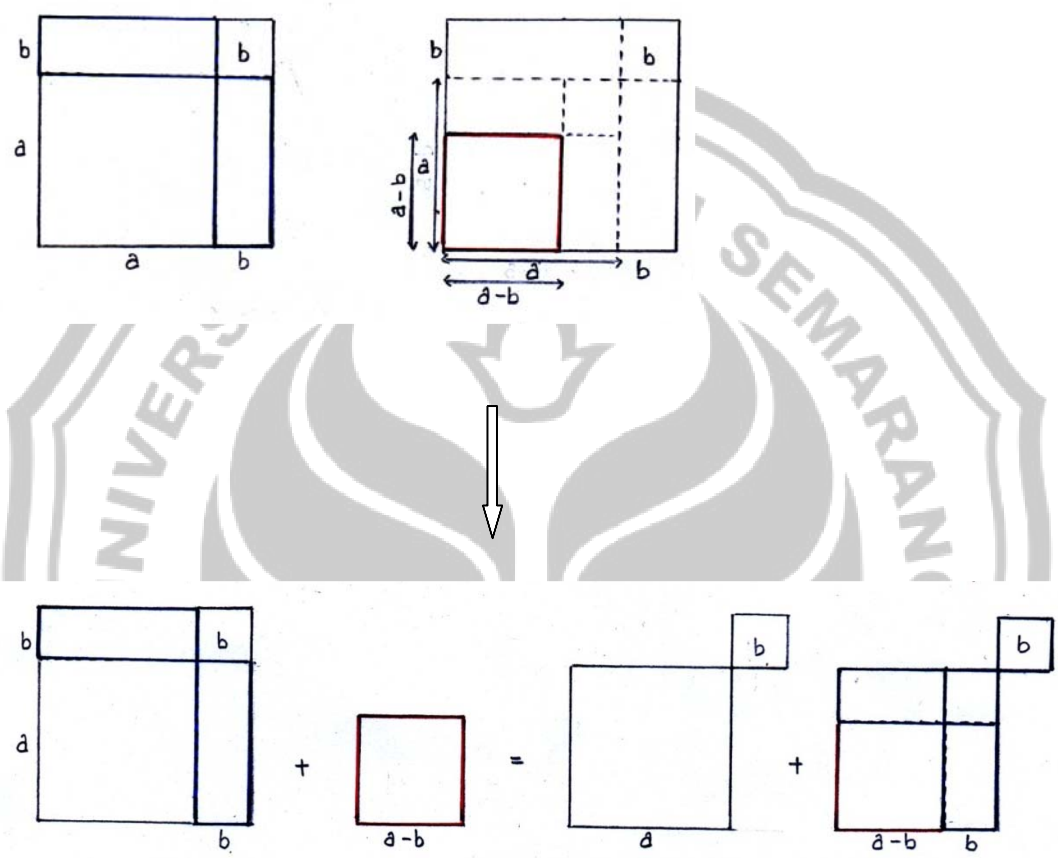
Pada gambar di atas luas persegi dengan panjang sisi x ditambahkan dengan persegi panjang dengan panjang x dan lebar a, hasilnya sama dengan luas persegi dengan panjang sisi x ditambahkan dengan persegi panjang dengan panjang sisi x dan lebar a yang dibagi menjadi 2 (dua) bagian sama dengan luas persegi dengan panjang sisi $(x+\frac{a}{2})$ dikurangi $(\frac{a}{2})^2$.

Teorema 2.

Buktikan $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$

Bukti:

Dipunyai:



Gambar pada pembuktian Teorema 2 di atas menjelaskan tentang luas persegi dengan panjang sisi $(a+b)^2$ jika ditambahkan dengan luas persegi dengan panjang sisi $(a-b)^2$, maka hasilya sama dengan 2 (dua) kali luas persegi dengan panjang sisi a ditambah luas persegi dengan panjang sisi b atau $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$.

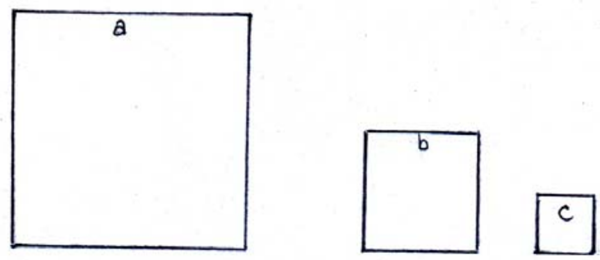
Teorema 3.

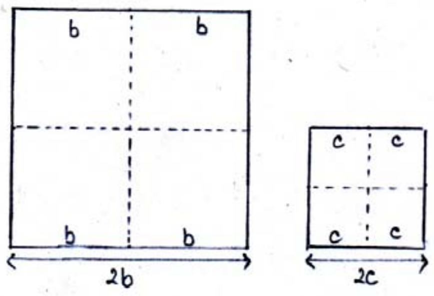
Buktikan

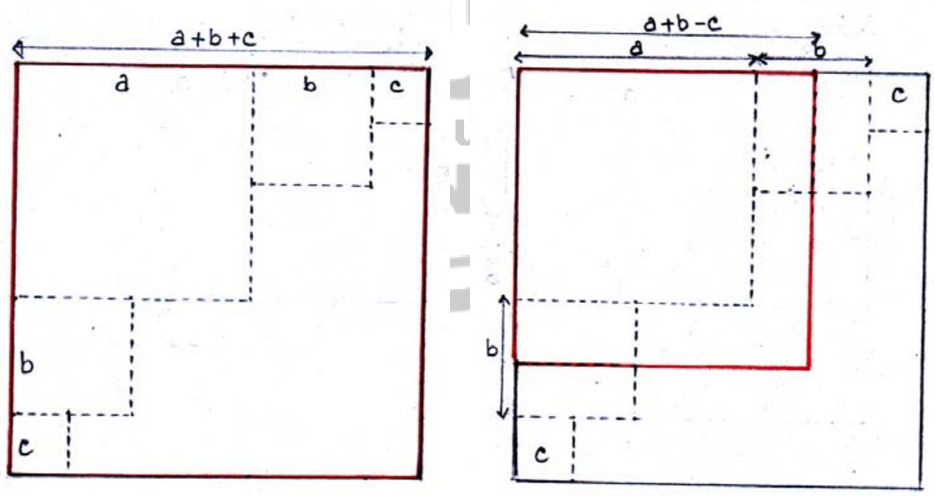
$(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(a-b-c)^2=(2a)^2+(2b)^2+(2c)^2$

Bukti:

Dipunyai:








a-b+c
a-b
a
b
c
a-b-c
a-b
a+b+c
a-b+c
2c
2b
a+b-c
a-b+c
a-b-c
a+b-c
a-b+c
a-b+c
a+b-c
2a
2b
2c

Gambar (ii)

Gambar (ii) di atas menjelaskan tentang hasil dari jumlahan keempat luas persegi yang memiliki panjang sisi (a+b+c), (a+b-c), (a-b+c), dan (a-b-c) yang hasilnya sama dengan luas persegi dengan panjang sisi 2a ditambah luas persegi dengan panjang sisi 2b ditambah luas persegi dengan panjang sisi 2c atau secara gambar yaitu dengan memindahkan persegi dengan panjang sisi (a+b-c) ke ruas kiri kemudian persegi dengan panjang sisi 2b dikeluarkan. Persegi dengan panjang sisi (a-b+c) diletakkan di bagian kanan atas menggantikan posisi persegi dengan panjang sisi 2c. Terakhir memindahkan persegi dengan panjang sisi (a-b-c) tepat di bawah persegi dengan panjang sisi (a-b+c). Pada gambar (ii) terlihat bahwa luas persegi yang memiliki panjang sisi (a+b+c), (a+b-c), (a-b+c), dan (a-b-c) atau

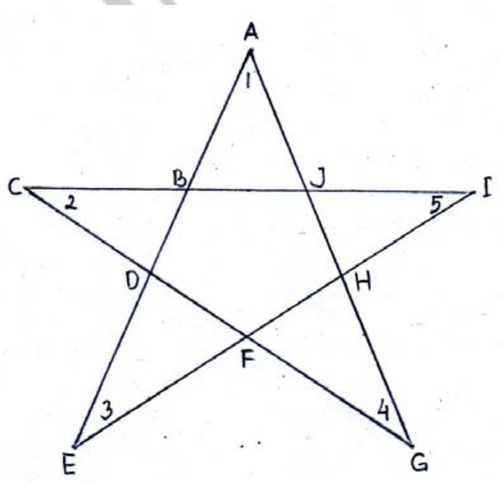
$$(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(a-b-c)^2=(2a)^2+(2b)^2+(2c)^2$$

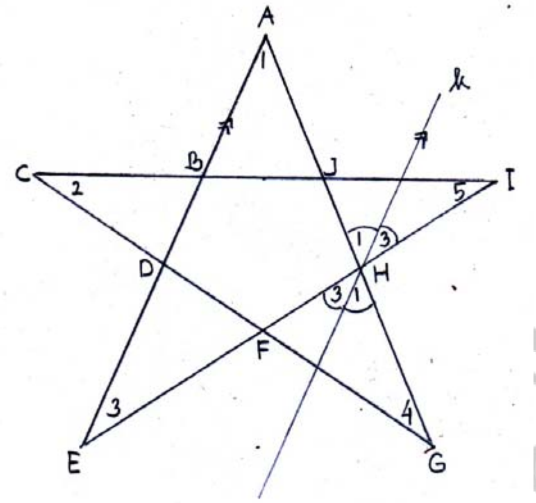
4.1.3 Bukti Tanpa Kata pada Bidang Geometri

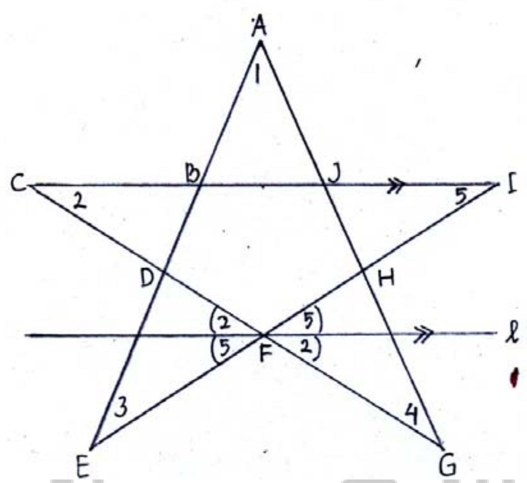
Teorema 1.

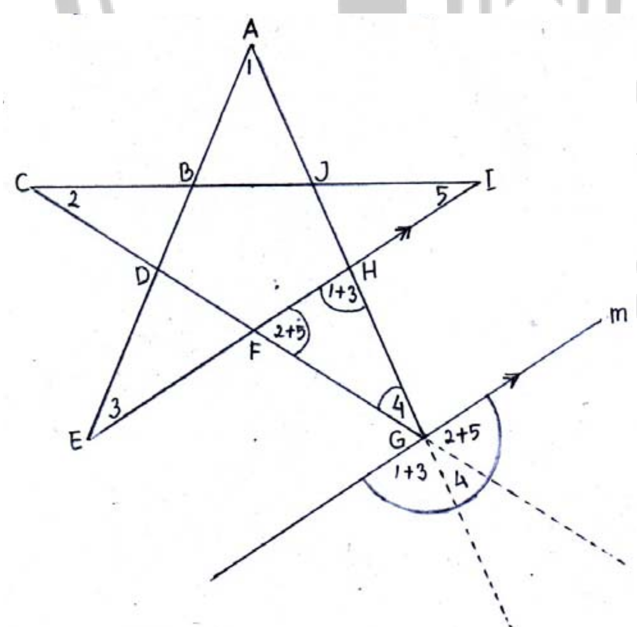
Buktikan jumlah sudut dalam segitiga sama dengan 180°.

Bukti:




A
k
B
J
C
I
2
5
1
3
D
H
3
1
F
3
4
E
G

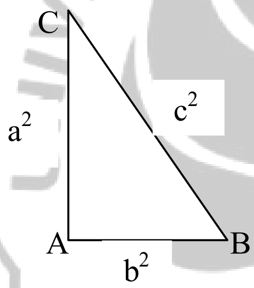

A
1
B
J
C
I
2
5
D
H
2
5
l
5
2
F
3
4
E
G


A
1
B
J
C
I
2
5
D
H
1+3
2+5
F
m
3
4
E
G
2+5
1+3
4

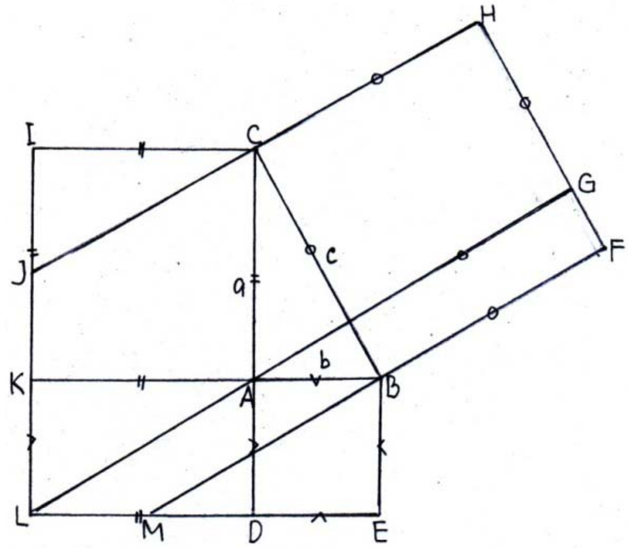
Penjelasan dari gambar Teorema 1 bidang geometri di atas yaitu untuk menentukan jumlah sudut dalam segitiga dibuktikan dengan cara membuat garis melalui H sejajar AE pada gambar bintang namakan k dengan tujuan untuk memindahkan $\angle 1$ dan $\angle 3$. Kemudian untuk memindahkan $\angle 2$ dan $\angle 5$ buat garis melalui F sejajar CI namakan l. Setelah keempat sudut dipindahkan lalu buat 1 garis lagi melalui G sejajar EI namakan m dengan tujuan untuk memindahkan $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, dan\ \angle 5$ ke dalam garis m tersebut tentunya dengan definisi sudut sehadap dan sudut bertolak belakang.

Teorema 2.

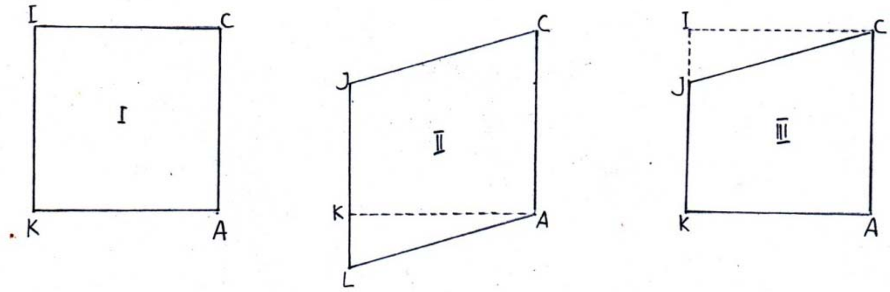
Pada segitiga siku-siku, buktikan $c^2 = a^2 + b^2$



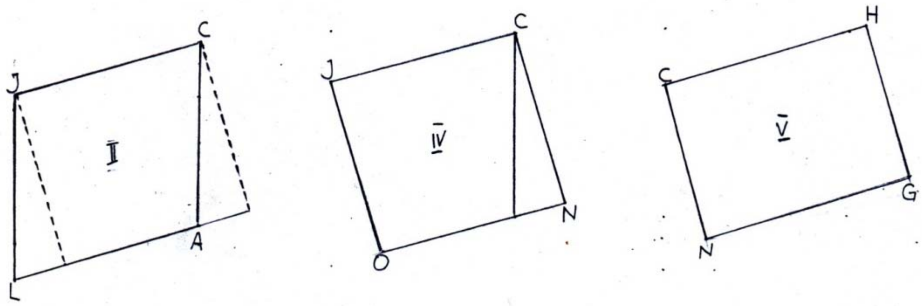
Bukti:



Untuk membuktikan Teorema 2 di atas secara gambar dilakukan dengan cara kesebangunan sebagai berikut:

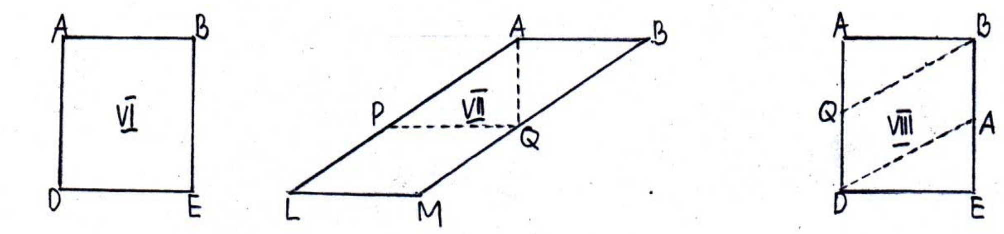


Dari gambar di atas diperoleh luas gambar I = luas gambar II (i)

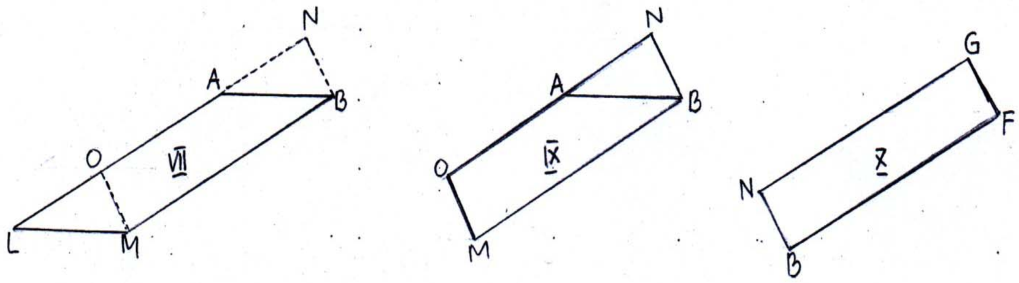


Dari gambar di atas diperoleh luas gambar II = luas gambar V (ii)

Dari (i) dan (ii) diperoleh luas gambar I = luas gambar V (iii)



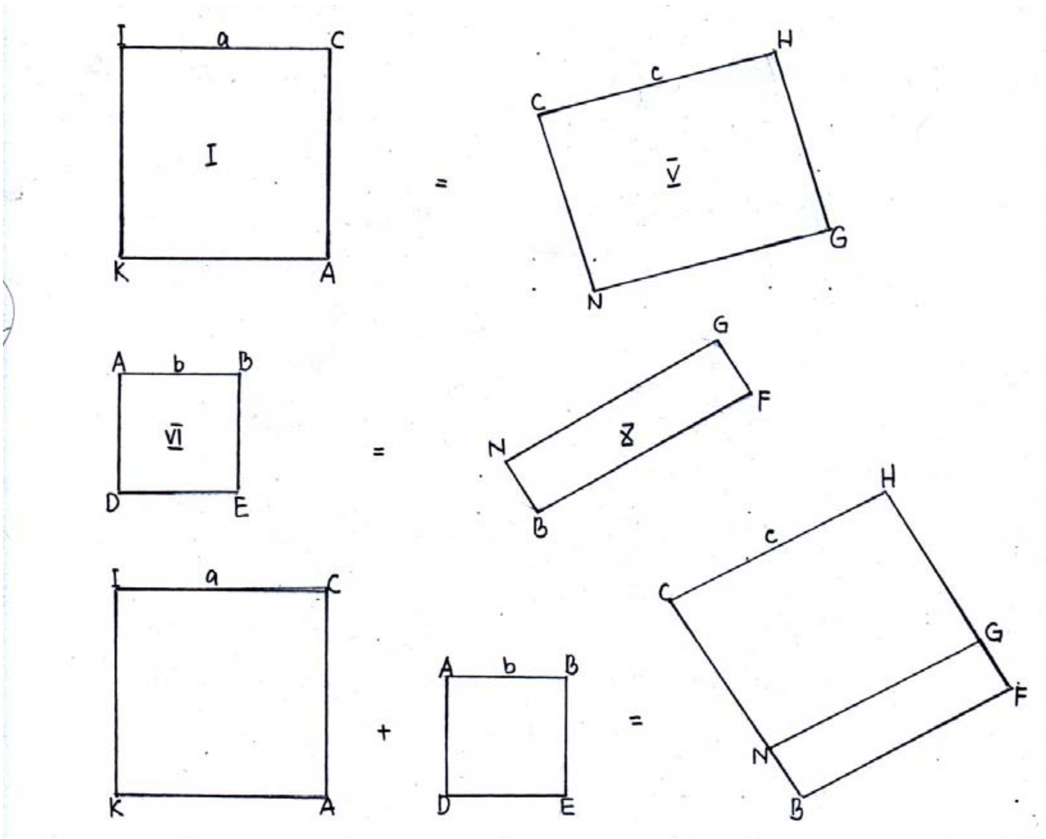
Dari gambar di atas diperoleh luas gambar VI = luas gambar VII (iv)



Dari gambar di atas diperoleh luas gambar VII = luas gambar X (v)

Dari (iv) dan (v) diperoleh luas gambar VI = luas gambar X (vi)

Dari (iii) dan (vi) diperoleh:

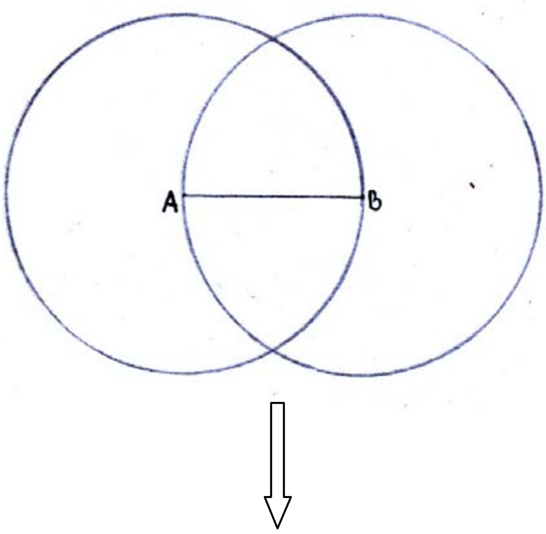


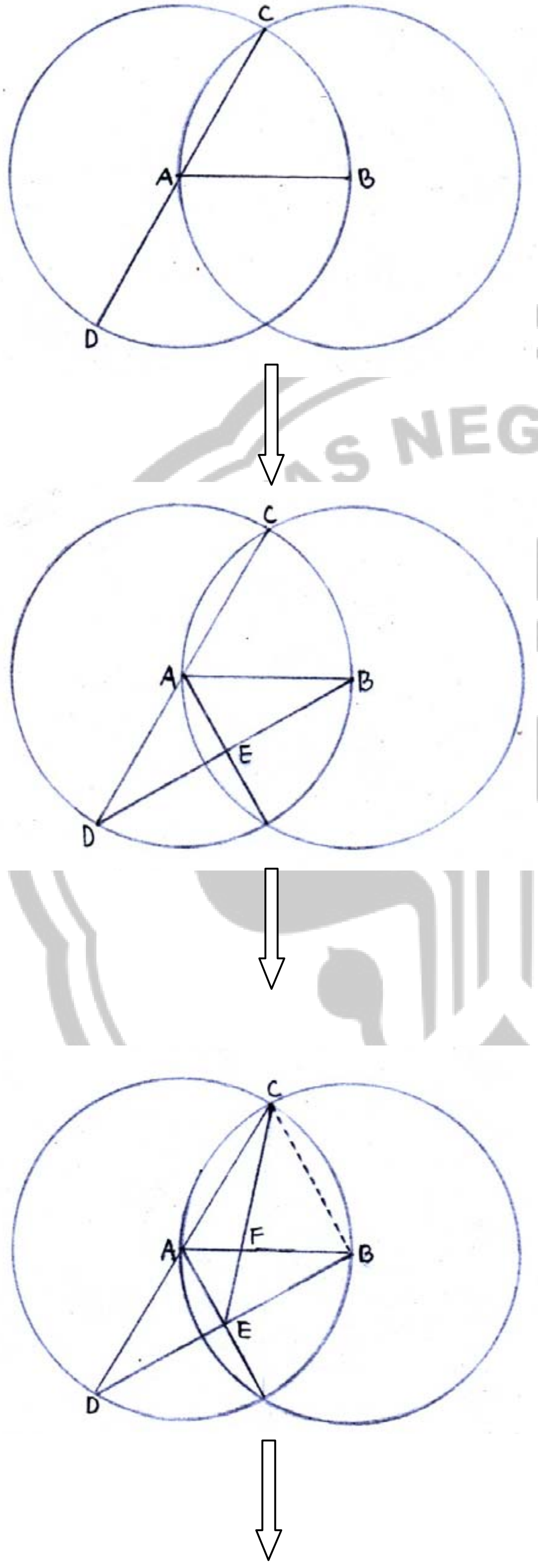
Jadi $a^2 + b^2 = c^2$ atau $c^2 = a^2 + b^2$

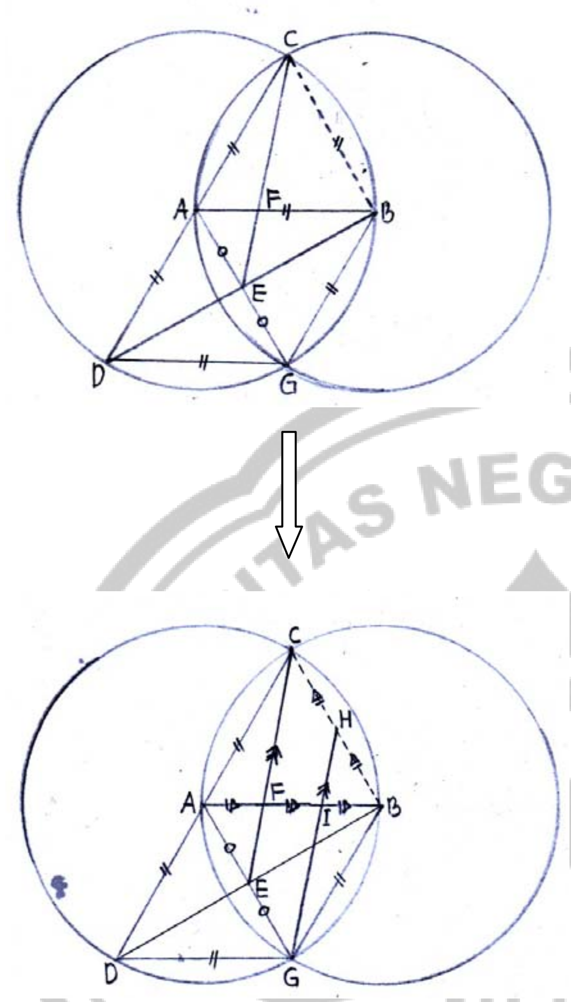
Teorema 3.

Buktikan perpotongan garis berat dalam satu segitiga perbandingannya 2:1.

Bukti:




C
A
B
D
C
A
B
E
D
C
F
A
B
E
D



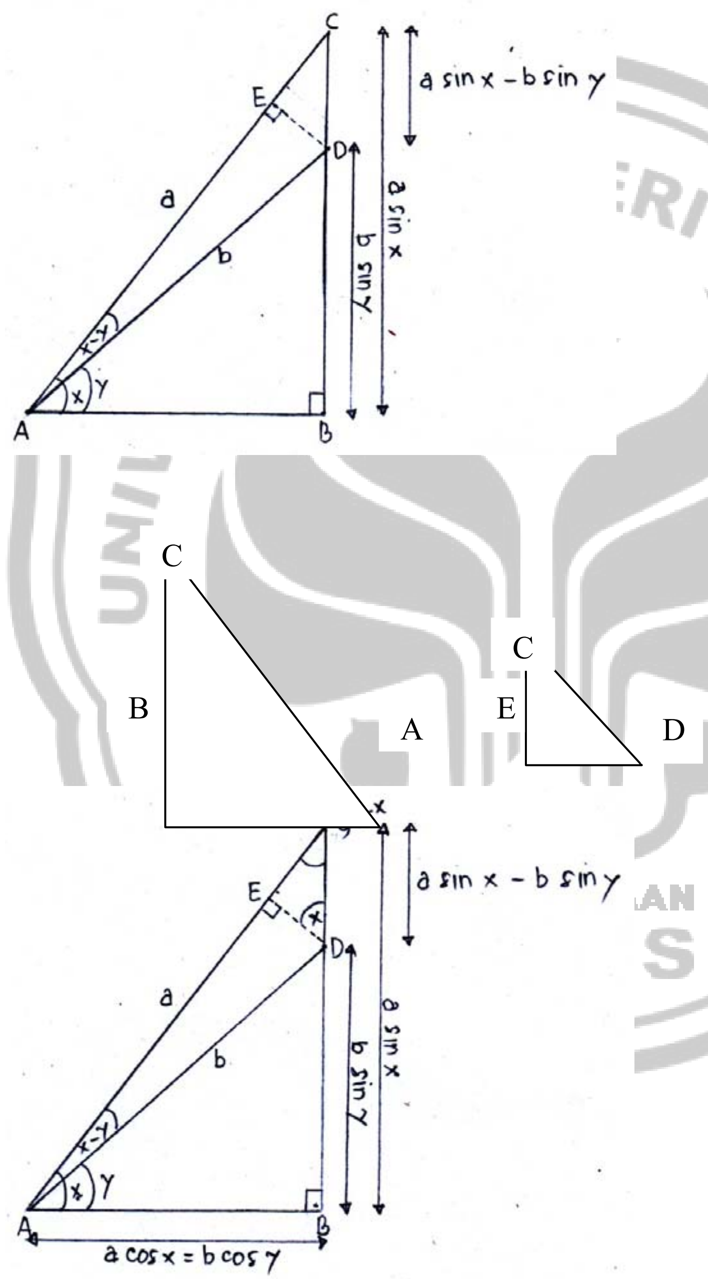
Untuk mengetahui $\overline{AF} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ dapat dibuktikan dengan cara menarik garis DG dan GB sehingga ADGB belah ketupat karena AD = DG = GB = BA (jari-jari). Karena ADGB belah ketupat, maka AE = EG. Kemudian tarik garis dari G sejajar CE pada $\overline{CB}$ namakan GH. Jelas FI = IB karena $GH \parallel EC$ dan CH = HB (EGHC jajargenjang). Jelas AF = FI karena $GH \parallel EC$ dan AE = EG. Jadi AF = FI = IB atau $\overline{AF} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.

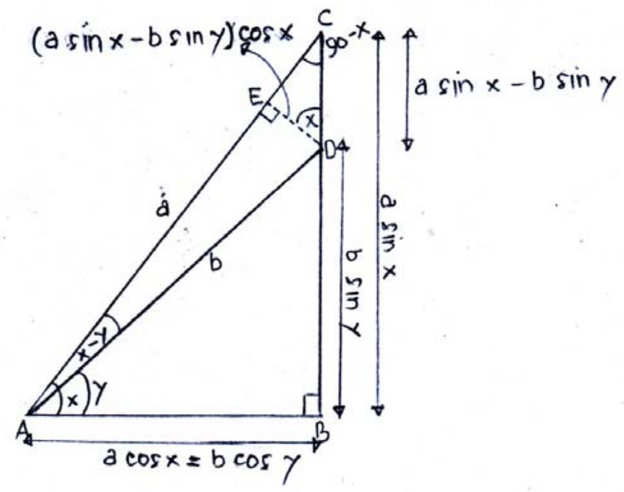
4.1.4 Bukti Tanpa Kata pada Bidang Trigonometri

Teorema 1.

Buktikan sin (x-y) = sin x cos y – cos x sin y.

Bukti:



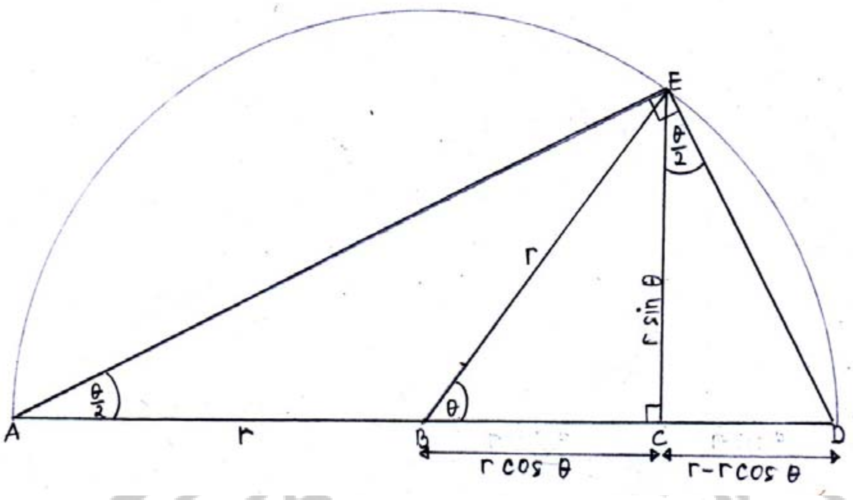


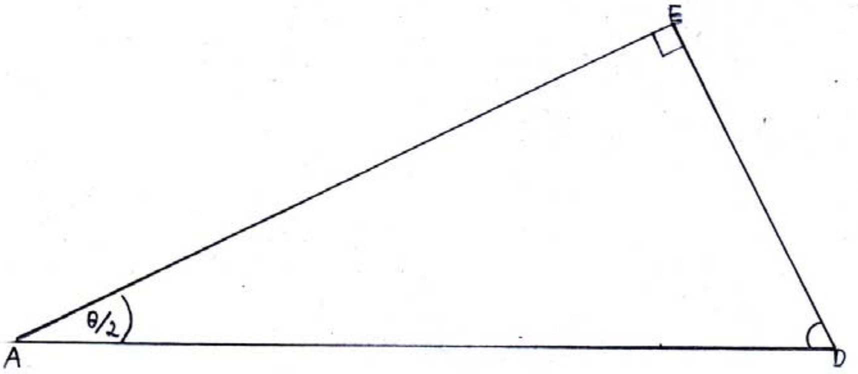
Penjelasan dari gambar Teorema 1 bidang trigonometri di atas yaitu untuk membuktikan sin (x-y) dengan cara membagi ED dengan AD. Untuk mencari panjang ED dilakukan kesebangunan $\Delta ABC\ dan\ \Delta DEC$. Karena $\Delta ABC \cong \Delta DEC$ $(\angle C = \angle C\ dan\ \angle B = \angle E(siku - siku))$, maka $\angle D = \angle A$ dan ED = (a sin x-b sin y) cos x. Jadi sin (x-y) = $\frac{ED}{AD} = \frac{ED}{b} = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.

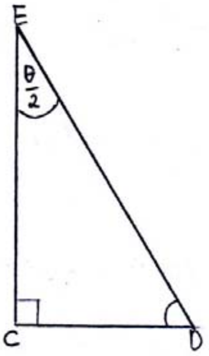
Teorema 2.

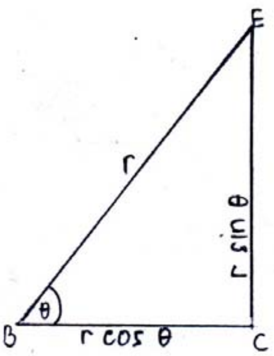
Buktikan $tan\frac{\theta}{2} = \frac{sin\theta}{1+cos\theta} = \frac{1-cos\theta}{sin\theta}$.

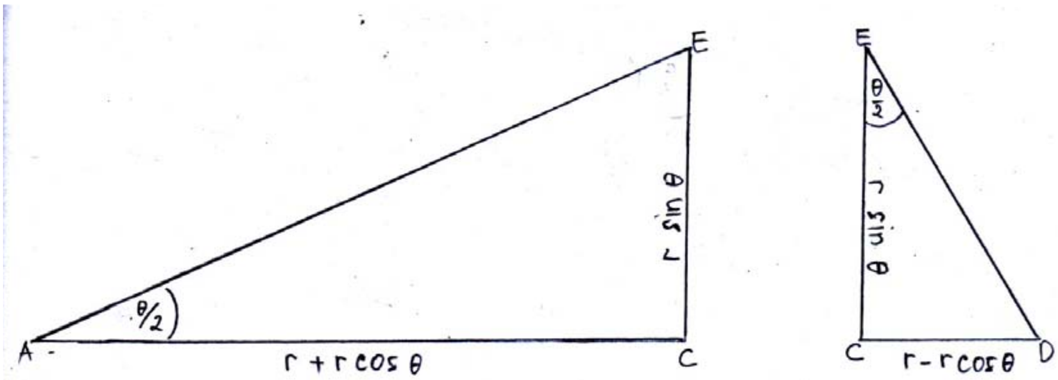
Bukti:


E
θ/2
r
r sin θ
θ/2
θ
A
r
B
C
D
r cos θ
r−r cos θ


E
θ/2
A
D


E
θ/2
C
D


E
r
r sin θ
θ
B
r cos θ
C



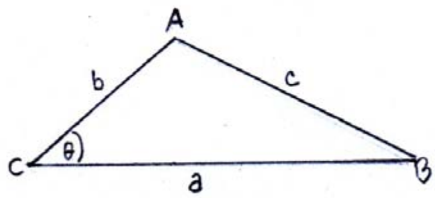
Penjelasan dari gambar Teorema 2 bidang trigonometri di atas yaitu dengan menyebangunkan $\Delta ADE\ dan\ \Delta CDE$. Karena $\Delta ADE \cong \Delta CDE$ $(\angle ADE = \angle CDE\ dan\ \angle AED = \angle ECD(siku - siku))$, maka $\angle EAD = \angle CED$.

Jadi $tan\frac{\theta}{2} = \frac{sin\theta}{1+cos\theta} = \frac{1-cos\theta}{sin\theta}$.

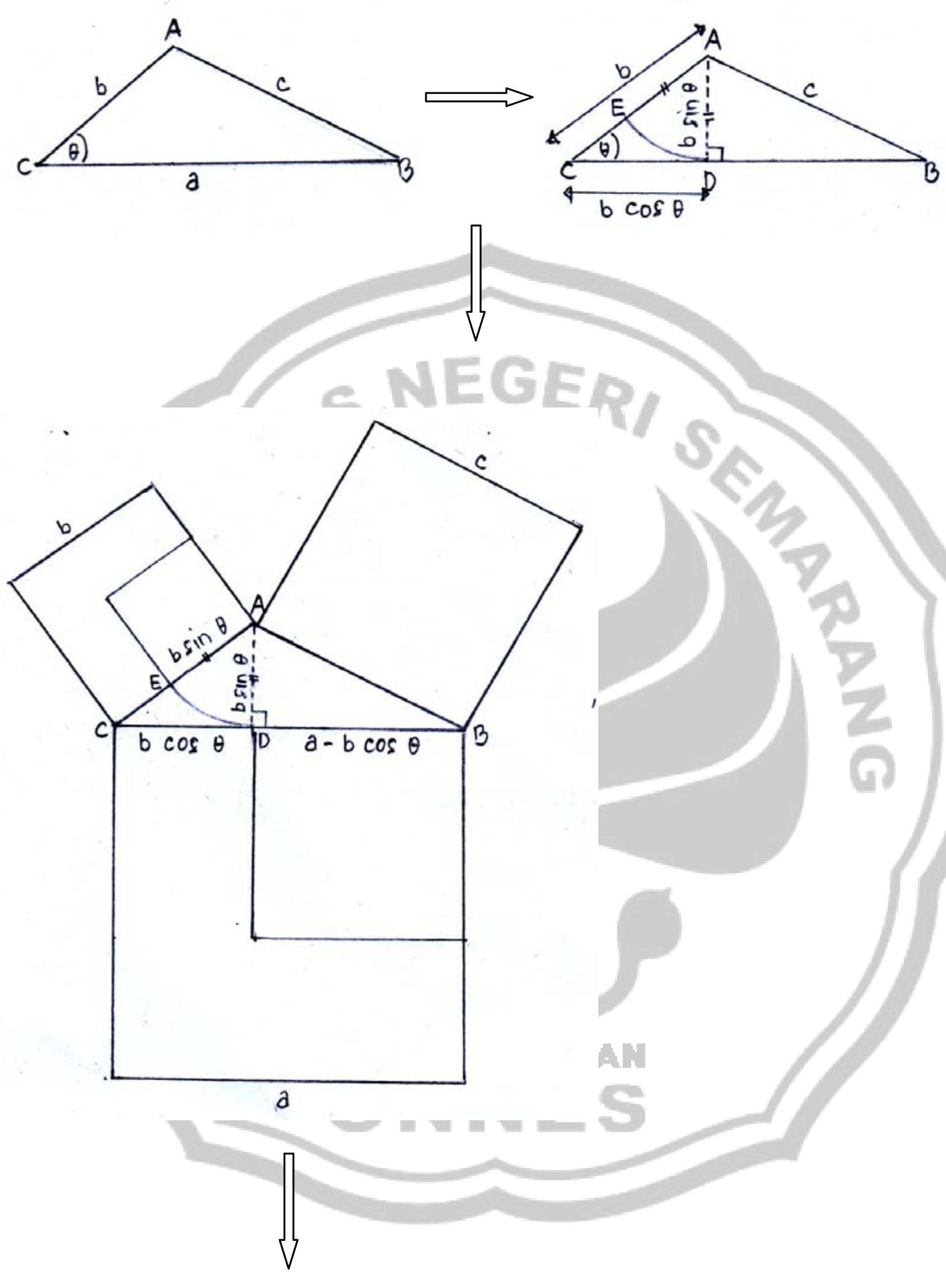
Teorema 3.

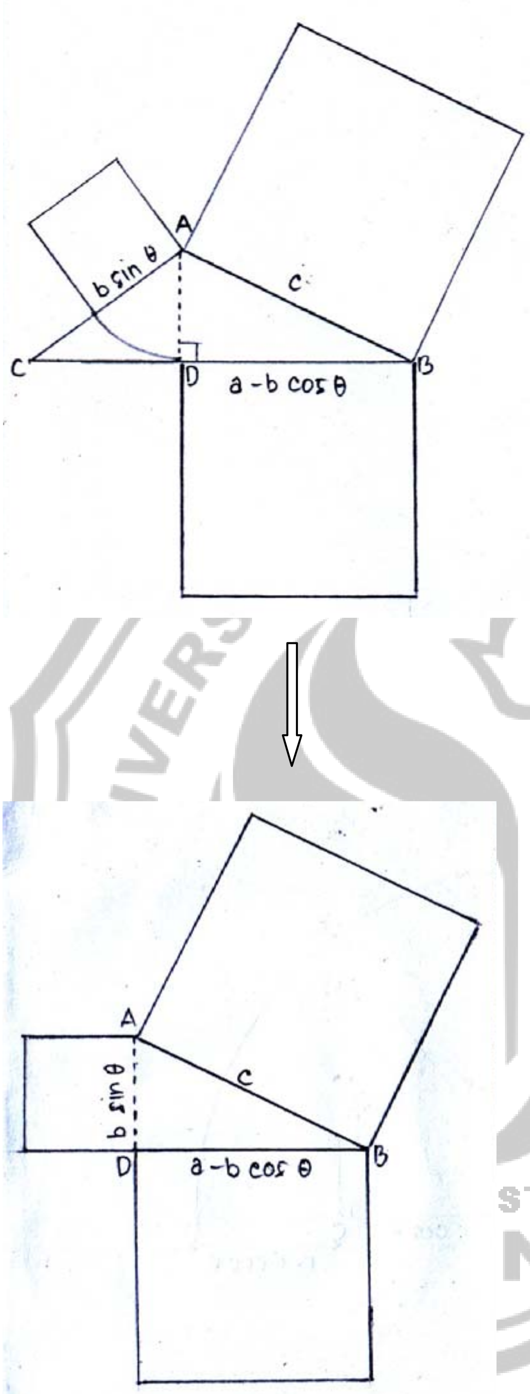
Buktikan $c^2 = (b\ sin\theta)^2 + (a - b\ cos\theta)^2$

$= a^2 + b^2 - 2ab\ cos\theta$.



Bukti:





Pembuktian secara gambar pada Teorema 2 di atas ditunjukkan dengan cara menarik garis dari $A \perp CB$ pada ΔACB namakan AD. Kemudian pindahkan AD pada sisi AC namakan AE. AD = AE = $b \sin\theta$ karena berada di depan $\angle\theta$.

Jelas DB = $a - b\cos\theta$ karena CB = a dan CD = $b\cos\theta$. Jadi $c^2 = (b\sin\theta)^2 + (a - b\cos\theta)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$.

4.2 Pembahasan

Dari hasil penelitian di atas terlihat bahwa bukti tanpa kata mampu memberi gambaran pada kita untuk dapat menentukan strategi apa yang tepat digunakan dalam membuktikan suatu teorema secara deduktif. Selain bukti tanpa kata lebih menarik dipahami, pembuktian yang secara garis besar menekankan pada aspek visualisasi secara ilmiah mampu meningkatkan intuisi, peningkatan intuisi diyakini dapat mempermudah proses pembuktian teorema secara deduktif.

Beberapa teorema yang dibuktikan menggunakan bukti tanpa kata, sebagian masih tetap menggunakan keterangan analitis, fakta ini dapat dilihat pada pembuktian teorema bidang trigonometri. Hal inilah yang merupakan kelemahan pembuktian teorema menggunakan bukti tanpa kata. Secara hirarki pembuktian tanpa kata berada pada level 1 tingkatan pembuktian. Bukti tanpa kata termasuk dalam bukti secara induktif yang menekankan pembuktian dengan membuat pola-pola tertentu selanjutnya digeneralisasikan menjadi rumus umum seperti yang terlihat pada pembuktian teorema penjumlahan n bilangan bulat positif pertama. Pada teorema tersebut, proses pembuktian dimulai dengan mentransformasi nilai bilangan ke dalam pola gambar yang jumlahnya sesuai dengan nilai dari bilangan tersebut, setelah diperbanyak pola tersebut membentuk persegi panjang dengan panjang n+1 dan lebar n sehingga banyaknya n bilangan genap positif pertama adalah n * (n + 1) = n^2 + n.

Dalam membuktikan jumlah sudut puncaknya, pembuktikan tanpa kata dilakukan dengan memanfaatkan hubungan sudut dalam dalam dengan sudut luar segitiga dan teorema kesejajaran garis lurus pada R^2. Langkahnya adalah mengumpulkan kelima sudut puncak pada gambar bintang dalam satu segitiga tepi gambar bintang tersebut, karena kelima sudut puncak tersebut termuat dalam satu segitiga utuh, maka jumlah sudut puncak bintang = 180^0.

Dalam membuktikan teorema *Pythagoras* pembuktikan tanpa kata dilakukan dengan memanfaatkan aturan kesebangunan segitiga, dan penjumlahan luas bangun persegi yang panjang sisinya sama dengan panjang sisi-sisi segitiga siku-siku selanjutnya membentuk jajargenjang yang panjang alas dan tingginya sama dengan panjang sisi-sisi tegak dalam segitika siku-siku. Dengan menyamakan luas persegi dengan luas jajar genjang yang ada panjang sisinya sama dengan panjang sisi-sisi tegak segitiga siku-siku, diperoleh hasil jumlah luas persegi yang panjang sisinya sama dengan panjang sisi-sisi tegak dalam segitiga siku-siku sama dengan luas persegi yang terbentuk dari sisi miring segitiga siku-siku yang sama. Matematika yang pada dasarnya merupakan pelayan bagi semua ilmu pengetahuan sudah sepantasnya wajib diketahui oleh seluruh pemburu ilmu pengetahuan dalam bidang apapun. Dengan kata lain matematika wajib diketahui, dimengerti, dan dipahami oleh semua kalangan. Hasil yang tertuang dalam hasil penelitian ini membuktikan bahwa metode pembuktian tanpa kata merupakan solusi alternatif untuk dijadikan sebagai cara membuktikan teorema-teorema matematika agar dapat dipahami oleh semua orang dari berbagai macam bidang ilmu.

BAB 5

SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada skripsi ini, maka dapat diambil simpulan sebagai berikut.

Bukti tanpa kata pada bidang aritmetika didasarkan pada pembuktian sederhana yaitu *fubini*, misalnya:

1) Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = n^2 + n$.
2) Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $1+2+ \ldots +(n-1)+ n + (n-1) + 2 + 1 = n^2$.

Bukti tanpa kata pada bidang aljabar didasarkan pada operasi penjumlahan dan pengurangan luas bangun, misalnya:

1) $x^2 + ax = (x + a/2)^2 - (a/2)^2$.
2) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$.
3) $(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (a-b-c)^2 = (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2$.

Bukti tanpa kata pada bidang geometri didasarkan pada penjumlahan sudut, pembuktian teorema pythagoras dengan cara kesebangunan, dan pembuktian teorema garis berat, garis bagi, dan garis tinggi pada segitiga, misalnya:

1) Jumlah sudut dalam segitiga sama dengan 180^o.

2) Pada segitiga siku-siku, kuadrat hipotenusa (sisi miring) adalah sama dengan jumlah kuadrat dari kaki-kakinya (sisi-sisi yang saling tegak lurus).
3) Perpotongan garis berat dalam satu segitiga perbandingannya 2:1.

Bukti tanpa kata pada bidang trigonometri didasarkan pada operasi pengurangan, pembagian, dan teorema pythagoras pada fungsi trigonometri, misalnya:

1) sin (x-y) = sin x cos y – cos x sin y.
2) $tan\frac{\theta}{2} = \frac{sin\theta}{1+cos\theta} = \frac{1-cos\theta}{sin\theta}$.
3) $c^2 = (b\ sin\theta)^2 + (a - b\ cos\theta)^2$

   $= a^2 + b^2 - 2ab\ cos\theta$.

5.2 Saran

Sebaiknya jika memungkinkan sebelum melakukan pembuktian secara deduktif, maka di awali dengan pembuktian tanpa kata karena langkah ini terbukti dapat meningkatkan ide, gagasan, dan intuisi yang pada nantinya dapat mempermudah pembuktian secara deduktif.

DAFTAR PUSTAKA

Alsina and Nelsen, R.B. 2010. *An Invitation to Proofs Without Words.* European Journal Of Pure And Applied Mathematics
Vol. 3, No. 1, 2010, 118-127 ISSN 1307-5543 – www.ejpam.com

Baeti, Nur. 2010. *Skripsi Bukti Kombinatorial Tanpa Kata*. Semarang.

Barttle, Robet G and Serbet, D.R. 1994. *Intrduction to real analysis,* second editon, Jhon Willey & sons, New York.

Faires, Douglas. 2007. *Langkah Pertama Menuju Olimpiade Matematika Menggunakan Kompetisi Matematika Amerika*. Bandung: Pakar Raya Pustaka.

Gierdien, M.F. 2007. *From 'proofs without words' to 'proofs that explain' in secondary mathematics.* Stellenbosch University.

Hernadi, Julan. 2009. *Metoda Pembuktian Dalam Matematika*. http://julanhernadi.files.wordpress.com/2009/12/method-of-proof.pdf (16 April 2010).

Iskandar, Kasir. 1956. *Seri Buku Schaum Teori & Soal-soal Matematika Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Kusni. 2003. *Geometri*. Semarang: UNNESPRESS

Mulyati, Sri. 1996. *Geometri Euclid*. Malang: Universitas Negeri Malang.

Munir, Rinaldi. 2001. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika

Nelsen, R. 1993. *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. Mathematical Association of America, Washington. http://www.xiaoe.org/data/2009-10-06/prfwithout.pdf (17 Juli 2010).

Siang, Jong Jek. 2004. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Andi.

Wallance. 1972. *Geometri*.

http://Wallance.files.wordpress.com/1972/1/geometri.doc (12 Desember 2010)