OPTIMASI KEUNTUNGAN PAKAIAN DENGAN ALGORITMA TITIK INTERIOR (STUDI KASUS PADA PD. MUMBUL)

Skripsi

disusun sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

ALFIATUS SA'ADAH
4111411011

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2016

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya akan bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan perundang-undangan.

Semarang, Juli 2016

METERAI TEMPEL 6000 ENAM RIBU RUPIAH

Alfiatus Sa'adah

NIM. 4111411011

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Optimasi Keuntungan Pakaian dengan Algoritma Titik Interior (Studi Kasus pada PD. Sido Mumbul)

disusun oleh

Alfiatus Sa'adah

4111411011

Telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES pada Juli 2016.

Panitia,

Ketua	Sekretaris
Prof. Dr. Zaenuri, S.E, M.Si,Akt	Drs. Arief Agoestanto, M.Si
196412231988031001	19680722199303100[illegible]

Ketua Penguji

Dra.Rahayu B.V. M.Si
196406131988032022

Anggota Penguji/	Anggota Penguji/
Pembimbing I	Pembimbing 2
Prof. Dr. Hardi Suyitno M.Pd	Dr. Dwijanto M.S.
195004251979031001	195804301984031006

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

- “Sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan.” (Q.S. Al-Insyirah: 6)
- “Allah tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya.” (Q.S. Al-Baqarah: 286)
- “Allah tempat meminta segala sesuatu.” (Q.S. Al-Ikhlas: 2)
- “Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah nasib suatu kaum hingga mereka mengubah diri mereka sendiri.”(Q.S. Ar-Ra’d:11)
- “Barang siapa menempuh suatu jalan untuk menuntut ilmu maka Allah akan memudahkan jalannya menuju surga.” (HR. Muslim)

PERSEMBAHAN

- Allah SWT atas Rahmat dan petunjukNya.
- Bapak dan ibu tersayang yang selalu memberikan doa, kasih sayang, dan dukungannya.
- Untuk adik-adikku Sadam, Luqman, Amal yang selalu memberikan motivasi, doa, serta dukungannya.
- Segenap keluarga yang selalu memberikan motivasi, doa, serta dukungannya.
- Untuk teman-temanMatematika Unnes Angkatan 2011.
- Teman-teman Elf kost, terima kasih atas persahabatan kalian.
- Untuk Almamaterku Universitas Negeri Semarang.

PRAKATA

Segala puji syukur penulis panjatkan atas segala kehadirat Allah SWT. Tiada yang bisa penulis lakukan tanpa rahmat-Nya. Semoga Allah SWT selalu memberikan keridhoan di setiap jalan yang kita tempuh. Sholawat dan salam selalu tercurah kepada sang tauladan umat Nabi Muhammad Saw, beserta keluarga dan sahabat yang setia dalam menegakkan agama Islam.

Alhamdulillah, atas berkah dan rahmat yang Allah berikan, penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Optimasi Keuntungan Pakaian dengan Algoritma Titik Interior (Studi Kasus pada PD. Sido Mumbul)".Penyusunan skripsi ini merupakan salah satu syarat akhir untuk memperoleh gelar Sarjana Sains.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan semua pihak, oleh karena itu penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada :

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum., Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Prof. Dr. Zaenuri, S.E, M.Si,Akt., Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si,. Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
4. Drs. Mashuri, M.Si., Ketua Prodi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
5. Prof. Dr. Hardi Suyitno M.Pd., Dosen Pembimbing utama yang telah memberikan bimbingan, pengarahan dan dorongan dalam penyusunan skripsi ini.

6. Dr. Dwijanto M.S., Dosen Pembimbing pendamping yang telah memberikan bimbingan, pengarahan dan dorongan dalam penyusunan skripsi ini.
7. Muhammad Kharis, sabagai Dosen Wali sekaligus sebagai inspirator dalam memberikan pencerahan dan dukungan untuk terus melangkah menyusun skripsi.
8. Teruntuk Bapak, Ibu dan Adik-adikku yang selalu memberikan doa, kasih sayang,semangat, serta dukungannya.
9. Nur Aini Dwi Wulandari, Ratna Novita Sari, Nur Septiani, Nur Septiani, Oktaviani Eka, Sunarti, Ristasari Wulandari yang senantiasa membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Teman-teman Matematika angkatan 2011 yang selalu memberikan semangat tersendiri bagi penulis.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari pembaca untuk penelitian selanjutnya. Semoga skripsi ini dapat berguna dan bermanfaat bagi kita semua.

Semarang, Juni 2016

Penulis

ABSTRAK

Sa’adah, Alfiatus. 2016. *Optimasi Keuntungsn Pakaian dengan Algoritma Titik Interior (Studi Kasus pada PD. Sido Mumbul)*. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang. Pembimbing :Prof. Dr. Hardi Suyitno M.Pd dan Dr. Dwijanto M.S.

Kata kunci : Algoritma Titik Interior, Riset Operasi, Optimasi.

Algoritma Titik Interior adalah suatu Algoritma Titik Interior yang menembus interior dari daerah fisibel untuk mencapai solusi optimum. PD. Sido Mumbul Semarang merupakan salah satu dari sekian banyak produsen konveksi di Kota Semarang. PD. Sido Mumbul dalam menentukan banyaknya produksi tidak menggunakan metode dalam riset operasi. Dalam suatu perusahaan perlu adanya optimasi keuntungan perusahaan yang semaksimal mungkin. Riset operasi dapat digunakan sebagai salah satu cara untuk menyelesaikan kasus optimasi keuntungan.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui komposisi jumlah dari masing-masing produk pakaian yang harus diproduksi sehingga dapat memaksimumkan keuntungan pada PD. Sido Mumbul. Data yang diperoleh dalam penelitian ini berupa data primer dan data sekunder. Pengumpulan data dilakukan dengan cara observasi pada PD. Sido Mumbul dan melakukan wawancara dengan pihak PD. Sido Mumbul.

Z adalah fungsi tujuan untuk memperoleh keuntungan maksimal. Variabel keputusan adalah keempat produk yang diproduksi perusahaan ($X_1 =$ banyaknya celana CA 018, $X_2 =$ banyaknya celana CA 042, $X_3 =$ banyaknya celana CA 052, dan $X_4 =$ banyaknya popok PPK 02) Fungsi kendala terdiri dari persediaan bahan baku dan kapasitas produksi. Formula model matematika untuk memaksimumkan keuntungan pada PD. Sido Mumbul adalah maksimumkan $Z = 595X_1 + 2888X_2 + 2333X_3 + 875X_4$, dengan kendala: $0.60X_1 + 0.62X_2 + 0.60X_3 + 0.45X_4 \leq 9540$; $0.18X_1 + 0.17X_2 + 0.15X_3 \leq 1420$; $0.45X_1 + 0.36X_3 + 0.8X_4 \leq 9324$; $1.52X_1 + 1.78X_2 + 1.85X_3 + 3.45X_4 \leq 42364$; $X_1 \leq 5040$; $X_2 \leq 1800 X_3 \leq 3600$; $X_4 \leq 7200$; ; $X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$. Hasil yang diperoleh dengan Algoritma Titik Interior dengan pembulatan menunjukkan keuntungan sebesar Rp. 21,794,060.00 dengan memproduksi celana CA 018 sebanyak 3188 unit, celana CA 042 sebanyak 1800 unit, celana CA 052 sebanyak 3600 unit, dan popok PPK 02 sebanyak 7200 unit.

Berdasarkan perhitungan keuntungan dengan Algoritma Titik Interior yang dengan pembulatan diperoleh keuntungan sebesar Rp. 21,794,060.00 dan perhitungan keuntungan yang dilakukan oleh PD. Sido Mumbul memperoleh keuntungan sebesar Rp. 20,606,400.00, selisih perhitungan dengan Algoritma Titik Interior dan perhitungan keuntungan oleh PD. Sido Mumbul terpaut sebesar Rp. 1,188,600.00. Ini menunjukkan keuntungan yang diperoleh PD. Sido Mumbul belum optimal.

DAFTAR ISI

Halaman

5. PENUTUP

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ratunya ilmu dan sekaligus pelayannya. Matematika sebagai ratunya ilmu memiliki arti bahwa matematika merupakan sarana bagi segala disiplin ilmu dan kunci ilmu pengetahuan. Matematika berfungsi untuk melayani ilmu pengetahuan artinya selain tumbuh dan berkembang untuk dirinya sendiri sebagai suatu ilmu, matematika juga melayani kebutuhan ilmu pengetahuan dalam pengembangan dan operasionalnya (Suherman, 2003: 28).

Matematika terapan yang dapat digunakan untuk mengkaji masalah optimasi adalah riset operasi, yang merupakan teknik untuk menyelesaikan masalah optimasi. Riset operasi, dalam arti luas dapat diartikan sebagai penerapan metode-metode, teknik-teknik, dan alat-alat terhadap masalah-masalah yang menyangkut operasi dari sistem-sistem, sedemikian rupa sehingga memberikan penyelesaian optimal (Mulyono, 2004: 4).

Program Linier merupakan salah satu model dalam riset operasi. Program Linier adalah suatu cara untuk menyelesaikan persoalan pelokasian sumber-sumber yang terbatas di antara beberapa aktivitas yang bersaing, dengan cara yang terbaik yang mungkin dilakukan (Dimyati & Dimyati, 1987: 7). Program Linier banyak digunakan dalam bidang industri, transportasi, perdagangan, perkebunan, periklanan, dan teknik. Program Linier berkaitan dengan penjelasan suatu dunia nyata sebagai suatu model matematik yang terdiri atas sebuah fungsi tujuan linier dan sistem kendala linier (Mulyono, 2004: 13).

Di Semarang terdapat banyak industri konveksi berskala kecil dan menengah. Mulai berbentuk industri rumah tangga maupun yang sudah dikelola dengan lebih profesional. Produk yang dihasilkan berupa kaos, pakaian bayi, jaket, dan lain sebagainya. Konveksi PD. Sido Mumbul adalah perusahaan perseorangan yang didirikan oleh Bapak Hindarto. Perusahaan ini bergerak di bidang konveksi (pakaian jadi). PD. Sido Mumbul Semarang merupakan salah satu dari sekian banyak produsen konveksi di Kota Semarang. Sistem pembukuan di PD. Sido Mumbul masih menggunakan cara konvensional yaitu dengan cara mencatat produk apa saja yang terjual dalam sehari. Sistem ini mengalami kendala saat produk yang terjual seringkali tidak tercatat dengan baik. Selain itu, pencatatan pengeluaran belanja bahan produksi juga masih sederhana, sehingga pemilik sendiri hanya mengira-ngira laba penjualan setiap bulannya karena belum ada laporan keuangan yang pasti. PD. Sido Mumbul hanya menentukan jumlah pembuatan produk dengan mengira-ngira dalam memenuhi permintaan, sehingga tidak bisa menghasilkan keuntungan yang maksimal (wawancara dengan Ibu Ester, 3 Desember 2015). PD. Sido Mumbul dalam menentukan banyaknya produksi tidak menggunakan metode dalam riset operasi. Kondisi ini membuat peneliti ingin mengetahui jumlah produk yang harus diproduksi PD. Sido Mumbul sehingga dapat memaksimumkan keuntungan dalam satu bulan produksi. Keuntungan PD. Sido Mumbul pada bulan Desember 2015 adalah Rp. 20.606,400.00.

Pada tahun 1984, seorang matematikawan dari AT & T Bell Laboratories bernama Narendra Karmarkar berhasil mengemukakan suatu metode baru untuk menyelesaikan persoalan-persoalan Program Linier. Konsep solusi kunci pada Algoritma Titik Interior ternyata memiliki potensi besar untuk memecahkan masalah pemrograman linear. Banyak kemajuan yang telah dibuat (dan terus dilakukan), dan sejumlah algoritma yang kuat menggunakan pendekatan Algoritma Titik Interior yang telah dikembangkan (Hiller & Lieberman, 2000:163).

Berdasarkan latar belakang penelitian di atas, maka akan dibahas mengenai optimasi keuntungan banyaknya masing-masing pakaian yang harus diproduksi oleh PD. Sido Mumbul untuk memaksimumkan keuntungan dengan menggunakan Algoritma Titik Interior, yaitu Optimasi Keuntungan Pakaian dengan Algoritma Titik Iinterior (Studi Kasus pada PD. Sido Mumbul).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

(1) Bagaimana model matematika untuk mengoptimalkan keuntungan produksi pakaian dengan Algoritma Titik Interior pada PD. Sido Mumbul?

(2) Bagaimana komposisi banyaknya masing-masing pakaian yang harus diproduksi sehingga keuntungan PD. Sido Mumbul maksimal?

(3) Apakah Algoritma Titik Interior lebih baik dari perhitungan manual yang digunakan oleh PD. Sido Mumbul dalam mengoptimalkan keuntungan produksi pakaian?

1.3 Batasan Masalah

Agar dalam pembahasan penelitian ini tidak terlalu meluas, maka penulis mencantumkan pembatasan masalah sebagai berikut.

(1) Biaya yang dihitung adalah biaya untuk kurun waktu satu bulan produksi.

(2) Produk yang teliti adalah produk untuk bayi selama satu bulan produksi.

(3) Produk yang diteliti adalah celana CA 018, celana CA 042, celana CA 052, dan popok PPK 02.

(4) Data yang digunakan adalah data sekunder berdasarkan buku administrasi dan data primer melalui observasi dan wawancara di lapangan.

(5) Metode yang digunakan dalam skripsi ini adalah Algoritma Titik Interior.

(6) Fungsi kendala yang dibahas adalah bahan baku dan kapasitas produksi.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dari rumusan masalah penelitian ini adalah sebagai berikut.

(1) Dapat membangun model matematika dari masalah optimasi keuntungan pakaian pada PD. Sido Mumbul.

(2) Untuk mengetahui bagaimana komposisi jumlah dari masing-masing produk pakaian yang harus diproduksi sehingga dapat memaksimumkan keuntungan.

(3) Untuk mengetahui hasil analisis perhitungan keuntungan dengan menggunakan Algoritma Titik Interior lebih baik dari perhitungan manual yang dilakukan oleh PD. Sido Mumbul.

1.5 Manfaat Penelitian

Dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

(1) Bagi Mahasiswa

a. Dapat mengaplikasikan teori yang telah didapat dalam perkuliahan dengan permasalahan nyata yang terjadi pada dunia industri.
b. Memberikan pengetahuan tentang gambaran Algoritma Titik Interior.
c. Memberikan gambaran mengenai Algoritma Titik Interior dalam menyelesaikan kasus Program Linier.
d. Memberikan gambaran tentang manfaat Algoritma Titik Interior untuk menyelesaikan kasus Program Linier.
e. Memberikan motivasi kepada para peneliti untuk lebih banyak mengembangkan Algoritma Titik Interior sehingga ilmu pengetahuan akan semakin maju.

(2) Bagi Perusahaan

Mengefektifkan sumber daya yang ada dengan menerapkan sistem komputer khususnya Matlab untuk memaksimumkan keuntungan.

(3) Bagi Pembaca

Diharapkan agar hasil penelitian yang didapat menambah pengetahuan dan wawasan mengenai analisis Algoritma Titik Interior.

1.6 Sistematika Penulisan Skripsi

Secara garis besar skripsi ini dibagi menjadi tiga bagian (bab) yaitu bagian awal skripsi, bagian isi skripsi, dan bagian akhir skripsi. Berikut ini dijelaskan masing-masing bagian skripsi.

(1) Bagian awal skripsi

Bagian awal skripsi meliputi halaman judul, pernyataan keaslian tulisan, pengesahan, motto dan persembahan, kata pengantar, abstrak, daftar isi, daftar gambar, daftar tabel, dan daftar lampiran.

(2) Bagian isi skripsi

Bagian isi skripsi secara garis besar terdiri dari lima bab, yaitu:

BAB 1 PENDAHULUAN

Bab ini berisi mengenai latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan skripsi.

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi kajian teori yang mendasari dan berhubungan dengan pemecahan masalah.Teori-teori tersebut digunakan untuk memecahkan masalah yang diangkat dalam skripsi ini. Teori yang digunakan adalah Program Linier, Algoritma Titik Interior, Transformasi Proyektif Karmakar, Fungsi Potensial Karmakar, Pembulatan Bilangan Bulat dengan Metode *Branch and Bound*, Gambaran Umum PD. Sido Mumbul, kegiatan produksi, kombinasi produk, pengantar untuk *software Matlab*.

BAB 3 METODE PENELITIAN

Bab ini mengulas metode yang digunakan dalam penelitian yang berisi langkah-langkah yang dilakukan untuk memecahkan masalah yaitu studi literature dan studi kasus, pengumpulan data, metode pengumpulan data, pengolahan data, diagram alir tahapan analisis data, dan penarikan kesimpulan.

BAB 4 HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi mengenai penyelesaian dari permasalahan yang diungkapkan.

BAB PENUTUP

Bab ini berisi tentang simpulan dari pembahasan dan saran yang berkaitan dengan simpulan.

(3) Bagian akhir skripsi

Bagian akhir skripsi meliputi daftar pustaka yang memberikan informasi tentang buku sumber serta literatur yang digunakan dan lampiran-lampiran yang mendukung skripsi.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Program Linier

2.1.1 Pengertian Program Linier

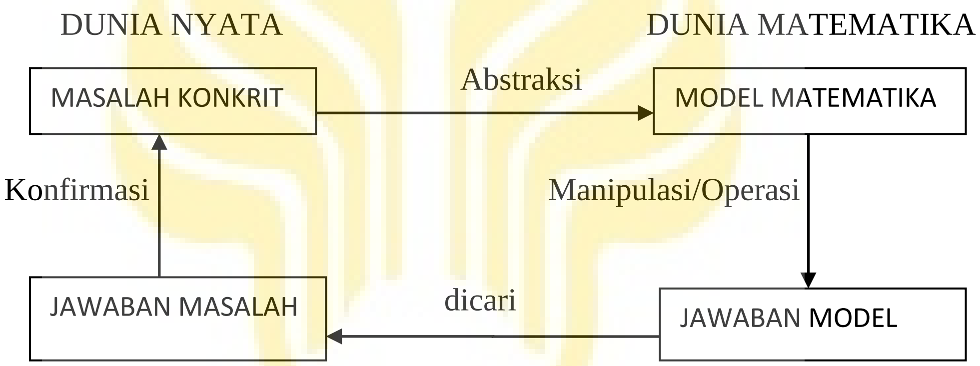
Program Linier merupakan suatu model umum yang dapat digunakan dalam pemecahan masalah pengalokasian sumber-sumber yang terbatas secara optimal. Masalah tersebut timbul apabila seseorang diharuskan memilih untuk menentukan tingkat setiap kegiatan yang akan dilakukannya, dimana masing-masing kegiatan membutuhkan sumber yang sama sedangkan jumlahnya terbatas. Program linier mencakup perencanaan kegiatan-kegiatan untuk mencapai suatu hasil yang "optimal", yaitu suatu hasil yang mencerminkan tercapainya sasaran tertentu yang paling baik (menurut model matematis) di antara alternatif-alternatif yang mungkin, dengan menggunakan fungsi linier (Subagyo, Asri, & Handoko, 1986: 9-10)

Masalah Program Linier dapat dinyatakan dengan kalimat "Diberikan sebanyak m pertidaksamaan atau persamaan linier dengan n variabel, akan ditentukan dengan nilai-nilai nonnegatif dari variabel-variabel tersebut yang memenuhi syarat dan mengoptimalkan (memaksimalkan atau meminimalkan) suatu fungsi linier dari variabel-variabel tersebut. Secara matematis pernyataan tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut "Terdapat m pertidaksamaan/persamaan dalam n variabel dengan $m \geq n$ atau $m \leq n$ dalam bentuk $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq, =, \leq b_i, i = 1, 2, \ldots, m$ dengan hanya salah satu dari tanda $\geq, =,$ atau $\leq$

yang benar dan akan dicari nilai $x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$ sehingga $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ mencapai nilai optimal. a_{ij}, b_i, dan c_j adalah konstanta (Suyitno, 2014: 7).

2.1.2 Penerapan Program Linier

Program Linier banyak digunakan dalam bidang industri, transportasi, perdagangan, perkebunan, periklanan, teknik, dan lain sebagainya. Program Linier sebagaimana matematika terapan lainnya, dalam memecahkan persoalan dunia nyata dapat dijelaskan melalui bagan berikut (Suyitno, 2014: 2).



Gambar 2.1 Skema Program Linier dalam Dunia Nyata dan Dunia Matematika

Berdasarkan Gambar 2.1 pemecahan masalah Program Linier melaui tahap-tahap berikut.

(1) Memahami masalah di bidang yang bersangkutan;

(2) Menyusun model matematika;

(3) Menyelesaikan model matematika (mencari jawaban model);

(4) Menafsirkan jawaban model menjadi jawaban atas masalah yang nyata.

Menurut Suyitno (2014: 3) model matematika merupakan ungkapan suatu masalah dalam bahasa matematika, sedangkan menurut Dimyati & Dimyati

(1992:3) model matematika adalah penggambaran dunia nyata dalam simbol matematis.

2.1.3 Prinsip-Prinsip Program Linier

Tidak semua masalah optimasi dapat diselesaikan dengan metode Program Linier. Beberapa prinsip mendasari penggunaan metode Program Linier. Prinsip-prinsip utama dalam Program Linier (Suyitno, 2014: 2) adalah.

(1) Adanya sasaran. Sasaran dalam model matematika masalah program linier berupa fungsi tujuan (fungsi obyektif). Fungsi ini akan dicari nilai optimalnya (**maksimum atau minimum**).
(2) Ada tindakan alternatif, artinya nilai suatu fungsi tujuan dapat diperoleh dengan berbagai cara dan diantaranya alternatif itu memberikan nilai optimal.
(3) Adanya keterbatasan sumber daya. Sumber daya atau input dapat berupa waktu, tenaga, biaya, bahan, dan sebagainya. Pembatasan sumber daya disebut kendala *constraint*.
(4) Masalah harus dapat dituangkan dalam bahasa matematika yang disebut **model matematika**. Model matematika dalam **Program Linier** memuat fungsi tujuan dan kendala. Fungsi tujuan harus berupa fungsi linier dan kendala berupa pertidaksamaan atau persamaan linier.
(5) Antar variabel yang membentuk fungsi tujuan dan kendala ada keterkaitannya, artinya perubahan pada suatu peubah akan mempengaruhi nilai peubah yang lain.

Beberapa istilah berikut banyak digunakan dalam Program Linier (Suyitno, 2014: 2) meliputi.

(1) **Variabel keputusan** (*decison variable*) adalah kumpulan variabel yang akan dicari untuk ditentukan nilainya. Variabel keputusan biasanya diberi simbol $u, v, w, x, y, \ldots$ dan jika cukup banyak menggunakan $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $y_1, y_2, y_3, \ldots$ dan sebagainya.
(2) **Nilai ruas kanan** (*right hand side value*) adalah nilai-nilai yang biasanya menunjukkan jumlah (kuantitas, kapasitas) ketersediaan sumber daya untuk dimanfaatkan sepenuhnya. Simbol yang digunakan biasanya b_i (i menunjukkan banyaknya kendala).
(3) **Variabel tambahan** (*slack variable* atau *surplus variable*) adalah variabel yang menyatakan penyimpangan positif atau negatif dari nilai ruas kanan. Variabel tambahan dalam Program Linier sering diberi simbol $S_1, S_2, S_3, \ldots$
(4) **Koefisien Tekhnis** yang biasanya diberi simbol a_{ij}, menyatakan setiap unit penggunaan b_i dari setiap variabel x_j.

(5) **Z** adalah nilai fungsi tujuan yang belum diketahui dan yang akan dicari nilai optimumnya (dibuat sebesar mungkin untuk masalah maksimum dan dibuat sekecil mungkin untuk masalah minimum). Fungsi tujuan merupakan pernyataan matematika yang menyatakan hubungan Z dengan jumlah perkalian semua koefisien fungsi tujuan.
(6) **Koefisien fungsi tujuan** (koefisien kontribusi) adalah nilai yang menyatakan kontribusi per-unit kepada Z untuk setiap x_j simbolnya c_j.

2.1.4 Model Program Linier

Bentuk umum model program linier (Aminudin, 2005:11):

Maksimumkan/minimumkan : $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

dengan batasan :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n (\leq \text{atau } \geq) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n (\leq \text{atau } \geq) b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n (\leq \text{atau }) b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Keterangan:

Z = fungsi tujuan yang dicari nilai optimalnya (maksimal, minimal)

c_j = kenaikan nilai Z apabila ada pertambahan tingkat kegiatan x_j dengan satu satuan unit atau sumbangan setiap satuan keluaran kegiatan j terhadap Z

n = macam kegiatan yang menggunakan sumber atau fasilitas yang tersedia

m = macam batasan sumber atau fasilitas yang tersedia

x_j = tingkat kegiatan ke-j

a_i = banyaknya sumber i yang diperlukan untuk menghasilkan setiap unit keluaran kegiatan j

b_i = kapasitas sumber i yang tersedia untuk dialokasiakn ke setiap unit kegiatan.

Untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$

dengan asumsi bahwa a_{ij}, c_j, b_i adalah parameter-parameter model yang telah diketahui.

Suatu model Program Linier dikatakan sebagai model normal apabila mempunyai bentuk sebagai berikut.

(1) Memaksimumkan : $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

Dengan kendala :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

(2) Meminimumkan : $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

Dengan kendala :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\geq b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Fungsi tujuan pada rumusan Program Linier diatas yaitu $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ merupakan tujuan yang akan dicapai atau dioptimalkan. Selanjutnya, persamaan atau pertidaksamaan yang merepresentasikan keterbatasan atau keberadaan kendala yang membatasi pencapaian fungsi tujuan dinamakan fungsi kendala.

Solusi fisibel adalah solusi yang memenuhi semua kendala permasalahan. Solusi optimum adalah solusi fisibel yang memberikan nilai terbaik bagi fungsi tujuannya, yaitu memberikan nilai terbesar untuk permasalahan Program Linier kasus maksimum dan memberikan nilai terkecil untuk suatu minimum.

2.2 Algoritma Titik Interior

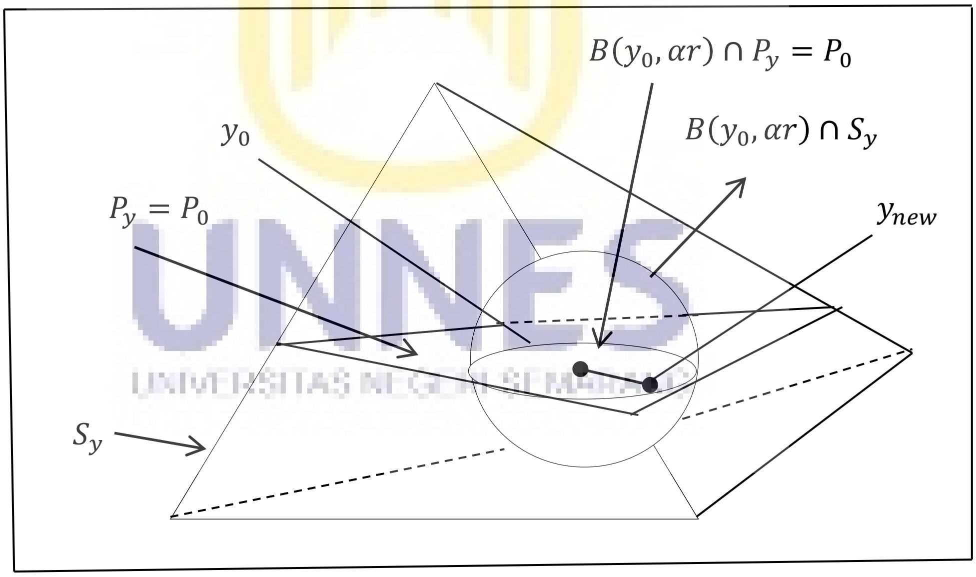
Perkembangan baru dalam riset operasi selama tahun 1980 adalah penemuan pendekatan titik interior untuk memecahkan masalah pemrograman linear. Penemuan ini dibuat pada tahun 1984 oleh seorang matematikawan muda di AT & T Bell Laboratories, Narendra Karmarkar, ketika ia berhasil mengembangkan algoritma baru untuk pemrograman linear dengan pendekatan semacam ini (Hiller & Lieberman, 2000: 163). Algoritma Titik Interior menggunakan tiga unsur utama, yaitu formula Program Linier tidak standar, transformasi proyektif, dan fungsi potensial yang dapat digunakan untuk mengukur hasil pengerjaan dengan Algoritma Titik Interior. Hal tersebut menunjukkan bahwa formula yang tidak standar dapat dihindari, dan algoritma yang dikembangkan di hilangakan transformasi proyektif, namun tetap mempertahankan penggunaan fungsi potensial. Elemen yang benar-benar penting dari analisis Algoritma Titik Interior adalah fungsi potensial. Modifikasi lebih lanjut dari fungsi potensial Algoritma Titik Interior ini memunculkan algoritma pengurangan potensial yang memiliki keadaan kompleksitas teoritis dengan iterasi $O(\sqrt{nL})$, untuk memecahkan Program Linier bentuk standar dengan variabel n, dan data integer dengan ukuran total L (T. Terlaky, ed., & Kluwer, 1996: 1). Meskipun algoritma ini mengalami keberhasilan yang beragam dalam bersaing dengan metode simpleks, konsep solusi kunci yang dijelaskan ternyata memiliki potensi besar untuk memecahkan masalah pemrograman linear besar (Hiller & Lieberman, 2000: 163).

Menurut Hiller & Lieberman (2000: 163), algoritma ini memiliki konsep atau pemikiran dasar sebagai berikut.

Konsep 1: bergerak melalui daerah fisibel menuju suatu penyelesaian optimal.

Konsep 2: bergerak dalam arah yang meningkatkan nilai fungsi tujuan dengan tingkat kecepatan yang paling tinggi.

Konsep 3: mengubah daerah layak tersebut untuk menempatkan penyelesaian percobaan yang sekarang sedekat mungkin pada titik pusatnya dan dengan demikian memungkinkan peningkatan yang besar bilamana melaksanaan konsep 2.



Gambar 2.2 Ilustrasi Algoritma Titik Interior

Oleh sebab $y \geq 0$ ditunjukkan oleh perpotongan antara bola dan pembatas simpleks $S_y\{y: \sum_{i=1}^{n} y_i = 1\}$.

Meminimumkan: $Z = \bar{c}y_{new}$

dengan kendala $P_y = Po$

$$(y - y_0)^t(y - y_0) \leq \alpha^2 r^2$$

Dengan $\{y: (y - y_0)^t(y - y_0) \leq \alpha^2 r^2\}$ digambarkan bola $B(y_0, \alpha r)$.

Dari gambar (2.2) dapat dilihat bahwa $P_y = Po$ menyatakan subruang berdimensi $(n - m - 1)$ yang melalui pusat bola $B(y_0, \alpha r)$. Daerah fisibel dari permasalahan $(y - y_0)^t(y - y_0) \leq \alpha^2 r^2$ adalah bola berdimensi $(n - m - 1)$ yang berpusat pada y_0. Solusi optimum dari permasalahan $(y - y_0)^t(y - y_0) \leq \alpha^2 r^2$, diperoleh dengan memproyeksikan negatif dari gradient fungsi tujuan $(-\bar{c}^t)$ yang berpusat pada y_0 atas ruang nol atau permukaan pembatas $P_y = Po$, dan menggerakkan dari y_0 sepanjang arah proyeksi ini sampai pada batas permukaan bola $B(y_0, \alpha r)$. Dengan menyatakan proyeksi dari gradien vektor $-\bar{c}^t$ sebagai C_p dan optimum dari permasalahan $(y - y_0)^t(y - y_0) \leq \alpha^2 r^2$ sebagai y_{new}, akan diperoleh:

$$y_{new} = y_0 - \alpha r \frac{C_p}{\|C_p\|}$$

Jika $C_p = 0$, maka solusi fisibel akan mencapai optimum, dan proses diakhiri dengan x_k sebagai titik optimum dari permasalahan solusi fisibel awal $x_0 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)^t$. Untuk menentukan C_p, dapat dilihat bahwa C_p terletak pada permukaan pembatas $P_y = Po$, vektor $\left(-\bar{c}^t - C_p\right)$ termuat dalam ruang yang dibatasi oleh gradient hingga $P_y = Po$. Dalam hal ini, terdapat vektor $\bar{w}$ sedemikian sehingga $p^t\bar{w} = -\bar{c}^t - C_p$. Kedua ruas ini dikalikan dengan p, akan diperoleh:

$pp^t\bar{w} = p(-\bar{c}^t - C_p)$

$pp^t\bar{w} = p\bar{c}^t - pC_p$

Karena $pC_p = 0$, maka:

$pp^t\bar{w} = p\bar{c}^t$

Karena A adalah matriks full rank dan $x_k > 0$, maka matriks persegi pp^t adalah matriks yang mempunyai invers. Hal ini akan memberikan

$\bar{w} = (pp^t)^{-1}p\bar{c}^t$, maka dipunyai:

$C_p = \bar{c}^t - p^t\bar{w}$

$\quad = \bar{c}^t - p^t(pp^t)^{-1}p\bar{c}^t$ atau

$\quad = [I - p^t(pp^t)^{-1}p]\bar{c}^t$

Dari y_{new} yang diperoleh dari persamaan $y_{new} = y_0 - \alpha r \frac{C_p}{\|C_p\|}$ dapat ditentukan titik fisibel baru x_{k+1} dalam ruang x atas simpleks S_y yang diperoleh melalui transformasi invers Karmarkar. Jika diperhatikan, $y_{new} > 0$, karena terletak pada titik interior dari bidang berdimensi $(n-1)$ dalam simpleks S_y, yang berarti juga bahwa $x_{k+1} > 0$.

2.2.1 Definisi Algoritma Titik Interior

Algoritma Titik Interior adalah suatu Algoritma Titik Interior yang memotong atau menembus interior dari daerah fisibel untuk mencapai suatu solusi optimum. Titik Interior merupakan titik-titik yang berada di dalam daerah fisibel (Hiller & Lieberman, 1990: 129). Algoritma Titik Interior merupakan salah satu metode yang cukup efisien dalam menyelesaikan masalah Program Linier (Chong & Zak, 2013: 295).

2.2.2 Teorema Algoritma Titik Interior

Teorema 2.2.3.1

Pada Algoritma Titik Interior setiap iterasi $k \geq \alpha$ dapat dipilih sehingga $f\ (x^k, z^k) - \ f\ (x^{k+1}, z^{k+1})\ \geq 0{,}25$ (Terlaky & Kluwer, 1996: 8).

Bukti:

Dipunyai $f(x^k, z^k) - \ f(x^{k+1}, z^{k+1})\ \geq\ f(x^k, z^{k+1}) - \ f(x^{k+1}, z^{k+1})$

$$\geq\ \alpha + \sum_{i=1}^{n+1}\left(1 - \ \alpha\ \frac{\Delta\ \bar{x}_i}{\|\Delta\ \bar{x}\|}\right)$$

$$\geq\ \alpha - \ \frac{\alpha^2}{2(1 - \alpha)}$$

Dimana ketidaksamaan pertama menggunakan $z^{k+1}\ \geq\ z^k$, ketidaksamaan kedua menggunakan $f(x^k, z^k) - f(x^{k+1}, z^{k+1})\ \leq\ -\alpha - \ \sum_{i=1}^{n+1} \ln\left(1 - \ \alpha\ \frac{\Delta\ \bar{x}_i}{\|\Delta\ \bar{x}\|}\right)$, dan ketidaksamaan ketiga $f(x^k, z^k) - \ f(x^{k+1}, z^{k+1}) \leq -\alpha - \ \sum_{i=1}^{n+1} \ln\left(1 - \alpha\frac{\Delta\ \bar{x}_i}{\|\Delta\ \bar{x}\|}\right)$, dan fakta bahwa $e^T \Delta \bar{x} = 0$.

Buktinya selesai dengan menggantikan $\alpha = 0{,}5$ ke $-\frac{\alpha^2}{2(1 - \alpha)}$.

2.2.3 Langkah-langkah Algoritma Titik Interior

Mengoptimalkan fungsi obyektif $Z = c^T x$ dengan kendala $Ax = b$ dan $x \geq 0$ dengan langkah-langkah sebagai berikut .

(1) Pilih titik interior point

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

berikut tentukan matriks diagonal D

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

(2) Tentukan $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{AD}$ dan $\bar{\mathrm{c}} = \mathrm{Dc}$

(3) Tentukan matriks proyeksi $\mathrm{P} = \mathrm{I} - \mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AA}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{A}$

(4) Tentukan *projected gradient* : $\mathrm{c_p} = \mathrm{PC}$ dan $\mathrm{v} = |\mathrm{c_p}| =$ absolut komponen negatif terbesar dari $\mathrm{c_p}$.

(5) Tentukan dengan iterasi koordinat titik baru $\overline{\mathrm{X}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{V} \,.\, \mathrm{c_p}$

(6) Tentukan $\tilde{X} = D\,\overline{\mathrm{X}}$

Demikian seterusnya pengambilan titik interior x dimana $x = \mathrm{x_1}, \mathrm{x_2}, \cdots, \mathrm{x_n}$ didalam daerah fesibel, dilakukan dengan menggunakan iterasi, dan dari proses iterasi dapat diperoleh titik yang layak dari x untuk menentukan nilai optimal fungsi obyektif, sehingga dengan Algoritma Titik Interior ini dapat menghasilkan nilai yang menuju ke-nilai optimal (maksimal/minimal). Proses berhenti jika nilai $Z(\tilde{X}^{k+1}) \leq Z(\tilde{X}^{k})$.

Contoh 2.1

$Maks: Z = 8000x_1 + 6000x_2$

dengan kendala:

$x_1 + x_2 \leq 25$

$3x_1 + 2x_2 \leq 60$

$x_1, x_2 \geq 0$

Penyelesaian menggunakan Algoritma Titik Interior

Berdasarkan formulasi pada contoh 2.1, diperoleh

$$C = \begin{bmatrix} 8000 \\ 6000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 25 \\ 60 \end{bmatrix};\ \alpha = 0.9$$

Proses berhenti jika nilai $Z(\tilde{X}^{k+1}) \leq Z(\tilde{X}^{k})$

Diambil titik awal pemecahan yaitu $\tilde{X}^{0} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (10, 10, 5, 10)$

$Z(\tilde{X}^{0}) = 140000$

Iterasi 1

$$D_1 = diag(\tilde{X}^{0}) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_1 = AD_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 5 & 0 \\ 30 & 20 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_1 = D_1 C = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8000 \\ 6000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80000 \\ 60000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = I - A_1^T (A_1 A_1^T)^{-1} A_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 10 & 20 \\ 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 10 & 10 & 5 & 0 \\ 30 & 20 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 10 & 20 \\ 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 & 5 & 0 \\ 30 & 20 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.3462 & -03846 & 0.0769 & -0.2692 \\ -03846 & 0.5385 & -0.3077 & 0.0769 \\ 0.0769 & -0.3077 & 0.4615 & 03846 \\ -0.2692 & 0.0769 & 03846 & 0.6538 \end{bmatrix}$$

$$Cp_1 = P_1 C_1$$

$$= \begin{bmatrix} 0.3462 & -03846 & 0.0769 & -0.2692 \\ -03846 & 0.5385 & -0.3077 & 0.0769 \\ 0.0769 & -0.3077 & 0.4615 & 03846 \\ -0.2692 & 0.0769 & 03846 & 0.6538 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80000 \\ 60000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0e + 004x0.4615 \\ 1.0e + 004x0.1538 \\ 1.0e + 004x - 1.2308 \\ 1.0e + 004x - 1.6923 \end{bmatrix}$$

$V_1 = abs\big(min(Cp_1)\big) = 16923$

$$\bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{V_1} Cp_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{16923} \begin{bmatrix} 1.0e + 004x0.4615 \\ 1.0e + 004x0.1538 \\ 1.0e + 004x - 1.2308 \\ 1.0e + 004x - 1.6923 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2455 \\ 1.0818 \\ 0.3455 \\ 0.1000 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}^1 = D_1 M_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2455 \\ 1.0818 \\ 0.3455 \\ 0.1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.4545 \\ 10.8182 \\ 1.7273 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

$Z\big(\tilde{X}^1\big) = (8000\ x\ 12.4545)(6000\ x\ 10.8182) = 164550$

Karena nilai $Z\big(\tilde{X}^1\big) \geq Z\big(\tilde{X}^0\big) = 164550 \geq 140000$, maka dilakukan iterasi selanjutnya.

Iterasi 2

$$D_2 = \begin{bmatrix} 12.4545 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10.8182 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.7273 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$\bar{A}_2 = AD_2$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12.4545 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10.8182 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.7273 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12.4545 & 10.8182 & 1.7273 & 0 \\ 37.3635 & 21.6364 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$\bar{C}_2 = D_2 C$

$$= \begin{bmatrix} 12.4545 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10.8182 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.7273 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8000 \\ 6000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0e + 004x9.9636 \\ 1.0e + 004x6.4909 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = I - A_2^T (A_2 A_2^T)^{-1} A_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12.4545 & 37.3635 \\ 10.8182 & 21.6364 \\ 1.7273 & 0 \\ 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 12.4545 & 10.8182 & 1.7273 & 0 \\ 37.3635 & 21.6364 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12.4545 & 37.3635 \\ 10.8182 & 21.6364 \\ 1.7273 & 0 \\ 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 12.4545 & 10.8182 & 1.7273 & 0 \\ 37.3635 & 21.6364 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0632 & 0.1062 & 0.2090 & -0.0654 \\ -0.1062 & 0.1802 & -0.3632 & 0.0673 \\ 0.2090 & -0.3632 & 0.7680 & 0.0504 \\ -0.0654 & 0.0673 & 0.0504 & 0.9885 \end{bmatrix}$$

$$Cp_2 = P_2 C_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0632 & 0.1062 & 0.2090 & -0.0654 \\ -0.1062 & 0.1802 & -0.3632 & 0.0673 \\ 0.2090 & -0.3632 & 0.7680 & 0.0504 \\ -0.0654 & 0.0673 & 0.0504 & 0.9885 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0e + 004x9.9636 \\ 1.0e + 004x6.4909 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0e + 003x - 0.5912 \\ 1.0e + 003x1.1203 \\ 1.0e + 003x - 2.7540 \\ 1.0e + 003x - 2.1510 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = abs\big(min(Cp_2)\big) = 2754$$

$$\bar{X}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{\alpha}{V_2} Cp_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{0.9}{2754}\begin{bmatrix}1.0e+003x-0.5912\\1.0e+003x1.1203\\1.0e+003x-2.7540\\1.0e+003x-2.1510\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.8068\\1.3661\\0.1000\\0.2970\end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}^2 = D_2 M_2 = \begin{bmatrix}12.4545 & 0 & 0 & 0\\0 & 10.8182 & 0 & 0\\0 & 0 & 1.7273 & 0\\0 & 0 & 0 & 1.0000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.8068\\1.3661\\0.1000\\0.2970\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10.0483\\14.7790\\0.1727\\0.2970\end{bmatrix}$$

$Z(\tilde{X}^1) = (8000\ x\ 10.0483)(6000\ x\ 14.7790) = 169060$

Karena nilai $Z(\tilde{X}^2) \geq Z(\tilde{X}^1) = 169060 \geq 164550$, maka dilakukan iterasi selanjutnya.

Iterasi 3

$$D_3 = \begin{bmatrix}10.0483 & 0 & 0 & 0\\0 & 14.7790 & 0 & 0\\0 & 0 & 0.1727 & 0\\0 & 0 & 0 & 0.2970\end{bmatrix}$$

$\bar{A}_3 = AD_3$

$$= \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\3 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10.0483 & 0 & 0 & 0\\0 & 14.7790 & 0 & 0\\0 & 0 & 0.1727 & 0\\0 & 0 & 0 & 0.2970\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}10.0483 & 14.7790 & 0.1727 & 0\\30.1449 & 29.5580 & 0 & 0.2970\end{bmatrix}$$

$\bar{C}_3 = D_3 C$

$$= \begin{bmatrix}10.0483 & 0 & 0 & 0\\0 & 14.7790 & 0 & 0\\0 & 0 & 0.1727 & 0\\0 & 0 & 0 & 0.2970\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8000\\6000\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1.0e+004x8.0386\\1.0e+004x8.8674\\0\\0\end{bmatrix}$$

$P_3 = I - A_3^T (A_3 A_3^T)^{-1} A_3$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10.0483 & 30.1449 \\ 14.7790 & 29.5580 \\ 0.1727 & 0 \\ 0 & 0.2970 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 10.0483 & 14.7790 & 0.1727 & 0 \\ 30.1449 & 29.5580 & 0 & 0.2970 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10.0483 & 30.1449 \\ 14.7790 & 29.5580 \\ 0.1727 & 0 \\ 0 & 0.2970 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 10.0483 & 14.7790 & 0.1727 & 0 \\ 30.1449 & 29.5580 & 0 & 0.2970 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0020 & -0.0018 & 0.0342 & -0.0295 \\ -0.0018 & 0.0016 & -0.0349 & 0.0200 \\ 0.0342 & -0.0349 & 0.9976 & 0.0017 \\ -0.0295 & 0.0200 & 0.0017 & 0.9987 \end{bmatrix}$$

$$Cp_3 = P_3 C_3$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0020 & -0.0018 & 0.0342 & -0.0295 \\ -0.0018 & 0.0016 & -0.0349 & 0.0200 \\ 0.0342 & -0.0349 & 0.9976 & 0.0017 \\ -0.0295 & 0.0200 & 0.0017 & 0.9987 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0e + 004x8.0386 \\ 1.0e + 004x8.8674 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5.6729 \\ 0.1814 \\ -345.5886 \\ -593.8360 \end{bmatrix}$$

$$V_3 = abs\left(min(Cp_3)\right) = 593.8360$$

$$\bar{X}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{V_2} Cp_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{593.8360} \begin{bmatrix} 5.6729 \\ 0.1814 \\ -345.5886 \\ -593.8360 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0086 \\ 1.0003 \\ 0.4762 \\ 0.1000 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}^3 = D_3 M_3 = \begin{bmatrix} 10.0483 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.7790 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1727 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2970 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0086 \\ 1.0003 \\ 0.4762 \\ 0.1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.1347 \\ 14.7831 \\ 0.0822 \\ 0.0297 \end{bmatrix}$$

$$Z\left(\tilde{X}^3\right) = (8000\ x\ 10.1347)(6000\ x\ 14.7831) = 169780$$

Karena nilai $Z\left(\tilde{X}^3\right) \geq Z\left(\tilde{X}^2\right) = 169780 \geq 169060$, maka dilakukan iterasi selanjutnya.

Iterasi 4

$$D_4 = \begin{bmatrix} 10.1347 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.7831 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0822 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0297 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_4 = AD_4$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10.1347 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.7831 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0822 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0297 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10.1347 & 14.7831 & 0.0822 & 0 \\ 30.4041 & 29.5662 & 0 & 0.0297 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_4 = D_4 C$$

$$= \begin{bmatrix} 10.1347 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.7831 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0822 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0297 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8000 \\ 6000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0e + 004x8.1076 \\ 1.0e + 004x8.8699 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = I - A_4^T (A_4 A_4^T)^{-1} A_4$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10.1347 & 30.4041 \\ 14.7831 & 29.5662 \\ 0.0822 & 0 \\ 0 & 0.0297 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 10.1347 & 14.7831 & 0.0822 & 0 \\ 30.4041 & 29.5662 & 0 & 0.0297 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10.1347 & 30.4041 \\ 14.7831 & 29.5662 \\ 0.0822 & 0 \\ 0 & 0.0297 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 10.1347 & 14.7831 & 0.0822 & 0 \\ 30.4041 & 29.5662 & 0 & 0.0297 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0003 & -0.0003 & 0.0162 & -0.0029 \\ -0.0003 & 0.0003 & -0.0167 & 0.0020 \\ 0.0162 & -0.0167 & 0.9995 & 0.0001 \\ -0.0029 & 0.0020 & 0.0001 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$Cp_4 = P_4C_4$

$$= \begin{bmatrix} 0.0003 & -0.0003 & 0.0162 & -0.0029 \\ -0.0003 & 0.0003 & -0.0167 & 0.0020 \\ 0.0162 & -0.0167 & 0.9995 & 0.0001 \\ -0.0029 & 0.0020 & 0.0001 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0e+004x8.1076 \\ 1.0e+004x8.8699 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2.4913 \\ 2.6216 \\ -164.3159 \\ -59.4126 \end{bmatrix}$$

$V_4 = abs(min(Cp_4)) = 164.3159$

$$\bar{X}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{V_4} Cp_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{164.3159} \begin{bmatrix} -2.4913 \\ 2.6216 \\ -164.3159 \\ -59.4126 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9864 \\ 1.0144 \\ 0.1000 \\ 0.6746 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}^4 = D_4M_4 = \begin{bmatrix} 10.1347 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.7831 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0822 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0297 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9864 \\ 1.0144 \\ 0.1000 \\ 0.6746 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.9964 \\ 14.9954 \\ 0.0082 \\ 0.0200 \end{bmatrix}$$

$Z(\tilde{X}^4) = (8000\ x\ 9.9964)(6000\ x\ 14.9954) = 169940$

Karena nilai $Z(\tilde{X}^4) \geq Z(\tilde{X}^3) = 169940 \geq 169780$, maka dilakukan iterasi selanjutnya.

Iterasi 5

$$D_5 = \begin{bmatrix} 9.9964 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.9954 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0082 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0200 \end{bmatrix}$$

$\bar{A}_5 = AD_5$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.9964 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.9954 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0082 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9.9964 & 14.9954 & 0.0082 & 0 \\ 29.9892 & 29.9908 & 0 & 0.0200 \end{bmatrix}$$

$\bar{C}_5 = D_5 C$

$$= \begin{bmatrix} 9.9964 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.9954 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0082 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8000 \\ 6000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0e+004x7.9971 \\ 1.0e+004x8.9972 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$P_5 = I - A_5^T (A_5 A_5^T)^{-1} A_5$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9.9964 & 29.9892 \\ 14.9954 & 29.9908 \\ 0.0082 & 0 \\ 0 & 0.0200 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 9.9964 & 14.9954 & 0.0082 & 0 \\ 29.9892 & 29.9908 & 0 & 0.0200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10.1347 & 30.4041 \\ 14.7831 & 29.5662 \\ 0.0822 & 0 \\ 0 & 0.0297 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 9.9964 & 14.9954 & 0.0082 & 0 \\ 29.9892 & 29.9908 & 0 & 0.0200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.0000 & 0.0016 & -0.0020 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0016 & 0.0013 \\ 0.0016 & -0.0016 & 1.0000 & 0.0000 \\ -0.0020 & 0.0013 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$Cp_5 = P_5 C_5$

$$= \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.0000 & 0.0016 & -0.0020 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0016 & 0.0013 \\ 0.0016 & -0.0016 & 1.0000 & 0.0000 \\ -0.0020 & 0.0013 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0e+004x7.9971 \\ 1.0e+004x8.9972 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0531 \\ -0.0264 \\ -16.4001 \\ -39.9999 \end{bmatrix}$$

$V_5 = abs\big(min(Cp_5)\big) = 39.9999$

$$\bar{X}_5 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{\alpha}{V_5} Cp_5 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{0.9}{39.9999}\begin{bmatrix}0.0531\\-0.0264\\-16.4001\\-39.9999\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1.0012\\0.9994\\0.6310\\0.1000\end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}^5 = D_5 M_5 = \begin{bmatrix}9.9964 & 0 & 0 & 0\\0 & 14.9954 & 0 & 0\\0 & 0 & 0.0082 & 0\\0 & 0 & 0 & 0.0200\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.0012\\0.9994\\0.6310\\0.1000\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10.0083\\14.9865\\0.0052\\0.0020\end{bmatrix}$$

$$Z(\tilde{X}^5) = (8000\ x\ 10.0083)(6000\ x\ 14.9865) = 169990$$

Karena nilai $Z(\tilde{X}^5) \geq Z(\tilde{X}^4) = 169990 \geq 169940,$ maka dilakukan iterasi selanjutnya.

Iterasi 6

$$D_6 = \begin{bmatrix}10.0083 & 0 & 0 & 0\\0 & 14.9865 & 0 & 0\\0 & 0 & 0.0052 & 0\\0 & 0 & 0 & 0.0020\end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_6 = AD_6$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\3 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10.0083 & 0 & 0 & 0\\0 & 14.9865 & 0 & 0\\0 & 0 & 0.0052 & 0\\0 & 0 & 0 & 0.0020\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}10.0083 & 14.9865 & 0.0052 & 0\\30.0249 & 29.9730 & 0 & 0.0020\end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_6 = D_6 C$$

$$= \begin{bmatrix}10.0083 & 0 & 0 & 0\\0 & 14.9865 & 0 & 0\\0 & 0 & 0.0052 & 0\\0 & 0 & 0 & 0.0020\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8000\\6000\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1.0e + 004x8.0066\\1.0e + 004x8.9919\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$P_6 = I - A_6^T (A_6 A_6^T)^{-1} A_6$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10.0083 & 30.0249 \\ 14.9865 & 29.9730 \\ 0.0052 & 0 \\ 0 & 0.0020 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 10.0083 & 14.9865 & 0.0052 & 0 \\ 30.0249 & 29.9730 & 0 & 0.0020 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10.0083 & 30.0249 \\ 14.9865 & 29.9730 \\ 0.0052 & 0 \\ 0 & 0.0020 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 10.0083 & 14.9865 & 0.0052 & 0 \\ 30.0249 & 29.9730 & 0 & 0.0020 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.0000 & 0.0010 & -0.0002 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0010 & 0.0001 \\ 0.0010 & -0.0010 & 1.0000 & 0.0000 \\ -0.0002 & 0.0001 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$Cp_6 = P_6 C_6$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.0000 & 0.0010 & -0.0002 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0010 & 0.0001 \\ 0.0010 & -0.0010 & 1.0000 & 0.0000 \\ -0.0002 & 0.0001 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0e + 004x8.0066 \\ 1.0e + 004x8.9919 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.0100 \\ -0.0103 \\ -10.4000 \\ -4.0000 \end{bmatrix}$$

$$V_6 = abs\left(min(Cp_6)\right) = 10.4000$$

$$\bar{X}_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{V_6} Cp_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{10.4000} \begin{bmatrix} -0.0100 \\ -0.0103 \\ -10.4000 \\ -4.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9991 \\ 1.0009 \\ 0.1000 \\ 0.6538 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}^6 = D_6 M_6 = \begin{bmatrix} 10.0083 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.9865 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0052 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0020 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9991 \\ 1.0009 \\ 0.1000 \\ 0.6538 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.9996 \\ 14.9998 \\ 0.0005 \\ 0.0013 \end{bmatrix}$$

$$Z\left(\tilde{X}^6\right) = (8000\ x\ 9.9996)(6000\ x\ 14.9998) = 170000$$

Karena nilai $Z\left(\tilde{X}^6\right) \geq Z\left(\tilde{X}^5\right) = 170000 \geq 169990$, maka dilakukan iterasi selanjutnya.

Iterasi 7

$$D_7 = \begin{bmatrix} 9.9996 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.9998 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0013 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_7 = AD_7$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.9996 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.9998 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0013 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9.9996 & 14.9998 & 0.0005 & 0 \\ 29.9988 & 29.9996 & 0 & 0.0013 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_7 = D_7 C$$

$$= \begin{bmatrix} 9.9996 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.9998 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0013 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8000 \\ 6000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0e+004x7.9997 \\ 1.0e+004x8.9999 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_7 = I - A_7^T (A_7 A_7^T)^{-1} A_7$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9.9996 & 29.9988 \\ 14.9998 & 29.9996 \\ 0.0005 & 0 \\ 0 & 0.0013 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 9.9996 & 14.9998 & 0.0005 & 0 \\ 29.9988 & 29.9996 & 0 & 0.0013 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.9996 & 29.9988 \\ 14.9998 & 29.9996 \\ 0.0005 & 0 \\ 0 & 0.0013 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 9.9996 & 14.9998 & 0.0005 & 0 \\ 29.9988 & 29.9996 & 0 & 0.0013 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0001 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0001 \\ 0.0001 & -0.0001 & 1.0000 & 0.0000 \\ -0.0001 & 0.0001 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$Cp_7 = P_7 C_7$

$$= \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0001 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0001 \\ 0.0001 & -0.0001 & 1.0000 & 0.0000 \\ -0.0001 & 0.0001 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0e+004x7.9997 \\ 1.0e+004x8.9999 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0002 \\ -0.0001 \\ -1.0000 \\ -2.6000 \end{bmatrix}$$

$V_7 = abs(min(Cp_7)) = 2.6000$

$$\bar{X}_7 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{V_7} Cp_7 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{2.6000} \begin{bmatrix} 0.0002 \\ -0.0001 \\ -1.0000 \\ -2.6000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0001 \\ 1.0000 \\ 0.6538 \\ 0.1000 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}^7 = D_7 M_7 = \begin{bmatrix} 9.9996 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.9998 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0013 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0001 \\ 1.0000 \\ 0.6538 \\ 0.1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.0004 \\ 14.9991 \\ 0.0003 \\ 0.0001 \end{bmatrix}$$

$Z(\tilde{X}^6) = (8000\ x\ 10.0004)(6000\ x\ 14.9991) = 170000$

Nilai $Z(\tilde{X}^7) \leq Z(\tilde{X}^6) = 170000 \leq 170000$ dan kriteria pemberhentian terpenuhi maka iterasi berhenti. Diperoleh hasil $x_1 = 10.0004 = 10$; $x_2 = 14.9991 = 15$;.dengan nilai $Z = 170000$.

Penyelesaian dengan *Software Matlab*

$f = [-8000 \quad -6000]$

Karena kita harus mengubahnya ke *problem* minimasi dengan mengalikannya dengan -1, dan *inequality constraints* dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 25 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Setelah mengkonversikan fungsi tujuan menjadi minimasi, maka dapat diselesaikan masalah diatas dengan LINPROG sebagai berikut:

```
>> f=[-8000 -6000];% fungsi tujuan
>> A=[1 1;3 2];% koefisien untuk konstrain
>> b=[25;60];% nilai right hand side (RHS)
>> Aeq=[];% tidak ada konstrain dalam bentuk =
>> beq=[];% otomatis tidak ada RHS
>> LB=[0 0];% nilai x harus nonnegatif
>> x=linprog(f,A,b,Aeq,beq,LB)
Optimization terminated.

x =

   10.0000
   15.0000
```

Gambar 2.3 Sintaks dan *Output Software Matlab*

Dari hasil ini, dapat diketahui bahwa nilai x maksimum adalah $x = [x_1 x_2] = [10 \quad 15]$ dengan kata lain $x_1 = 10$ dan $x_2 = 15$.

Untuk mengetahui nilai fungsi tujuan pada titik maksimum tersebut dapat ditulis dengan perintah berikut.

```
>> f*x

ans =

 -1.7000e+005
```

Gambar 2.4 Sintaks dan *Output Software Matlab*

Karena sebelumnya merubah fungsi tujuannya menjadi minimasi, maka didapat fungsi tujuan bernilai negatif. Selanjutnya kalikan hasil ini dengan -1, sehingga nilai fungsi tujuannya adalah $170{,}000$. Perintah berikut akan memberikan nilai x optimum sekaligus nilai fungsi obyektifnya pada nilai optimum.

2.2.4 Syarat Algoritma Titik Interior

Menurut Winston (2000: 190), Algoritma Titik Interior ini mengharuskan dalam bentuk berikut.

Minimumkan Z : cx

Kendala : $Kx = 0$

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$

$x_i \geq 0$

(1) Titik $x_0 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ harus fisibel untuk ini;

(2) Nilai Z untuk sama dengan 0.

2.2.5 Kelebihan Algoritma Titik Interior

Kelebihan Algoritma Titik Interior adalah sebagai berikut (Indriani, 2013: 106).

(1) Algoritma Titik Interior lebih efektif dalam memecahkan masalah yang mempunyai kendala yang besar;

(2) Algoritma Titik Interior lebih cepat dalam mencapai titik optimal untuk permasalahan yang mempunyai kendala yang besar;

(3) Tingkat efisiensi Algoritma Titik Interior akan tampak saat menggunakan program komputer.

2.3 Transformasi Proyektif Karmakar

Menurut Winston (2004: 190), Algoritma Titik Interior ini menggunakan transformasi dari geometri proyektif untuk membuat himpunan variabel yang ditransformasikan oleh $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Transformasi ini disebut f, akan selalu mentransformasikan titik ke dalam "pusat" dari daerah fisibel ke dalam ruang yang didefinisikan oleh variabel yang ditransformasikan. Jika transformasi mengambil titik x ke titik y, ditulis $f\ (x) = y$. Algoritma ini dimulai di ruang yang ditransformasikan dan bergerak dari $f\ (x_0)$ di ruang yang ditransformasikan dengan "baik" (arah yang cenderung meningkatkan z dan mempertahankan daerah fisibel). Ini menghasilkan titik y' dalam ruang yang ditransformasikan, dekat dengan batas daerah fisibel. Titik yang baru x', $f\ (x') = y'$. Prosedur ini hilang (saat y' menggantikan x_0) sampai nilai z untuk x_k dekat dengan 0.

Jika titik kita saat ini adalah x_k, dipunyai transformasi $f\ (x_k) = \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right]$. Dengan demikian, dalam ruang yang ditransformasikan, selalu bergerak menjauh dari "pusat" daerah fisibel (Winston, 2004: 190).

2.3.1 Definisi Transformasi Proyektif Karmakar

Transformasi karmarkar pada S_n. Transformasi Karmarkar ini didefinisikan pada setiap iterasi oleh:

$T_k: S_n \rightarrow\ S_n$

$$x\ \rightarrow y =\ T_k(x) =\ \frac{D_k^{-1}x}{e_n^t\ D_{ky}}$$

sehingga $D_k = diag\ (x^k)$ adalah matriks diagonal $n\ x\ n$ dengan komponen dari x^k sebagai diagonal matriks.

Demikian juga dengan transformasi T_k dapat dibalik dan dipunyai:

$$x = T_k^{-1}(y) =\ \frac{D_{ky}}{e_n^t\ D_{ky}}.$$

Masalah transformasi dari $(PK) = \begin{cases} \min c^t\ x =\ z^* = 0 \\ Ax = 0 \\ x\ \in\ S_n =\ \{x \in \mathbb{R}_+^n, e_n^t\ x = 1\} \end{cases}$, dimana $c \in \mathbb{R}^n, A\ \in \mathbb{R}^{mxn}$ adalah matriks rank penuh $(rank\ (A) = m < n)$ dan $e_n =\ (1, 1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$ oleh transformasi T_k adalah masalah pemrograman linier:

$$(PKT)\begin{cases} \min(D_k c)^t y \\ AD_k y = 0 \\ y \in S_n = \{y \in \mathbb{R}_+^n, e_n^t\, y = 1\} \end{cases}$$

dapat ditulis:

$$(PKT)\begin{cases} \min(D_k c)^t y \\ \begin{bmatrix} AD_k \\ e_n^t \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Masalah transformasi (PKT) ditempatkan dalam bentuk penurunan Karmarkar, dan transformasi T_k dapat memberikan titik iterasi x^k pada pusat simpleks S_n, yaitu $T_k(x^k) = \frac{e_n}{n}$.

Sebelum menerapkan kondisi optimal, Algoritma Titik Interior dalam menyelesaikan masalah (PKT) dengan mengganti $y \geq 0$ dengan $s\left(\frac{e_n}{n}, \alpha r\right)$, dengan$y \in s\left(\frac{e_n}{n}, \alpha r\right), r = \frac{1}{\sqrt{n\,(n-1)}}$ dan $0 < \alpha < 1$.

Masalah(PKT) menjadi:

$$(PKT)\begin{cases} \min(D_k c)^t y \\ \begin{bmatrix} AD_k \\ e_n^t \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \left\| y - \frac{e_n}{n} \right\|^2 \leq (\alpha r)^2. \end{cases}$$

Dengan kondisi optimal, solusi optimal dari masalah $(PKT)_r$ diperoleh dari: $y = \frac{e_n}{n} - \alpha r d_k$, dimana $d_k = \frac{P_k}{\|P_k\|}$, P_k adalah proyeksi dari vektor $(D_k c)$ pada kernel dari matriks kendala AD_k. Dengan mengembalikan transformasi invers T_k^{-1}, merupakan solusi fisibel x^{k+1} yang diperoleh dari permasalahan (PK) seperti $x^{k+1} = T_k^{-1}(y^k) = \frac{D_k y^k}{e_n^t\, D_k y^k}$ (Benterki & Bouafia, 2014: 2-3).

2.3.2 Prosedur Transformasi Karmarkar

Langkah-langkah berikut adalah prosedur transformasi karmarkar (Omolehin, J.O., Rauf, K., Nyor, N., & Owolabi, A.A, 2015: 129):

(1) Bentuk standar dari ketidaksamaan kendala

(2) 1. Menetapkan hasil dari langkah a dan menambahkan variabel lain sebagai

$\sum Y_{ij} \leq U\,; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n + 1$

2. Pilih sebarang U yang cukup besar

(3) Bentuk standar langkah b_1 dengan menambahkan variabel *slack* Y_{ij}, diperoleh $\sum Y_{ij} = U\,; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n + 1$

(4) Menyamakan hasil dari langkah a dengan $\frac{\sum Y_{ij}}{U}$. Menyederhanakan untuk memperoleh bentuk dari kendala

(5) Memperkenalkan variabel buatan untuk memastikan bahwa koefisien hasil pada langkah (4) adalah nol

(6) Definisikan variabel baru dari fungsi tujuan sebagai $X_i = \frac{Y_i}{U}$ dan subsitusikan variabel baru X_i kedalam kendala

(7) Menentukan variabel buatan yang sesuai.

2.4 Fungsi Potensial Karmarkar

Metode pengurangan potensial menggunakan fungsi potensial Karmarkar untuk mengoptimalkan fungsi tujuan dari masalah pemrograman linier. Fungsi potensial Karmarkar digunakan untuk mengukur kemajuan pada setiap iterasi, menganalisis konvergensi, dan memfasilitasi analisis kompleksitas algoritma. Fungsi potensial Karmarkar mungkin berguna dalam mengembangkan dan menganalisa algoritma yang efisien untuk masalah pemrograman linier, berdasarkan pada fungsi potensial karmarkar. Fungsi potensial Karmarkar dalam hal geometri $G(x)$ dari variabel keputusan $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Fungsi potensial Karmarkar $f(x)$ dengan pusat $a_0 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ dari simpleks = $\{x: x_i > 0, e^T\, x = 1\}$ dan membuktikan bahwa $e^T[\nabla f\ (a_0)] = 0$, $e^T[\nabla^2 f\ (a_0)]e = 0$, dan pusat simpleks adalah titik berat untuk fungsi potensial $f(x)$. Fungsi potensial Karmarkar diperlukan untuk menjelaskan mengapa yang diproyeksikan $[diagonal\ (x_k)]c^t$ (Terlaky & Kluwer, 1996: 1).

2.4.1 Definisi Fungsi Potensial Karmarkar

Untuk $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ Algoritma Titik Interior menyatakan fungsi potensial $f(x)$ dengan:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{cx^t}{x_j}\right)$$

Selain itu menunjukkan bahwa jika yang diproyeksikan adalah $[diagonal\ (x_k)]c^t$ dan bukan c^t atas daerah fisibel dalam ruang transformasi, maka untuk $\delta > 0$, berlaku:

$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \delta$, untuk $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Persamaan di atas menyatakan bahwa tiap-tiap iterasi dari Algoritma Titik Interior akan menurunkan fungsi potensial berjumlah terbatas yang lebih besar dari 0. Algoritma Titik Interior juga menunjukkan bahwa jika fungsi potensial dievaluasi pada x_k cukup kecil, maka $Z = cx_k$ akan mendekati nol. Karena $f(x_k)$ adalah diturunkan dengan sekurang-kurangnya δ beriterasi, itu akan mengikuti bahwa dengan memilih k cukup besar, dapat diyakini bahwa nilai Z untuk x_k adalah kurang dari ε (Singh, Shakil, & Singh, 2014: 8).

2.4.2 Teorema Fungsi Potensial Karmarkar

Pada setiap iterasi dari Algoritma Titik Interior ini iterasi $x^{(k)}$ dipetakan kepusat $a_0 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ dari simpleks $= \{x: x_i > 0, e^T x = 1\}. c \in Z^n$ dan $e^T = (1, 1, \dots, 1)$.

Teorema 2.4.2.1

Fungsi $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \ln \frac{c^T x}{x_j}$ adalah fungsi potensial Karmarkar dan a_0 adalah pusat dari simpleks

(1) $e^T[\nabla f\ (a_0)] = 0$

(2) $e^T[\nabla^2 f\ (a_0)]e = 0$, dan

(3) Pusat simpleks adalah titik berat untuk fungsi potensial $f(x)$.

Bukti:

(1) Dipunyai $\nabla f(x) = \frac{nc}{c^T e} - X^{-1}$, dimana X didefinisikan $X = diag(x) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ matriks diagonal adalah unsur diagonal dari komponen vektor $x \in R^n$ dan e menunjukkan vektor.

Dipunyai $a_0 = \frac{1}{n} e$,

$$[\nabla f\ (a_0)] = \frac{n^2\ c}{c^T e} - ne$$

$$e^T[\nabla f\ (a_0)] = e^T \left[\frac{n^2\ c}{c^T e} - ne\right] = n^2 - n.n = 0$$

(2) Dipunyai $\nabla^2 f\ (x) = X^{-2} - \frac{n}{(c^T x)^2} - X^{-1} e,$

$\nabla^2 f\ (a_0) = n^2 I - \frac{n^3}{(c^T e)^2} cc^T$, dimana I adalah matriks identitas

$e^T [\nabla^2 f\ (a_0)] e = n^2 . n - n^3 = 0$

(3) Dipunyai $\nabla^2 f\ (a_0) = n^2 I - \frac{n^3}{(c^T e)^2} \mathrm{c} c^T.$

Nilai eigen dari $\nabla^2 f\ (a_0)$ dalam bentuk $n^2 - \frac{n^3}{(c^T e)^2} \lambda$, dimana λ eigen dari cc^T.

Nilai eigen dari cc^T menjadi 0 dengan banyaknya $(n-1)$ dan $\|c\|$. Nilai eigen dari $\nabla^2 f\ (a_0)$ adalah n^2 dan $n^2 - \frac{n^3 \|c\|}{(c^T e)^2}$.

Jelas $n^2 > 0$ dan dapat dengan mudah menemukan vektor c maka nilai eigen negatif.

Akibat dari ketidaksamaan Cauchy-Schwarz, e merupakan setiap vektor c yang bebas linier.

Dipunyai $(c^T e)^2 < \|c\|^2 \|e\|^2 = n\|c\|^2$

Sekarang, $n^2 - \frac{n^3 \|c\|}{(c^T e)^2} < n^2 - \frac{n^3 \|c\|^2}{n\ \|c\|} = 0.$

Jadi kita melihat bahwa $\nabla^2 f\ (a_0)$ memiliki nilai eigen positif dan negatif, sehingga pusat simpleks adalah titik berat untuk fungsi potensial Karmarkar ini (Singh, Shakil, & Singh, 2014: 9).

2.5 Pembulatan Bilangan Bulat dengan Metode *Branch and Bound*

Branch and bound adalah sebuah metode untuk menghasilkan penyelesaian optimal pemrograman linier yang menghasilkan variabel-variabel keputusan bilangan bulat. Metode ini membatasi penyelesaian optimal yang akan menghasilkan bilangan pecahan dengan cara membuat cabang atas dan bawah bagi masing-masing variabeel keputusan yang bernilai pecahan agar bernilai bulat sehingga setiap pembatasan akan menghasilkan cabang baru (Siswanto, 2007: 231).

Langkah-langkah pemrograman bilangan bulat branch and bound adalah sebagai berikut (Dwijanto, 2008: 151).

(1) Selesaikan masalah Program Linier dengan metode dalam Program Linier yaitu dengan bilangan real (biasa).

(2) Teliti solusi optimumnya. Apabila variabel basis yang diharapkan berbentuk bilangan bulat, maka pekerjaan telah selesai. Solusi tersebut adalah solusi optimum. Tetapi apabila solusinya bukan bilangan bulat, maka lakukan langkah c.

(3) Nilai solusi yang tidak bulat yang layak dicabangkan ke dalam sub-sub masalah, dengan tujuan untuk menghilangkan solusi yang tidak memenuhi persyaratan bilangan bulat. Pencabangan ini dilakukan dengan kendala-kendala *mutually exclusive* yang perlu untuk memenuhi persyaratan bulat.

(4) Untuk setiap sub masalah, nilai solusi optimum kontinu (tak bulat) fungsi tujuan dijadikan sebagai batas atas. Solusi bulat terbaik menjadi batas bawah (pada awalnya ini adalah solusi kontinu yang dibulatkan kebawah). Sub-sub masalah yang mempunyai batas atas kurang dari batas bawah yang ada tidak diikut sertakan dalam analisis selanjutnya. Suatu solusi bulat yang layak adalah sama baik atau lebih baik dari batas atas untuk semua sub masalah

yang dicari. Jika solusi demikian ada, suatu sub masalah dengan batas atas terbaik dipilih untuk dicabangkan, kemudian kembali ke langkah c.

Pembulatan yang dilakukan begitu saja, akan mengakibatkan solusi tidak optimal, bahkan dapat menghasilkan jawaban yang tak layak (tidak masuk dalam jawaban yang mungkin). Oleh karena itu pembulatan pada Program linier bilangan bulat tidak sesederhana membulatkan menjadi bilangan bulat. Sebab beberapa persyaratan mesti dipenuhi (Dwijanto, 2008: 150).

2.6 Gambaran Umum PD. Sido mumbul

2.6.1 Profil PD. Sido Mumbul

PD. Sido Mumbul merupakan Usaha Kecil dan Menengah (UMKM), perusahaan ini bergerak dibidang manufaktur atau tepatnya dibidang konveksi. Perusahaan ini didirikan oleh Bapak Hindarto. PD. Sido Mumbul didirikan di Semarang pada 1965 yang berlokasi di jalan Tambra, Semarang. Pada 15 Oktober 1975, PD. Sido Mumbul pindah di Jalan Majapahit No. 107 dan pada 19 Oktober 2010 pindah di Jalan KH. Thohir 44, Semarang sampai sekarang.

Perusahaan Konveksi PD. Sido Mumbul bergerak dibidang konveksi dan perdagangan umum. Dibidang konveksi perusahaan mengelola kain menjadi sebuah produk, sedangkan dibidang perdagangan umum perusahaan mendirikan sebuah toko yang terletak di Jalan Agus Salim No. 19, Semarang. Jumlah keseluruhan karyawan PD. Sido Mumbul adalah 57 orang.

2.6.2 Produk PD. Sido Mumbul

Produk yang dihasilkan oleh PD. Sido Mumbul diantaranya adalah sebagai berikut.

(1) Celana CA 018

(2) Celana CA 042

(3) Celana CA 052

(4) Popok PPK 02

2.6.3 Proses Produksi

Proses pembuatan produk PD. Sido Mumbul meliput sebagai berikut.

(1) Bahan digelar di atas papan potong, setelah itu digambar sesuai dengan pola karton yang sudah disiapkan. Setelah semua pola selesai dijiplak, bahan tekstil dipotong sesuai dengan bentuk pola menggunakan mesin pemotong kain;

(2) Setelah bahan menjadi potongan-potongan pola, bagian-bagian yang memerlukan sablon akan masuk bagian penyablonan. Pada proses ini terlebih dahulu gambarnya akan didesain di komputer kemudian disablon secara manual maupun dengan press atau disablon dengan mesin.

(3) Setelah melalui proses penyablonan potongan-potongan bahan tersebut akan diobras sekaligus dijahit menggunakan mesin obras jahit benang 4, dikelim dengan mesin jahit kelim, dan juga dipasangkan overdeck pada bagian garis lehernya.

(4) Proses selanjutnya adalah inspeksi. Pakaian jadi yang telah selesai dijahit dan telah melalui proses buang benang yang akan dicek kelayakannya. Dalam proses ini hasil jahitan akan diseleksi oleh *quality control*. Jahitan yang terbuka, teknik jahit yang salah, benang yang tidak cocok, dan benang yang kusut dapat mempengaruhi kualitas produk. Oleh karena itu sebelum diedarkan produk diseleksi terlebih dahulu.

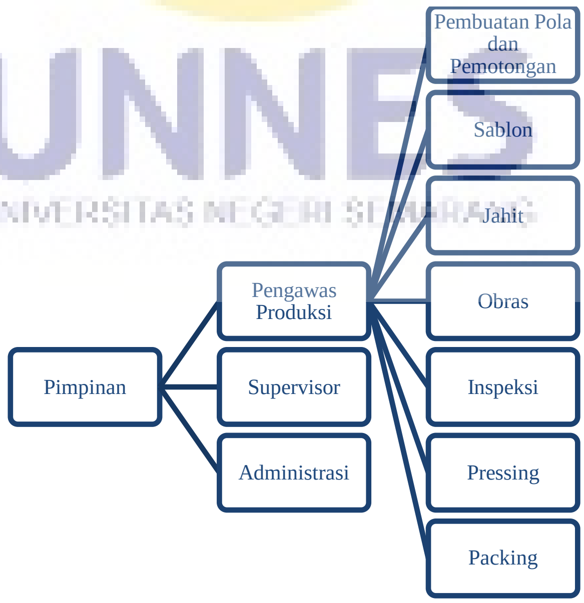
(5) *Pressing* adalah proses menyetrika yang dilakukan oleh karyawan untuk merapikan pakaian yang mengkerut sehingga pakaian akan terlihat lebih rapi.

(6) *Packing* adalah proses terakhir, dimana semua produk di *packing* sesuai ukuran, desain, dan warna.

(7) Pakaian yang telah dikemas akan diangkut dengan alat transportasi untuk didistribusikan.

2.6.4 Struktur Organisasi PD. Sido Mumbul

Struktur organisasi dapat didefinisikan sebagai gambaran secara skematis tentang hubungan kerja sama antara orang-orang pada organisasi dalam rangka usaha mencapai suatu tujuan. Struktur organisasi menunjukkan kerangka dan susunan perwujudan pola hubungan fungsi-fungsi, bagian-bagian atau posisi-posisi maupun orang-orang yang menunjukkan kedudukan, wewenang dan tanggung jawab yang berbeda-beda dalam suatu organisasi. Struktur organisasi PD. Sido Mumbul dapat dilihat pada Gambar 2.3 sebagai berikut.



Gambar 2.5 Struktur Organisasi PD. Sido Mumbul

(1) Pimpinan

Pimpinan bertanggung jawab secara keseluruhan di PD. Sido Mumbul.

(2) Pengawas Produksi

Pengawas produksi bertugas mengawasi proses produksi jahit, bordir, sablon, obras, inspeksi, pressing, packing dan bertanggung jawab terhadap mutu dan kualitas produk.

(3) Supervisor

Supervisor bertugas memonitoring suatu jalannya produksi agar berjalan lancar dan terkendali, dan bertanggung jawab dalam memastikan semua pekerjaan dilaksanakan dengan baik sehingga semua proses produksi berjalan lancar, seperti monitoring produksi, pengawasan anak buah, melakukan instruksi kerja, bertanggung jawab keamanan, keselamatan atau kesehatan yang terancam.

(4) Administrasi

Administrasi bertugas memasukkan data *cutting* (potong) produksi, mengatur gaji, mengatur keuangan (pengeluaran dan pemasukan).

(5) Pembuatan Pola dan Pemotongan

Pembuatan pola dan pemotongan bertugas membuat pola dan memotong kain.

(6) Jahit

Jahit bertugas menjahit.

(7) Sablon

Sablon bertugas menyablon.

(8) Obras

Obras bertugas mengobras.

(9) Inspeksi

Inspeksi bertugas membuang benang kasar dan benang halus.

(10) *Pressing*

Pressing bertugas menyetrika baju yang sudah melalui proses inspeksi.

(11) *Packing*

Packing bertugas membungkus pakaian yang sudah disetrika sesuai ukuran, desain, dan warna.

2.7 Kegiatan Produksi

Kegiatan produksi suatu perusahaan dilakukan untuk menghasilkan suatu barang atau jasa dengan cara membuat atau menambah faedah dari bahan dasar dengan menggunakan faktor-faktor produksi yang dimiliki untuk menghasilkan produk, sehingga mendapatkan laba maksimal. Secara umum produksi diartikan sebagai suatu kegiatan atau proses yang menstransformasikan *input* menjadi *output*, sedangkan dalam arti khusus produksi adalah kegiatan pengolahan dalam pabrik dan barang-barang industri (Assauri, 1993:15).

Sebuah perusahaan harus memperhatikan keterbatasan faktor-faktor produksi yang dimiliki oleh perusahaan tersebut. Sehingga dibutuhkan kebijakan perusahaan dalam merencanakan produksi agar diperoleh laba maksimal.

Faktor-faktor yang membatasi kegiatan produksi:

(1) Kapasitas mesin

Kapasitas mesin merupakan batasan dalam memproduksi barang. Suatu perusahaan tidak dapat memproduksi barang dengan jumlah yang melebihi kemampuan masing-masing mesinnya.

(2) Bahan Dasar

Banyaknya bahan dasar yang tersedia juga merupakan batasan dalam penentuan kombinasi produk. Produksi tidak dapat dilaksanakan apabila melebihi jumlah bahan yang tersedia.

(3) Modal

Modal yang tersedia merupakan sumber pembiayaan segala keperluan perusahaan yang membatasi keperluan perusahaan untuk berproduksi.

(4) Permintaan

Perusahaan tidak akan memproduksi suatu produk tanpa melihat permintaan terhadap produknya. Hal ini dilakukan agar dapat memperkirakan banyaknya masing-masing produk yang dapat dijual pada tingkat harga tertentu.

(5) Tenaga Kerja

Jumlah tenaga kerja yang ada sangat erat kaitannya dengan kegiatan produksi karena tenaga kerja langsung berhubungan dengan kegiatan produksi.

2.8 Kombinasi Produk

Kombinasi produk adalah perbandingan jumlah antara produk yang satu dengan produk yang lain yang harus diproduksi dalam periode tertentu agar memperoleh keuntungan yang maksimal (Hazdariyatun, 1990:3). Permasalahan tentang kombinasi produk ini muncul pada perusahaan-perusahaan yang memproduksi lebih dari satu macam produk. Masalah yang ada yaitu bagaimana menentukan jumlah masing-masing produk serta jenis produk apa yang akan diproduksi sehingga perusahaan tersebut dapat memanfaatkan sumber-sumber yang ada dengan sebaik-baiknya dan memperoleh keuntungan yang maksimal.

Perusahaan harus dapat menentukan jumlah dan jenis produk yang akan diproduksi dengan landasan yang kuat agar diperoleh hasil yang sebaik-baiknya. Jumlah dan jenis produk yang akan diproduksi harus disesuaikan dengan kemampuan sumber daya yang dimiliki oleh perusahaan dengan memperhitungkan biaya-biaya dan juga nilai produk itu sendiri untuk menentukan kombinasi produk yang optimal agar dapat memperoleh keuntungan yang maksimal.

2.9 Pengantar Untuk *Software Matlab*

Menurut Santoso (2008: 73) pemakaian *software* dalam menyelesaikan masalah optimasi sangatlah penting.Ini terutama bila sudah menyangkut persoalan skala besar dan melibatkan banyak iterasi dalam menemukan solusi optimal dari suatu persoalan. Persoalan sederhana mungkin bisa diselesaikan dengan suatu algoritma yang hanya memerlukan satu atau dua iterasi. Akan sangat membantu apabila algoritma atau metode yang dipakai bisa diprogramkan dengan bantuan *software*. *Matlab* merupakan salah satu *software* yang populer dan banyak dipakai untuk menyelesaikan masalah optimasi. *Matlab* mempunyai fungsi-fungsi yang sudah siap untuk menyelesaikan berbagai problem optimasi. Tugas kita sebagai *user* adalah memilih fungsi yang sesuai dengan persoalan yang kita punyai.

Kemudian kita perlu menuliskan persoalan optimasi kita dalam format *Matlab*. Di sisi lain kita juga bisa menuliskan sendiri fungsi/script/program yang belum tersedia dalam *Matlab* untuk menyelesaikan suatu persoalan optimasi. Dengan cara ini kita mempunyai keleluasaan untuk membuat tampilan, format input dan output dari script yang kita tulis. Masalah optimasi bisa kita kategorikan ke dalam dua kelas besar:

2.9.1 Penyelesaian Persoalan Program Linier dengan Algoritma Titik Interior menggunakan *Software Matlab*

Matlab Optimization toolbox mempunyai *subroutine* atau *solver* LINPROG untuk menyelesaikan permasalahan Program Linier. Permasalahan Program Linier bisa diformulakan sebagai berikut:

$\min f^T x$

$st\ Ax \leq b$

$Aeqx = beq$

$LB \leq x \leq UB$

Sedangkan sintaks Program Linier dalam *Matlab* adalah sebagai berikut.

X=LINPROG(f,A,b, Aeq, beq,LB)

Dimana f adalah koefisien untuk fungsi tujuan dan A adalah matrik koefisien dan b adalah vektor konstanta sisi kanan (*right hand side*, RHS) untuk *linier inequality constraints,* Aeq dan Beq masing-masing adalah matrik koefisien untuk *linier inequality constraints* dan vektor konstanta sisi kanan (*right hand side*, RHS), dan LB, UB masing-masing batas bawah dan batas atas.

Kalau kita tidak mempunyai *equality constraints* maka perintahnya bisa kita persingkat sebagai berikut.

X=LINPROG(f, A, b)

Perhatikan contoh 2.2 berikut:

$\max f\ (x) = 10x_1 + 6x_2 + 4x_3$

subject to

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$

$10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 600$

$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 300$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

sehingga

$f = \begin{bmatrix} -10 & -6 & -4 \end{bmatrix}$

Karena kita harus mengubahnya ke *problem* minimasi dengan mengalikannya dengan -1, dan *inequality constraints* dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 100 \\ 600 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Setelah mengkonversikan fungsi tujuan menjadi minimasi, maka dapat diselesaikan masalah diatas dengan LINPROG sebagai berikut:

```
File  Edit  Debug  Desktop  Window  Help
>> f=[-10 -6 -4];% fungsi tujuan
>> A=[1 1 1;10 4 5;2 2 6];% koefisien untuk konstrain
>> b=[100;600;300];% nilai right hand side (RHS)
>> Aeq=[];% tidak ada konstrain dalam bentuk=
>> beq=[];% otomatis tidak ada Rhs
>> LB=[0 0 0];% nilai x harus nonnegatif
>> x=linprog(f,A,b, Aeq, beq,LB)
Optimization terminated.

x =

   33.3333
   66.6667
    0.0000
```

Gambar 2.6 Sintaks dan *Output Software Matlab*

Dari hasil ini, dapat diketahui bahwa nilai x maksimum adalah $x = [x_1 x_2 x_3] = [33.3333 \quad 66.6667 \quad 0.0000]$. Untuk mengetahui nilai fungsi tujuan pada titik maksimum tersebut dapat ditulis dengan perintah berikut.

```
>> f*x

ans =

 -733.3333
```

Gambar 2.7 Sintaks dan *Output Software Matlab*

Karena sebelumnya merubah fungsi tujuannya menjadi minimasi, maka didapat fungsi tujuan bernilai negatif. Selanjutnya kalikan hasil ini dengan -1, sehingga nilai fungsi tujuannya adalah 733.33. Perintah berikut akan memberikan nilai x optimum sekaligus nilai fungsi obyektifnya pada nilai optimum.

```
>> [x, fx]= linprog(f,A,b, Aeq, beq,LB)
Optimization terminated.

x =

   33.3333
   66.6667
    0.0000


fx =

 -733.3333
```

Gambar 2.8 Sintaks dan *Output Software Matlab*

Default dari Matlab dalam penyelesaian masalah Program Linier adalah menggunakan *interior-point method*, bukan *simplex* (Santosa, 2008: 81-83).

BAB V

PENUTUP

5.1 Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan mengenai mengoptimalkan keuntungan pada PD. Sido Mumbul, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

(1) Formula model optimasi keuntungan pakaian pada PD. Sido Mumbul adalah sebagai berikut.

Maksimumkan $Z = 595X_1 + 2888X_2 + 2333X_3 + 875X_4$

dengan kendala:

$0.60X_1 + 0.62X_2 + 0.60X_3 + 0.45X_4 \leq 9540$

$0.18X_1 + 0.17X_2 + 0.15X_3 \leq 1420$

$0.45X_1 + 0.36X_3 + 0.8X_4 \leq 9324$

$1.52X_1 + 1.78X_2 + 1.85X_3 + 3.45X_4 \leq 42364$

$X_1 \leq 5040$

$X_2 \leq 1800$

$X_3 \leq 3600$

$X_4 \leq 7200$

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

(2) Penyelesaian optimal dari permasalahan PD. Sido Mumbul dengan memproduksi masing-masing jenis produk seperti berikut.

(1) Celana CA 018 sebanyak 3188 unit

(2) Celana CA 042 sebanyak 1800 unit

(3) Celana CA 052 sebanyak 3600 unit

(4) Popok PPK 02 sebanyak 7200 unit.

Keuntungan produksi pakaian yang diperoleh PD. Sido Mumbul dengan adalah Rp. 21,794,060.00.

(3) Berdasarkan perhitungan keuntungan dengan Algoritma Titik Interior yang dibulatkan dengan Metode *Branch and Bound* diperoleh keuntungan sebesar Rp. 21,794,060.00 dan perhitungan keuntungan yang dilakukan oleh PD. Sido Mumbul memperoleh keuntungan sebesar Rp. 20,606,400.00, selisih perhitungan keuntungan yang dilakukan oleh PD. Sido Mumbul dan perhitungan dengan Algoritma Titik Interior terpaut sebesar Rp. 1,187,660.00. Ini menunjukkan keuntungan yang diperoleh PD. Sido Mumbul belum optimal.

5.2 .Saran

Berdasarkan hasil penelitian maka saran yang dapat disampaikan adalah sebagai berikut.

(1) Algoritma Titik Interior berbantuan *software Matlab* dapat dijadikan alternatif bagi perusahaan PD. Sido Mumbul dalam mengoptimalkan banyaknya produksi yang harus diproduksi sehingga dapat memaksimumkan keuntungan.

(2) Dalam pembuatan model matematika dan formula dengan Algoritma Titik Interior berbantuan *software Matlab* harus diteliti agar solusi dapat ditampilkan.

Demikian saran yang dapat disampaikan penulis dengan harapan perusahaan PD. Sido Mumbul dapat terus meningkatkan hasil produksi.

DAFTAR PUSTAKA

Agustaf, R. 2011. Primal Program Linier Menggunakan Metode Interior Point Dan Metoge Simpleks.*Jurnal Teknik*, 1(1): 40-46.

Aminudin. 2005. *Prinsip-Prinsip Riset Operasi*. Jakarta:Erlangga.

Arhami, M. & Desiani, A. 2004.*Pemrograman MATLAB*. Yogyakarta: Andi.

Assauri, S. 1993. *Manajemen Produksi dan Operasi Edisi IV*. Jakarta:FE-UI.

Benterki, D. & Bouafia, M. 2014. Improving Complexity Of Karmarkar's Approach For Linier Programming.*Laboratoire de Mathematiques Fondamentaleset Numeriques LMFN*, 43(2): 159-167.

Bouali, S. & Kabb baj, S. 2012. A New Full-NT-Step Infeasible Interior-Point Algorithm for SDP Based on a Specific Kernel Function.*Applied Mathematics*, 3(1): 1014-1022.

Chong, E.K.P dan Zak, S.H. 2013.*An Introduction To Optimazation*(4th ed.). Canada: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, Nem Jersey.

Dimyati & Dimyati. 1992. *Operations Research Model-model Pengambilan Keputusan*. Bandung: Sinar Baru.

Dwijanto. 2008. *Program Linier Berbantuan Komputer: Lindo, Lingo, dan Solver*. Semarang: UNNES Press.

Fontova, M.I.V., Oliveira, A.R.L.D., & Campos, F.F. 2011. Heuristics For Implementation Of A Hybrid Presconditioner For Interior-Point Methods. Pesquisa Operacional, 31(3): 479-59.

Haryani, N. 2014.*Penerapan Metode Program linier Dan Analisis Sensitivitas Pada Pengoptimasi keuntungan Jenang Karomah* (*Studi Kasus Pada PJ.Karomah Kudus*).Skripsi. Semarang: FMIPA Universitas Diponegoro.

Hazdariyatun.1999. *Penentuan Komposisi Produksi Dan Laba Maksimal Pada Kejar Usaha Tape Manis 86 Kabupaten Jember*. Skripsi. Jember: FKIP-UNEJ.

Herjanto, E. 2007.*Manajemen Operasi*. Jakarta: Grasindo.

Herrera, J.F.A. 1995. *Metodo De Karmarkar*. Escuela De Informatica, 2(1):45-55.

Hiller, F.S. & G.J. Lieberman.1990. *Pengantar Riset Operasi*.Translated by Ellen Gunawan. Jakarta:Erlangga.

Hiller, F.S. & G.J. Lieberman. 2000. *Introduction To Operations Research*. Amerika Serikat: Stanford University.

Indriani, D.R., *Analisis Metode Karmarkar Untuk Menyelesaikan Masalah Program Linier*. Skripsi. Semarang: FMIPA Universitas Negeri Semarang.

Indriani, D.R., Suyitno, H., & Mashuri.2013. Analisis Metode Karmarkar Untuk Menyelesaikan Masalah Program Linier.*Jurnal Mipa*, 36(1): 98-106.

Laila, T. 2007. *Optimasi Kombinasi Produk Untuk Memperoleh Laba Maksimal Batik Tulis Aeng Mas Pamekasan Dengan Menggunakan Program Linier*.Skripsi. Jember: FKIP Universitas Jember.

Luenberger, D.G., & Ye, Y. 2008.*Linier and Nonlinier Programming* (3^{th}ed). USA: Stanford University.

Mulyadi. 2000. *Akuntansi Biaya*. *Edisi 5*. Yogyakarta: Aditya Media.

Mulyono, S. 2002. *Riset Operasi*. Jakarta: Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

Subagyo, P., Asri, M., & Handoko, H. 1986.*Dasar-Dasar Operations Research*.*Cetakan 2*. Yogyakarta: BPFE.

Suherman, E. 2003.*Evaluasi Pembelajaran Matematika*. Bandung: JICA.

Sukirno, S. 1994. *Pengantar Ekonomi Mikro*. Jakarta: Raja Grafindo Persada.

Suparno.2009. *Penyelesaian Program Linier Dengan Menggunakan Algoritma Titik Interior Dan Metode Simpleks*.Skripsi. Surakarta: FMIPA Universitas Sebelas Maret.

Suyitno, H. 2014. *Program Linier*.Semarang: Fakultas Matematikadan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.

Windarti, T. 2013. Pemodelan Optimasi keuntungan Untuk Memaksimalkan Keuntungan Dengan Menggunakan Metode Peemrograman Linier.*Jurnal Spektrum Industri* 11(2):117-242.

Yuliastuti, H.D. 2014.*Pengoptimalan Produksi Pupuk NPK Kebomas Dengan Program Linier* (*Studi Kasus pada PT. Petrokimia Gresik*).Skripsi. Semarang: FMIPA Universitas Diponegoro.