ANALISIS MODEL ANTRIAN PESAWAT TERBANG DI BANDARA INTERNASIONAL AHMAD YANI SEMARANG JAWA TENGAH

skripsi

disajikan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

Arya Kharisma Hendra

4111411039

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2015

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan.

Semarang, 27 Oktober 2015

METERAI TEMPEL
79A9AADF504061092
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Arya Kharisma Hendra

4111411039

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Analisis Model Antrian Pesawat Terbang Di Bandara Ahmad Yani Semarang Jawa Tengah

disusun oleh

Arya Kharisma Hendra

4111411039

telah dipertahankan dihadapan sidang Panitia Ujian Skripsi Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang pada tanggal 27 Oktober 2015

Panitia:

Ketua	Sekretaris
Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si.,akt	Drs. Arief Agoestanto, M.Si.
196412231988031001	196807221993031005

Ketua Penguji

Drs. Sugiman, M.Si.

196401111989011001

Anggota Penguji/	Anggota Penguji/
Pembimbing 1	Pembimbing 2
Putriaji Hendikawati, S.Si., M.Pd., M.Sc.	Drs Supriyono, M.Si.
198208182006042001	195210291980031002

iii

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

- Jadikan Solat dan Allah sebagai pelindungmu di setiap saat.

PERSEMBAHAN

1. Saya persembahkan untuk kedua orang tua saya dan adik tercinta yang telah mendukung saya.
2. Saya persembahkan untuk keluaga besar saya.
3. Saya persembahkan untuk Puji Robiati.

PRAKATA

Puji syukur senantiasa penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas limpahan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Analisis Model Antrian Pesawat Terbang Di Bandara Ahmad Yani Semarang Jawa Tengah."**

Penulis menyadari dalam penyusunan skripsi ini penulis telah mendapat banyak bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum, Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Prof. Dr. Wiyanto, M.Si., Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si., Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.
4. Putriaji Hendikawati, S.Si., M.Pd., M.Sc., Dosen pembimbing utama yang telah membimbing dan memberikan masukan dalam penulisan skripsi ini.
5. Drs Supriyono, M.Si., Dosen pembimbing pendamping yang telah membimbing dan memberikan masukan dalam penulisan skripsi ini.
6. Putriaji Hendikawati, S.Si., M.Pd., M.Sc., Dosen Wali yang telah membimbing dan memberikan masukan selama 4 tahun penulis menjalani perkuliahan.
7. Ayah dan Ibu tercinta, Bapak Totok Suyanto dan Ibu Iryani Farida yang selalu memberikan semangat dan dorongan materi dan spiritual (doa).
8. Adikku tersayang yang selalu mendo'akan serta memberikan motivasi dan semangat kerja keras.
9. Seluruh Dosen Matematika yang telah membimbing dan memberikan ilmunya kepada penulis.
10. Pegawai-pegawai di Bandara Ahmad Yani semarang yang telah membantu penulis dalam melakukan penelitian.

11. Sahabat-sahabat saya, Puji Robiati, Millatina Fikriyah, Danang Aji Setiawan, Styfanda Pangestika, Ari Yulianto Nugroho, Rifan Rahardian,Iin Kurniawati,Puji Lestari, Muhammad Taufik, Ari Saputra, Bravura Candra Halim, dan Ranggamurti Iswara yang telah memberikan semangat dan dorongan terkait penyusunan skripsi ini.
12. Teman-teman matematika angkatan 2011 yang memberikan dorongan untuk selalu semangat dalam bimbingan.
13. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis menyadari, bahwa masih banyak keterbatasan pengetahuan dan kemampuan yang penulis miliki. Penulis mengharapkan kritik dan saran yang bisa membangun penelititan-penelitian yang lain. Semoga skripsi ini dapat berguna dan bermanfaat bagi pembaca.

Semarang, September 2015

Penulis

ABSTRAK

Kharisma, Hendra Arya. 2015. *Analisis Sistem Antrian Pesawat Terbang Di Bandara Ahmad Yani Semarang Jawa Tengah*. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang. Pembimbing 1 Putriaji Hendikawati, S.Si., M.Pd., M.Sc. dan Pembimbing 2 Drs. Supriyono, M.Si.

Kata kunci : Antrian, Bandara, Optimalisasi.

Salah satu kejadian dalam kehidupan sehari-hari yang sering terjadi adalah kejadian menunggu.Kejadian menunggu merupakan hal yang mendasari adanya suatu antrian pada suatu pelayanan. Kejadian mengantri dapat dialami oleh orang-orang, barang-barang, maupun mesin-mesin dan komponen-komponen lain. Antrian dapat ditemui pada beberapa fasilitas pelayanan umum misalnya di sebuah Bandara. Tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui bagaimana model sistem antrian yang saat ini diterapkan di Bandara Ahmad Yani Semarang, mengetahui ukuran keefektifan proses pelayanan pesawat terbang, dan mengetahui banyaknya tempat parkir pesawat di area parkir Bandara yang ideal.

Metode penelitian yang digunakan meliputi beberapa tahap, yaitu studi pustaka, pengumpulan data, analisis data, dan penarikan kesimpulan.Data yang digunakan yaitu data primer.Pengambilan data dilaksanakan pada hari Jum'at dan Senin tanggal 14 & 17 Agustus 2015 mulai pukul 06.00 WIB - 20.00 WIB.Data yang diambil meliputi waktu kedatangan pesawat terbang, waktu pesawat terbang mulai dilayani, serta waktu pesawat terbang selesai dilayani. Data yang diperoleh kemudian dianalisis melalui beberapa langkah yaitu: (1) menentukan distribusi probabilitas dari data yang diperoleh dengan uji kebaikan suai – *chi square*, (2) menentukan model antrian, (3) menentukan ukuran keefektifan, dan (4) menentukan banyaknya tempat parkir yang ideal.

Dari hasil analisis diperoleh bahwa sistem antrian pada Bandara Ahmad Yani Semarang mengikuti model sistem antrian seri majemuk dengan 2 stasiun, stasiun pertama adalah [M/G/1]:[GD/K/∞] pada Area Tempat Parkir stasiun pertama, dan [M/G/1]:[GD/∞/∞] pada Landasan Pacu stasiun kedua. Ini berarti sistem antrian mengikuti pola kedatangan yang berdistribusi Poisson sedangkan waktu pelayanan tidak berdistribusi eksponensial. Hasil efektifitas proses pelayanan pesawat terbang untuk sistem antrian seri majemuk 2 stasiun di Bandara Ahmad Yani Semarang , yaitu sebagai berikut pada tanggal 14 Agustus 2015 pukul 06:00 WIB – 20:00 WIB diperoleh hasil $L_q = 2$ pesawat, $L_s = 2$ pesawat, $W_q = 10300{,}8737$ detik, dan $W_s = 11507{,}2530$ detik. Sedangkan pada tanggal 17 Agustus 2015 diperoleh hasil $L_q = 2$ pesawat, $L_s = 2$ pesawat, $W_q = 11085{,}3648$ detik, dan $W_s = 12384{,}10486$ detik. Berdasarkan hasil analisis data diperoleh keadaan *steady state* karena $\rho < 1$ jadi banyaknya tempat parkir dan landasan pacu Bandara Ahmad Yani Semarang yang ada sudah ideal dan sudah mencapai optimal yaitu 6 tempat parkir pesawat dan 1 landasan pacu, sehingga tidak perlu menambah tempat parkir.

DAFTARISI

Halaman

BAB 4 HASIL ANALISIS DAN PEMBAHASAN

BAB 5 PENUTUP

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTARLAMPIRAN

Halaman

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu kejadian dalam kehidupan sehari-hari yang sering terjadi adalah kejadian menunggu. Kejadian menunggu merupakan hal yang mendasari adanya suatu antrian pada suatu pelayanan. Kejadian mengantri dapat dialami oleh orang-orang, barang-barang, maupun mesin-mesin dan komponen-komponen lain. Pada saat bagian pelayanan sedang melayani pelanggan akan terjadi baris tunggu oleh pelanggan yang lain karena pelayan tidak mampu melayani pada saat yang bersamaan.

Menurut Ginting (2014: 1), antrian disebabkan oleh kebutuhan akan layanan melebihi kemampuan (kapasitas) pelayanan atau fasilitas layanan, sehingga pengguna fasilitas yang tiba tidak bisa segera mendapat layanan disebabkan kesibukan layanan. Pada banyak hal, tambahan fasilitas pelayanan dapat diberikan untuk mengurangi antrian atau untuk mencegah timbulnya antrian. Akan tetapi biaya karena memberikan pelayanan tambahan, akan menimbulkan pengurangan keuntungan mungkin sampai di bawah tingkat yang dapat diterima. Sebaliknya, sering timbulnya antrian yang panjang akan mengakibatkan hilangnya pelanggan atau nasabah.

Dalam dunia usaha, bertambahnya pelanggan berarti bertambah pula transaksi usaha. Dengan adanya masalah tersebut, maka perusahaan dituntut untuk melayani pelanggan atau konsumen agar tidak menunggu lama. Sehubungan dengan itu pemahaman mengenai teori antrian sangat dibutuhkan.

Mgbemena (2010: 6829-6830) mengemukakan bahwa pelopor teori antrian adalah seorang ahli matematika dari Denmark, Agner Kramp Erlang. Teori antrian merupakan cabang dari terapan teori probabilitas yang awalnya digunakan untuk mempelajari kemacetan lalu lintas telepon pada tahun 1910. Menurut Kakiay (2004: 10), proses antrian merupakan suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu dalam baris antrian jika belum dapat dilayani, dilayani dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut sesudah dilayani. Sebuah sistem antrian adalah suatu himpunan pelanggan, pelayan dan suatu aturan yang mengatur pelayanan kepada pelanggan.

Antrian dapat ditemui pada beberapa fasilitas pelayanan umum. Antrian dapat menyebabkan kerugian maupun ketidaknyamanan oleh berbagai pihak. Menurut Sharma & Sharma (2013: 1) misalnya, mesin menunggu untuk diperbaiki dapat mengakibatkan kehilangan produksi; kendaraan (kapal, truk, bus, dan mobil) yang perlu menunggu untuk dibongkar dapat menunda pengiriman berikutnya; penundaan dalam transmisi telekomunikasi karena sambungan direndam dapat menyebabkan gangguan data; dan pesawat menunggu untuk lepas landas dapat mengganggu jadwal perjalanan berikutnya.

Dari beberapa peristiwa di atas penulis menjumpai kegiatan antrian di salah satu fasilitas pelayanan transportasi, yaitu di Bandara Internasional Ahmad Yani Semarang. Bandara Internasional Ahmad Yani Semarang yang beralamat Jl. Puad A Yani 50149 Kota Semarang merupakan salah satu bandara udara yang dikelola oleh PT Angkasa Pura I (Persero), sebagai pintu gerbang dan ujung tombak lalu lintas udara yang berlokasi di bagian barat Kota Semarang. Posisi Bandara Internasional Ahmad Yani terletak antar garis 06.05-07.10 LS dan garis 109.35-110.50 BT, berbatasan dengan Kabupaten Kendal di sebelah barat, Kabupaten Demak di sebalah timur, Kabupaten Semarang di sebelah selatan dan Laut Jawa disebelah utara.

Pada awalnya Bandara Ahmad Yani adalah pangkalan udara TNI Angkatan Darat, lalu dibentuk Perwakilan Direktorat Jenderal Perhubungan Udara di Puad Ahmad Yani Semarang sebagai realisasi atas perubahan status Pelabuhan Udara Kalibanteng dengan Surat Keputusan Bersama Panglima Angkatan Udara, Menteri Perhubungan dan Menteri Angkatan Darat Nomor: KEP-932/9/1966.83/1966 dan S2/1/-PHB tanggal 31 Agustus 1966 tentang status Pelabuhan Udara Bersama Kalibanteng Semarang. Namun karena peningkatan frekuensi penerbangan sipil, maka untuk meningkatkan kualitas pelayanan, pengelola Bandara Ahmad Yani diserahkan kepada PT Angkasa Pura I (Persero) terhitung tanggal 1 Oktober 1995, kepemilikan dan pengoperasian Bandara Ahmad Yani Semarang diserahkan pada PT Angkasa Pura I (Persero) dengan pembinaan teknis tetap dilakukan oleh Direktorat Jenderal Perhubungan Udara. Seiring dengan perkembangan arus global, pengguna jasa menghendaki adanya penerbangan Internasional. Dengan demikian, tanggal 10 Agustus 2004 dikeluarkan Surat Keputusan Menteri Perhubungan Nomor KM 64 Tahun 2004 yang mengatur pelayanan Angkatan Udara ke atau dari luar negeri melalui

Bandara Ahmad Yani Semarang dan telah diresmikan oleh Gubernur Kepala Daerah Jawa Tengah pada hari Selasa tanggal 31 Agustus 2004.

Pada Bandara Internasional Ahmad Yani terdapat beberapa peristiwa antrian salah satunya yang menarik bagi penulis yaitu sistem antrian pesawat terbang dengan kapasitas parkir terbatas. Sistem antrian terbatas merupakan sistem antrian yang kedatangan pelanggannya dibatasi. Kakiay (2004: 233) mengemukakan ada sistem antrian dimana banyak pelanggan yang datang pada sistem terbatas. Banyak pelanggan dalam antrian tidak boleh melebihi suatu angka tertentu yang dinyatakan dengan K. Bila ada pelanggan yang datang dan ternyata sistem antriannya sudah penuh maka pelanggan itu akan ditolak dan pelanggan harus meninggalkan fasilitas pelayanan.

Kapasitas parkir yang terbatas dapat menyebabkan pesawat menunggu untuk lepas landas sehingga mengganggu jadwal perjalanan berikutnya. Oleh karena itu diperlukan suatu keputusan tentang kapasitas tempat parkir yang ideal untuk meningkatkan kualitas pelayanan dari Bandara tersebut. Permasalahan ini dapat dipecahkan yaitu dengan mencari elemen-elemen yang dibutuhkan dalam proses perhitungan sehingga nantinya bisa didapat suatu solusi yang sekurang-kurangnya dapat mengurangi panjang atau waktu antrian.

Penelitian terdahulu yang dilakukan Novita (2011: 11) mendapatkan hasil bahwa antrian pesawat terbang yang terjadi di Bandara Internasional Adisutjipto Yogyakarta merupakan model [M/G/1]:[(GD/∞/∞] untuk yang akan mendarat. Artinya antrian mempunyai waktu kedatangan berdistribusi Poisson dan waktu pelayanan berdistribusi umum dengan banyak pelayan adalah 1, mempunyai peraturan FIFO (*first in frist out*) serta mempunyai tak hingga pelanggan yang boleh memasuki sistem sebagai sumber. Model antrian pesawat terbang yang tinggal landas yaitu [M/G/1]:[GD/∞/∞], artinya mempunyai waktu kedatangan berdistribusi Poisson dan waktu pelayanan berdistribusi umum dengan banyak pelayanan adalah 1. Ukuran kinerja untuk kedua model menunjukkan bahwa banyak pesawat yang mengantri untuk dilayani mendarat maupun tinggal landas tidak terlalu banyak. Sedangkan waktu tunggu untuk dilayani baik mendarat maupun tinggal landas tidak terlalu lama.

Perbedaan penelitian yang akan dilakukan dengan penelitian terdahulu yang telah dipaparkan adalah pada kapasitas sistem antriannya. Dalam penelitian terdahulu kapasitas sistem antriannya tak hingga sedangkan pada penelitian ini kapasitas sistem antriannya terbatas. Model sistem antrian di Bandara Internasional Ahmad Yani Semarang lebih spesifik dengan memberi kapasitas berapa pesawat yang dapat ditampung oleh Bandara Internasional tersebut. Penelitian ini dilakukan untuk menganalisis model sistem antriannya sehingga dapat dijadikan masukan untuk pengambilan keputusan bagi pihak Bandara Internasional sehingga bisa memberikan kenyamanan pelayanan bagi pesawat namun juga tidak merugikan bagi pihak Bandara Internasional tersebut.

Berdasarkan uraian tersebut peneliti tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul "ANALISIS MODEL ANTRIAN PESAWAT TERBANG DI BANDARA INTERNASIONAL AHMAD YANI SEMARANG JAWA TENGAH".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah diatas, dapat dirumuskan beberapa masalah dalam penelitian ini yaitu:

(1) Bagaimana keefektifan model antrian pada Area Parkir di Bandara Internasional Ahmad Yani Semarang?

(2) Bagaimana keefektifan model antrian pada Landasan Pacu di Bandara Internasional Ahmad Yani Semarang?

(3) Bagaimana keefektifan model antrian seri pada Bandara Internasional Ahmad Yani Semarang?

(4) Apakah banyak tempat parkir untuk pelayanan pesawat terbang di area parkir Bandara Internasional Ahmad Yani Semarang yang ada sudah ideal?

1.3 Batasan Masalah

Masalah-masalah dalam penelitian ini dibatasi pada:

(1) Penelitian dilakukan di Bandara Internasional Ahmad Yani Kota Semarang pada antrian pesawat terbang. Bandara Internasional Ahmad Yani ini mengikuti disiplin antrian SIRO (*Service In Random Order)* dimana pesawat terbang yang yang dilayani secara acak.

(2) Sistem antrian dimulai dari masuknya pesawat ke dalam parkir sampai dengan pesawat tersebut meninggalkan parkir.

(3) Kefektifan yang di maksud yaitu rata-rata waktu pesawat terbang menunggu dan banyak pesawat terbang dalam antrian maupun dalam system.

(4) Data yang diambil adalah banyak dan waktu kedatangan pesawat, waktu pesawat mulai parkir, dan waktu pesawat selesai parkir pada waktu sibuk.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

(1) Mengetahui keefektifan model antrian pada Area Parkir di Bandara Internasional Ahmad Yani Semarang.

(2) Mengetahui keefektifan model antrian pada Landasan Pacu di Bandara Internasional Ahmad Yani Semarang.

(3) Mengetahui keefektifan model antrian seri pada Bandara Internasional Ahmad Yani Semarang.

(4) Mengetahui banyak tempat parkir untuk pelayanan pesawat terbang di Bandara Internasional Ahmad Yani Semarang yang ada sudah ideal.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini dibuat antara lain:

(1) Manfaat teoritis

a. memberikan wawasan kepada pembaca tentang aplikasi teori antrian dalam kehidupan nyata,

b. dapat dijadikan wacana untuk pemecahan masalah pada kasus-kasus antrian yang mempunyai tipe yang sama dengan antrian yang terjadi di Bandara Internasional Ahmad Yani Kota Semarang, dan

c. memberikan kerangka berfikir untuk dikembangkan sehingga dapat dijadikan sebagai dasar atau landasan untuk penelitian lebih lanjut mengenai teori antrian.

(2) Manfaat praktis

sebagai bahan pertimbangan dalam pengambilan keputusan atau kebijakan bagi Bandara Internasional Ahmad Yani Kota Semarang dalam peningkatan efektifitas pelayanan.

1.6 Sistematika Penulisan

Secara garis besar skripsi ini dibagi menjadi tiga bagian (bab) yaitu bagian awal skripsi, bagian isi skripsi, dan bagian akhir skripsi. Berikut ini dijelaskan masing-masing bagian skripsi.

(1) Bagian awal skripsi

Bagian awal skripsi meliputi halaman judul, pernyataan keaslian tulisan, pengesahan, motto dan persembahan, prakata, abstrak, daftar isi, daftar gambar, daftar tabel, dan daftar lampiran.

(2) Bagian isi skripsi

Bagian isi skripsi secara garis besar terdiri dari lima bab, yaitu:

BAB 1. PENDAHULUAN

Bab ini berisi mengenai latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi kajian teori yang menjadi kerangka pikir penyelesaian masalah penelitian. Bab ini berisi sub bab-sub bab mengenai Teori Probabilitas, Uji Kebaikan Suai-*Chi Square*, Pengantar Proses Stokastik, Teori Antrian, dan Model-Model Sistem Antrian.

BAB 3. METODE PENELITIAN

Bab ini mengulas metode yang yang digunakan dalam proses penenlitian. Bab ini terdiri atas studi pustaka, pengumpulan data, analisis data, dan penarikan kesimpulan.

BAB 4. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Berisi penyelesaian dari permasalahan yang diungkapkan.

BAB 5. PENUTUP

Bab ini berisi tentang simpulan dari pembahasan dan saran yang berkaitan dengan simpulan.

(3) Bagian akhir skripsi

Bagian akhir skripsi meliputi daftar pustaka yang memberikan informasi tentang buku sumber serta literatur yang digunakan dan lampiran-lampiran yang mendukung skripsi.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Teori Probabilitas

2.1.1 Ruang Sampel dan Kejadian

Definisi 2.1

Gagasan dasar dalam teori probabilitas adalah eksperimen acak: sebuah percobaan yang hasilnya tidak dapat ditentukan sebelumnya (Ross, 1996: 1).

Definisi 2.2

Himpunan semua kemungkinan hasil dari suatu percobaan disebut ruang sampel percobaan itu, dan selanjutnya diberi lambang S (Ross, 1996: 1).

Definisi 2.3

Suatu kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel (Walpole & Myers, 1995: 6).

2.1.2 Probabilitas Suatu Kejadian

Probabilitas berkaitan dengan suatu kejadian tertentu. Probabilitas suatu kejadian adalah nilai yang menunjukkan seberapa besar kemungkinan kejadian itu akan terjadi. Sedangkan fungsi probabilitas adalah fungsi yang dapat digunakan untuk menghitung probabilitas suatu kejadian acak.

Probabilitas dinyatakan dalam pecahan atau persen dan besarnya antara 0 dan 1. Tidak pernah ada probabilitas negatif ataupun lebih besar dari 1.

Probabilitas sama dengan 0 berarti sesuatu tidak pernah terjadi dan probabilitas sama dengan 1 berarti sesuatu akan selalu atau pasti terjadi (Mulyono, 2004: 216).

2.1.3 Peubah Acak

Definisi 2.4

Suatu peubah acak X adalah suatu fungsi yang mengaitkan setiap unsur dalam ruang sampel S pada suatu bilangan real. Hasil dari X yaitu $A_x = \{x|x = X(c),\ c\ di\ S\}$ dinamakan ruang peubah acak X atau ruang dari X (Ross, 1996: 7).

Ada dua macam peubah acak yaitu diskrit dan kontinu. Suatu peubah acak dikatakan diskrit apabila ruang sampel berisi X ← (0,1). Jika jumlah elemen pada ruang sampel itu tidak terbatas, maka peubah acaknya disebut peubah acak kontinu (Mulyono, 2004: 229). Dalam hal ini, peubah acak diskrit akan mempresentasikan data yang dapat dihitung, sedangkan peubah acak kontinu mempresentasikan data yang dapat diukur.

2.1.4 Fungsi Kepadatan Peluang

2.1.4.1 Fungsi Kepadatan Peluang dari Peubah Acak Diskrit

Definisi 2.5

Misal S ruang sampel dari peubah acak diskrit X. Fungsi f dari S ke dalam R yang bersifat:

(1) $f(x) \geq 0, \forall x \in S$

(2) $\sum_{x\ di\ S} f(x) = 1$

dinamakan fungsi kepadatan peluang (fkp) dari peubah acak diskrit X. Jika peubah acak X diskrit dengan fkp f(x), maka peluang suatu peristiwa $A \subseteq S$ diberikan oleh:

$$P(A) = \sum_{xdiA} f(x) \qquad (2.1)$$

(Djauhari M, 1990: 41).

2.1.4.2 Fungsi Kepadatan Peluang dari Peubah Acak Kontinu

Definisi 2.6

Misal S ruang sampel dari peubah acak kontinu X. Fungsi f dari S ke dalam R memenuhi:

(1) $f(x) \geq 0, \forall x \in S$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

dinamakan fkp dari peubah acak kontinu X. Jika peubah acak kontinu X memiliki fkp f(x) maka peluang suatu peristiwa $A \subseteq S$, diberikan oleh:

$$P(A) = \int_{xdiA} f(x)dx \qquad (2.2)$$

(Djauhari M, 1990: 43).

2.1.5 Model Distribusi Poisson dan Eksponensial

2.1.5.1 Distribusi Poisson

Semakin kecil probabilitas sukses, distribusi probabilitasnya akan semakin melenceng. Oleh sebab itu, dikembangkan satu bentuk distribusi binomial dengan kemungkinan sukses sangat kecil dan jumlah eksperimen sangat besar, yang disebut distribusi Poisson (Supranto, 2001: 40).

Distribusi Poisson sering muncul dalam literatur manajemen karena banyak diterapkan dalam bidang itu, misalnya saja, banyaknya pasien yang datang pada suatu rumah sakit, banyaknya pelanggan yang datang pada jasa pelayanan bank, banyaknya panggilan telepon selama jam kerja, banyaknya kecelakaan di perempatan jalan dan lain-lain. Beberapa proses "kedatangan" yang telah disebutkan itu, belum pasti akan mengikuti proses Poisson. Jika pola kedatangannya diasumsikan mengikuti proses Poisson, rumus proses Poisson dapat digunakan untuk menghitung probabilitas banyaknya kedatangan dalam suatu selang waktu tertentu (Mulyono, 2004: 230).

Definisi 2.7

Suatu eksperimen yang menghasilkan jumlah sukses yang terjadi pada interval waktu ataupun pada daerah yang spesifik dikenal sebagai eksperimen Poisson (Tarliah & Dimyati, 1987: 254).

Sifat eksperimen Poisson adalah sebagai berikut:

(1) jumlah sukses yang terjadi pada interval waktu atau daerah tertentu bersifat *independent* terhadap yang terjadi pada interval waktu atau daerah tertentu yang lain,

(2) peluang terjadinya sukses pada interval waktu atau daerah tertentu yang kecil, sebanding dengan panjang jangka waktu ataupun ukuran daerah terjadinya sukses tersebut, dan

(3) besar kemungkinan terjadinya lebih dari satu sukses pada interval waktu yang singkat ataupun daerah yang sempit, diabaikan

(Tarliah & Dimyati, 1987: 254).

Definisi 2.8

Jumlah sukses dalam eksperimen Poisson disebut variabel random Poisson. Distribusi kemungkinan dari variabel random Poisson X disebut distribusi Poisson (Tarliah & Dimyati, 1987: 254).

Definisi 2.9

Peubah acak X dikatakan berdistribusi Poisson dengan parameter λ ditulis $X \sim p(\lambda)$ jika memiliki fkp sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & , \ x = 0,1,2, \ldots \\ 0 & , \ x \ yang \ lain \end{cases} \quad (2.3)$$

dimana λ adalah rata-rata banyaknya sukses yang terjadi dan *e* adalah bilangan natural, *e* = 2,71828… (Djauhari M, 1990:163-164).

Mean dan variansi distribusi Poisson keduanya sama yaitu λ.

2.1.5.2 Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial digunakan untuk menggambarkan distribusi waktu pada fasilitas jasa pengasumsian bahwa waktu pelayanan bersifat acak. Artinya, waktu untuk melayani pendatang tidak tergantung pada banyaknya waktu yang telah dihabiskan untuk melayani pendatang sebelumnya, dan tidak bergantung pada jumlah pendatang yang sedang menunggu untuk dilayani.

Definisi 2.10

Peubah acak X dikatakan berdistribusi eksponensial dengan parameter λ jika memiliki fkp sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, untuk\ x > 0 \\ 0, untuk\ x\ yang\ lain \end{cases} \quad (2.4)$$

dimana x menyatakan waktu yang dibutuhkan sampai terjadi satu kali sukses dengan λ adalah rata-rata banyaknya sukses dalam selang waktu satuan (Djauhari M, 1990: 175-176).

Mean dan variansinya adalah

$$\text{Mean (X)} = \text{E(X)} = \lambda \quad (2.5)$$

$$\text{Var (X)} = \sigma^2 = E(X-\lambda)^2 = \lambda^2 \quad (2.6).$$

2.2 Uji Kebaikan Suai - *Chi Square*

Uji kebaikan suai merupakan suatu uji untuk menentukan apakah suatu populasi mempunyai suatu distribusi teoritis tertentu. Uji tersebut didasarkan atas baiknya kesesuaian antara frekuensi terjadinya pengamatan dalam sampel yang diamati dengan frekuensi harapan yang diperoleh dari distribusi yang dihipotesiskan (Walpole & Myers, 1995: 574-575).

2.2.1 Uji Kebaikan Suai – *Chi Square* terhadap peristiwa yang berdistribusi Poisson

Misalkan peubah acak X berdistribusi Poisson. Untuk menghitung frekuensi teoritis (f_e) digunakan fungsi kepadatan probabilitasnya dari distribusi Poisson

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & , x = 0,1,2, \ldots \\ 0 & , x\ yang\ lain \end{cases} \quad (2.7)$$

dimana λ adalah rata-rata banyaknya sukses yang terjadi dan e adalah bilangan natural, e = 2,71828… (Djauhari M, 1990:163-164).

Sehingga untuk sejumlah n frekuensi observasi (f_o) maka frekuensi teoritis (f_e) nya adalah

$$f_e = nf(x) \tag{2.8}$$

Nilai *chi square* hitung (χ^2) dihitung dengan rumus sebagai berikut

$$\chi^2 = \sum_{x=0}^{m} \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e} \tag{2.9}$$

dengan m adalah jumlah sel atau baris yang dipergunakan dalam mengembangkan fungsi kepadatan empiris (Taha, 1997:11-12).

Dalam uji kebaikan suai *chi square*, keputusan diambil berdasarkan hipotesis penelitian yang telah dirumuskan sebelumnya. Hipotesis nol (H_o) yang berbunyi kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson diterima pada tingkat signifikansi α jika harga ${\chi^2}_{hitung} < {\chi^2}_{m-k-1}; 1 - \alpha$ dengan m adalah jumlah baris yang digunakan dan k adalah jumlah parameter yang diestimasi dari data mentah untuk dipergunakan dalam mendefinisikan distribusi teoritis yang bersangkutan.

2.2.2 Uji Kebaikan Suai – *Chi Square* terhadap peristiwa yang berdistribusi Eksponensial

Misalkan peubah acak X berdistribusi eksponensial. Frekuensi teoritis (f_e) yang berkaitan dengan interval $[I_{i-1}, I]$ dihitung dengan menggunakan rumus berikut.

$$f_e = n \int_{i-1}^{i} f(x)dx \ , i = 1, 2, 3, \dots, m \tag{2.10}$$

dengan m adalah banyak interval yang digunakan. Sedangkan *f(x)* adalah fungsi kepadatan probabilitas dari distribusi eksponesial dengan parameter λ.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \ yang \ lain \end{cases} \tag{2.11}$$

Dengan demikian diperoleh frekuensi teoritis (f_e) nya adalah

$$f_e = n(e^{-\lambda(I_{i-1})} - e^{-\lambda(I_i)} \tag{2.12}$$

Nilai *chi square* hitung diperoleh dengan menggunakan rumus berikut (Taha, 1997 : 11-12)

$$\chi^2 = \sum_{x=0}^{m} \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e} \tag{2.13}$$

Dalam uji kebaikan suai *chi square*, keputusan diambil berdasarkan hipotesis penelitian yang telah dirumuskan sebelumnya. Hipotesis nol (H_o) yang berbunyi waktu pelayanan berdistribusi eksponensial diterima pada tingkat signifikansi α jika harga ${\chi^2}_{hitung} < {\chi^2}_{m-k-1}; 1 - \alpha$ dengan m adalah jumlah baris yang digunakan dan k adalah jumlah parameter yang diestimasi dari data mentah untuk dipergunakan dalam mendefinisikan distribusi teoritis yang bersangkutan.

2.3 Pengantar Proses Stokastik

Dalam analisis Markov yang dihasilkan adalah suatu informasi probabilistik yang dapat digunakan untuk membantu pembuatan keputusan. Analisis Markov merupakan suatu bentuk khusus dari model probabilistik yang lebih umum yang dinamakan *Stochastic process*, yaitu proses perubahan probabilistik yang terjadi terus-menerus (Mulyono, 2004: 273).

Definifi 2.11

Proses stokastik adalah suatu kumpulan dari variabel random *X(t), t* ∈ *T* yang didefinisikan dalam suatu ruang probabilitas. Indeks *T* sering kali direpresentasikan sebagai waktu dan X(t) dinyatakan sebagai suatu keadaan (*state*) dari proses pada waktu t (Hendikawati, 2014: 2).

Definisi 2.12

Proses Markov adalah suatu himpunan-himpunan objek dan himpunan sedemikian rupa sehingga:

(1) pada sebarang waktu yang diketahui tiap-tiap objek harus berada dalam keadaan tertentu, dan

(2) peluang atau probabilitas berpindahnya keadaan satu ke keadaan lain dalam selang waktu tertentu hanya bergantung pada dua keadaan itu

(Hendikawati, 2014: 3).

Definisi 2.13

Bilangan-bilangan bulat positif dari selang waktu setelah proses perpindahan menyatakan tahapan-tahapan proses yang jumlahnya hingga/tak hingga tetapi dapat dihitung (*countable*) maka proses Markov tersebut merupakan Rantai Markov (Markov *Chain*) (Hendikawati, 2014: 3).

2.4 Teori Antrian

2.4.1 Pengertian Teori Antrian

Definisi 2.14

Teori antrian adalah teori yang menyangkut studi matematis dari antrian-antrian atau baris-baris penungguan (Tarliah & Dimyati, 1987: 291).

Definisi 2.15

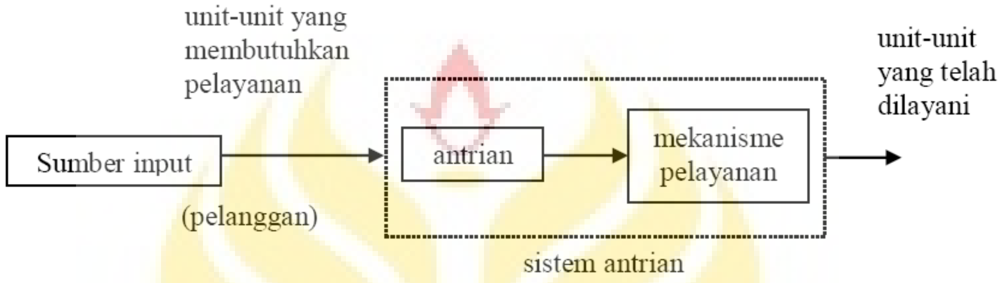
Sistem antrian adalah suatu himpunan pelanggan, pelayan, dan suatu aturan yang mengatur pelayanan kepada pelanggan (Kakiay, 2004: 10).

Dalam hal ini, apabila jumlah pelayan terlalu banyak maka akan memerlukan biaya yang besar. Sebaliknya apabila jumlah pelayan kurang maka akan terjadi baris penungguan dalam waktu yang cukup lama yang juga akan menimbulkan biaya, baik berupa biaya sosial, kehilangan langganan, ataupun pengangguran pekerja. Dengan demikian yang menjadi tujuan utama teori antrian ini ialah mencapai keseimbangan antara biaya pelayanan dengan biaya yang disebabkan oleh adanya waktu menunggu (Tarliah & Dimyati, 1987: 291).

Ada dua fungsi dasar model antrian, yaitu meminimumkan biaya langsung dan biaya tak langsung. Biaya langsung adalah biaya yang timbul akibat lamanya waktu pelayanan yang secara langsung membebani pihak perusahaan. Sementara biaya tak langsung terjadi apabila konsumen harus menunggu lama sehingga mungkin membatalkan niat untuk memakai jasa perusahaan tersebut.

2.4.2 Komponen Proses Antrian

Komponen dasar proses antrian adalah kedatangan, pelayan, dan antri. Setiap masalah antrian melibatkan kedatangan, misalnya orang, mobil, atau panggilan telepon untuk dilayani. Unsur ini sering dinamakan proses input. Pelayan atau mekanisme pelayanan dapat terdiri dari satu atau lebih pelayan, atau satu atau lebih fasilitas pelayanan. Inti dari analisis antrian adalah antri itu sendiri. Timbulnya antrian terutama tergantung dari sifat kedatangan dan proses pelayanan (Mulyono, 2004: 286). Komponen dasar proses antrian disajikan pada gambar 2.1.



Gambar 2.1 Proses Dasar Antrian

2.4.3 Faktor Sistem Antrian

Secara umum ada beberapa faktor yang berpengaruh terhadap sistem antrian, antara lain:

2.4.3.1 Distribusi Kedatangan

Pada sistem antrian, distribusi kedatangan merupakan faktor penting yang berpengaruh besar terhadap kelancaran pelayanan. Distribusi kedatangan terbagi menjadi dua yaitu (1) kedatangan secara individu (*single arrivals*) dan (2) kedatangan secara kelompok (*bulk arrivals*). Kedua komponen ini harus mendapatkan perhatian yang memadai saat pendesainan sistem pelayanan (Kakiay, 2004: 4-5).

2.4.3.2 Distribusi Waktu Pelayanan

Distribusi waktu pelayanan berkaitan erat dengan berapa banyak fasilitas pelayanan yang dapat disediakan. Distribusi waktu pelayanan terbagi menjadi dua komponen penting, yaitu (1) pelayanan secara individual (*single service*) dan (2) pelayanan secara kelompok (*bulk service*) (Kakiay, 2004: 5).

Waktu yang dibutuhkan untuk melayani dapat dikategorikan konstan dan acak. Waktu pelayanan konstan jika waktu yang dibutuhkan untuk melayani sama tiap pelanggan. Sedangkan waktu pelayanan acak jika waktu yang dibutuhkan untuk melayani tiap pelanggan berbeda. Jika waktu pelayanan acak maka diasumsikan mengikuti distribusi eksponensial.

2.4.3.3 Fasilitas Pelayanan

Fasilitas pelayanan berkaitan erat dengan baris antrian yang akan dibentuk. Fasilitas pelayanan dapat terdiri dari satu atau lebih pelayan atau satu atau lebih fasilitas pelayanan. Tiap-tiap fasilitas pelayanan disebut sebagai saluran (*channel*). Desain fasilitas pelayanan ini dapat dibagi dalam tiga bentuk, yaitu

(1) bentuk seri, dalam satu garis lurus ataupun garis melingkar,

(2) bentuk paralel, dalam beberapa garis lurus antara yang satu dengan yang lain paralel, dan

(3) bentuk jaringan (*network station*), yang dapat didesain secara seri dengan pelayanan lebih dari satu pada setiap stasiun. Bentuk ini dapat juga dilakukan secara paralel dengan stasiun yang berbeda-beda.

Dengan demikian bentuk fasilitas pelayanan ini juga harus diperhitungkan dalam sistem antrian (Kakiay, 2004: 5).

2.4.3.4 Disiplin Antrian

Disiplin antrian adalah aturan keputusan yang menjelaskan cara melayani pelanggan yang mengantri. Disiplin antrian berkaitan erat dengan urutan pelayanan bagi pelanggan yang memasuki fasilitas pelayanan. Menurut Kakiay (2004: 12) disiplin antrian terbagi dalam empat bentuk, yaitu

(1) Pertama Masuk Pertama Keluar

Aturan pelayanan ini sering disebut *First Come First Served* (FCFS) atau *First In First Out* (FIFO). FIFO merupakan suatu peraturan dimana yang akan dilayani terlebih dahulu adalah pelanggan yang datang terlebih dahuu. Contohnya dapat dilihat pada antrian di loket-loket penjualan karcis kereta api.

(2) Terakhir Masuk Pertama Keluar

Aturan pelayanan ini sering disebut *Last Come First Served* (LCFS) atau *Last In First Out* (LIFO), yang merupakan antrian dimana yang datang paling akhir adalah yang dilayani paling awal atau paling dahulu. Contohnya pada sistem bongkar muat barang di dalam truk, dimana barang yang masuk terakhir justru akan keluar terlebih dahulu.

(3) Pelayanan dalam Urutan Acak

Pelayanan dalam urutan acak atau sering disebut *Service In Random Order* (SIRO) merupakan aturan pelayanan dimana pelayanan dilakukan secara acak. Sering juga dikenal dengan RSS (*Random Selection For Service*). Contohnya pada arisan, dimana pelayanan dilakukan berdasarkan undian (*random*).

(4) Pelayanan Berdasarkan Prioritas

Aturan ini sering disebut *Priority S*ervice (PS)/VIP *Consumer*, yang artinya prioritas pelayan diberikan kepada pelanggan yang mempunyai prioritas lebih tinggi dibandingkan dengan pelanggan yang mempunyai prioritas lebih rendah, meskipun yang terakhir ini kemungkinan sudah lebih dahulu tiba dalam garis tunggu.

Kejadian seperti ini kemungkinan disebabkan oleh beberapa hal, misalnya seorang yang dalam keadaan penyakit lebih berat dibanding dengan orang lain dalam suatu tempat praktek dokter. Dalam hal di atas telah dinyatakan bahwa entitas yang berada dalam garis tunggu tetap tinggal di sana sampai dilayani. Hal ini bisa saja tidak terjadi. Misalnya, seorang pembeli bisa menjadi tak sabar menunggu antrian dan meninggalkan antrian.

2.4.3.5 Ukuran Sistem Antrian

Besarnya antrian pelanggan yang akan memasuki fasilitas pelayanan pun perlu diperhatikan. Ada dua desain yang dapat dipilih untuk menentukan besarnya antrian, yaitu (1) ukuran kedatangan secara terbatas (*finite queue*) dan (2) ukuran kedatangan secara tidak terbatas (*infinite queue*) (Kakiay, 2004: 5-6).

2.4.3.6 Sumber Pemanggilan

Dalam fasilitas pelayanan yang berperan sebagai sumber pemanggilan dapat berupa mesin maupun manusia. Bila ada sejumlah mesin yang rusak maka sumber pemanggilan akan berkurang dan tidak dapat melayani pelanggan. Ada dua jenis sumber pemanggilan, yaitu (1) sumber pemanggilan terbatas (*finite calling source*) dan (2) sumber pemanggilan tak terbatas (*infinite calling source*) (Kakiay, 2004: 6).

2.4.3.7 Perilaku Manusia

Kakiay (2004: 4) mengemukakan bahwa pelayan maupun pelanggan yang ada di dalam sistem antrian adalah manusia yang berperilaku (*human behavior*).

Sebagai manusia pelayan (*human server*), pelayan dapat melayani dengan kecepatan tinggi sehingga mengurangi waktu menunggu atau juga melayani dengan lambat sehingga akan memperlama waktu tunggu. Terdapat 3 perilaku manusia yang bisa mempengaruhi sistem antrian, yaitu

(1) Perpindahan (*Jockeying*)

Jockeying menggambarkan orang yang pindah-pindah antrian.

(2) Penolakan (*Balking*)

Terjadi apabila seorang pelanggan menolak masuk kedalam fasilitas pelayanan karena antrian yang terlalu panjang. *Balking* menggambarkan orang yang tidak masuk dalam antrian dan langsung meninggalkan tempat antrian.

(3) Pembatalan (*Reneging*)

Terjadi apabila pelanggan meninggalkan antrian sebelum dilayani karena waktu menunggu untuk dilayani terlalu lama. *Reneging* menggambarkan situasi dimana seseorang masuk dalam antrian, namun belum memperoleh pelayanan, kemudian meninggalkan antrian tersebut.

2.4.4 Macam Bentuk Antrian

Ada beberapa bentuk sistem di dalam antrian menurut Kakiay (2004: 13-14) yaitu

2.4.4.1 Satu saluran satu tahap (Single Channel Single Phase)

Single channel berarti hanya ada satu jalur yang memasuki sistem pelayanan atau ada satu fasilitas pelayanan. *Single phase* berarti hanya ada satu pelayanan. Dikenal pula sebagai sistem antrian jalur tunggal yang juga disebut *single channel*, sementara *single server* merupakan sistem antrian dimana hanya terdapat satu pemberi layanan serta satu jenis layanan yang diberikan.

Gambar 2.2 Satu Antrian Satu Pelayanan

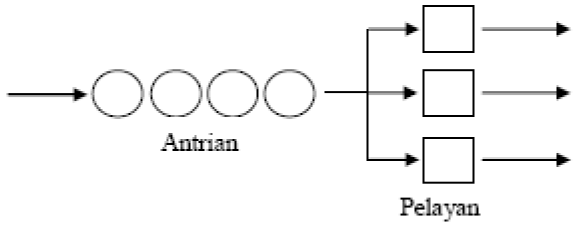
2.4.4.2 Satu saluran banyak tahap (Single Channel Multiple Phase)

Istilah *multi phase* menunjukkan ada dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan. Sistem antrian jalur tunggal tahapan berganda (*single channel multi server*) berarti dalam sistem antrian tersebut terdapat lebih dari satu jenis layanan yang diberikan, tetapi dalam setiap jenis layanan hanya terdapat satu pemberi layanan. Sebagai contoh : pencucian mobil.

Gambar 2.3 Satu Antrian Beberapa Pelayan Seri

2.4.4.3 Banyak saluran satu tahap (Multiple Channel Single Phase)

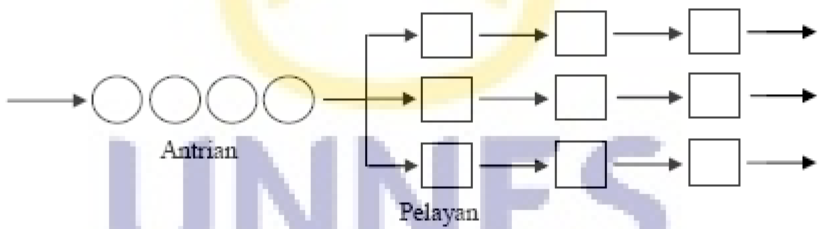
Sistem *multi channel single phase* terjadi di mana ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh antrian tunggal. Sistem antrian ini juga dikenal sebagai jalur berganda satu tahap (*multi channel single server*) yaitu terdapat satu jenis layanan dalam sistem antrian tersebut, namun terdapat lebih dari satu pemberi layanan. Sebagai contoh model ini adalah antrian pada *teller* bank.



Gambar 2.4 Satu Antrian Beberapa Pelayan Tunggal

2.4.4.4 Banyak saluran banyak tahap (Multi Channel Multi Phase)

Sistem antrian multi channel multi phase sama dengan antrian *multi channel multi server* atau sistem antrian dengan jalur berganda dengan tahapan berganda yaitu sistem antrian dimana terdapat lebih dari satu jenis layanan dan terdapat lebih dari satu pemberi layanan dalam setiap jenis layanan. Sebagai contoh, pelayanan kepada pasien di rumah sakit mulai dari pendaftaran, diagnosa, penyembuhan sampai pembayaran. Setiap sistem-sistem ini mempunyai beberapa fasilitas pelayanan pada tiap tahapnya.



Gambar 2.5 Beberapa Antrian Beberapa Pelayan Paralel

2.4.5 Notasi Sistem Antrian

Pada pengelompokkan model-model antrian yang berbeda akan digunakan suatu notasi yang disebut dengan Notasi Kendall. Notasi ini sering digunakan karena notasi tersebut merupakan alat yang efisien untuk mengidentifikasi tidak hanya model-model antrian, tetapi juga asumsi-asumsi yang harus dipenuhi.

Notasi itu dituliskan:

[a/b/c]:[d/e/f]

Keterangan:

a : distribusi kedatangan,

b : distribusi keberangkatan atau waktu pelayanan,

untuk a dan b, M menunjukkan Poisson,

Ek menunjukkan Erlang, dan

D berarti deterministik atau konstan,

c : banyaknya pelayanan paralel,

d : disiplin antri,

e : jumlah maksimum pengantri dalam sistem (antri dan dilayani), dan

f : jumlah sumber kedatangan (Mulyono, 2004: 292-293).

2.4.6 Ukuran *Steady-State* dari Kinerja

Ukuran *steady state* sistem antrian disimbolkan dengan ρ dan dapat dihitung dengan rumus:

$$\rho = \frac{\lambda}{s.\mu} < 1 \tag{2.14}$$

dengan: λ : rata-rata jumlah pelanggan yang datang

μ : rata-rata waktu pelayanan

s : jumlah pelayan (Tarliah & Dimyati, 1987: 305).

Keadaan *steady state* dapat terpenuhi apabila $\rho < 1$ yang berarti bahwa $\lambda < \mu$. Sedangkan jika $\rho > 1$ maka kedatangan terjadi dengan kelajuan yang lebih cepat daripada yang dapat ditampung oleh pelayan, keadaan yang sama berlaku apabila $\rho = 1$.

Berdasarkan informasi tersebut dapat dihitung ukuran-ukuran kinerja antara lain jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam sistem, jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam antrian, waktu menunggu yang diperkirakan dalam sistem dan waktu menunggu yang diperkirakan dalam antrian.

2.4.7 Peran Distribusi Poisson dan Eksponensial dalam Antrian

Situasi antrian dimana kedatangan dan keberangkatan (kejadian) yang timbul selama interval waktu dikendalikan dengan kondisi berikut.

Kondisi 1: probabilitas dari sebuah kejadian (kedatangan atau keberangkatan/kepergian) yang timbul antara t dan t+s tergantung hanya pada panjang s, yang berarti bahwa probabilitas tidak tergantung pada t atau jumlah kejadian yang timbul selama periode waktu (0,t).

Kondisi 2: Probabilitas kejadian yang timbul selama interval waktu yang sangat kecil h adalah positif tapi kurang dari satu.

Kondisi 3: Paling banyak satu kejadian dapat timbul selama interval waktu yang sangat kecil h.

Ketiga kondisi di atas menjabarkan sebuah proses dimana jumlah kejadian selama satu interval waktu yang diberikan adalah Poisson dan karena itu interval waktu antara beberapa kejadian yang berturut-turut adalah Eksponensial. Dengan kasus demikian, dikatakan bahwa kondisi tersebut mewakili proses Poisson (Taha, 1997: 178-179).

2.5 Model-model Sistem Antrian

2.5.1 Model Sistem Antrian [M/M/1]:[GD/∞/∞]

Sistem antrian ini merupakan suatu sistem antrian yang pola kedatangannya dan pola pelayanannya berdistribusi eksponensial dengan jumlah pelayan satu, kapasitas fasilitasnya tak hingga dan disiplin pelayanannya FIFO. [M/M/1]:[GD/∞/∞] adalah model antrian dengan satu pelayan, yang dapat digunakan sebagai pendekatan untuk berbagai system yang sederhana (Hendikawati, 2014: 25).

Model antrian ini dalam notasi Kendall secara lengkap adalah [M/M/1]:[GD/∞/∞], dimana untuk M (Markov) yang pertama menyatakan distribusi Poisson (*interarrival*), M yang kedua menyatakan distribusi Poisson/ eksponensial, 1 berarti *Single Server*, GD (*General Disciplin*) menyatakan FCFS (*First Come First Service*), dan ∞ menyatakan antrian tak terhingga (Kakiay, 2004: 48).

Jika λ menyatakan laju kedatangan rata-rata (jumlah pelanggan per satuan waktu) dan μ menyatakan laju pelayanan pelanggan rata-rata (jumlah pelanggan per satuan waktu), maka waktu antar kedatangan yang diharapkan adalah $\frac{1}{\lambda}$ dan waktu pelayanan adalah $\frac{1}{\mu}$. *Steady state* tercapai jika $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Ukuran keefektifan yang digunakan pada saat *steady state*

(1) Jumlah rata-rata pelanggan yang diharapkan dalam sistem (L_s)

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad (2.15)$$

(2) Jumlah pelanggan yang diharapkan menunggu dalam antrian (L_q)

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \tag{2.16}$$

(3) Waktu yang diharapkan oleh pelanggan selama dalam sistem (W_s)

$$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} \tag{2.17}$$

(4) Waktu yang diharapkan oleh pelanggan selama menunggu dalam antrian (W_q)

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \tag{2.18}$$

2.5.2 Model Sistem Antrian [M/M/1]:[GD/K/∞]

Sistem antrian ini merupakan variasi dari model antrian [M/M/1]:[GD/∞/∞] dengan panjang antrian dan kapasitas tunggu dibatasi sejumlah K. Jumlah ini merupakan pelanggan yang sedang menunggu dan sedang dilayani. Karena panjang garis tunggu dibatasi (K), maka jumlah pelanggan yang ada dalam antrian juga dibatasi. Bila pelanggan telah mencapai K, maka pelanggan yang datang berikutnya akan meninggalkan antrian dan tidak kembali, pelanggan akan enggan menunggu apabila kapsitas tunggu yang terbatas tersebut telah penuh. Sistem antrian ini sering merepresentasikan persoaalan antrian dalam sektor industri jasa.

Menurut Dr Khalid Al-Nowibet (2006) bahwa pada sistem ini asumsi $\mu > \lambda$ terabaikan. Dengan demikian, sistem antrian ini mungkin untuk menerima $\lambda > \mu$. Hal ini akan mengakibatkan tingkat kesibukan $\rho > 1$. Namun, hal tersebut tidak akan terjadi secara teoritis, karena jumlah pelanggan yang datang telah dibatasi oleh ruang tunggu yang tersedia, sehingga pelanggan tidak akan terus menerus datang apabila ruang tunggu yang telah disediakan telah terisi penuh.

Laju kedatangan rata-rata para pelanggan dilambangkan dengan λ. Jika dalam keadaan n maka

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n = 0,1,\dots,K-1 \\ 0, & n = 0,1,\dots,K-1 \end{cases} \quad (2.19)$$

Keadaaan tunak selalu dipertahankan berapapun nilai dari $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ dengan peluang $P_n = 0$ untuk n > K, dan untuk n = 0,1,......,K maka:

(1) Probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem/semua pelayan menganggur (P_0)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k} \frac{\lambda}{\mu}^n} \quad (2.20)$$

(2) Probabilitas seorang pelanggan memasuki sistem dan hasrus menunggu untuk dilayani/semua pelayan sibuk (P_n)

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\sum_{n=0}^{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} \quad (2.21)$$

Untuk menghitung L_q, W_s, dan W_q diuraikan dengan menggunakan rumus L_s dengan terlebih dahulu menentukan laju kedatangan yang efektif yaitu $\lambda = \lambda_{eff} = \lambda(1 - P_k)$.

(1) Jumlah pelanggan yang di harapkan menunggu dalam sistem

$$L_s = \sum_{n=o}^{k} n.P_n \quad (2.22)$$

(2) Jumlah pelanggan yang diharapkan menunggu dalam antrian

$$L_q = Ls - (1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}) \quad (2.23)$$

(3) Rata rata waktu yang di habiskan pelanggan dalam sistem

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{eff}} = \frac{L_s}{\lambda(1-P_k)} \tag{2.24}$$

(4) Rata rata waktu yang dihabiskan pelanggan dalam antrian

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{eff}} = \frac{L_q}{\lambda(1-P_k)} \tag{2.25}$$

2.5.3 Model Sistem Antrian [M/G/1]:[GD/∞/∞]

Model antrian [M/G/1]:[GD/∞/∞] merupakan model antrian dengan pola kedatangan berdistribusi Poisson dan waktu pelayanan berdistribusi umum (general), mempunyai pelayan tunggal tanpa batas kapasitas, baik dari kapasitas sistem maupun kapasitas sumber pemanggilan. Disiplin pelayanan bersifat FIFO atau yang akan dilayani terlebih dahulu adalah pelanggan yang datang terlebih dahulu, begitu seterusnya hingga pelanggan terakhir yang datang mendapatkan pelayanan terakhir.

Pada sistem ini kedatangan pelanggan terjadi melalui proses Poisson dengan rata-rata kedatangan λ. Waktu pelayanan antar pelanggan tidak bergantung satu sama lain dengan distribusi probabilitas yang sama. Tidak ada batasan yang menentukan bentuk dari distribusi waktu pelayanan, yang perlu diketahui adalah rata-rata $\frac{1}{\mu}$ dan varians σ^2 dari distribusi ini.

Sistem antrian akan mencapai kondisi *steady state* jika $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Ukuran-ukuran kinerja pada *steady state* pada model antrian [M/G/1]:[GD/∞/∞] adalah sebagai berikut.

a. Rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem (L_s)

$$L_s = \rho + \frac{\lambda^2\sigma^2+\rho^2}{2(1-\rho)}. \qquad (2.26)$$

(Bhat, 2008:84)

b. Rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian (L_q)

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2+\rho^2}{2(1-\rho)}. \qquad (2.27)$$

(Bhat, 2008:85)

c. Rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam antrian (W_q)

Menurut rumus Little ($L_q = \lambda W_q$) dan persamaan (2.33), diperoleh

$$W_q = \frac{\lambda^2\sigma^2+\rho^2}{2\lambda(1-\rho)}. \qquad (2.28)$$

(Hillier dan Lieberman, 2001:872).

d. Rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem (W_s)

$$W_s = \frac{\lambda^2\sigma^2+\rho^2}{2\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\lambda}. \qquad (2.30)$$

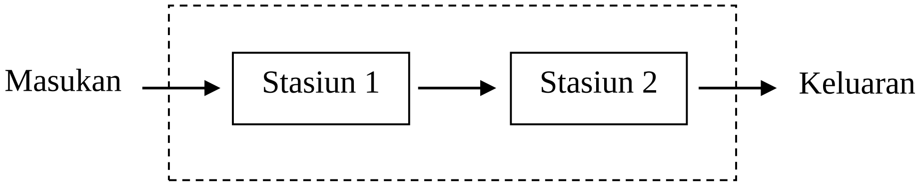
(Hillier dan Lieberman, 2001:872).

2.5.4 Model Sistem Antrian Tandem Atau Seri

Model antrian ini terdiri dari beberapa stasiun pelayanan yang diatur secara serial sehingga seorang pelanggan harus melalui semua sistem antrian tersebut sebelum menyelesaikan pelayanan.

2.5.4.1 Model Dua Stasiun Seri

Sistem ini merupakan sistem antrian satu jalur yang sederhana dan terdiri dari dua stasiun pelayanan, seperti yang terlihat pada gambar berikut.



Gambar 2.6 Sistem Antrian Seri Dua Stasiun

Seorang pelanggan yang tiba untuk pelayanan harus melalui stasiun 1 dan stasiun 2. Waktu pelayanan di masing-masing stasiun didistribusikan secara eksponensial dengan laju pelayanan μ yang sama. Kedatangan terjadi sesuai distribusi Poisson dengan laju kedatangan yang sama dengan λ. Antrian tidak diijinkan di depan stasiun 1 dan stasiun 2.

Pengembangan model ini mengharuskan pertama-tama keadaan sistem di setiap saat diidentifikasi. Hal ini dicapai dengan cara berikut: setiap stasiun dapat bebas atau sibuk. Stasiun 1 dikatakan terhalang jika pelanggan dalam sistem ini telah menyelesaikan pelayanannya sebelum stasiun 2 bebas. Anggaplah simbol 0,1, dan b mewakili keadaan bebas, sibuk, dan terhalang. Maka keadaan dalam sistem ini diketahui:

$$\{(i,j)\} = \{(0,0)(1,0)(0,1)(1,1)(b,1)\}$$

Definisikan $P_{ij}(t)$ sebagai probabilitas bahwa sistem tersebut berada dalam keadaan (i,j) disaat t. Probabilitas transisi antara saat t dan t+h (h adalah sebuah kenaikan positif dalam waktu). Sehingga diperoleh persamaan:

$$P_{00} = \frac{2}{A} \tag{2.31}$$

$$P_{01} = \frac{2\rho}{A} \tag{2.32}$$

$$P_{10} = \frac{\rho^2 + 2\rho}{A} \tag{2.33}$$

$$P_{11} = P_{b1} = \frac{\rho^2}{A} \tag{2.34}$$

dimana $A = 3\rho^2 + 4\rho + 2$.

Jumlah yang diperkirakan dalam sistem diperoleh persamaan berikut

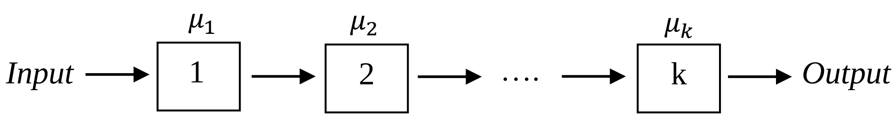
$$L_s = 0P_{00} + 1(P_{01}P_{10}) + 2(P_{11}P_{b1}) = \frac{5\rho^2 + 4\rho}{A} \tag{2.35}$$

(Taha, 1997: 214-215).

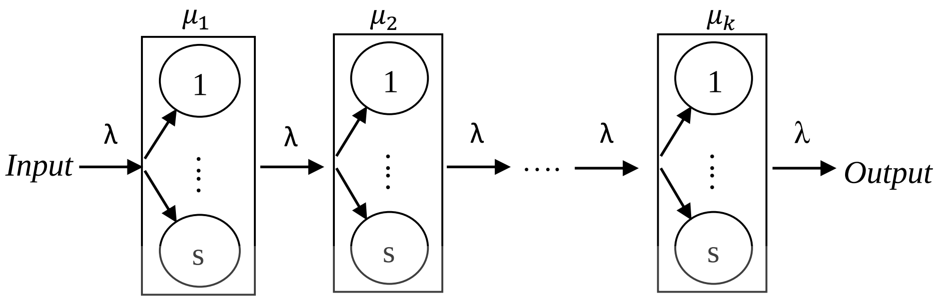
2.5.4.2 Model Stasiun Seri Majemuk

Pelayanan majemuk pada stasiun seri ini dapat juga dinyatakan sebagai pelayanan majemuk untuk *k*-stasiun yang tidak terbatas kapasitasnya. Menurut Stallings (2000: 8) pada sistem antrian seri, *input* dari setiap antrian kecuali antrian yang pertama merupakan *output* dari antrian sebelumnya. Asumsikan bahwa *input* pada antrian pertama berdistribusi Poisson. Selanjutnya jika waktu pelayanan dari setiap antrian berdistribusi ekponensial dan antrian tunggunya tidak terbatas, *output* dari setiap antrian berdistribusi Poisson juga sama dengan *input*nya. Sehingga antriannya *independent* dan dapat dianalisis satu per satu. Karena itu, total rata-rata dari sistem seri sama dengan jumlah dari rata-rata setiap tahap.

Sebagai gambaran dapat ditunjukkan suatu sistem antrian dengan *k*-stasiun seri seperti terlihat pada gambar berikut (Taha, 1997: 217).



Gambar 2.7 Sistem Antrian Dengan k-Stasiun Seri



Gambar 2.8 Sistem Antrian Dengan k-Stasiun Seri

Pertimbangkan sistem dengan k stasiun dalam serial, seperti diperlihatkan dalam Gambar 2.7. Asumsikan bahwa kedatangan di stasiun 1 dihasilkan suatu populasi tak hingga sesuai dengan distribusi Poisson dengan laju kedatangan rata-rata λ. Unit-unit yang dilayani akan bergerak secara berurutan dari satu stasiun ke stasiun berikutnya sampai di keluaran stasiun k. Distribusi waktu pelayanan di setiap stasiun i adalah eksponensial dengan nilai mean $\mu_i = 1,2, \dots, k$. Dalam model antrian ini tidak terdapat batasan antrian dalam setiap stasiun.

Dalam kondisi ini dapat dibuktikan bahwa untuk semua i *output* dari stasiun i (atau, dengan kata lain, *input* ke stasiun $i+1$) bersifat Poisson dengan nilai mean λ dan bahwa setiap stasiun dapat diperlakukan secara *independent* sebagai [M/M/1]:[GD/∞/∞]. Ini berarti bahwa untuk stasiun ke-i, probabilitas *steady state*nya

$$P_{ni} = (1 - \rho_i)\rho_i^{\,ni}, n_i = 0,1,2, \dots \qquad (2.36)$$

Untuk $i = 1, 2, 3, \dots, s$ dimana n_i adalah jumlah sistem yang hanya terdiri dari stasiun i. Keadaan *steady state* akan terjadi hanya jika $\rho = \frac{\lambda}{\mu_i} < 1$.

Hasil yang sama dapat diperluas untuk kasus dimana stasiun *i* mencakup s_i pelayanan paralel, yang masing-masing dengan laju eksponensial yang sama μ_i per unit waktu (lihat Gambar 2.8). Dalam kasus ini setiap stasiun dapat diperlakukan secara *independent* sebagai $[M/M/s_i]:[GD/\infty/\infty]$ dengan laju skedatangan rata-rata λ.

BAB 5

PENUTUP

5.1 Simpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan dapat diambil simpulan sebagai berikut.

(1) Model antrian pada Area Parkir meliputi [M/M/1]:[GD/K/∞]. sistem antrian diasumsikan mengikuti pola kedatangan yang berdistribusi Poisson sedangkan waktu pelayanan tidak berdistribusi eksponensial dengan kapasitas tempat parkir 6. Rata-rata banyak pesawat dalam antrian dan dalam sistem untuk pelayanan pesawat di area parkir Bandara Ahmad Yani Semarang pada hari jum'at dan Senin, 14 & 17 Agustus 2015 yaitu 6 pesawat per jam dan 5 pesawat per jam sedangkan Rata-rata waktu pesawat menunggu dalam antrian dan dalam sistem untuk pelayanan pesawat pada hari Jum'at, 14 Agustus 2015 yaitu 26,784 menit dan 33,23 menit sedangkan pada hari Senin, 17 Agustus 2015 yaitu 26,791 menit dan 33,38 menit.

(2) Model antrian pada Landasan Pacu meliputi [M/G/1]:[GD/∞/∞]. Ini berarti sistem antrian mengikuti pola kedatangan yang berdistribusi Poisson sedangkan waktu pelayanan tidak berdistribusi eksponensial dengan jumlah pelayan 1. Rata-rata banyak pesawat dalam antrian dan dalam sistem untuk pelayanan pesawat di landasan pacu Bandara Ahmad Yani Semarang pada hari jum'at dan Senin, 14 & 17 Agustus 2015 yaitu 1 pesawat per detik dan 1 pesawat per detik sedangkan Rata-rata waktu pesawat menunggu dalam

(3) antrian dan dalam sistem untuk pelayanan pesawat di area parkir Bandara Ahmad Yani Semarang pada hari Jum'at, 14 Agustus 2015 yaitu 2,1 menit dan 7,2 menit sedangkan pada hari Senin, 17 Agustus 2015 yaitu 1,4 menit dan 7,2 menit.

(4) Model antrian di Bandara Ahmad Yani yaitu antrian seri majemuk 2 stasiun. Rata-rata banyak pesawat dalam antrian dan dalam sistem untuk pelayanan pesawat model antrian seri di Bandara Ahmad Yani Semarang pada hari jum'at dan Senin, 14 & 17 Agustus 2015 yaitu 7 pesawat per jam dan 6 perjam pesawat per detik. Rata-rata waktu pesawat menunggu dalam antrian dan dalam sistem untuk pelayanan pesawat model antrian seri Bandara Ahmad Yani Semarang pada hari Jum'at, 14 Agustus 2015 yaitu 28,18 menit dan 40,43 menit sedangkan pada hari Senin, 17 Agustus 2015 yaitu 28,19 menit dan 40,58 menit.

(5) Jumlah tempat parkir di area parkir Bandara Ahmad Yani Semarang yang ada belum ideal dan optimal maka perlu penambahan tempat parkir pesawat.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian maka saran yang dapat disampaikan adalah sebagai berikut.

(1) Karena jumlah tempat parkir di area parkir Bandara Ahmad Yani Semarang yang ada belum ideal maka perlu menambah tempat parkir agar tidak terjadi penumpukan pesawat d area parkir.

(2) Berdasarkan penelitian skripsi ini belum didukung dengan *software* untuk membantu perhitungan. Untuk penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan program-program *software* yang lain, seperti *Visual Basic*, *Delphi*, ProModel (*Production Modeler*), *Mathlab*, Arena, dan SAS yang dapat menghitung efektifitas antrian dengan model M/M, G/G, M/G ataupun G/M..

DAFTAR PUSTAKA

Bhat, U.N. 2008. *An Introduction to Queueing Theory, Modeling and Analysis in Applications*. Dallas : Birkhauser Boston.

Djauhari, M.A. 1990. *Statistika Matematika*. Bandung: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, ITB.

Ginting, B.F. 2014. Analisa Kerja Sistem Antrian M/M/1/N. *Singuda Ensikom*.8(2).

Hendikawati, P. 2014. *Bahan Ajar Teori Antrian*. Semarang: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, UNNES.

Hiller, F.S. & G.J. Lieberman. 2001. *Introduction to operations research*, Third edition. USA: McGraw-Hill.

Kakiay, T.J. 2004. *Dasar Teori Antrian Untuk Kehidupan Nyata*. Yogyakarta: Andi.

Mgbemena, C.K. *et. al*. 2010. A Non Linear Approach To Queueing System Modelling. *International Journal of Engineering Science and Technology*. 2(11). 6829 – 6839.

Mulyono, S. 2004. *Riset Operasi*. Jakarta: Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

Ross, S.M. 1996. *Stochastic Processes Second Edition*. America: John Wiley & Sons, Inc.

Sharma, A.K. & G.K. Sharma. 2013. Queueing Theory Approach With Queueing Model: A Study. *International Journal of Engineering Science Invention*, 2(2).

Sanjay, K.B. 2002. An Introduction To Queueing Systems. Germany: Springer.

Novita, A.S. 2011. Model Sistem Antrian Pesawat Terbang Di Bandara Internasional Adi Sutjipto Yogyakarta. *Gamatika*,2(1).

Saukah, A. 2008. *Panduan Pemrograman dan Referensi Kamus Visual Basic 6.0*. Yogyakarta: Madcoms.

Supranto, J. 2001. *Statistik Teori dan Aplikasi*. Jakarta: Erlangga.

Taha, H.A. 1997. *Riset Operasi Jilid Dua*. Jakarta: Binarupa Aksara.

Tarliah, T. &A. Dimyati. 1987. *Operations Research, Model-model Pengambilan Keputusan*. Bandung: Sinar Baru Algesindo.

Walpole, R.E. & R.H. Myers. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Bandung: ITB.