PENERAPAN KOMBINASI METODE *RIDGE REGRESSION* (RR) DAN METODE *GENERALIZED LEAST SQUARE* (GLS) UNTUK MENGATASI MASALAH MULTIKOLINEARITAS DAN AUTOKORELASI

Skripsi

disusun sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

Irfan Nurdin

4111412018

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2016

PERYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan.

Semarang, 14 Juni 2016

METERAI TEMPEL 527DEADF663197347 6000 ENAM RIBU RUPIAH

Irfan Nurdin

NIM 4111412018

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Penerapan Kombinasi Metode *Ridge Regression* (RR) dan Metode *Generalized Least Square* (GLS) untuk Mengatasi Masalah Multikolinearitas dan Autokorelasi

disusun oleh

Irfan Nurdin

4111412018

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES pada tanggal 14 Juni 2016.

Panitia:

Ketua	Sekertaris
Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si., Akt	Drs. Arief Agoestanto, M.Si.
NIP 196412231988031001	NIP 196807221993031005

Ketua Penguji

Drs. Arief Agoestanto, M.Si.

NIP 196807221993031005

Anggota Penguji / Pembimbing I	Anggota Penguji / Pembimbing II
Drs. Sugiman, M.Si.	Dra. Sunarmi, M.Si.
NIP 196401111989011001	NIP 195506241988032001

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

- Maka nikmat Tuhan kamu manakah yang kamu dustakan? (QS. Ar-Rahman: 55).
- Saya tidak cerdas, tapi saya mau bekerja keras.

PERSEMBAHAN

- Untuk kedua orang tua tercinta Ibu Fatimah dan Bapak Didin.
- Untuk Kakak-Kakakku tersayang, Faisal Herdiansyah dan Arief Wahyudin.
- Untuk Aldila Febri Hidayatul Haqque.
- Untuk teman-teman Matematika Angkatan 2012.
- Untuk teman-teman PKL BPS Surakarta.
- Untuk teman-teman KKN Alternatif 2A Gula Aren.
- Untuk Universitas Negeri Semarang (UNNES).

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan nikmat dan karunia-Nya serta kemudahan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Penerapan Kombinasi Metode *Ridge Regression* (RR) dan Metode *Generalized Least Square* (GLS) untuk Mengatasi Masalah Multikolinearitas dan Autokorelasi".

Penyusunan skripsi ini dapat diselesaikan berkat kerjasama, bantuan dan dorongan dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum., Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si., Akt., Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si., Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
4. Drs. Mashuri, M.Si., Ketua Prodi Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
5. Drs. Sugiman, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, nasehat, saran dan dorongan selama penyusunan skripsi ini.

6. Dra. Sunarmi, M. Si., selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, nasehat, saran dan dorongan selama penyusunan skripsi ini.
7. Drs. Arief Agoestanto, M.Si., selaku Dosen Penguji yang telah memberikan penilaian dan saran dalam perbaikan skripsi ini.
8. Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si., selaku Dosen Wali saya sejak Semester 1 hingga sekarang yang telah memberikan bimbingan dan arahan.
9. Staf Dosen Matematika Universitas Negeri Semarang yang telah membekali penulis dengan berbagai ilmu selama mengikut perkuliahan sampai akhir penulisan skripsi ini.
10. Staf Tata Usaha Universitas Negeri Semarang yang telah membantu penulis selama mengikuti perkuliahan dan penulisan skripsi ini.
11. Ibu dan Bapak tercinta, Ibu Fatimah dan Bapak Didin yang senantiasa memberikan dukungan dan doa yang tiada putusnya.
12. Kakak-Kakakku tersayang, Faisal Herdiansyah dan Arief Wahyudin yang selalu memberikan semangat dan doa.
13. Teman terbaikku, Aldila Febri Hidayatul Haqque yang memberikan dukungan, semangat dan doa.
14. Teman-teman Matematika angkatan 2012 yang berjuang bersama untuk mewujudkan cita-cita.
15. Teman-teman kontrakan “SSH” yang memberikan dukungan, semangat dan doa.
16. Teman-teman PKL BPS Surakarta yang memberikan semangat dan doa.

17. Teman-teman KKN Alternatif 2A 2015 Gula Aren, Desa Leban, Boja, Kendal yang memberikan semangat dan doa.
18. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah memberikan bantuan.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari pembaca.

Semarang, 14 Juni 2016

Penulis

ABSTRAK

Nurdin, Irfan. 2016. *Penerapan Kombinasi Metode Ridge Regression (RR) dan Metode Generalized Least Square (GLS) untuk Mengatasi Masalah Multikolinearitas dan Autokorelasi.* Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Pembimbing Utama Drs. Sugiman, M. Si. dan Pembimbing Pendamping Dra. Sunarmi, M. Si.

Kata Kunci: Analisis Regresi, *Ridge Regression* (RR), *Generalized Least Square* (GLS), Multikolinearitas, Autokorelasi.

Analisis regresi merupakan salah satu metode analisis data dalam statistika yang seringkali digunakan untuk mengkaji hubungan antara beberapa variabel dan meramal suatu variabel. Salah satu asumsi analisis regresi linear berganda yaitu tidak terjadi masalah autokorelasi. Apabila terjadi masalah autokorelasi, metode *Generalized Least Square* (GLS) merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mengatasi masalah autokorelasi. Adapun analisis regresi linear berganda diasumsikan tidak terjadi masalah multikolinearitas. Apabila terjadi masalah multikolinearitas, metode *Ridge Regression* (RR) merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mengatasi masalah multiokolinearitas. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui: (1) penerapan metode *Ridge Regression* (RR) untuk mengatasi masalah multikolinearitas; (2) penerapan metode *Generalized Least Square* (GLS) untuk mengatasi masalah autokorelasi; (3) persamaan model regresi terbaik dengan kombinasi metode *Ridge Regression* (RR) dan metode *Generalized Least Square* (GLS) pada jumlah uang yang beredar.

Metode *Ridge Regression* (RR) dan *Generalized Least Square* (GLS) pada data jumlah uang yang beredar dengan menetapkan tetapan bias k pada proses pengestimasian regresi *ridge* selanjutnya menentukan nilai koefisien autokorelasi (ρ) berdasarkan nilai dw, AR(1) residual dan *Cochrane Orcutt Iterative Procedure* serta dengan mentransformasikan variabel Y^* dan X^*. Persamaan model regresi terbaik dilihat dari nilai dw yang mendekati selang $dU < d < 4 - dU$ dan nilai VIF < 5. Hasil penelitian estimasi *Ridge Regression* (RR) pada jumlah uang yang beredar diperoleh nilai $k = 0{,}02$ dengan nilai VIF sebesar 4,6671. Sedangkan, hasil estimasi *Generalized Least Square* (GLS) pada jumlah uang yang beredar diperoleh persamaan model regresi berdasarkan nilai dw, AR(1) residual, dan *Cochrane Orcutt Iterative Procedure* masing-masing adalah $\hat{Y}^* = -298798{,}093 - 2{,}359X_1^* + 6001{,}192X_2^*$; $\hat{Y}^* = -317886{,}166 - 8{,}411X_1^* + 6536{,}631X_2^*$; dan $\hat{Y}^* = -297991{,}146 - 2{,}357X_1^* + 6001{,}14X_2^*$. Sehingga, untuk model regresi terbaik adalah $\hat{Y}^* = -317886{,}166 - 8{,}411X_1^* + 6536{,}631X_2^*$.

Penelitian selanjutnya dapat menggunakan metode *Ridge Regression* (RR) dengan penduga koefisien regresi melalui pendekatan non-iteratif yang diusulkan

oleh Hemmerle (1975) dan model terbaik dapat juga dilihat dengan mempertimbangkan nilai MSE (*Mean Square Error*) terkecil dan nilai R^2 terbesar.

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Statistika banyak digunakan dalam memecahkan masalah kehidupan sehari-hari, baik dalam bidang ekonomi, kedokteran, kesehatan, kependudukan, psikologi, sosial, maupun bidang-bidang yang lain. Terdapat banyak metode dalam statistika, diantaranya adalah analisis regresi. Analisis regresi merupakan salah satu metode analisis data dalam statistika yang seringkali digunakan untuk mengkaji hubungan antara beberapa variabel dan meramal suatu variabel (Kutner *et al.*, 2004).

Istilah "regresi" pertama kali dikemukan oleh Sir Francis Galton (1822-1911), seorang antropolog dan ahli meteorologi terkenal dari Inggris. Dalam makalahnya yang berjudul "*Regression toward mediocrity in hereditary stature*", yang dimuat dalam *Journal of the Anthropological Institute,* volume 15, hal. 246-263, tahun 1885. Galton menjelaskan bahwa biji keturunan tidak cenderung menyerupai biji induknya dalam hal besarnya, namun lebih medioker (lebih mendekati rata-rata) lebih kecil daripada induknya kalau induknya besar dan lebih besar daripada induknya kalau induknya sangat kecil (Draper *et al.*, 1992).

Menurut Iriawan (2006: 199), bahwa analisis regresi sangat berguna dalam penelitian antara lain: (1) model regresi dapat digunakan untuk mengukur kekuatan hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor, (2) model regresi dapat digunakan untuk mengetahui pengaruh suatu atau beberapa variabel prediktor terhadap variabel respon, (3) model regresi berguna untuk memprediksi pengaruh suatu variabel atau beberapa variabel prediktor terhadap variabel respon.

Tujuan analisis regresi yaitu mengetahui sejauh mana hubungan sebuah variabel bebas dengan beberapa variabel tak bebas. Bila dalam analisisnya hanya melibatkan sebuah variabel bebas, maka analisis yang digunakan adalah analisis regresi linear sederhana. Sedangkan, apabila analisisnya melibatkan lebih dari satu variabel bebas, maka analisis yang digunakan adalah analisis regresi linear berganda (Pasaribu *et al.*, 2015).

Adapun asumsi-asumsi yang harus dipenuhi pada analisis regresi klasik yaitu memenuhi asumsi normalitas dengan melihat nilai $p - p$ plot, apabila titik-titik sisaan menyebar di sekitar garis normal maka asumsi normalitas terpenuhi, memenuhi asumsi linearitas dengan melihat plot *standardized residual* berpencar secara acak, tidak terjadi masalah multikolinearitas dengan melihat nilai *Variance Inflation Factor* (VIF) < 5, tidak terjadi masalah autokorelasi dengan melihat nilai dw, jika $d < dL$, maka ada autokorelasi positif, sedangkan jika $4 - d < dL$, maka ada autokorelasi negatif, tidak terjadi masalah heteroskedastisitas dengan melihat plot *standardized predicted value* dengan sisaan yang dibakukan (*studentized residual)* tidak memiliki pola tertentu (Markidakis *et al.*, 1999).

Salah satu asumsi analisis regresi linear berganda yaitu tidak terjadi masalah autokorelasi. Apabila terjadi masalah autokorelasi, estimasi metode kuadrat terkecil memiliki varians yang tidak minimum, sehingga uji statistik tidak dapat digunakan untuk menarik kesimpulan. Penanganan masalah autokorelasi dapat dilakukan dengan menggunakan *Two Stages Least Square (TSLS)*, *Generalized Least Square (GLS)* dan *Feasible Generalized Least Square (FGLS). Generalized Least Square (GLS)* digunakan apabila koefisien autokorelasi tidak diketahui maka digunakan *Feasible Generalized Least Square (FGLS),* dimana koefisien autokorelasi dapat diduga berdasarkan nilai dw, nilai residual dan *Cochrane-Orcutt Iterative Procedure* (Yusna *et al.*, 2012).

Adapun analisis regresi linear ganda diasumsikan tidak terjadi masalah multikolinearitas. Jika terjadi masalah multikolinearitas dalam model regresi, hal itu dapat menyebabkan hasil estimasi menggunakan metode kuadrat terkecil menjadi tidak baik. Beberapa cara dalam mengatasi masalah multikolinearitas seperti dengan mereduksi peubah bebas (X) tanpa mengubah karakteristik peubah-peubah bebasnya, penggabungan data *cross section* dan data *time series* sehingga terbentuk data panel, mengeluarkan peubah bebas dengan korelasi tinggi walaupun dapat menimbulkan kesalahan spesifikasi, metode regresi *stepwise*, metode *Partial Least Square* dan metode regresi *ridge* (Markidakis *et al.,* 1999).

Model estimasi pada regresi *ridge* cukup banyak mengalami perkembangan, diantaranya oleh beberapa penelitian seperti M. El-Dereny *et al.* (2011), Elfa (2014), Rahmawati (2015) dan Yusna (2012). Penelitian yang dilakukan oleh M. El-Dereny *et al.* (2011) dalam jurnalnya *Solving Multicolinearity Problem Using Ridge Regression Models* menjelaskan perkembangan dari metode regresi *Ridge*, antara lain *Ordinary Ridge Regression (ORR), Generalized Ridge Regression (GRR)* dan *Directed Ridge Regression (DRR).* Pada jurnal tersebut menunjukkan bahwa estimator hasil dari metode-

metode dalam regresi *ridge* lebih baik daripada estimator metode kuadrat terkecil apabila terjadi pelanggaran asumsi multikolinearitas.

Penelitian lain yang berkaitan dengan regresi *ridge* adalah penelitian yang dilakukan oleh Elfa (2014) dalam jurnalnya Perbandingan Metode *Stepwise* dan *Ridge Regression* dalam Menentukan Model Regresi Berganda Terbaik pada Kasus Multikolinearitas. Dalam jurnalnya tersebut menunjukkan bahwa data yang memiliki tingkat multikolinearitas sedang dalam menangani masalah multikolinearitas lebih baik menggunakan metode regresi *ridge*. Sedangkan, data yang memiliki tingkat multikolinearitas sangat kuat dalam menangani masalah multikolinearitas lebih baik menggunakan metode *stepwise*.

Penelitian yang dilakukan oleh Rahmawati (2015) mengenai regresi *Ridge-Robust* untuk menangani multikolinearitas dan pencilan menjelaskan data tentang Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) pada 27 kabupaten/kota di Jawa Timur tahun 2011 menunjukkan pendugaan parameter dengan regresi *ridge-robust* menghasilkan penduga yang lebih baik daripada menggunakan metode kuadrat terkecil dengan melihat nilai R^2_{adj}, AIC dan SBC.

Penelitian yang dilakukan oleh Yusna (2012) mengenai pemodelan faktor-faktor yang mempengaruhi produksi dan mutu tembakau Temanggung dengan kombinasi antara *Generalized Least Square* dan Regresi *Ridge* memberikan kesimpulan bahwa kombinasi metode Durbin-Watson dan regresi *ridge* memberikan hasil yang terbaik karena dapat mengatasi adanya masalah autokorelasi sekaligus masalah multikolinearitas pada pemodelan produksi tembakau Temanggung dan pada pemodelan mutu tembakau, kasus yang mampu diatasi hanyalah masalah multikolinearitas.

Dari penelitian Yusna (2012) pada kasus mutu tembakau dengan menggunakan metode *Generalized Least Square* (GLS) dan metode *Ridge Regression* untuk mengatasi masalah autokorelasi dan multikolineritas hanya masalah multikolinearitas yang dapat teratasi sedangkan masalah autokorelasi belum dapat teratasi. Sehingga, penulis tertarik untuk menganalisis metode *Generalized Least Square* (GLS) berdasarkan nilai *dw*, AR(1) dan *Cochrane-Orcutt Iterative Procedure*. Sedangkan, untuk mengatasi masalah multikolinearitas digunakan metode *Ridge Regression* (RR).

Berdasarkan latar belakang di atas maka judul yang akan dikaji dalam skripsi ini adalah "Penerapan Kombinasi Metode *Ridge Regression* (RR) dan Metode *Generalized Least Square* (GLS) untuk Mengatasi Masalah Multikolinearitas dan Autokorelasi".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka permasalahan penelitian ini dirumuskan sebagai berikut.

1. Bagaimana penerapan metode *Ridge Regression* (RR) untuk mengatasi masalah multikolinearitas?
2. Bagaimana penerapan metode *Generalized Least Square* (GLS) untuk mengatasi masalah autokorelasi?

3. Bagaimana persamaan model regresi terbaik dengan kombinasi metode *Ridge Regression* (RR) dan metode *Generalized Least Square* (GLS) pada jumlah uang yang beredar?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan permasalahan yang telah diuraikan, batasan masalah dalam penelitian ini yaitu data yang digunakan memenuhi asumsi normalitas dan penyimpangan terhadap asumsi-asumsi klasik yang akan dibahas difokuskan pada masalah multikolinearitas dan masalah autokorelasi beserta cara penanganan asumsi tersebut dengan *Ridge Regression* (RR) untuk masalah multikolinearitas dan *Generalized Least Square* (GLS) untuk masalah autokorelasi. Data yang digunakan adalah jumlah uang yang beredar, kurs Rupiah terhadap Dollar dan Indeks Harga Konsumen (IHK) pada Bulan Januari 2011 sampai dengan Bulan Desember 2013.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan di atas, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui penerapan metode *Ridge Regression* (RR) untuk mengatasi masalah multikolinearitas.
2. Mengetahui penerapan metode *Generalied Least Square* (GLS) untuk mengatasi masalah autokorelasi.

3. Mengetahui persamaan model regresi terbaik dengan kombinasi metode *Ridge Regression* (RR) dan metode *Generalied Least Square* (GLS) pada jumlah uang yang beredar.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang akan diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagi Penulis
   a. Menambah dan memperkaya pengetahuan mengenai model *Ridge Regression* (RR) untuk mengatasi masalah multikolinearitas.
   b. Menambah dan memperkaya pengetahuan mengenai model *Generalized Least Square* (GLS) untuk mengatasi masalah autokorelasi.
   c. Membantu mengaplikasikan ilmu yang diperoleh selama di perkuliahan sehingga menunjang kesiapan untuk terjun ke dalam dunia kerja.
2. Bagi Mahasiswa Matematika
   a. Menambah pengetahuan mengenai model *Ridge Regression* (RR).
   b. Menambah pengetahuan mengenai model *Generalized Least Square* (GLS).
   c. Memberikan suatu metode alternatif melakukan pemodelan regresi linear khususnya untuk mengatasi masalah multikolinearitas dan masalah autokorelasi.
3. Bagi Jurusan Matematika
   a. Sebagai bahan studi kasus bagi pembaca dan acuan bagi mahasiswa serta dapat memberikan bahan referensi bagi pihak perpustakaan.

b. Sebagai bahan bacaan yang dapat menambah ilmu pengetahuan bagi pembaca dalam hal ini mahasiswa yang lain.

4. Bagi Badan Pusat Statistik

a. Pemodelan kasus jumlah uang beredar dapat membantu untuk melihat representasi jumlah uang yang beredar secara keseluruhan dan variabel prediktor yang mempengaruhinya.

5. Bagi peneliti selanjutnya

Diharapkan dengan adanya penelitian ini dapat digunakan sebagai bahan informasi dan bahan pengembangan penelitian selanjutnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Secara garis besar penulisan skripsi ini dibagi menjadi tiga bagian, yaitu bagian awal skripsi, bagian isi skripsi dan bagian akhir skripsi. Berikut ini penjelasan masing-masing bagian skripsi:

1. Bagian awal skripsi

Bagian awal skripsi meliputi halaman judul, abstrak, halaman pengesahan, motto dan persembahan, kata pengantar, daftar isi, daftar gambar, daftar tabel dan daftar lampiran.

2. Bagian isi skripsi

Secara garis besar bagian isi skripsi terdiri dari lima bab, yaitu:

BAB 1 PENDAHULUAN

Dalam bab ini dikemukakan latar belakang, permasalahan, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan skripsi.

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini mengemukakan konsep-konsep yang dijadikan landasan teori seperti matriks, turunan suatu matriks, regresi linear, jumlah unsur diagonal suatu matriks, nilai eigen dan vektor eigen, metode kuadrat terkecil, multikolinearitas, autokorelasi, *Ridge Regression* (RR), *Generalized Least Square* (GLS), penelitian terdahulu dan kerangka berpikir.

BAB 3 METODE PENELITIAN

Dalam bab ini berisi tentang metode-metode yang digunakan dalam penelitian dan memecahkan masalah yang meliputi studi pustaka, perumusan masalah, pengumpulan data, pemecahan masalah dan penarikan kesimpulan.

BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini berisi mengenai penyelesaian dari permasalahan yang diungkapkan.

BAB 5 PENUTUP

Dalam bab ini dikemukakan simpulan dari pembahasan dan saran yang berkaitan dengan simpulan.

3. Bagian akhir skripsi

   Bagian akhir skripsi berisi tentang daftar pustaka dan lampiran-lampiran yang mendukung skripsi.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Matriks

2.1.1 Pengertian Matriks

Matriks adalah suatu susunan skalar (bilangan) berbentuk persegi panjang dalam bentuk baris dan kolom. Skalar-skalar yang terdapat pada suatu matriks disebut elemen matriks. Suatu matriks A berbentuk $m \times n$ jika matriks tersebut memiliki m baris dan n kolom. Secara umum matriks dapat dituliskan:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

di mana a_{ij} adalah elemen baris ke-i dan kolom ke-j. Dapat juga dituliskan matriks $A_{(m \times n)} = (a_{ij})$. $(m \times n)$ disebut ordo (ukuran) dari matriks.

Contoh matriks B berordo 3×2:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Terdapat beberapa jenis matriks:

a. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang berordo sama. Bentuk umum matriks persegi berordo $n \times n$ adalah:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

dalam hal ini $c_{11}, c_{22}, c_{33,} \dots, c_{nn}$ merupakan elemen diagonal utama dari matriks persegi.

Contoh matriks persegi C berordo 2×2:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

b. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks yang selain elemen diagonal utamanya bernilai nol. Bentuk umum matriks diagonal berordo $n \times n$ adalah:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Jika $d_{11} = d_{22} = \cdots = d_{nn} = 1$ maka matriks diagonal tersebut dikatakan sebagai matriks identitas (satuan) $= I$.

Contoh matriks diagonal D berordo 3×3:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Sembiring, 1995)

2.1.2 Operasi pada Matriks

2.1.2.1 Penjumlahan Matriks

Jika matriks A dan B memiliki ordo yang sama, jumlah $A + B$ didefinisikan dengan matriks yang memiliki ordo sama yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama elemen yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$, maka

$$(A + B)_{ij} = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \quad (2.4)$$

Contoh: Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, maka penjumlahan matriks A berukuran 2×2 dengan matriks B berukuran 2×2:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$$

(Nicholson, 2004)

2.1.2.2 Pengurangan Matriks

Jika matriks A dan B memiliki ordo yang sama, jumlah $A - B$ didefinisikan dengan matriks yang memiliki ordo sama yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama elemen yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.

Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$, maka

$$(A - B)_{ij} = [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}] \quad (2.5)$$

Contoh: Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka pengurangan matriks A berukuran 2×2 dengan matriks B berukuran 2×2:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Nicholson, 2004)

2.1.2.3 Perkalian Matriks

Jika A adalah matriks $m \times n$ dan B adalah matriks $n \times k$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times k$ yang elemen-elemennya ditentukan sebagai berikut:

untuk mencari elemen dalam baris ke-i dan kolom-j dari AB dipilih baris-i dari matriks A dan kolom-j dari matriks B. Kemudian mengalikan elemen-elemen yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan selanjutnya menambahkan hasil kali tersebut.

Contoh: Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, perkalian matriks A berukuran 2×2 dengan matriks B berukuran 2×2, maka hasil perkalian matriks AB berukuran 2×1:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

(Anton, 2000)

2.1.2.4 Perkalian Skalar

Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap elemen dari A dengan c.

Perkalian matriks dengan skalar menghasilkan sebuah matriks baru yang elemennya adalah hasil perkalian setiap elemen matriks aslinya dengan skalar.

Jika $A = [a_{ij}]$, dan c suatu skalar, maka

$$cA = c[a_{ij}] \tag{2.6}$$

Dari definisi tersebut, jika B adalah sebarang matriks, maka $-B$ menyatakan hasil kali $(-1)B$. Jika A dan B adalah dua matriks berordo sama, maka $A - B$ dapat didefinisikan sebagai $A + (-B) = A + (-1)B$.

(Anton, 2000)

2.1.2.5 Transpose Matriks

Jika A adalah sebarang matriks $m \times n$, maka transpose A dinyatakan oleh A' yang didefinisikan sebagai matriks berukuran $n \times m$ yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari A, kolom keduanya adalah baris kedua dari A dan seterusnya. Jadi transpose suatu matriks diperoleh dengan mempertukarkan baris dengan kolomnya.

Contoh matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, maka $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Teorema 2.1

Dengan menganggap bahwa ordo-ordo matriks adalah sedemikian sehingga operasi-operasi yang ditunjukkan dapat diperagakan, maka aturan-atuaran dalam perhitungan matriks berikut akan berlaku.

a) $A + B = B + A$ (hukum komutatif untuk penjumlahan)

Bukti:

Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$. Entri-entrinya merupakan bilangan real. Akan ditunjukkan, bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $A + B = B + A$ adalah sama, yaitu:

$[A + B]_{ij} = [B + A]_{ij}$, untuk setiap i dan j.

Berdasarkan definisi penjumlahan diperoleh:

$[A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Karena entri-entrinya merupakan bilangan real maka berlaku sifat komutatif sehingga:

$[A+B]_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = [B]_{ij} + [A]_{ij} = [B+A]_{ij}$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa untuk setiap matriks $A_{m\times n}$dan matriks $B_{m\times n}$ berlaku operasi $A+B=B+A$.

b) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (hukum asosiatif untuk penjumlahan)

Bukti:

Misalkan $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ dan $C=[c_{ij}]$. Entri-entrinya merupakan bilangan real. Akan ditunjukkan, bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $A+(B+C)=(A+B)+C$ adalah sama, yaitu:

$[A+(B+C)]_{ij} = [(A+B)+C]_{ij}$, untuk setiap i dan j.

Berdasarkan definisi penjumlahan diperoleh:

$[A+(B+C)]_{ij} = [A]_{ij} + \left([B]_{ij} + [C]_{ij}\right) = a_{ij} + \left(b_{ij} + c_{ij}\right) = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}$

Karena entri-entrinya merupakan bilangan real maka berlaku sifat asosiatif sehingga:

$[A+(B+C)]_{ij} = \left(a_{ij} + b_{ij}\right) + c_{ij} = \left([A]_{ij} + [B]_{ij}\right) + [C]_{ij} = [(A+B)+C]_{ij}$

sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk setiap matriks $A_{m\times n}$, matriks $B_{m\times n}$ dan matriks $C_{m\times n}$ berlaku operasi $A+(B+C)=(A+B)+C$.

c) $(B+C)A = BA+CA$ (hukum distributif)

Bukti:

Misalkan $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ dan $C=[c_{ij}]$. Entri-entrinya merupakan bilangan real. Akan ditunjukkan, bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $(B+C)+A=BA+CA$ adalah sama, yaitu:

$[(B+C)+A]_{ij} = [BA+AC]_{ij}$, untuk setiap i dan j.

Berdasarkan definisi penjumlahan dan perkalian matriks diperoleh:

$$[(B+C)+A]_{ij} = (b_{i1}+c_{i1})a_{1j} + (b_{i2}+c_{i2})a_{2j} + \cdots + (b_{in}+c_{in})a_{nj}$$

$$= \left(b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{in}a_{nj}\right) + (c_{i1}a_{1j} + c_{i2}a_{2j} + \cdots + c_{in}a_{nj})$$

$$= [BA]_{ij} + [CA]_{ij}$$

$$= [BA+CA]_{ij}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa untuk setiap matriks $A_{m\times n}$, matriks $B_{m\times n}$ dan matriks $C_{m\times n}$ berlaku operasi $(B+C)+A = BA+CA$.

d) $a(B+C) = aB + aC$

Bukti:

Misalkan a merupakan sebarang skalar bilangan real, $B = [b_{ij}]$ dan $C = [c_{ij}]$. Entri-entrinya merupakan bilangan real. Akan ditunjukkan, bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $a(B+C) = aB + aC$ adalah sama, yaitu:

$[a(B+C)]_{ij} = [aB + aC]_{ij}$, untuk setiap i dan j.

Berdasarkan definisi penjumlahan dan kelipatan skalar diperoleh:

$$[a(B+C)]_{ij} = a[B+C]_{ij} = a\left(b_{ij} + c_{ij}\right)$$

Karena entri-entrinya merupakan bilangan real maka berlaku sifat distributif sehingga:

$$[a(B+C)]_{ij} = a\left(b_{ij} + c_{ij}\right) = ab_{ij} + ac_{ij} = a[B]_{ij} + a[C]_{ij} = [aB + aC]_{ij}$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk setiap matriks $B_{m\times n}$ dan matriks $C_{m\times n}$ dengan a adalah sebarang skalar, berlaku operasi $a(B+C) = aB + aC$.

e) $(a+b)C = aC + bC$

Bukti:

Misalkan $C = [c_{ij}]$ dengan a dan b merupakan sebarang skalar bilangan real. Akan ditunjukkan, bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $(a+b)C = aC + bC$ adalah sama, yaitu:

$[(a+b)C]_{ij} = [aC + bC]_{ij}$, untuk setiap i dan j.

Berdasarkan definisi penjumlahan dan kelipatan skalar pada matriks diperoleh:

$$[(a+b)C]_{ij} = (a+b)C_{ij} = aC_{ij} + bC_{ij} = (aC)_{ij} + (bC)_{ij} = [aC + bC]_{ij}$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa berlaku operasi $(a+b)C = aC + bC$ dengan a dan b adalah sebarang skalar bilangan real.

f) $(ab)C = a(bC)$

Bukti:

Misalkan $C = [c_{ij}]$ dengan a dan b merupakan sebarang skalar bilangan real. Akan ditunjukkan, bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $(ab)C = a(bC)$ adalah sama, yaitu:

$[a(bC)]_{ij} = [(ab)C]_{ij}$, untuk setiap i dan j.

Berdasarkan definisi penjumlahan dan kelipatan skalar pada matriks diperoleh:

$$[a(bC)]_{ij} = a(bC)_{ij} = (abC)_{ij} = abC_{ij} = (ab)C_{ij} = [(ab)C]_{ij}$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk setiap matriks $C = [c_{ij}]$ berlaku operasi $a(bC) = (ab)C$ dengan a dan b adalah sebarang skalar bilangan real.

g) $AI = IA = A$

Bukti:

Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $I = [1_{ij}]$. Entri-entrinya merupakan bilangan real. Akan ditunjukkan, bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $AI = IA = A$ adalah sama, yaitu:

$[AI]_{ij} = [IA]_{ij}$, untuk setiap i dan j.

Berdasarkan definisi perkalian matriks diperoleh:

$[AI]_{ij} = [A]_{ij}[I]_{ij} = A_{ij}1_{ij} = A$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa untuk setiap matriks $A_{n\times n}$ dan matriks identitas berlaku operasi $AI = IA = A$.

(Anton, 2000)

2.1.2.6 Matriks Simetris

Matriks simetris adalah matriks persegi yang elemennya simetris secara diagonal. Matriks C dikatakan simetris jika $c_{ij} = c_{ji}$ untuk semua i dan j, dengan c_{ij} menyatakan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j. Matriks yang simetris dapat dikatakan pula sebagai matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri.

(Anton, 2000)

2.1.2.7 Invers Matriks

Jika A adalah matriks persegi, dan jika terdapat matriks B sehingga $AB = BA = I$ maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible)* dan B dinamakan invers (*Inverse)* dari A. Selanjutnya invers dari A ditulis A^{-1}.

Teorema 2.2

Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan berordo sama, maka

a) AB dapat dibalik

b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bukti:

Jika $(AB)^{-1}$ adalah invers dari AB, maka menurut definisi di atas dapat diturunkan:

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$, perhatikan hasil perkalian dalam $A^{-1}A = I$ maka didapat $B^{-1}IB = B^{-1}B = I$.

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$, perhatikan hasil perkalian dalam $BB^{-1} = I$ maka didapat $AIA^{-1} = AA^{-1} = I$.

Teorema 2.3

Jika A adalah sebuah matriks yang dapat dibalik, maka

a) A^{-1} dapat dibalik dan $(A^{-1})^{-1} = A$

Bukti:

Karena $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, maka A^{-1} dapat dibalik dan $(A^{-1})^{-1} = A$.

b) A^n dapat dibalik dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$

Bukti:

Karena $A^n(A^n)^{-1} = (A^n)^{-1}A^n = I$, maka A^n dapat dibalik dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

c) Untuk setiap skalar k yang taksama dengan nol, maka kA dapat dibalik dan $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

Bukti:

Jika k adalah sebarang skalar yang tidak sama dengan 0, maka dari Teorema 2.1 akan memungkinkan kita untuk menuliskan

$$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \frac{1}{k}(kA)A^{-1} = \left(\frac{1}{k}k\right)AA^{-1} = I$$

Demikian juga $\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)(kA) = I$, sehingga kA dapat dibalik dan $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

(Anton, 2000)

2.1.2.8 Matriks Ortogonal

Matriks T dikatakan matriks ortogonal, jika

$$T^{-1}T = TT^{-1} = I \tag{2.7}$$

karena persamaan (2.7), maka

$$T^{-1} = I \tag{2.8}$$

Sifat matriks ortogonal:

1) Invers matriks ortogonal juga matriks ortogonal
2) Hasil kali matriks-matriks ortogonal juga matriks ortogonal
3) Jika T matriks ortogonal T, maka $\det(T) = 1$ atau $\det(T) = -1$

(Anton, 2000)

2.2 Turunan Suatu Matriks

Pada dasarnya turunan satu peubah terhadap suatu vektor adalah suatu vektor atau matriks yang unsur-unsurnya adalah turunan peubah pertama terhadap peubah unsur-unsur vektor penurun sedemikian sehingga posisi unsurnya sesuai dengan posisi unsur yang diturunkan dan unsur penurun. Misalkan terdapat dua vektor A dan X, dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \text{ maka } A' = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] \tag{2.9}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ maka } X' = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \tag{2.10}$$

dan

$X'A = A'X$, maka

$$\frac{\partial(X'A)}{\partial x} = \frac{\partial(A'X)}{\partial x} = A \tag{2.11}$$

Bukti:

1) $$\frac{\partial(X'A)}{\partial x} = \frac{\partial(x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial(x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = A$$

2) $$\frac{\partial(A'X)}{\partial x} = \frac{\partial(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = A$$

Jadi, terbukti $\frac{\partial(X'A)}{\partial x} = \frac{\partial(A'X)}{\partial x} = A$.

Misalkan fungsi linear $Y = AX$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

Setiap elemen y_t dari y adalah

$$y_t = a_t x \tag{2.12}$$

di mana a_t adalah elemen-elemen baris ke-i dari A, maka

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\frac{\partial AX}{\partial x} = A. \tag{2.13}$$

Diperoleh suatu persamaan

$$X'AX = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2 \tag{2.14}$$

Jika diambil turunan parsial terhadap elemen-elemen X akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{\partial(X'AX)}{\partial x_1} = 2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)$$

$$\frac{\partial(X'AX)}{\partial x_2} = 2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial(X'AX)}{\partial x_n} = 2(a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) \tag{2.15}$$

Jika diperhatikan bentuk hasil di atas, $a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n$ merupakan elemen-elemen dari hasil matriks A dan vektor X, yaitu AX dan memberikan suatu vektor kolom dengan n elemen. Jadi hasil di atas dapat diringkas sebagai berikut:

$$\frac{\partial(X'AX)}{\partial x_n} = 2AX \tag{2.16}$$

(Greene, 2012)

2.3 Regresi Linear

Regresi linear mempunyai persamaan yang disebut persamaan regresi. Persamaan regresi mengekspresikan hubungan linear antara variabel tergantung atau variabel terikat (Y) dan satu atau lebih variabel bebas atau prediktor (X) jika hanya ada satu prediktor dan $X_1,\ X_{2,} \ldots, X_k$, jika terdapat lebih dari satu prediktor (Crammer *et al*, 2006: 139).

Persamaan regresi yang menggambarkan hubungan antara satu peubah bebas (X) dan satu peubah tak bebas (Y), dimana hubungan keduanya dapat digambarkan sebagai garis lurus disebut regresi linear sederhana. Sedangkan, persamaan regresi yang menggambarkan hubungan antara lebih dari satu peubah bebas $(X_1, X_{2,} \dots, X_n)$ dan satu peubah tak bebas (Y) disebut regresi linear berganda (Novalia *et al*, *2014)*.

Model regresi linear berganda dengan k variabel yaitu

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i, i = 1,2,3, \dots n \tag{2.17}$$

dengan $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ adalah parameter dan ε_i adalah galat atau error.

Oleh karena i menunjukkan pengamatan ke-i, maka jika terdapat n pengamatan, model regresinya menjadi

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + \cdots + \beta_k X_{1k} + \varepsilon_1 \\ Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + \cdots + \beta_k X_{2k} + \varepsilon_2 \\ Y_3 &= \beta_0 + \beta_1 X_{31} + \beta_2 X_{32} + \cdots + \beta_k X_{3k} + \varepsilon_3 \\ &\vdots \\ Y_n &= \beta_0 + \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + \cdots + \beta_k X_{nk} + \varepsilon_n \end{aligned} \tag{2.18}$$

di mana

Y_n adalah variabel tak bebas

$X_{11}, X_{12}, \dots, X_{nk}$ adalah variabel bebas

β adalah parameter atau koefisien regresi

$\varepsilon_n$adalah galat yang saling bebas dan menyebar normal $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

Dalam bentuk matriks dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$Y_{n\times 1} = X_{n\times(k+1)}\beta_{(k+1)\times 1} + \varepsilon_{n\times 1}$$

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad (2.19)$$

dengan

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_4 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

di mana

Y menyatakan vektor respons berukuran $n \times 1$

β menyatakan vektor parameter berukuran $(k+1) \times 1$

X menyatakan vektor galat berukuran $n \times 1$

Dalam analisis regresi linear, terdapat asumsi-asumsi yang harus dipenuhi, yaitu

1) Nilai ekspektasi dari vektor residualnya adalah 0

   $E(\varepsilon_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n$

   $$E\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_2) \\ \vdots \\ E(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

2) Variansinya konstan untuk semua residual

   $var\ (\varepsilon_i) = \sigma^2, \qquad i = 1, 2, \dots, n$

2.4 Jumlah Unsur Diagonal Suatu Matriks

Bila A adalah suatu matriks persegi dengan ukuran $n \times n$, maka jumlah unsur diagonal matriks A disimbolkan matriks $tr(A)$, adalah

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad (2.20)$$

di mana tr adalah $trace$.

(Sembiring, 1995)

2.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Bila A adalah suatu matriks $n \times n$, maka ada bilangan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dan vektor $v_1, v_2, \dots, v_n$ yang saling ortogonal, sehingga dipenuhi

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \qquad (2.21)$$

Bilangan $\lambda_1$disebut bilangan eigen, sedangkan v_1 disebut vektor eigen dari matriks A. Bila matriks A simetris, maka $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ bernilai real. Bila V adalah suatu matriks diagonal, maka unsur diagonal V adalah nilai eigennya, sehingga

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii} \qquad (2.22)$$

Matriks persegi P disebut matriks idempoten bila $P^2 = P$

Bila P simetris $(P' = P)$ dan idempoten, maka P disebut matriks proyeksi. Jika P idempoten, maka $I - P$ juga idempoten. Pada matriks proyeksi berlaku

$$x'Px = x'P^2x = (Px)'(Px) \qquad (2.23)$$

(Sembiring, 1995)

2.6 Metode Kuadrat Terkecil

Metode kuadrat terkecil adalah suatu metode yang digunakan untuk menaksir β dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat galat (JKG) (Suryanto, 1998: 140).

Persamaan regresi ganda

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

atau dapat ditulis dengan $Y = X\beta + \varepsilon$.

Sedangkan persamaan regresi pendugaannya yaitu $\hat{Y} = X\hat{\beta} + \varepsilon$.

Metode kuadrat terkecil digunakan untuk menetukan $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, sehingga jumlah kuadrat galat (JKG) minimum, maka

$$JKG = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2$$

$$= [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \cdots \quad \varepsilon_n] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \varepsilon' \varepsilon \qquad (2.24)$$

Dari persamaan $\hat{Y} = X\hat{\beta} + \varepsilon$,

Maka $\varepsilon = Y - X\hat{\beta}$.

Untuk meminimumkan jumlah kuadrat terkecil, maka persamaan

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon' \varepsilon$$

$$= \left(Y - X\hat{\beta}\right)' \left(Y - X\hat{\beta}\right)$$

$$= \left(Y' - \hat{\beta}' X'\right)\left(Y - X\hat{\beta}\right)$$

$$= Y'Y - Y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \qquad (2.25)$$

Karena $\hat{\beta}'X'Y$ adalah suatu skalar, maka dengan menggunakan sifat transpose suatu matriks diperoleh dari $\hat{\beta}'X'Y$ adalah $(\widehat{\beta}'X'Y)' = Y'X\hat{\beta}$, maka

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon' \varepsilon$$

$$= \left(Y - X\hat{\beta}\right)'\left(Y - X\hat{\beta}\right)$$

$$= \left(Y' - \widehat{\beta}'X'\right)\left(Y - X\hat{\beta}\right)$$

$$= Y'Y - Y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

$$= Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \qquad (2.26)$$

Jumlah kuadrat galat (JKG) minimum diperoleh dari $\hat{\beta}$ yang memenuhi persamaan $\frac{\partial JKG}{\partial \hat{\beta}} = 0$, sehingga diperoleh

$$-2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

$$2X'X\hat{\beta} = 2X'Y$$

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \qquad (2.27)$$

Akan bersifat *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE). Sifat *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE) ini dapat dibuktikan sebagai berikut

1) Linear

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$= (X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon)$$

$$= (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

$$= (\beta + (X'X)^{-1})X'\varepsilon$$

Merupakan fungsi linear dari β dan ε.

2) Tak Bias

Dengan $(X'X)^{-1}X'X = 1$

$$E(\hat{\beta}) = E[(X'X)^{-1}X'Y]$$

$$= (X'X)^{-1}X'E(Y)$$

$$= (X'X)^{-1}X'(X\beta)$$

$$= (X'X)^{-1}X'(X\beta)$$

$$= 1\beta$$

$$= \beta$$

Jadi $E(\hat{\beta}) = \beta$ maka $\hat{\beta}$ adalah estimator yang merupakan penaksir tak bias β.

3) Variansi Minimum

$$var(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'var(Y)X(X'X)^{-1}$$

$$= (X'X)^{-1}X'\sigma^2 IX(X'X)^{-1}$$

$$= \sigma^2(X'X)^{-1}$$

Bahwa $var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$ merupakan varians terkecil dari semua penaksir linear tak bias.

Karena estimator kuadrat terkecil memenuhi sifat linear, tak bias dan mempunyai variansi minimum maka estimator kuadrat terkecil disebut bersifat *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE).

2.7 Multikolinearitas

2.7.1 Pengertian Multikolinearitas

Multikolinearitas adalah kejadian yang menginfomasikan terjadinya hubungan antara variabel-variabel bebas X_i dan yang terjadi adalah hubungan yang cukup erat. Sehingga informasi yang dihasilkan dari variabel-variabel yang saling berhubungan (kolinear) sangat mirip dan sulit dipisahkan pengaruhnya. Hal ini juga akan menghasilkan perkiraan keberartian koefisien yang diperoleh. Cara mengetahui adanya multikolinearitas dengan memakai nilai Faktor Inflasi Varian (VIF). Nilai VIF yang semakin besar akan menunjukkan multikolinearitas yang lebih kompleks. Jika nilai VIF < 5, maka secara signifikan dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat multikolinearitas.

2.7.2 Dampak Multikolinearitas

Dampak multikolinearitas dapat mengakibatkan koefisien regresi yang dihasilkan oleh analisis regresi berganda menjadi sangat lemah atau tidak dapat memberikan hasil analisis yang mewakili sifat atau pengaruh dari variabel bebas yang bersangkutan (Montgomery *et al.*, 2006).

Dalam banyak hal masalah multikolinearitas dapat menyebabkan uji t menjadi tidak signifikan padahal jika masing-masing variabel bebas diregresikan secara terpisah dengan variabel tak bebas (*simple regression*) uji t menunjukkan hasil yang signifikan.

2.7.3 Cara Mendeteksi Multikolinearitas

Ada beberapa cara untuk mengetahui keberadaan multikolinearitas dalam suatu model regresi, yaitu

1) Menganalisis matriks korelasi

   Jika antara dua atau lebih variabel independen memiliki korelasi yang cukup tinggi, biasanya di atas 0,9 maka hal tersebut mengindikasikan terjadinya multikolinearitas.

2) *Variance Inflantion Factor* (VIF)

Variance Inflantion Factor (VIF) adalah salah cara dalam mendeteksi adanya multikolinearitas dan dalam penulisan ini menggunakan nilai *Tolerance* atau *Variance Inflantion Factor* (VIF).

$$VIF = \frac{1}{1-R_j^2} \tag{2.28}$$

dengan R_j merupakan koefisien determinasi ke-j, $j = 1, 2, \dots, k$.

Multikolinearitas dalam sebuah regresi dapat diketahui apabila nilai VIF ≥ 5.

(Utami *et al.*, 2013)

3) *Tolerance* (TOL)

Jika nilai *Tolerance* kurang dari 0,1 atau nilai VIF melebihi 5, maka hal tersebut menunjukkan bahwa multikolinearitas adalah masalah yang pasti terjadi antar variabel bebas.

2.7.4 Cara Mengatasi Multikolinearitas

Masalah multikolinearitas dapat dihilangkan dengan menggunakan beberapa cara, sebagai berikut

1) Menambahkan data yang baru

Penambahan sample baru dapat digunakan untuk mengatasi multikolinearitas. Oleh karena adanya kolinearitas merupakan gambar sampel, ada kemungkinan bahwa untuk sampel lainnya yang mencakup variabel-variabel yang sama, persoalan multikolinearitas mungkin tidak seserius seperti sampel sebelumnya.

2) Menghilangkan satu atau beberapa variabel bebas

Pada permasalahan yang serius, salah satu hal yang mudah untuk dilakukan yaitu mengeluarkan salah satu variabel yang berkorelasi tinggi dengan variabel lainnya.

3) Estimasi regresi ridge

Estimasi ridge untuk koefisien regresi dapat diperoleh dengan menyelesaikan suatu bentuk dari persamaan normal regresi. Asumsikan bahwa bentuk standar dari model regresi linear ganda adalah

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

Parameter penting yang membedakan regresi ridge dari metode kuadrat terkecil adalah c. Tetapan bias c yang relatif kecil ditambahkan pada diagonal utama matriks $X'X$, sehingga koefisien estimator regresi ridge dipenuhi dengan besarnya tetapan bias c.

(Montgomery *et al.*, 2006)

2.8 Autokorelasi

2.8.1 Pengertian Autokorelasi

Pada dasarnya autokorelasi dapat didefinisikan sebagai korelasi di antara nilai-nilai pengamatan yang terurut dalam waktu (*time series data)* atau nilai-nilai yang terurut dalam ruang (*cross-sectional data)*.

Autokorelasi berkaitan dengan hubungan antara nilai-nilai yang berurutan dari variabel yang sama. Dengan demikian terlihat adanya perbedaan pengertian antara autokorelasi dan korelasi yang mana sama-sama mengukur derajat keeratan hubungan. Korelasi mengukur derajat keeratan hubungan di antara dua buah variabel yang berbeda, sedangkan autokorelasi mengukur derajat keeratan hubungan di antara nilai-nilai yang berurutan pada variabel yang sama atau pada variabel itu sendiri.

2.8.2 Dampak Autokorelasi

Keberadaan autokorelasi pada metode kuadrat terkecil memiliki konsekuensi antara lain estimasi metode kuadrat terkecil masih linear dan tidak bias, namun estimator-estimator tersebut tidak lagi efisien (memiliki varian terkecil). Oleh karena itu, interval estimasi maupun uji hipotesis yang didasarkan pada distibusi t maupun F tidak dapat digunakan untuk mengevaluasi hasil regresi. (Gujarati, 2003)

2.8.3 Cara Mendeteksi Autokorelasi

Salah satu cara untuk mengetahui apakah ada tidaknya autokorelasi adalah dengan pengujian statistik Durbin-Watson.

Hipotesis:

H_0: Tidak terjadi autokorelasi

H_1: Terjadi autokorelasi

Taraf signifikansi $\alpha = 0{,}05$

Statistik uji $d = \frac{\sum_{i=2}^{n}(e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} e_t^2}$

Daerah kritis

Jika $d < dL$ atau $d > 4 - dL$, berarti terdapat autokorelasi.

Jika $dU < d < 4 - dU$, berarti tidak terdapat autokorelasi.

Jika $dL < d < dU$ atau $4 - dU < d < 4 - dL$, tidak ditarik kesimpulan.

2.8.4 Cara Mengatasi Autokorelasi

Dalam mengatasi autokorelasi dapat dilakukan dengan menggunakan *Two Stage Least Square* (TSLS), *Generalized Least Square* (GLS) dan *Feasible Generalized Least Square* (FGLS). GLS digunakan apabila koefisien autokorelasi diketahui, namun apabila koefisien korelasi tidak diketahui maka digunakan FGLS, dimana koefisien autokorelasi dapat diduga berdasarkan nilai dw, nilai residual dan *Cochrane Orcutt Iterative Procedure.*

(Gujarati, 2003)

2.9 Regresi Ridge

Prosedur regresi ridge pertama kali dikemukakan oleh A. E. Hoerl dan R. W. Kennard dalam "*Ridge Regression: Biased Estimator for Non-orthogonal Problems",* prosedur ini ditujukan untuk mengatasi kondisi buruk (*ill-conditioned)* yang diakibatkan oleh korelasi yang tinggi antara beberapa peubah peramal di dalam model, sehingga menyebabkan matriks $X'X$-nya hampir singular, yang pada gilirannya menghasilkan nilai dugaan parameter model yang tidak stabil. Metode ini digunakan juga untuk mengatasi permasalahan multikolinearitas.

Dengan menggunakan pengganda Lagrange, dimana $\hat{\beta}^*$ nilai yang meminimumkan fungsi tujuan dengan syarat $\hat{\beta}^{*\prime}\hat{\beta}^* \leq c^2$

$$F \equiv (Y^* - X^*\hat{\beta}^*)'(Y^* - X^*\hat{\beta}^*) + k(\hat{\beta}^{*\prime}\hat{\beta}^* - c^2)$$

$$F \equiv (Y^{*\prime} - \hat{\beta}^{*\prime}X^{*\prime})(Y^* - X^*\hat{\beta}^*) + k(\hat{\beta}^{*\prime}\hat{\beta}^* - c^2)$$

$$F \equiv Y^{*'}Y^* - Y'X^*\hat{\beta}^* - \hat{\beta}^{*'}X^{*'}Y + \hat{\beta}^{*'}X^{*'}X^*\hat{\beta}^* + k(\hat{\beta}^{*'}\hat{\beta}^* - c^2) \quad (2.29)$$

Karena $\hat{\beta}^{*'}X^{*'}Y$ merupakan skalar, maka dengan menggunakan sifat transpose $(\hat{\beta}^{*'}X^{*'}Y)' = Y'X^*\hat{\beta}^{*'}$, sehingga (2.29) menjadi

$$F \equiv Y^{*'}Y^* - \hat{\beta}^{*'}X^{*'}Y^* - \hat{\beta}^{*'}X^{*'}Y^* + \hat{\beta}^{*'}X^{*'}X^*\hat{\beta}^* + k\left(\hat{\beta}^{*'}\hat{\beta}^* - c^2\right)$$

$$F \equiv Y^{*'}Y^* - 2\hat{\beta}^{*'}X^{*'}Y^* + \hat{\beta}^{*'}X^{*'}X^*\hat{\beta}^* + k\left(\hat{\beta}^{*'}\hat{\beta}^* - c^2\right) \quad (2.30)$$

Nilai F minimum jika $\frac{\partial F}{\partial \hat{\beta}^*} = 0$, maka

$$0 = -2X^{*'}Y^* + 2X^{*'}X^*\hat{\beta}^* + 2kI\hat{\beta}^*$$

$$0 = -X^{*'}Y^* + \hat{\beta}^*(X^{*'}X^* + kI)$$

$$\hat{\beta}^*(X^{*'}X^* + kI) = X^{*'}Y^*$$

$$\hat{\beta}^* = (X^{*'}X^* + kI)^{-1}X^{*'}Y^* \quad (2.31)$$

Nilai k pada regresi ridge sama untuk setiap peubah bebas.

Masalah yang dihadapi dalam regresi ridge adalah penentuan nilai k. Karena itu ada beberapa cara yang dapat digunakan untuk menentukan nilai k, antara lain:

1) Ridge *trace*, Hoerl dan Kennard (1970) menyarankan metode grafik yang disebut *ridge trace* untuk memilih nilai parameter ridge k. Grafik plot berdasarkan nilai komponen individu $\hat{\beta}(k)$ dengan barisan dari k $(0 < k < 1)$. Mallows (1973) dalam Montgomery dan Peck (1991) menyarankan nilai k yang meminimumkan nilai C_k yang dihitung dengan menggunakan rumus:

$$C_k = \frac{SSE(k)}{\partial^2} - n + 2 + 2Tr(XL) \quad (2.32)$$

dengan

$$XL = X(X'X + kI)^{-1}X' \equiv H_k \tag{2.33}$$

2) Hoerl, Kennard dan Baldwin (1975) dalam Dereny dan Rashwan (2011), menawarkan metode untuk memilih nilai k tunggal dari semua k_i yang dapat dihitung dengan menggunakan rumus berikut:

$$k_{HKB} = \frac{p\widehat{\sigma^2}}{\widehat{\beta'}\widehat{\beta}} \tag{2.34}$$

Penggunaan regresi ridge dilakukan melalui lima langkah yaitu standarisasi data, pemilihan k, mencari persamaan regresi ridge, uji keberartian koefisien regresi ridge dan transformasi ke bentuk awal.

2.10 *Generalized Least Square* (GLS)

Generalized Least Square (GLS) merupakan salah satu metode estimasi parameter yang digunakan untuk mengatasi adanya autokorelasi apabila nilai koefisien autokorelasi (ρ) diketahui. Apabila nilai ρ tidak diketahui, maka dikenal dengan FGLS.

Misalkan diberikan model regresi:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \tag{2.35}$$

di mana $i = 1, 2, \dots, n$.

Diasumsikan residual mengikuti AR(1),

$$\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + u_i \; ; \; -1 < \rho < 1 \tag{2.36}$$

Persamaan (2.35) pada saat $(i-1)$ yaitu:

$$Y_{i-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{i-1} + \varepsilon_{i-1} \tag{2.37}$$

Mengalikan persamaan (2.34) dengan ρ, sehingga:

$$\rho Y_{i-1} = \rho\beta_0 + \rho\beta_1 X_{i-1} + \rho\varepsilon_{i-1} \tag{2.38}$$

Pengurangan persamaan (2.38) dari (2.35) menghasilkan:

$$(Y_i - \rho Y_{i-1}) = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_i - \rho X_{i-1}) + u_i \tag{2.39}$$

di mana $u_i = (\varepsilon_i - \rho\varepsilon_{i-1})$.

Sehingga,

$$Y_i^* = \beta_1^* + \beta_2^* X_i^* + u_i \tag{2.40}$$

di mana,

$$Y_i^* = ((Y_i - \rho Y_{i-1}) \text{ dan } X_i^* = (X_i - \rho X_{i-1}) \tag{2.41}$$

Nilai ρ dapat diduga dengan menggunakan nilai dw, nilai residual dan *Cochrane Orcutt Iterative Procedure* sebagai berikut:

a) ρ diduga berdasarkan nilai dw

   Apabila nilai ρ tidak diketahui, dapat diduga berdasarkan nilai dw sebagai berikut:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_{t-1}^2} \tag{2.42}$$

b) ρ diduga dari AR(1) Residual

   Apabila residual mengikuti *Autoregressive* orde pertama (AR(1)), maka pendugaan nilai koefisien autokorelasi adalah dengan meregresikan residual ε_i dengan ε_{i-1}, sehingga persamaan regresi:

$$\hat{\varepsilon}_i = \rho\widehat{\varepsilon_{i-1}} + v_i \tag{2.43}$$

   di mana $\hat{\varepsilon}_i$ adalah residual dari regresi awal dan v_i adalah residual regresi ini.

c) ρ diduga dengan *Cochrane Orcutt Iterative Procedure*

Langkah pendugaan nilai koefisien autokorelasi dengan *Cochrane Orcutt Iterative Procedure* yaitu dengan meregresikan residual ε_i dengan ε_{i-1} hingga diperoleh nilai koefisien autokorelasi yang tidak banyak berubah (konstan).

(Gujarati, 2003)

2.11 Penelitian Terdahulu

Pada penelitian Utami (2013) mengenai Penerapan Metode *Generalized Ridge Regression* dalam mengatasi masalah multikolinearitas memberikan kesimpulan data mengenai kebutuhan akan tenaga kerja pada 17 Rumah Sakit Angkatan Laut U.S menghasilkan model regresi linear berganda yaitu $Y = 1.963 - 15{,}85X_1 + 0{,}0559X_2 + 1{,}59X_3 - 4{,}219X_4 - 394{,}3X_5$ dengan nilai koefisien determinasi (R^2) sebesar 0,987 dan nilai korelasi antar peubah bebas cukup besar yaitu mendekati satu yang menunjukkan bahwa terjadi kolinearitas sangat kuat antar peubah bebas serta nilai VIF dari peubah bebas X_1, X_2, X_3 dan X_4 memiliki nilai VIF yang lebih besar dari 5. Sehingga dapat dipastikan terjadi pelanggaran terhadap asumsi multikolinearitas. Dengan menggunakan metode *Generalized Ridge Regression* nilai konstanta bias $k_1, k_2, \dots, k_5$ diperoleh melalui proses iterasi sampai ditemukan penduga koefisien regresi yang stabil. Dan iterasi berhenti ketika nilai $(\Lambda + K)$ menjadi singular. Sehingga model regresi untuk metode *Generalized Ridge Regression* adalah $Y = -1.420 + 6{,}4929X_1 + 0{,}0459X_2 + 0{,}213X_3 + 9{,}1916X_4 + 453{,}3054X_5$ dengan nilai koefisien determinasi (R^2) adalah 0,9913 dan MSE sebesar 3.214.166 serta nilai VIF dari masing-masing peubah bebas lebih kecil dari 5.

Pada penelitian Eledum (2013) mengenai metode baru dalam regresi ridge yang bernama *Two Stage Ridge Regression* (TR) yang merupakan gabungan antara *Two Stage Least Squares* dan *Ordinary Ridge Regression.* Dalam jurnalnya tersebut dilakukan penelitian mengenai hubungan antara produk yang dihasilkan dari sektor manufuktur dengan nilai impor, komoditas kapital dan bahan mentah yang diimpor pada negara Irak dengan menggunakan metode estimasi TR untuk memperoleh koefisien regresi.

Pada penelitian Wasilaine (2014) mengenai model regresi ridge untuk mengatasi model regresi linear berganda yang mengandung multikolinearitas pada studi kasus data pertumbuhan bayi di Kelurahan Namaelo RT 001, Kota Masohi memberikan kesimpulan bahwa tinggi bayi sekarang (Y) dipengaruhi oleh usia bayi (X_1), tinggi bayi waktu lahir (X_2), berat bayi waktu lahir (X_3) dan ukuran dada waktu lahir (X_4) dengan persamaan regresi linear berganda yaitu $Y = 73{,}715 + 0{,}033X_1 + 1{,}839X_2 - 22{,}595X_3 - 2{,}602X_4$ dengan determinasi korelasi yaitu 0,019674 dan nilai VIF yang lebih besar dari 5. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa terjadi multikolinearitas antara variabel bebas. Karena data tinggi bayi sekarang (Y) dipengaruhi oleh usia bayi (X_1), tinggi bayi waktu lahir (X_2), berat bayi waktu lahir (X_3) dan ukuran dada waktu lahir (X_4) berdistribusi normal maka tidak perlu dilakukan pentransformasian terhadap data. Selanjutnya, proses pengestimasian regresi ridge, pemilihan tetapan bias c merupakan hal yang penting, penentuan tetapan bias c ditempuh melalui nilai VIF dan gambar *ridge* *trace*. Sehingga, diperoleh persamaan regresi baru dengan metode regresi ridge yaitu $Y = 30{,}12984 + 0{,}0274X_1 + 0{,}628X_2 - 2{,}3551X_3 + 0{,}061X_4$.

Pada penelitian Yusna (2012) mengenai pemodelan faktor-faktor yang mempengaruhi produksi dan mutu tembakau Temanggung dengan kombinasi antara *Generalized Least Square* dan Regresi *Ridge* memberikan kesimpulan bahwa rata-rata produksi tembakau Temanggung di Kabupaten Temanggung pada bulan Mei sampai dengan Agustus 2010 adalah $688{,}77\ \mathrm{kg/ha}$ dan rata-rata mutu tembakau Temanggung yang dihasilkan adalah sebesar 14,54. Elevansi terendah yang digunakan sebagai lahan tanam tembakau Temanggung adalah $557\ mdpl$ dan tertinggi $1615\ mdpl$, sehingga dapat disimpulkan bahwa wilayah Kabupaten Temanggung baik di kawasan rendah maupun tinggi dijadikan sebagai lahan tanam tembakau. Kombinasi metode Durbin-Watson dan regresi *ridge* memberikan hasil yang terbaik karena dapat mengatasi adanya autokorelasi sekaligus multikolinearitas pada pemodelan produksi tembakau Temanggung. Namun, pada pemodelan mutu tembakau, kasus yang mampu diatasi adalah multikolinearitas dan sedangkan kasus autokorelasi masih belum teratasi. Dan variabel yang berpengaruh terhadap mutu tembakau adalah persentase kerikil dalam tanah, kandungan kalium dalam tanah, dan persentase pasir dalam tanah.

Pada penelitian Pusparani (2014) mengenai perbandingan metode *stepwise* dan *ridge regression* dalam menentukan model regresi berganda terbaik pada kasus multikolinearitas memberikan kesimpulan bahwa data yang memiliki tingkat multikolinearitas sedang dalam masalah multikolinearitas lebih baik menggunakan metode regresi *ridge* dalam menanganinya dan data yang memiliki tingkat multikolinearitas sangat kuat dalam masalah multikolinearitas lebih baik menggunakan metode *stepwise* dalam menanganinya.

Pada penelitian Rahmawati (2015) mengenai regresi *ridge-robust* untuk menangani multikolinearitas dan pencilan memberikan kesimpulan bahwa data Pendapatan Asli Daerah (X_1), jumlah penduduk (X_2) dan total belanja (X_3) yang mempengaruhi Produk Domestik Regional Bruto (Y) pada 27 kabupaten/kota di Jawa Timur tahun 2011 menunjukkan pendugaan parameter dengan regresi *ridge-robust* menghasilkan penduga yang lebih baik daripada menggunakan metode kuadrat terkecil dengan melihat nilai R^2_{adj}, AIC dan SBC. Serta menghasilkan model regresi berganda yaitu $\hat{Y} = 60596{,}75 + 97{,}38X_1 + 10{,}84X_2 - 6{,}59X_3$.

2.12 Kerangka Berpikir

Tujuan dalam analisis regresi linear adalah mengestimasi koefisien regresi dalam model. Pada umumnya digunakan metode kuadrat terkecil (OLS) untuk mengestimasi koefisien regresi dalam model regresi. Dalam statistika, sebuah model regresi dikatakan baik apabila model tersebut memenuhi asumsi-asumsi regresi linear dan memenuhi asumsi-asumsi regresi klasik, seperti tidak terjadi multikolinearitas, heteroskedastisitas, dan autokorelasi. Sehingga, metode kuadrat terkecil menjadi tidak tepat jika terdapat gejala multikolinearitas, heteroskedastisitas dan autokorelasi dalam suatu data.

Penelitian ini diawali dengan pengumpulan data, yaitu data jumlah uang yang beredar, kurs Rupiah terhadap Dollar dan Indeks Harga Konsumen (IHK) pada Bulan Januari 2011 sampai dengan Bulan Desember 2013. Selanjutnya, data tersebut dibuat model regresi awal dengan menggunakan metode kuadrat terkecil. Kemudian, dilakukan pengujian asumsi klasik terhadap data. Pada penelitian ini, penulis menggunakan nilai koefisien autokorelasi (ρ) dan nilai *Variance Inflation Factor* (VIF) untuk mengetahui keberadaan autokorelasi dan multikolinearitas dalam suatu model regresi. Untuk menguji ada tidaknya asumsi regresi klasik, seperti multikolinearitas dan autokorelasi dapat menggunakan *software* SPSS 16.0 dengan melihat nilai *Tolerance* atau nilai VIF pada tabel *coefficient* untuk menguji multikolinearitas, sedangkan untuk menguji autokorelasi dapat melihat nilai dw pada tabel model *summary* atau dengan uji Runs-test. Jika nilai *Tolerance* kurang dari 0,1 atau nilai VIF lebih dari 5 maka hal tersebut menunjukkan masalah multikolinearitas pasti terjadi antar variabel bebas. Dan apabila nilai dw berada di daerah kritis $d < dL$ atau $d < 4 - dL$ artinya terdapat autokorelasi atau apabila nilai signifikasi kurang dari 0,05 pada uji Runs-test maka hal tersebut menunjukkan terjadi masalah autokorelasi.

Multikolinearitas dapat ditangani menggunakan analisis regresi komponen utama dan regresi ridge. Sedangkan autokorelasi dapat ditangani menggunakan *Two Stage Least Square* (TSLS), *Generalized Least Square* (GLS) dan *Feasible Generalized Least Square* (FGLS). Oleh karena itu, penulis ingin mengkombinasikan antara regresi ridge dan *Generalized Least Square* (GLS) dalam mengatasi masalah multikolinearitas dan autokorelasi dengan melihat nilai koefisien autokorelasi (ρ) berdasarkan nilai dw, nilai AR(1) Residual serta nilai *Cochrane Orcutt Iterative Procedure,* dan regresi ridge. Model persamaan regresi terbaik untuk mengatasi masalah multikolinearitas dan autokorelasi adalah model yang memiliki nilai dw yang mendekati selang $dU < d < 4 - dU$ dan nilai VIF < 5.

BAB 5

PENUTUP

5.1 Simpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan pada bab 4, maka dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Dari data jumlah uang yang beredar tersebut, terdapat masalah multikolinearitas dilihat dari nilai VIF > 5 yaitu sebesar 7,683 untuk variabel X_1 dan X_2. Dengan menggunakan metode *Ridge Regression* (RR), yaitu dengan menambah tetapan bias k pada diagonal matriks $X'X$ yang bertujuan untuk memperkecil variansinya. Berdasarkan nilai k sebesar 0,02 yang diperoleh dari nilai tetapan bias k menunjukkan bahwa nilai VIF sebesar 4,6671. Karena nilai VIF < 5, maka masalah multikolinearitas sudah teratasi. Sehingga diperoleh persamaan regresi *ridge* yaitu:

$$\hat{Y} = -447301{,}6 - 0{,}218857X_1 + 5670{,}823X_2$$

   dengan Y adalah jumlah uang yang beredar, X_1 adalah kurs Rupiah terhadap Dollar dan X_2 adalah indeks harga konsumen (IHK).

2. Dari data jumlah uang yang beredar tersebut, diperoleh nilai dw sebesar 1,231 dengan dL sebesar 1,3537 sehingga $d < dL$. Artinya, terdapat masalah autokorelasi. Dengan menggunakan metode *Generalized Least Square* (GLS) untuk mengatasi masalah autokorelasi dengan nilai

koefisien autokorelasi (ρ) berdasarkan nilai dw, AR(1) residual dan *Cochrane Orcutt Iterative Procedure* serta dengan mentransformasikan variabel ke X^* dan Y^* diperoleh persamaan regresi baru sebagai berikut:

Metode	ρ	Nilai dw	Persamaan Regresi
Nilai dw	0,364276	1,998	$\widehat{Y^*} = -298798{,}093 - 2{,}359X_1^* + 6001{,}192X_2^*$
AR(1) Residual	0,344419	2,035	$\widehat{Y^*} = -317886{,}166 - 8{,}411X_1^* + 6536{,}631X_2^*$
Cochrane Orcutt Iterative Procedure	0,366	2,001	$\widehat{Y^*} = -297991{,}146 - 2{,}357X_1^* + 6001{,}14X_2^*$

3. Pemilihan model regresi terbaik untuk mengatasi masalah multikolinearitas dan masalah autokorelasi dengan menggunakan kombinasi metode *Ridge Regression* (RR) dan metode *Generalized Least Square* (GLS) didasarkan pada nilai dw yang mendekati selang $dU < d < 4 - dU$ dan nilai VIF < 5, apabila memiliki nilai dw yang mendekati selang $dU < d < 4 - dU$ yang sama dapat dilihat dengan mempertimbangkan nilai MSE (*Mean Square Error*) terkecil dan apabila masih memiliki nilai MSE yang sama maka dapat dilihat dengan mempertimbangkan nilai koefisien determinasi (R^2) terbesar (Permana, 2014). Sehingga, diperoleh model regresi terbaik dengan menggunakan kombinasi metode *Ridge Regression* (RR) dan metode AR(1) residual merupakan model regresi terbaik untuk mengatasi masalah multikolinearitas dan masalah autokorelasi dengan nilai VIF sebesar 4,6671 serta mendekati selang $dU < d < 4 - dU$ atau $1{,}5805 < 2{,}035 <$

2,4195 dengan nilai MSE terkecil sebesar 224506836,3 dan nilai R^2 sebesar 72,3% dituliskan seperti persamaan sebagai berikut:

$$\hat{Y}^* = -317886{,}166 - 8{,}411X_1^* + 6536{,}631X_2^*$$

dengan Y adalah jumlah uang yang beredar, X_1 adalah kurs Rupiah terhadap Dollar dan X_2 adalah indeks harga konsumen (IHK).

5.2 Saran

Berdasarkan simpulan di atas peneliti memberikan saran sebagai berikut:

1. Model regresi terbaik dengan kombinasi metode *Ridge Regression* (RR) dan metode *Generalized Least Square* (GLS) dapat juga dilihat dengan pertimbangkan nilai MSE (*Mean Square Error*) terkecil dan apabila masih memiliki nilai MSE yang sama maka dapat dilihat dengan mempertimbangkan nilai koefisien determinasi (R^2) terbesar.
2. Pada penelitian ini, metode *Ridge Regression* (RR) untuk mengatasi masalah multikolinearitas hanya menggunakan pendekatan iteratif untuk menentukan nilai k dan penduga koefisien regresinya. Untuk penelitian selanjutnya, lebih baik apabila melakukan pengolahan data dengan menggunakan penduga koefisien regresi dengan pendekatan non-iteratif yang diusulkan oleh Hemmerle (1975).

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 2000. *Dasar-dasar Aljabar Linear* (5^{th} *ed.)*. Batam: Interaksara.

Batah, Feras Sh. 2011. A New Estimator By Generalized Modified Jackknife Ridge Regression Estimator. *Journal of Basrah Researches ((Sciences)),* 37: 4C.

Cody, Ronald P. & Smith, Jeffrey K. 2006. *Applied Statistics and The SAS Programming Language* (4^{th} *ed.)*. USA: Pearson Prentice Hall.

Dian, Candra Fransiska Desi Rahmawati. 2015. Regresi *Ridge-Robust* untuk Menangani Multikolinearitas dan Pencilan. *Jurnal FMIPA Universitas Brawijaya,* 3(1): 61-64.

Draper, N. & Smith, H. 1992. *Analisis Regresi Terapan* (2^{nd} *ed.)*. Translated by Bambang Sumantri. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

El-Dereny, M. & Rashwan, N.I. 2011. Solving Multicolinearity Problem Using Ridge Regression Models. Int. J. Contemp. Math. Sciences, 6(12): 585-600.

Eledum, Hussain & Zahri, Mostafa. 2013. Relaxation Method for Two Stages Ridge Regression Esimator. *Internasional Journal of Pure and Applied Mathematics*, 85(4): 653-667.

Elfa, Diana Pusparani. 2014. Perbandingan Metode *Stepwise* dan *Ridge Regression* dalam Menentukan Model Regresi Berganda Terbaik pada Kasus Multikolinearitas. *Jurnal FMIPA Universitas Brawijaya,* 2(5): 329-332.

Greene, Wiliam H. 2012. *Econometric Analysis* (7^{th} *ed.)*. New York: Prentice Hall.

Gujarati, Damodar N. 2003. *Basic Econometric* (5^{th} *ed.)*. New York: Mc Graw-Hill.

Gujarati, Damodar. 2003. *Ekonometrika Dasar, Alih Bahasa Sumarno Zain*. Jakarta: Erlangga.

Iriawan, N. & Astuti S.P. 2006. *Mengolah Data Statistik dengan menggunakan Minitab 14*. Yogyakarta: Andi.

Ketut, Ni Tri Utami., Komang I Gede Sukarsa., & Putu I Eka Nila Kencana. 2013. Penerapan Metode Generalized Ridge Regression Dalam Mengatasi Masalah Multikolinearitas. *E-Jurnal Matematika*, 2(1): 54-59.

Kutner, M.H., C.J. Nachtsheim., & J. Neter. 2004. *Applied Linear Regression Models (*4^{th} *ed.)*. New York: McGraw-Hill Companies, Inc.

Markidakis, Spyros,. Wheelwright SC., & McGee VE. 1999. *Metode dan Aplikasi Peramalan (*2^{nd}*ed.).* Jakarta: Erlangga.

Montgomery, Douglas C., Elizabeth A. Peck, & G. Geoffrey Vining. 2006. *Introduction to Linear Regression Analysis (*4^{th} *ed.).* New York: John Willey and Sons.

Neter J., Wasserman W., & Kutner M. H. 1997. *Analisis Regresi Linear Sederhana, Alih Bahasa Bambang Sumantri*. Bogor: FMIPA IPB.

Nicholson, W. K. 2011. *Linear Algebra with Applications*. Singapura: Mc. Graw-Hill Education.

Novilia & Syazali, Muhammad. 2014. *Olah Data Penelitian Pendidikan*. Bandar Lampung: Anugrah Utama Raharja (AURA).

Pasaribu, Medis., Jalil Abdul., & Masniari Ria Lubis. 2015. Penerapan Analisis Regresi Ridge pada Data Pasien Hipertensi di Rumah Sakit Umum Daerah Sidikalang Tahun 2014. *E-Jurnal Matematika*, 1(2): 1-5.

Permana, A.T. 2014. Perbandingan Metode Trimmed Square (LTS) dan Penduga-S sebagai Metode Pendugaan Parameter Regresi Robust. *Jurnal FMIPA Universitas Brawijaya*, 2(2): 125-128.

Pradipta, Nanang. 2009. *Metode Regresi Ridge untuk Mengatasi Model Regresi Linier Berganda yang Mengandung Multikolinieritas.* Skripsi. Medan: FMIPA Universitas Sumatra Utara.

Rahayu, Siti. 2009. *Penggunaan Metode Durbin Watson dalam Menyelesaikan Model Regresi yang Mengandung Autokorelasi.* Skripsi. Medan: FMIPA Universitas Sumatra Utara.

Sembiring, R. K. 1995. *Analisis Regresi*. Bandung: ITB.

Wasilaine, T. L., Talakua, M. W., & Lesnussa, Y. A. 2014. Model Regresi Ridge untuk Mengatasi Model Regresi Linear Berganda yang Mengandung Multikolinearitas (Studi Kasus: Data Pertumbuhan Bayi di Kelurahan Namaelo RT 001, Kota Masohi). *Jurnal FMIPA Unpatti,* 8(1): 31-37.

http://www.bi.go.id/id/moneter/kalkulator-kurs/Default.aspx. [diakses pada tanggal 25 Maret 2016].

http://www.bps.go.id/linkTabelStatis/view/id/1294. [diakses pada tanggal 25 Maret 2016].

http://www.bps.go.id/linkTabelStatis/view/id/907. [diakses pada tanggal 25 Maret 2016].

Yusna, N. A., Sutikno, & Djumali. 2012. Pemodelan Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Produksi dan Mutu Tembakau Temanggung dengan Kombinasi antara Generalized Least Square dan Regresi Ridge. *Jurnal FMIPA Institusi Teknologi Sepuluh November,* 1(1): 1-6.

Zea, Agustifa Tazliqoh, Rahmawati Rita & Safitri Diah. 2015. Perbandingan Regresi Komponen Utama dengan Regresi Ridge pada Analisis Faktor-Faktor Pendapatan Asli Daerah (PAD) Provinsi Jawa Tengah. *E-Journal Universitas Diponegoro,* 4(1): 1-10.