



**ANALISIS DINAMIK MODEL *PREDATOR-PREY*
PADA POPULASI ECENG GONDOK
DENGAN ADANYA IKAN *GRASS CARP*
DAN PEMANENAN**

Skripsi
disusun sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika

oleh
Dwi Fahmi Ilmiawan
4111411006

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
2016**

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan.

Semarang, 28 Desember 2015



Dwi Fahmi Ilmiawan

4111411006

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Analisis Dinamik Model *Predator-Prey* pada Populasi Eceng Gondok dengan Adanya Ikan *Grass carp* dan Pemanenan

disusun oleh

Dwi Fahmi Ilmiawan

4111411006

telah dipertahankan dihadapan sidang Panitia Ujian Skripsi Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang pada 28 Desember 2015



Panitia,

Ketua

Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si., Akt.
NIP. 196412231988031001

Sekretaris

Drs. Arief Agoestanto, M.Si.
NIP. 196807221993031005

Ketua Penguji

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'St. Budi Waluya'.

Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si.
NIP. 196809071993031002

Anggota Penguji/

Pembimbing I

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Muhammad Kharis'.

Muhammad Kharis, S.Si., M.Sc.
NIP. 198210122005011001

Anggota Penguji/

Pembimbing II

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Drs. Supriyono'.

Drs. Supriyono, M.Si.
NIP. 195210291980031002

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

- ❖ Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (QS. Al-Insyirah: 6).
- ❖ Percaya pada diri sendiri adalah rahasia utama untuk mencapai kesuksesan (Emerson).
- ❖ Berhenti berusaha adalah kalah (Penulis).

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

- ❖ Bapak dan Ibu tercinta yang senantiasa mendukung dan mendoakan.
- ❖ Keluarga besar yang selalu memberikan semangat, doa, dan dukungan moril.
- ❖ Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah membantu hingga terselesaikannya penulisan skripsi ini.

PRAKATA

Puji syukur terpanjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang senantiasa melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “**Analisis Dinamik Model *Predator-Prey* pada Populasi Eceng Gondok dengan Adanya Ikan *Grass carp* dan Pemanenan**”. Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak akan selesai tanpa adanya dukungan serta bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum., Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Prof. Dr. Zaenuri, S.E., M.Si, Akt., Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si., Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
4. Drs. Mashuri, M.Si., Ketua Program Studi Matematika, S1 Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
5. Muhammad Kharis, S.Si., M.Sc. dan Drs. Supriyono, M.Si., Dosen Pembimbing yang memberikan bimbingan, arahan, petunjuk dan saran dalam penyusunan skripsi.
6. Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si., Dosen penguji yang memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penulisan skripsi.
7. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan bekal kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.

8. Bapak dan Ibu tercinta yang selalu memberikan doa serta memberikan dukungan baik secara moral maupun spiritual.
9. Umarudin, M.Si. yang telah memberikan berbagai macam bantuan dalam penyelesaian penyusunan skripsi ini.
10. Semua pihak yang membantu dalam penulisan skripsi ini baik dalam bentuk motivasi, kritikan, saran ataupun dalam bentuk yang lainnya.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari pembaca. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca demi kebaikan di masa yang akan datang.

Semarang, 28 Desember 2015

Dwi Fahmi Ilmiawan

ABSTRAK

Ilmiawan, D.F. 2016. Analisis Dinamik Model *Predator-Prey* pada Populasi Eceng Gondok dengan Adanya Ikan *Grass Carp* dan Pemanenan. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Pembimbing Utama Muhammad Kharis, S.Si., M.Sc. dan Pembimbing Pendamping Drs. Supriyono, M.Si.

Kata kunci: eceng gondok, ikan *Grass carp*, model *predator-prey*, pemanenan, titik ekuilibrium.

Eceng gondok merupakan tanaman invasif yang perlu dikontrol populasinya. Pengontrolan populasi eceng gondok dapat dilakukan dengan menggunakan ikan *Grass carp* dan pemanenan. Interaksi pada pengontrolan tersebut dinamakan model *predator-prey* dengan pemanenan, dengan eceng gondok sebagai spesies yang dimangsa dan ikan *Grass carp* sebagai spesies yang memangsa. Pada penelitian ini, dibahas sistem dinamik model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan. Model yang dikonstruksi menggunakan fungsi respon Holling tipe III, karena sesuai dengan tipe ikan *Grass carp* yang cenderung mencari mangsa lain ketika eceng gondok mulai berkurang. Secara analitik, terdapat tiga titik ekuilibrium yakni E_0 , E_1 , dan E_2 dengan beberapa syarat batas. Kestabilan dari ketiga titik ekuilibrium dalam sembilan kasus yang berbeda merupakan *stable node point*, *stable spiral point*, *center point*, *unstable saddle point*, *unstable node point*, dan *unstable spiral point*. Hasil simulasi numerik menunjukkan sifat yang sama untuk sembilan kasus kestabilan tersebut. Jadi, solusi yang dapat dilakukan untuk mengontrol populasi eceng gondok dengan ikan *Grass carp* dan pemanenan yakni memusnahkan kedua populasi, memusnahkan populasi ikan *Grass carp*, dan melestarikan kedua populasi.

ABSTRACT

Ilmiawan, D.F. 2015. Dynamic Analysis of Predator-Prey Model on Water hyacinth Population with Grass Carp Fish and Harvesting. Skripsi, Matematic Departement Faculty of Matematic and Natural Science Semarang State University. Main Underguidance Muhammad Kharis, S.Si., M.Sc. and Second Underguidance Drs. Supriyono, M.Si.

Keywords: water hyacinth, Grass carp fish, predator-prey model, harvesting, the equilibrium point

Water hyacinth is an invasive plant that needs to be controlled. Water hyacinth control can be performed using Grass carp fish and harvesting. Interaction in that control called predator-prey model with harvesting, with water hyacinth as prey and grass carp fish as predator. In this research, discussed the system dynamic of predator-prey model on water hyacinth population with Grass carp fish and harvesting. The model uses Holling response function of type III, because according to the Grass carp fish that tend to seek other prey when water hyacinth began to decrease. Analytically, there are three equilibrium points that is E_0 , E_1 , and E_2 with some boundary conditions. Stability of the third equilibrium points in different nine cases that is stable node point, stable spiral point, center point, unstable saddle point, unstable node point, and unstable spiral point with some boundary conditions, so there are nine cases of stability of the equilibrium point. Numerical simulation results showed the same properties for the nine cases of stability equilibrium point. So, the solution that can be done to control the water hyacinth population with Grass carp fish and harvesting are the eradicate both populations, eradicate of Grass carp fish population, and conserve both populations.

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL.....	i
PERNYATAAN.....	ii
PENGESAHAN	iii
MOTTO DAN PERSEMBAHAN	iv
PRAKATA.....	v
ABSTRAK	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR TABEL.....	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xiv
BAB	
1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Batasan Masalah	4
1.4 Tujuan Penelitian.....	4
1.5 Manfaat Penelitian.....	5
1.6 Sistematika Skripsi	5
2. TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Kajian Pendahuluan	7
2.2 Sistem Persamaan Diferensial	8
2.3 Model Pertumbuhan Logistik	10

2.4	Model <i>Predator-Prey</i>	13
2.5	Fungsi Respon Holling	14
2.6	Titik Ekuilibrium	17
2.7	Vektor Eigen dan Nilai Eigen.....	17
2.8	Matriks Jacobian.....	19
2.9	<i>Phase Portrait</i>	20
3.	METODE PENELITIAN	23
3.1	Perumusan Masalah.....	23
3.2	Rumusan Masalah.....	23
3.3	Studi Pustaka	24
3.4	Analisis dan Pemecahan Masalah.....	24
3.5	Penarikan Kesimpulan.....	25
4.	HASIL DAN PEMBAHASAN	26
4.1	Hasil.....	26
4.1.1.	Model <i>Predator-Prey</i>	26
4.1.2.	Eksistensi Titik Ekuilibrium	28
4.1.3.	Kestabilan Titik Ekuilibrium	30
4.1.4.	Simulasi Numerik	44
4.2	Pembahasan	55
4.2.1	Titik Keseimbangan Trivial (Kepunahan Kedua Populasi).....	55
4.2.2	Titik Keseimbangan Kepunahan Ikan <i>Grass carp</i>	56
4.2.3	Titik Keseimbangan Interior (Kelestarian Kedua Populasi)	56

5	PENUTUP.....	58
5.1	Simpulan	58
5.2	Saran.....	59
	DAFTAR PUSTAKA	60
	LAMPIRAN.....	63

DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
4.1 Parameter Simulasi Numerik.....	45

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
2.1 Trayektori <i>stable node point</i>	20
2.2 Trayektori <i>unstable node point</i>	21
2.3 Trayektori <i>unstable saddle point</i>	21
2.4 Trayektori <i>stable spiral</i> dan <i>unstable spiral</i>	22
2.5 Trayektori <i>center point</i>	22
4.1 Bidang Solusi Kasus 1	45
4.2 Trayektori Kasus 1	46
4.3 Bidang Solusi Kasus 2	47
4.4 Trayektori Kasus 2	47
4.5 Bidang Solusi Kasus 3	48
4.6 Trayektori Kasus 3	48
4.7 Bidang Solusi Kasus 4	49
4.8 Trayektori Kasus 4	50
4.9 Bidang Solusi Kasus 5	51
4.10 Trayektori Kasus 5	51
4.11 Bidang Solusi Kasus 6	52
4.12 Trayektori Kasus 6	52
4.13 Bidang Solusi Kasus 7	53
4.14 Trayektori Kasus 7	54

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
1. Input dan Output Simulasi Kasus 1	63
2. Input dan Output Simulasi Kasus 2	65
3. Input dan Output Simulasi Kasus 3	67
4. Input dan Output Simulasi Kasus 4	69
5. Input dan Output Simulasi Kasus 5	71
6. Input dan Output Simulasi Kasus 6	73
7. Input dan Output Simulasi Kasus 7	75

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Eceng gondok (*Eichhornia crassipes*) merupakan spesies invasif diberbagai wilayah dunia (Penfound & Earle, 1948). Invasi eceng gondok terjadi sebagai akibat dari tingkat pertumbuhan eceng gondok yang begitu tinggi. Di mana satu batang eceng gondok mampu menghasilkan tumbuhan baru seluas 1 m² dalam waktu 52 hari (Gutiérrez *et al.*, 2001). Menurut Heyne sebagaimana dikutip oleh Sahwalita (2010), dalam waktu 6 bulan pertumbuhan eceng gondok dalam areal 1 ha dapat mencapai bobot basah seberat 125 ton. Dinas Peternakan dan Perikanan Kabupaten Semarang sebagaimana dikutip oleh Soeprbowati (2012) menyebutkan bahwa laju pertumbuhan eceng gondok 7,1% per tahun sehingga pertumbuhannya dapat mencapai 37,6 kali dalam 1 tahun.

Keberadaan eceng gondok yang berlebih dalam suatu perairan akan menimbulkan berbagai macam permasalahan bagi lingkungan disekitarnya. Permasalahan tersebut diantaranya terjadi pada aspek kesehatan, produksi pangan, navigasi, rekreasi, skema pembangkit listrik tenaga air dan skema irigasi (Gopal,1987). Namun demikian, keberadaan eceng gondok juga dapat dimanfaatkan sebagai media untuk menyerap zat organik, anorganik serta logam berat lain yang merupakan bahan pencemar (Hasan *et al.*, 2010). Hal ini juga didukung oleh Ratnani (2011) yang menyebutkan bahwa eceng gondok mampu menurunkan kandungan COD (*Chemical Oxygen Demand*) pada limbah cair.

Eceng gondok juga dapat dimanfaatkan sebagai bahan baku kerajinan atau industri kertas (Sahwalita, 2010). Melihat masalah dan manfaat eceng gondok tersebut, maka pengontrolan eceng gondok perlu dilakukan.

Pengontrolan eceng gondok dapat dilakukan dengan menggunakan herbivora sebagai penghambat pertumbuhan eceng gondok secara alami dan dengan melakukan pemanenan untuk mengoptimalkan manfaat yang dimiliki oleh eceng gondok. Herbivora yang telah digunakan untuk mengontrol populasi eceng gondok di antaranya adalah ikan *Grass carp* (Soeprbowati, 2012) serta *Neochetina eichhorniae* dan *N. Bruchi* (Sapdi *et al.*, 2006 dan Buchanan, 2013).

Pengontrolan eceng gondok akan menyebabkan populasi eceng gondok mengalami dinamika yang senantiasa berubah terhadap waktu. Secara matematis, dinamika yang terjadi dapat dimodelkan dengan menggunakan persamaan differensial, dimana model yang dibangun nantinya dapat digunakan untuk mengontrol populasi eceng gondok dimasa yang akan datang. Pemodelan yang digunakan adalah model *predator-prey* atau dikenal juga sebagai model Lotka-Volterra (Boyce & DiPrima, 2000). Contoh sederhana model *predator-prey* yakni

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \beta_1 X - c_1 XY, \\ \frac{dY}{dt} &= -\alpha_2 Y + c_2 XY,\end{aligned}\tag{1.1}$$

dengan X dan Y masing-masing merupakan populasi *prey* dan *predator*, sedangkan $c_1, c_2, \beta_1, \alpha_2$ berturut-turut merupakan laju interaksi *predator-prey*, laju pertumbuhan *prey*, serta laju kematian *predator* (Barnes & Fulford, 2002).

Pada pengembangannya, model *predator-prey* dilengkapi dengan beberapa asumsi tambahan. Salah satu asumsi yang umum digunakan adalah fungsi respon

predator dalam mengkonsumsi *prey*. Fungsi respon diperkenalkan oleh Holling pada tahun 1950 sehingga umum disebut sebagai fungsi respon Holling. Fungsi respon merupakan jumlah makanan yang dimakan oleh *predator* sebagai fungsi kepadatan makanan (Hunsicker *et al.*, 2011). Fungsi respon Holling terbagi dalam tiga tipe, yakni tipe I untuk *predator* yang bersifat pasif, tipe II untuk *predator* yang bersifat aktif, dan tipe III untuk *predator* yang cenderung mencari mangsa lain jika mangsa utama mulai berkurang.

Pengembangan model *predator-prey* telah dilakukan oleh Zhang *et al.* (2011) yang mengkaji interaksi mangsa-pemangsa dengan pemanenan konstan terhadap populasi mangsa dan mengikuti fungsi respon Holling tipe III. Pengembangan juga dilakukan oleh Agarwal & Pathak (2012) dan Jiang (2013) dengan pemanenan konstan terhadap populasi mangsa-pemangsa dan mengikuti fungsi respon Holling tipe III. Selanjutnya, Rifa'i & Subchan (2015), melakukan optimalisasi pengendalian model pemanenan *predator-prey* dengan mengikuti fungsi respon Holling tipe III.

Pada pengontrolan eceng gondok, pemodelan telah dilakukan Wilson *et al.* (2001) dengan menggunakan kumbang *Neochetina eichhorniae* sebagai *predator* serta Gutiérrez *et al.* (2001) dengan melakukan pemanenan konstan terhadap populasi eceng gondok. Pada penelitian ini dibangun model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan menggunakan ikan *Grass carp* sebagai *predator* dan dilengkapi dengan adanya pemanenan terhadap populasi eceng gondok dan ikan *Grass carp*.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini yakni

1. Bagaimanakah model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan ?
2. Bagaimanakah eksistensi titik ekuilibrium model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan ?
3. Bagaimanakah kestabilan titik ekuilibrium model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan ?
4. Bagaimanakah simulasi numerik model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan ?

1.3 Batasan Masalah

Masalah yang di kaji adalah model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan. Analisis di lakukan dengan mencari titik ekuilibrium dan memeriksa jenis kestabilannya.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini yakni

1. Mengetahui dan memahami model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan
2. Mengetahui eksistensi titik ekuilibrium model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan
3. Mengetahui kestabilan titik ekuilibrium model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan

4. Mengetahui simulasi numerik model *predator-prey* pada populasi eceng gondok akibat adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yakni

1. Bagi Penulis, sebagai sarana latihan dan belajar dalam mengkaji permasalahan atau fenomena alam yang terjadi dengan menggunakan ilmu matematika.
2. Bagi Pembaca, sebagai wacana dan pengetahuan tentang model *predator-prey* pada populasi eceng gondok akibat adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan.
3. Bagi Pemerintah, sebagai rujukan dalam mengontrol populasi eceng gondok dengan menggunakan ikan *Grass carp*.

1.6 Sistematika Skripsi

Sistematika penulisan berguna untuk memudahkan dalam memahami jalan pemikiran secara keseluruhan skripsi. Penulisan skripsi ini secara garis besar dibagi menjadi tiga bagian.

1. Bagian Awal Skripsi

Bagian awal skripsi terdiri dari halaman judul, halaman pengesahan, halaman pernyataan, halaman motto dan persembahan, abstrak, kata pengantar, daftar isi, daftar gambar, daftar tabel dan daftar lampiran.

2. Bagian Isi Skripsi

Bagian isi skripsi terdiri dari lima bab dengan rincian sebagai berikut.

BAB 1 PENDAHULUAN

Berisi tentang latar belakang, rumusan dan batasan masalah, tujuan, manfaat, serta sistematika penulisan sebagai gambaran singkat isi skripsi.

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

Berisi kajian teori dan hasil penelitian terdahulu yang menjadi kerangka pikir dalam menyelesaikan masalah penelitian.

BAB 3 METODE PENELITIAN

Berisi metode dan langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian.

BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN

Berisi hasil dan pembahasantentang model *predator-prey* yang disajikan dalam rangka menjawab permasalahan penelitian.

BAB 5 PENUTUP

Berisi simpulan dan saran yang diperoleh dari hasil dan pembahasan yang telah dilakukan.

3. Bagian Akhir Skripsi

Bagian akhir skripsi terdiri dari daftar pustaka yang merupakan informasi mengenai referensi yang digunakan serta lampiran-lampiran yang mendukung dalam penulisan skripsi ini.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Kajian Pendahuluan

Pemodelan eceng gondok telah dilakukan Wilson *et al.* (2001) dengan menggunakan kumbang *Neochetina eichhorniae* sebagai predator eceng gondok.

Model ini diberikan oleh sistem persamaan

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - c_1 A (1 - e^{-d_1 P}), \\ \frac{dA}{dt} &= A \left(-a + c_2 (1 - e^{-d_2 P})\right),\end{aligned}\tag{2.1}$$

dengan P dan A masing-masing menyatakan kepadatan populasi eceng gondok dan kumbang, sedangkan $c_1, c_2, d_1, d_2, K, r, a$ berturut-turut menyatakan tingkat interaksi eceng gondok dan kumbang, konstanta kerusakan eceng gondok dan kumbang, *carrying capacity*, laju pertumbuhan eceng gondok, serta tingkat kematian kumbang. Persamaan $c_1 A (1 - e^{-d_1 P})$ menggambarkan efek kerusakan eceng gondok akibat dimakan kumbang.

Pemodelan eceng gondok juga dilakukan Gutiérrez *et al.* (2001), dengan pemanenan konstan terhadap populasi eceng gondok. Model ini diberikan oleh persamaan

$$\frac{dW}{dt} = rW - \frac{rW^2}{K} - \frac{R}{A},\tag{2.2}$$

dengan W kepadatan eceng gondok. Kepadatan eceng gondok akan berkurang jika kapasitas pemanenan yang dilakukan (R) lebih dari $R^* = \frac{ArK}{4}$, dengan A luas penutupan eceng gondok, r laju pertumbuhan, dan K daya dukung lingkungan.

2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari fungsi yang diketahui. Beberapa persamaan diferensial yang membentuk suatu sistem disebut sistem persamaan diferensial. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{2.3}$$

dengan kondisi awal $\dot{x}_i(t_0) = x_{i0}$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$. Sistem (2.3)

dapat juga ditulis menjadi

$$\dot{x} = f(x),\tag{2.4}$$

dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ dan kondisi awal $x(t_0) = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = x_0$. Notasi $x(t) = (x_0, t)$ merupakan solusi Sistem (2.4) dengan nilai awal x_0 . Solusi untuk Sistem (2.4) diberikan melalui Definisi 1 dan Teorema 2.

Definisi 1

Diberikan $E \subseteq R^n$, E himpunan terbuka, dan $f_i \in C(E)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Vektor $x(t)$ disebut penyelesaian Sistem (2.4) pada interval I jika $x(t)$ diferensiabel pada I dan $x' = f(x(t))$ untuk setiap $t \in I$ dan $x(t) \in E$, dengan $C(E)$ merupakan himpunan semua fungsi kontinu pada E dan I interval terbuka (Perko, 1991).

Teorema 2

Jika $E \subseteq \mathbb{R}^n$, E himpunan terbuka, $f_i \in C(E)$, $i = 1, 2, \dots, n$ dan $x_0 \in E$ maka terdapat $a > 0$ sehingga masalah nilai awal $\dot{x} = f(x)$ dengan $x(0) = x_0$ mempunyai penyelesaian tunggal $x(t)$ pada interval $[-a, a]$ (Perko, 1991).

Berikut diberikan contoh sistem persamaan differensial pada Contoh 1.

Contoh 1

Tentukan solusi umum dari sistem persamaan differensial berikut

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + 2x_2, \\ x'_2 &= 2x_1 + x_2, \end{aligned} \tag{2.5}$$

(Waluya, 2011).

Bentuk matriks dari Sistem (2.5) diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Digunakan persamaan $(A - \alpha I)\vec{\zeta} = 0$ sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha & 2 \\ 2 & 1 - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Sistem (2.7) mempunyai solusi nontrivial jika dan hanya jika determinan dari koefisien matriks bernilai nol, sehingga

$$\begin{vmatrix} 1 - \alpha & 2 \\ 2 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = (1 - \alpha)^2 - 4 = 0.$$

Jelas $\alpha = -1$ dan $\alpha = 3$. Nilai tersebut merupakan nilai eigen dari koefisien matriks dalam persamaan (2.7).

Substitusi $\alpha = -1$ ke sistem (2.7), didapatkan

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sehingga diperoleh $2\zeta_1 + 2\zeta_2 = 0$ atau $\zeta_1 = -\zeta_2$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\alpha = -1$, diberikan oleh

$$\zeta^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Substitusi $\alpha = 3$ ke sistem (2.7) dan didapatkan

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sehingga diperoleh $-2\zeta_1 + 2\zeta_2 = 0$ atau $\zeta_1 = \zeta_2$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\alpha = 3$, diberikan oleh

$$\zeta^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Didapatkan solusi untuk sistem (2.5) yakni,

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Wronskian dari $\vec{x}^{(1)}$ dan $\vec{x}^{(2)}$ adalah

$$W(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}) = \begin{vmatrix} -e^{-t} & e^{3t} \\ e^{-t} & e^{3t} \end{vmatrix} = -e^{2t} - e^{2t} = -2e^{2t} \neq 0.$$

Oleh sebab Wronskian bernilai tak nol, dapat disimpulkan bahwa bentuk $\vec{x}^{(1)}$ dan $\vec{x}^{(2)}$ merupakan sebuah solusi dasar, dan solusi umumnya diberikan oleh

$$\vec{x} = c_1 \vec{x}^{(1)} + c_2 \vec{x}^{(2)} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

2.3 Model Pertumbuhan Logistik

Menurut Tucker (1989), model matematika adalah formulasi matematika dari berbagai macam problem alam nyata. Tujuannya (Odum,1998) yaitu:

1. Menentukan usaha-usaha penelitian atau menguraikan garis besar suatu masalah untuk pengkajian yang lebih mendetail, dan

2. Meramalkan perubahan dinamika terhadap waktu.

Salah satu model yang dapat digunakan untuk mengukur populasi suatu spesies adalah model pertumbuhan logistik (model Verhulst) yang melibatkan adanya daya dukung lingkungan terhadap pertumbuhan populasi. Model pertumbuhan logistik diberikan oleh persamaan

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right), \quad (2.8)$$

dengan P kepadatan populasi, r laju pertumbuhan dan K daya dukung lingkungan (Waluya, 2011).

Jika pada persamaan (2.8) ditambahkan syarat awal $P(0) = P_0$, maka dapat diperoleh solusi khusus dari persamaan diferensial tersebut, yakni

$$P(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{P_0} - 1\right)e^{-rt} + 1}. \quad (2.9)$$

Untuk $r > 0$ berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = K$ sehingga grafik dari persamaan (2.9) mempunyai asimtot mendatar $P(t) = K$.

Pada suatu spesies yang bermanfaat akan terjadi proses pemanenan sehingga kepadatan populasinya akan berkurang. Hal ini akan menyebabkan terjadinya perubahan model pertumbuhan populasi pada persamaan (2.8) menjadi

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - h, \quad (2.10)$$

dengan h adalah laju pemanenan yang dilakukan (Barnes & Fulford, 2002).

Berikut diberikan contoh model pertumbuhan logistik dengan pemanenan pada Contoh 2.

Contoh 2

Diberikan persamaan diferensial

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{r}{K} \left(X^2 - KX + \frac{Kh}{r} \right), \quad (2.11)$$

dengan r laju pertumbuhan, K daya dukung lingkungan, dan h laju pemanenan.

Untuk $r = 1$, $K = 10$, $h = \frac{9}{10}$ dan $X(0) = x_0$, tentukan solusi dari persamaan diferensial tersebut (Barnes & Fulford, 2002).

Persamaan diferensialnya dapat ditulis menjadi

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{1}{10} (X^2 - 10X + 9) = -\frac{1}{10} (X - 1)(X - 9).$$

Diperoleh

$$\frac{1}{(X-1)(X-9)} dX = -\frac{1}{10} dt.$$

Digunakan fraksi parsial sehingga didapatkan

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{(X-9)} - \frac{1}{(X-1)} \right) dX = -\frac{1}{10} dt.$$

Integralkan kedua sisi, sehingga diperoleh

$$\frac{1}{8} \ln \left| \frac{X-9}{X-1} \right| = -\frac{1}{10} t + c.$$

Jika $b = e^{8c}$ untuk suatu konstanta c , maka

$$\left| \frac{X-9}{X-1} \right| = b e^{-4t/5}.$$

Substitusikan kondisi awal $X(0) = x_0$ sehingga

$$b = \left| \frac{x_0-9}{x_0-1} \right|,$$

dan solusi eksplisitnya yaitu

$$X(t) = \frac{9 - b e^{-4t/5}}{1 - b e^{-4t/5}}.$$

2.4 Model *Predator-Prey*

Model *Predator-Prey* merupakan salah satu model interaksi antar makhluk hidup dalam suatu ekosistem, dengan *prey* sebagai spesies yang dimangsa dan *predator* sebagai spesies yang memangsa. Model ini disebut juga model Lotka-Volterra (Boyce & DiPrima, 1992). Asumsi dasar dari model *predator-prey* adalah setiap populasi mengalami pertumbuhan atau peluruhan secara eksponensial.

Interaksi yang terjadi antara mangsa dan pemangsa akan mengakibatkan terjadinya proses makan dan dimakan yang berpengaruh terhadap kepadatan populasi masing-masing. Model *predator-prey* diberikan oleh persamaan

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - \beta PX, \\ \frac{dX}{dt} &= \beta PX - \varphi X,\end{aligned}\tag{2.12}$$

dengan P dan X masing-masing menyatakan kepadatan populasi *prey* dan *predator*, sedangkan K, β, r, φ berturut-turut menyatakan *carrying capacity*, tingkat interaksi *predator-prey*, laju pertumbuhan *prey*, serta tingkat kematian *predator*. Diasumsikan $K, \beta, r, \varphi > 0$, karena setiap populasi berpotensi berkembang biak (Barnes & Fulford, 2002).

Berikut diberikan contoh model *predator-prey* pada Contoh 3.

Contoh 3

Tentukan solusi kesetimbangan dari sistem persamaan diferensial (2.12).

(Barnes & Fulford, 2002).

Dibentuk $\frac{dX}{dt} = 0$ dan $\frac{dY}{dt} = 0$ pada Sistem (2.12) sehingga diperoleh persamaan

$$\beta_1 X - c_1 XY = 0, \quad -\alpha_2 Y + c_2 XY = 0.$$

Kedua persamaan tersebut dapat ditulis menjadi

$$X(\beta_1 - c_1Y) = 0, \quad (2.13)$$

$$Y(-\alpha_2 + c_2X) = 0. \quad (2.14)$$

Dari persamaan (2.13) diperoleh

$$X = 0 \quad \text{atau} \quad \beta_1 - c_1Y = 0.$$

Kasus $X = 0$.

Substitusikan $X = 0$ ke persamaan (2.14) sehingga diperoleh

$$Y = 0.$$

Didapatkan solusi kesetimbangan yang pertama yakni $(X, Y) = (0, 0)$.

Kasus $\beta_1 - c_1Y = 0$ sehingga $Y = \frac{\beta_1}{c_1}$.

Substitusikan $Y = \frac{\beta_1}{c_1}$ ke persamaan (2.14) sehingga diperoleh

$$X = \frac{\alpha_2}{c_2}.$$

Didapatkan solusi kesetimbangan yang kedua yakni $(X, Y) = \left(\frac{\alpha_2}{c_2}, \frac{\beta_1}{c_1}\right)$.

2.5 Fungsi Respon Holling

Fungsi respon Holling dalam ekologi merupakan jumlah makanan yang dimakan oleh *predator* sebagai fungsi kepadatan makanan (Hunsicker *et al.*, 2011). Berdasarkan karakteristiknya, fungsi respon Holling terbagi dalam tiga tipe, yaitu Tipe I (linear), Tipe II (perlambatan), dan Tipe III (sigmoid).

2.5.1 Fungsi Respon Holling Tipe I

Pada tipe ini, disumsikan bahwa waktu penanganan dan waktu pencarian *prey* dapat diabaikan secara bersamaan (Jeschke *et al.*, 2002). Hal ini menyebabkan tingkat konsumsi *predator* meningkat secara linear dengan

kepadatan *prey*, tetapi akan konstan jika *predator* berhenti memangsa. Fungsi ini terjadi pada *predator* yang pasif atau lebih suka menunggu mangsanya. Secara umum, fungsi tipe ini menurut Murray *et al.* (2013) diberikan oleh persamaan,

$$F'(N) = mN, \quad (2.15)$$

dengan

$$N = \text{kepadatan } prey \ (N \geq 0)$$

$$m = \text{laju interaksi kedua populasi } (m \geq 0).$$

Contoh 3 merupakan salah satu contoh penggunaan fungsi respon Holling tipe I.

2.5.2 Fungsi Respon Holling Tipe II

Tipe ini menggambarkan rata-rata tingkat konsumsi *predator*, ketika *predator* menghabiskan waktu untuk mencari *prey* (Murray *et al.*, 2013). Fungsi respon Holling tipe II terjadi pada *predator* dengan karakteristik aktif dalam mencari mangsanya. Fungsi ini akan meningkat jika konsumsinya mengalami penurunan dan konstan jika mencapai titik jenuh (*half saturation*). Menurut Jeschke *et al.* (2002), fungsi respon Holling tipe II diberikan oleh persamaan,

$$F''(N) = \frac{mN}{1+bN}, \quad (2.16)$$

dengan

$$N = \text{kepadatan } prey \ (N \geq 0)$$

$$m = \text{laju interaksi kedua populasi } (m \geq 0)$$

$$b = \text{titik jenuh } predator \ (b \geq 0).$$

Contoh 4

Model *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe II dilakukan oleh Artha *et al.* (2015) yang diberikan oleh persamaan

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= N \left(\frac{bN}{A_1+N} - d_1 - \alpha N \right) - \frac{sNP}{1+sh_1N}, \\ \frac{dY}{dt} &= -\alpha_2 X + c_2 XY,\end{aligned}\tag{2.17}$$

dengan N dan Y menyatakan kepadatan populasi *prey* dan *predator*, sedangkan $b, s, c_1, d_i, a, h_1, A_1$ berturut-turut menyatakan tingkat kelahiran maksimum *prey*, tingkat pencarian efektif, banyaknya *prey* yang dimangsa, tingkat kematian rata-rata *prey* dan *predator*, kompetisi populasi *prey*, waktu pemangsaan dan Allee.

2.5.3 Fungsi Respon Holling Tipe III

Pada tipe ini, hubungan tingkat pemangsaan dan kepadatan *prey* bersifat sigmoid, di mana saat kepadatan *prey* rendah, efek pemangsaan juga rendah, tetapi jika ukuran populasi *prey* meningkat, pemangsaan akan lebih intensif (Agarwal & Pathak, 2012). Fungsi ini terjadi pada *predator* yang cenderung mencari mangsa lain ketika mangsa utamanya mulai berkurang sehingga variabel *prey* menjadi N^2 dan menyebabkan laju populasi lebih cepat. Menurut Turchin sebagai mana dikutip Agarwal & Pathak (2012), fungsi respon Holling tipe III diberikan dengan persamaan,

$$F'''(N) = \frac{mN^2}{a^2+N^2},\tag{2.18}$$

dengan

N = kepadatan populasi mangsa ($N \geq 0$)

m = laju interaksi kedua populasi ($m \geq 0$)

a = titik jenuh *predator* ($a \geq 0$).

Contoh 5

Model *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe III dilakukan oleh Wijayanti & Kharis (2015) yang diberikan oleh persamaan

$$\begin{aligned}\frac{dx_0}{dt_0} &= rx_0 \left(1 - \frac{x_0}{K}\right) - \frac{a_0 x_0^2 y_0}{\beta^2 + x_0^2}, \\ \frac{dy_0}{dt_0} &= \frac{b_0 x_0^2 y_0}{\beta^2 + x_0^2} - \mu_0 y_0 - q_0 y_0,\end{aligned}\tag{2.19}$$

dengan x_0 dan y_0 menyatakan kepadatan populasi *prey* dan *predator*, sedangkan $a_0, b_0, r, \beta, \mu_0, q_0, K$ berturut-turut menyatakan tingkat konsumsi maksimum *predator* dan *prey*, laju pertumbuhan *prey*, tingkat kejenuhan *predator*, tingkat kematian dan pemanenan *prey*, serta *carrying capacity*.

2.6 Titik Ekuilibrium

Berikut diberikan definisi dari titik ekuilibrium untuk Sistem (2.4).

Definisi 3

Titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik ekuilibrium Sistem (2.4) jika $f(\bar{x}) = 0$

(Perko, 1991).

2.7 Vektor Eigen dan Nilai Eigen

Berikut diberikan definisi dari vektor eigendan nilai eigen beserta penggunaannya dalam menentukan kestabilan titik ekuilibrium.

Definisi 4

Vektor eigen dari matriks A merupakan vektor tak nol x sedemikian hingga $Ax = \lambda x$, untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut nilai eigen dari A jika terdapat solusi tak nol x untuk $Ax = \lambda x$ sehingga x merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ (Barnes & Fulford, 2002).

Definisi 5

Polinomial karakteristik dari A didefinisikan sebagai $|\lambda I - A|$, sedangkan $|\lambda I - A| = 0$ disebut persamaan karakteristik dari A (Barnes & Fulford, 2002).

Teorema 6

Misalkan $\delta = \det A$ dan $\tau = \text{trace } A$ serta diberikan sistem linear $\dot{x} = Ax$.

1. Jika $\delta < 0$ maka sistem $\dot{x} = Ax$ mempunyai titik pelana (*saddle point*) pada titik asal.
2. Jika $\delta > 0$ dan $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ maka sistem $\dot{x} = Ax$ mempunyai titik simpul (*node point*) pada titik asal. Titik tersebut stabil jika $\tau < 0$ dan tidak stabil jika $\tau > 0$.
3. Jika $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta < 0$, dan $\tau \neq 0$ maka sistem $\dot{x} = Ax$ mempunyai titik spiral (*spiral point*) pada titik asal. Titik tersebut stabil jika $\tau < 0$ dan tidak stabil jika $\tau > 0$.
4. Jika $\delta > 0$ dan $\tau = 0$ maka sistem $\dot{x} = Ax$ mempunyai titik pusat (*center point*) pada titik asal.

Karena $\dot{x} = Ax$, maka titik asal sama dengan titik ekuilibrium. Catatan pada kasus (2), $\tau^2 \geq 4|\delta| > 0, \tau \neq 0$ (Perko, 1991).

2.8 Matriks Jacobian

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{2.20}$$

dengan x dan y adalah variabel yang bergantung terhadap t . Sistem ini memiliki titik kesetimbangan (x_0, y_0) . Oleh sebab Sistem (2.20) merupakan sistem persamaan non-linear, maka diperlukan linearisasi sistem dengan menggunakan Matriks Jacobian. Matriks Jacobian dari sistem (2.20) diberikan oleh

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}\tag{2.21}$$

(Purnamasari, 2008).

Berikut diberikan teorema untuk kestabilan Sistem (2.4) dengan nilai eigen dari matriks Jacobian $J(\bar{x})$.

Teorema 10

Diberikan matriks Jacobian $J(\bar{x})$ dari Sistem (2.4), dengan nilai eigen λ .

1. Jika semua bagian real nilai eigen dari matriks $J(\bar{x})$ bernilai negatif, maka titik ekuilibrium \bar{x} dari Sistem nonlinear (2.4) stabil asimtotik lokal.
2. Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks $J(\bar{x})$ yang bagian realnya positif, maka titik ekuilibrium \bar{x} dari Sistem nonlinear (2.4) tidak stabil.

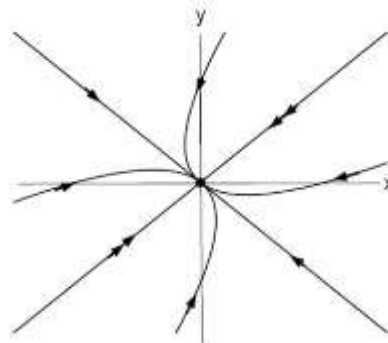
(Olsder, 1994).

2.9 Phase Portrait

Trayektori pada *phase portrait* sistem persamaan diferensial ditentukan oleh nilai-nilai eigennya. Secara umum, hubungan antara nilai eigen dan bentuk trayektori diklasifikasikan ke dalam lima kasus berikut.

2.9.1 Kasus $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$

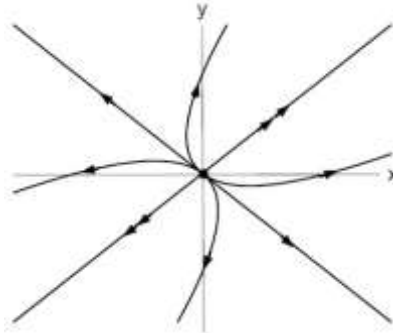
Pada kasus ini, nilai eigennya real dan negatif sehingga semua trayektori bergerak mendekati titik ekuilibrium. Titik ekuilibrium pada kasus ini disebut *stable node point* (Barnes & Fulford, 2002). Contoh trayektori kasus ini tersaji pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Trayektori *stable node point*

2.9.2 Kasus $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 > 0$

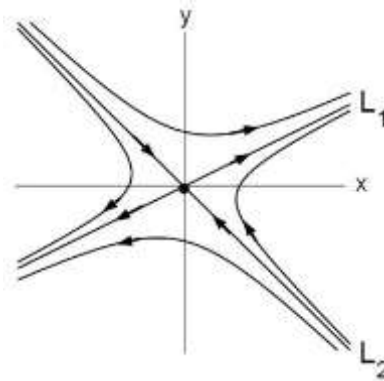
Pada kasus ini, nilai eigennya real dan positif sehingga semua trayektori menuju ke tak hingga dan menjauh dari titik ekuilibrium. Titik ekuilibrium pada kasus ini disebut *unstable node point* (Barnes & Fulford, 2002). Contoh trayektori kasus ini tersaji pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2. Trayektori *unstable node point*

2.9.3 Kasus $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$

Pada kasus ini, nilai eigennya real dan berbeda tanda sehingga trayektori bergerak menuju ke titik ekuilibrium sepanjang salah satu sumbu dan ke tak hingga sepanjang sumbu lainnya. Titik ekuilibrium pada kasus ini disebut *unstable saddle point* (Barnes & Fulford, 2002). Contoh trayektori kasus inintersaji pada Gambar 2.3.

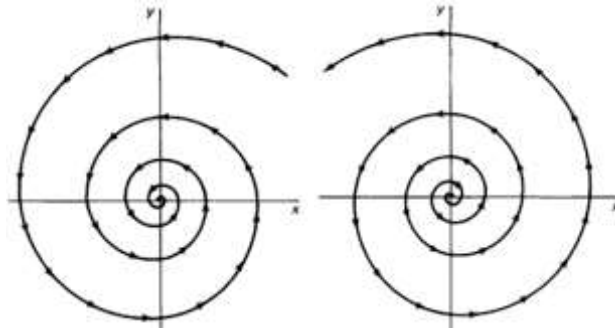


Gambar 2.3. Trayektori *unstable saddle point*

2.9.4 Kasus $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ dan $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

Pada kasus ini, nilai eigennya kompleks konjugat dengan $\alpha \neq 0$ dan $\beta \neq 0$ sehingga trayektorinya berbentuk spiral dan mengelilingi titik ekuilibrium. Jika $\alpha < 0$ maka trayektori menuju titik ekuilibrium dan disebut *stable spiral point*, sedangkan jika $\alpha > 0$ maka trayektori menjauhi titik ekuilibrium dan disebut

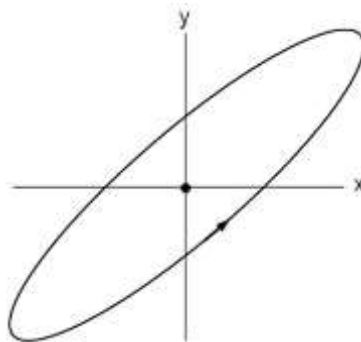
unstable spiral point (Barnes & Fulford, 2002). Contoh trayektori kasus ini tersaji pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4. Trayektori *stable spiral* (kiri) dan *unstable spiral* (kanan)

2.9.5 Kasus $\lambda_1 = i\beta$ dan $\lambda_2 = -i\beta$

Pada kasus ini, nilai eigennya adalah imajiner murni sehingga semua trayektori akan mengelilingi dan menutupi titik ekuilibrium. Titik ekuilibrium pada kasus ini disebut *center point* dan solusinya periodik yang merupakan osilator stabil secara alami (Barnes & Fulford, 2002). Contoh trayektori kasus ini diberikan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5. Trayektori *center point*

BAB 3

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan untuk membangun model *predator-prey* pada populasi eceng gondok akibat adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan adalah kajian kepustakaan (*library research*) dengan langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut.

3.1 Perumusan Masalah

Permasalahan yang diangkat dalam skripsi ini yaitu berkaitan dengan model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan.

3.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penyusunan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimanakah model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan ?
2. Bagaimanakah eksistensi titik ekuilibrium model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan ?
3. Bagaimanakah kesetimbangan model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan ?
4. Bagaimanakah simulasi numerik model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan ?

3.3 Studi Pustaka

Studi pustaka digunakan untuk menghimpun dan mengkaji data dari berbagai sumber pustaka yang berkaitan dengan masalah yang diangkat dalam penyusunan skripsi ini. Hasil kajian dari studi pustaka yang dilakukan selanjutnya digunakan sebagai bahan dasar pengembangan dan landasan untuk menganalisis dan memecahkan permasalahan yang diangkat.

3.4 Analisis dan Pemecahan Masalah

Analisis dan pemecahan masalah dilakukan dengan tahapan sebagai berikut.

1. Kontruksi model *predator-prey* populasi eceng gondok akibat adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan.
2. Mencari solusi dari model *predator-prey* yang dikonstruksi.

Langkah-langkah pencariannya yaitu:

- a. Menentukan titik ekuilibrium

Titik $x_0 \in R^n$ disebut titik ekuilibrium sistem $\dot{x} = f(x)$ jika $f(x_0) = 0$.

- b. Tentukan Matriks Jacobian

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} \text{ dengan } \frac{dx}{dt} = f(x, y), \frac{dy}{dt} = g(x, y).$$

- c. Tentukan Nilai Eigen

Misalkan A matriks $n \times n$ dan $X \in R^n$, $X \neq 0$. Jika $AX = \lambda X$, untuk suatu $\lambda \in R$, bilangan λ disebut nilai eigen atau nilai karakteristik dan vektor X disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

d. Analisis Titik Ekuilibrium dari sifat Eigen

Misalkan $\delta = \det A$ dan $\tau = \text{trace } A$ serta diberikan sistem linier $\dot{x} = Ax$,

- 1) Jika $\delta < 0$ maka sistem $\dot{x} = Ax$ mempunyai titik pelana (*saddle point*) pada titik ekuilibrium.
- 2) Jika $\delta > 0$ dan $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ maka sistem $\dot{x} = Ax$ mempunyai titik simpul (*node point*) pada titik ekuilibrium. Titik tersebut stabil jika $\tau < 0$ dan tidak stabil jika $\tau > 0$.
- 3) Jika $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta < 0$, dan $\tau \neq 0$ maka sistem $\dot{x} = Ax$ mempunyai titik spiral (*spiral point*) pada titik ekuilibrium. Titik tersebut stabil jika $\tau < 0$ dan tidak stabil jika $\tau > 0$.
- 4) Jika $\delta > 0$ dan $\tau = 0$ maka sistem $\dot{x} = Ax$ mempunyai titik pusat (*center point*) pada titik ekuilibrium.

(Perko, 1991).

3. Simulasi Numerik

Simulasi numerik digunakan untuk melihat pola dinamika populasi eceng gondok akibat berinteraksi dengan ikan *Grass carp* dan pemanenan. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan program Maple 12.

3.5 Penarikan Kesimpulan

Penarikan kesimpulan merupakan langkah terakhir penelitian yang didasarkan pada hasil dan pembahasan yang dilakukan sebelumnya sesuai dengan tujuan penelitian yang dirancang.

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Hasil

4.1.1 Model *Predator-Prey*

Dinamika populasi eceng gondok merupakan fluktuasi kepadatan eceng gondok yang dipengaruhi oleh ekosistemnya, dalam hal ini adalah ikan *Grass carp* dan pemanenan yang dilakukan. Skripsi ini membahas tentang analisis dinamik model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan.

Berdasarkan analisis data yang dilakukan terkait eceng gondok dan ikan *Grass carp*, berikut fakta-fakta yang diperoleh.

1. Eceng gondok adalah makanan bagi ikan *Grass carp* (Soeprobowati, 2012).
2. Faktor utama yang mempengaruhi tingginya pertumbuhan eceng gondok adalah kandungan nutrien dan fosfor dalam perairan (Wilson *et al.*, 2005).
3. Ikan *Grass carp* dapat mengkonsumsi tanaman lain selain eceng gondok, seperti Rumput Gajah, Azolla & Kiapu (Babo *et al.*, 2013). Namun, ketika bahan makanan yang dalam hal ini adalah eceng gondok dalam kondisi yang cukup, menurut Kordi sebagai mana dikutip oleh Babo *et al.* (2013), ikan *Grass carp* lebih memilih salah satu jenis pakan yang diminatinya saja.
4. Adanya pemanenan eceng gondok untuk berbagai macam keperluan seperti bahan baku pembangkit listrik (Wibisono, 2014) dan kertas seni (Pasaribu & Sahwita, 2006).

5. Ikan *Grass carp* merupakan salah satu ikan yang dibudidayakan sehingga terjadi pemanenan pada ikan *Grass carp* (Soeprbowati, 2012).

Berikut diberikan asumsi-asumsi dalam kontruksi model *predator-prey* untuk melengkapi fakta-fakta yang telah diperoleh.

1. Laju pertumbuhan eceng gondok mengikuti dinamika pertumbuhan logistik.
2. Interaksi kedua populasi mengikuti fungsi respon Holling tipe III.
3. Laju pemanenan Eceng gondok dan ikan *Grass carp* sebanding dengan populasinya.

Berdasarkan asumsi yang digunakan, sistem persamaan differensial dari model *predator-prey*, yakni:

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= rW \left(1 - \frac{W}{K}\right) - hW - \frac{mW^2}{a^2+W^2} P, \\ \frac{dP}{dt} &= P \left(\frac{mW^2}{a^2+W^2} - (\rho + \mu)\right),\end{aligned}\tag{4.1}$$

dengan

W = kepadatan biomassa eceng gondok ($W \geq 0$)

P = kepadatan biomassa ikan *Grass carp* ($P \geq 0$)

r = laju pertumbuhan eceng gondok ($r > 0$)

K = daya dukung lingkungan terhadap pertumbuhan eceng gondok ($K > 0$)

h = laju pemanenan eceng gondok ($h \geq 0$)

m = tingkat konsumsi maksimum ikan *Grass carp* ($m > 0$)

a = tingkat kejenuhan ikan *Grass carp* memangsa eceng gondok ($a > 0$)

μ = laju kematian ikan *Grass carp* ($\mu > 0$)

ρ = laju pemanenan ikan *Grass carp* ($\rho \geq 0$)

4.1.2 Eksistensi Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium terjadi apabila masing-masing persamaan dalam Sistem (4.1) bernilai nol, sehingga Sistem (4.1) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= rW \left(1 - \frac{W}{K}\right) - hW - \frac{mW^2}{a^2+W^2} P = 0, \\ \frac{dP}{dt} &= P \left(\frac{mW^2}{a^2+W^2} - (\rho + \mu) \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dari persamaan kedua pada Sistem (4.2) didapatkan

$$P = 0 \text{ atau } \frac{mW^2}{a^2+W^2} - (\rho + \mu) = 0.$$

Kasus $P = 0$

Substitusikan $P = 0$ ke persamaan pertama pada Sistem (4.2) sehingga didapatkan

$$rW \left(1 - \frac{W}{K}\right) - hW = 0.$$

Diperoleh

$$W = 0$$

atau

$$r \left(1 - \frac{W}{K}\right) - h = 0.$$

Sub kasus $W = 0$

Oleh sebab $W = 0$ dan $P = 0$, maka didapatkan titik ekuilibrium $E_0(0, 0)$.

Sub kasus $W \neq 0$ sehingga $r \left(1 - \frac{W}{K}\right) - h = 0$

Diperoleh

$$W_1 = K \left(1 - \frac{h}{r}\right),$$

dengan asumsi $h < r$.

Didapatkan titik ekuilibrium $E_1(W_1, 0)$.

Kasus $P \neq 0$ sehingga $\frac{mW^2}{a^2+W^2} - (\rho + \mu) = 0$

Diperoleh

$$mW^2 = a^2(\rho + \mu) + W^2(\rho + \mu),$$

sehingga

$$W^* = a \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}},$$

dengan asumsi $m > \rho + \mu > 0$.

Substitusikan W^* ke persamaan pertama pada Sistem (4.2) sehingga didapatkan

$$a \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right) - (\rho + \mu)P = 0.$$

Jelas $\rho + \mu \neq 0$ sehingga

$$P^* = \frac{a}{\rho + \mu} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right),$$

dengan asumsi $r > h + \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}}$. Diperoleh titik ekuilibrium $E_2(W^*, P^*)$.

Berikut dibangun teorema eksistensi titik ekuilibrium dari Sistem (4.1).

Teorema 1

Dari Sistem (4.1) diperoleh

1. Titik ekuilibrium $E_0(0, 0)$ untuk setiap kondisi,
2. Titik ekuilibrium $E_1(W_1, 0)$ jika $h < r$, dan
3. Titik ekuilibrium $E_2(W^*, P^*)$ jika $m > \rho + \mu > 0$ dan $r > h + \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}}$,

dengan $W_1 = K \left(1 - \frac{h}{r} \right)$, $W^* = a \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}}$, dan

$$P^* = \frac{a}{\rho + \mu} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right).$$

4.1.3 Kestabilan Titik Ekuilibrium

Analisis kestabilan titik ekuilibrium dilakukan dengan memanfaatkan sistem yang telah dilinearakan. Sesuai dengan Sistem (4.1), pelinearannya dilakukan dengan matriks Jacobian berordo 2×2 , yang diberikan oleh Sistem (4.3).

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Jelas } J_{11} &= \frac{\partial \left[rW \left(1 - \frac{W}{K} \right) - hW - \frac{mW^2 P}{a^2 + W^2} \right]}{\partial W} \\ &= r \left(1 - \frac{2W}{K} \right) - h - \frac{2ma^2 WP}{(a^2 + W^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Jelas } J_{12} &= \frac{\partial \left[rW \left(1 - \frac{W}{K} \right) - hW - \frac{mW^2 P}{a^2 + W^2} \right]}{\partial P} \\ &= -\frac{mW^2}{a^2 + W^2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \text{Jelas } J_{21} &= \frac{\partial \left[P \left(\frac{mW^2}{a^2 + W^2} - (\rho + \mu) \right) \right]}{\partial W} \\ &= \frac{2ma^2 WP}{(a^2 + W^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \text{Jelas } J_{22} &= \frac{\partial \left[P \left(\frac{mW^2}{a^2 + W^2} - (\rho + \mu) \right) \right]}{\partial P} \\ &= \frac{mW^2}{a^2 + W^2} - (\rho + \mu). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Berdasarkan persamaan (4.4), (4.5), (4.6), dan (4.7), diperoleh Matriks Jacobian (4.8)

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{2W}{K} \right) - h - \frac{2ma^2 WP}{(a^2 + W^2)^2} & -\frac{mW^2}{a^2 + W^2} \\ \frac{2ma^2 WP}{(a^2 + W^2)^2} & \frac{mW^2}{a^2 + W^2} - (\rho + \mu) \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Kestabilan Titik Ekuilibrium $E_0(0, 0)$

Berdasarkan Teorema 1, titik E_0 eksis untuk setiap kondisi. Berikut disubstitusikan E_0 ke Matriks (4.8).

Diperoleh

$$\begin{aligned}
 J(E_0) &= \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{2.0}{K}\right) - h - \frac{2ma^2.0.0}{(a^2+0^2)^2} & -\frac{m.0^2}{a^2+0^2} \\ \frac{2ma^2.0.0}{(a^2+0^2)^2} & \frac{m.0^2}{a^2+0^2} - (\rho + \mu) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} r - h & 0 \\ 0 & -(\rho + \mu) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Dengan menggunakan persamaan $(\lambda I - J) = 0$, didapatkan

$$\begin{bmatrix} \lambda - r + h & 0 \\ 0 & \lambda + \rho + \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Sistem (4.10) mempunyai solusi nontrivial jika dan hanya jika $\det(\lambda I - J) = 0$, sehingga didapatkan

$$\begin{vmatrix} \lambda - r + h & 0 \\ 0 & \lambda + \rho + \mu \end{vmatrix} = (\lambda - r + h)(\lambda + \rho + \mu) = 0.$$

Diperoleh

$$\lambda_1 = r - h \text{ dan } \lambda_2 = -(\rho + \mu).$$

Jelas $\rho + \mu \neq 0$ sehingga $\lambda_2 < 0$.

Kasus $h < r$

Diperoleh $r - h > 0$ sehingga $\lambda_1 > 0$.

Oleh sebab $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$, maka titik ekuilibrium E_0 merupakan titik pelana yang tidak stabil (*unstable saddle point*).

Kasus $h > r$

Diperoleh $r - h < 0$ sehingga $\lambda_1 < 0$.

Oleh sebab $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$, maka titik ekuilibrium E_0 merupakan titik simpul yang stabil (*stable node point*).

Berikut dibangun teorema untuk kestabilan titik ekuilibrium E_0 .

Teorema 2

Misalkan $E_0(0,0)$ titik ekuilibrium Sistem (4.1), maka

1. $E_0(0,0)$ merupakan titik pelana yang tidak stabil (*unstable saddle point*) jika $h < r$, dan
2. $E_0(0,0)$ merupakan titik simpul yang stabil (*stable node point*) jika $h > r$.

Kestabilan Titik Ekuilibrium $E_1(W_1, \mathbf{0})$

Berdasarkan Teorema 1, titik E_1 eksis jika $h < r$. Berikut disubstitusikan E_1 ke Matriks (4.8).

Diperoleh

$$\begin{aligned}
 J(E_1) &= \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{2K(1-\frac{h}{r})}{K} \right) - h - \frac{2a^2mK(1-\frac{h}{r})^0}{\left(a^2 + \left(K(1-\frac{h}{r})\right)^2\right)^2} & -\frac{m\left(K(1-\frac{h}{r})\right)^2}{a^2 + \left(K(1-\frac{h}{r})\right)^2} \\ \frac{2a^2mK(1-\frac{h}{r})^0}{\left(a^2 + \left(K(1-\frac{h}{r})\right)^2\right)^2} & \frac{m\left(K(1-\frac{h}{r})\right)^2}{a^2 + \left(K(1-\frac{h}{r})\right)^2} - (\rho + \mu) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -r + h & \frac{-mK^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2}{a^2 + K^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2} \\ 0 & \frac{mK^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2}{a^2 + K^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2} - (\rho + \mu) \end{bmatrix}. \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan $(\lambda I - J) = 0$ didapatkan

$$\begin{bmatrix} \lambda + r - h & \frac{mK^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2}{a^2+K^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2} \\ 0 & \lambda + (\rho + \mu) - \frac{mK^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2}{a^2+K^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Sistem (4.12) mempunyai solusi nontrivial jika dan hanya jika $\det(\lambda I - J) = 0$, sehingga didapatkan

$$\begin{vmatrix} \lambda + r - h & \frac{mK^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2}{a^2+K^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2} \\ 0 & \lambda + (\rho + \mu) - \frac{mK^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2}{a^2+K^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2} \end{vmatrix} \\ = (\lambda + r - h) \left(\lambda - \frac{mK^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2}{a^2+K^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2} + (\rho + \mu) \right) = 0.$$

Diperoleh

$$\lambda_1 = -r + h \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{mK^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2}{a^2+K^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2} - (\rho + \mu).$$

Telah diasumsikan bahwa $h < r$ sehingga $\lambda_1 < 0$.

Kasus $a \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} < K \left(1 - \frac{h}{r}\right)$

Oleh sebab $a \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} > 0$ dan $K \left(1 - \frac{h}{r}\right) > 0$, maka

$$a^2 \frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)} < K^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2.$$

Kalikan kedua sisi dengan $m - (\rho + \mu)$, didapatkan

$$(\rho + \mu)a^2 < mK^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2 - (\rho + \mu)K^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2,$$

sehingga

$$mK^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2 - (\rho + \mu) \left[a^2 + K^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2 \right] > 0.$$

Jelas $a^2 + K^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2 > 0$, sehingga

$$\frac{mK^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2}{a^2 + K^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2} - (\rho + \mu) > 0.$$

Jadi diperoleh,

$$\lambda_2 = \frac{mK^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2}{a^2 + K^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2} - (\rho + \mu) > 0.$$

Oleh sebab $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 > 0$, maka dapat disimpulkan bahwa titik E_1 merupakan titik pelana yang tidak stabil (*unstable saddle point*).

Kasus $a \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} > K \left(1 - \frac{h}{r}\right)$

Oleh sebab $a \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} > 0$ dan $K \left(1 - \frac{h}{r}\right) > 0$, maka

$$a^2 \frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)} > K^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2.$$

Kalikan kedua sisi dengan $m - (\rho + \mu)$, didapatkan

$$(\rho + \mu)a^2 > mK^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2 - (\rho + \mu)K^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2,$$

sehingga

$$mK^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2 - (\rho + \mu) \left[a^2 + K^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2 \right] < 0.$$

Jelas $a^2 + K^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2 > 0$, sehingga

$$\frac{mK^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2}{a^2 + K^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2} - (\rho + \mu) < 0.$$

Jadi diperoleh,

$$\lambda_2 = \frac{mK^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2}{a^2+K^2\left(1-\frac{h}{r}\right)^2} - (\rho + \mu) < 0.$$

Oleh sebab $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$, maka dapat disimpulkan bahwa titik E_1 merupakan titik simpul yang stabil (*stable node point*).

Berikut dibangun teorema untuk kestabilan titik ekuilibrium E_1 .

Teorema 3

Misalkan $E_1(W_1, 0)$ titik ekuilibrium Sistem (4.1), maka

1. E_1 merupakan *unstable saddle point* jika $a\sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} < K\left(1-\frac{h}{r}\right)$, dan
2. E_1 merupakan *stable node point* jika $a\sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} > K\left(1-\frac{h}{r}\right)$.

Kestabilan Titik Ekuilibrium $E_2(W^*, P^*)$

Berdasarkan Teorema 1, titik ekuilibrium E_2 eksis jika $m > \rho + \mu > 0$ dan

$$r > h + \frac{ar}{K}\sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}.$$

Berikut disubstitusikan E_2 ke Matriks (4.8).

Diperoleh

$$\begin{aligned} J(E_2) &= \begin{bmatrix} r\left(1-\frac{2W^*}{K}\right) - h - \frac{2ma^2W^*P^*}{(a^2+W^{*2})^2} & -\frac{mW^{*2}}{a^2+W^{*2}} \\ \frac{2ma^2W^*P^*}{(a^2+W^{*2})^2} & \frac{mW^{*2}}{a^2+W^{*2}} - (\rho + \mu) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r - h - \frac{2ar}{K}\sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} - \left(2 - \frac{2(\rho+\mu)}{m}\right)\left(r - h - \frac{ar}{K}\sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}\right) & -(\rho + \mu) \\ \left(2 - \frac{2(\rho+\mu)}{m}\right)\left(r - h - \frac{ar}{K}\sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}\right) & (\rho + \mu) - (\rho + \mu) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -r + h + \frac{2(\rho+\mu)}{m}\left(r - h - \frac{ar}{K}\sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}\right) & -(\rho + \mu) \\ 2\left(1 - \frac{(\rho+\mu)}{m}\right)\left(r - h - \frac{ar}{K}\sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}\right) & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Dengan menggunakan persamaan $(\lambda I - J) = 0$ didapatkan

$$\begin{bmatrix} \lambda - \left(-r + h + \frac{2(\rho+\mu)}{m} \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \right) \right) & (\rho + \mu) \\ -2 \left(1 - \frac{(\rho+\mu)}{m} \right) \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \right) & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Sistem (4.14) mempunyai solusi nontrivial jika dan hanya jika $\det(\lambda I - J) = 0$, sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \lambda - \left(-r + h + \frac{2(\rho+\mu)}{m} \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \right) \right) & (\rho + \mu) \\ -2 \left(1 - \frac{(\rho+\mu)}{m} \right) \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \right) & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - \lambda \left[-r + h + \frac{2(\rho+\mu)}{m} \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \right) \right] \\ & \quad + 2(\rho + \mu) \left(1 - \frac{(\rho+\mu)}{m} \right) \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 - 4\delta} \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\tau - \frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 - 4\delta}$$

dengan $\tau = \text{tr} J(E_2) = -r + h + \frac{2(\rho+\mu)}{m} \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \right)$ dan

$$\delta = \det J(E_2) = 2(\rho + \mu) \left(1 - \frac{(\rho+\mu)}{m} \right) \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \right).$$

Ditunjukkan $\delta > 0$

Telah diasumsikan $m > \rho + \mu > 0$ sehingga diperoleh

$$2(\rho + \mu) > 0$$

dan

$$1 - \frac{(\rho+\mu)}{m} > 0.$$

Telah diasumsikan $r > h + \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}$ sehingga diperoleh

$$r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} > 0.$$

Jadi, $2(\rho + \mu) \left(1 - \frac{(\rho+\mu)}{m}\right) \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}\right) > 0$ sehingga $\delta > 0$.

Diperiksa Tanda τ dan $\tau^2 - 4\delta$

Jelas

$$\begin{aligned} \tau &= -r + h + \frac{2(\rho+\mu)}{m} \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}\right) \\ &= \left(-1 + \frac{2(\rho+\mu)}{m}\right) (r - h) - \frac{2(\rho+\mu)}{m} \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}. \end{aligned}$$

Telah diasumsikan $m > \rho + \mu > 0$.

Kasus $m > 2(\rho + \mu)$ atau $m < 2(\rho + \mu)$ dan $h > r \left(1 - \frac{2a(\rho+\mu)}{K[2(\rho+\mu)-m]} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}\right)$

1. Diperiksa tanda τ

a. Dipunyai $m > 2(\rho + \mu)$ sehingga diperoleh $-1 + \frac{2(\rho+\mu)}{m} < 0$.

Oleh sebab $h < r$ maka $\left(-1 + \frac{2(\rho+\mu)}{m}\right) (r - h) < 0$.

Jelas $\frac{2(\rho+\mu)}{m} \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} > 0$.

Diperoleh, $\left(-1 + \frac{2(\rho+\mu)}{m}\right) (r - h) - \frac{2(\rho+\mu)}{m} \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} < 0$

sehingga $\tau < 0$.

b. Dipunyai $m < 2(\rho + \mu)$ dan $h > r \left(1 - \frac{2a(\rho+\mu)}{K[2(\rho+\mu)-m]} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}\right)$

Jelas $h > r \left(1 - \frac{2a(\rho+\mu)}{K[2(\rho+\mu)-m]} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}\right)$, maka

$$-1 + \frac{h}{r} > -\frac{2a(\rho+\mu)}{K[2(\rho+\mu)-m]} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}.$$

Oleh sebab $m < 2(\rho + \mu)$, maka $2(\rho + \mu) - m > 0$ sehingga diperoleh

$$\left(-1 + \frac{2(\rho+\mu)}{m}\right)(r-h) < \frac{2(\rho+\mu)}{m} \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}.$$

$$\text{Jadi, } \left(-1 + \frac{2(\rho+\mu)}{m}\right)(r-h) - \frac{2(\rho+\mu)}{m} \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} < 0$$

sehingga $\tau < 0$.

2. Diperiksa tanda $\tau^2 - 4\delta$ untuk $\tau < 0$

Misalkan dipilih $r - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} - (\rho + \mu) = h$, dengan $0 \leq h < r$.

$$\text{a. Untuk } r < \frac{K}{a} (m - (\rho + \mu)) \left(-1 + \frac{2(\rho+\mu)}{m} + 2\sqrt{2\left(1 - \frac{(\rho+\mu)}{m}\right)}\right)$$

diperoleh

$$-\frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} - (\rho + \mu) + \frac{2(\rho+\mu)^2}{m} + 2(\rho + \mu) \sqrt{2\left(1 - \frac{(\rho+\mu)}{m}\right)} > 0$$

sehingga

$$\begin{aligned} & \left(-r + \left[r - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} - (\rho + \mu)\right]\right) \\ & + \frac{2(\rho+\mu)}{m} \left(r - \left[r - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} - (\rho + \mu)\right] - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}\right) \\ & + 2 \sqrt{2(\rho + \mu) \left(1 - \frac{(\rho+\mu)}{m}\right)} \left(r - \left[r - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} - (\rho + \mu)\right] - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}\right) > 0. \end{aligned}$$

Disubstitusikan $r - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} - (\rho + \mu) = h$ sehingga didapatkan

$$(-r + h) + \frac{2(\rho + \mu)}{m} \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right) + 2 \sqrt{2(\rho + \mu) \left(1 - \frac{(\rho + \mu)}{m} \right) \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right)} > 0.$$

Diperoleh $\tau + 2\sqrt{\delta} > 0$.

Oleh sebab $\tau < 0$ dan $\delta > 0$ maka $\tau - 2\sqrt{\delta} < 0$ sehingga

$$\tau^2 - 4\delta = (\tau - 2\sqrt{\delta})(\tau + 2\sqrt{\delta}) < 0.$$

Pada kasus ini didapatkan $\tau < 0$ dan $\tau^2 - 4\delta < 0$ sehingga

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\tau + \left(\frac{1}{2}\sqrt{|\tau^2 - 4\delta|}\right)i \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\tau - \left(\frac{1}{2}\sqrt{|\tau^2 - 4\delta|}\right)i.$$

Diperoleh $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = \frac{1}{2}\tau < 0$.

Oleh sebab $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) < 0$, maka dapat disimpulkan bahwa titik E_2 merupakan titik spiral yang stabil (*stable spiral point*).

b. Untuk $r \geq \frac{K}{a}(m - (\rho + \mu)) \left(-1 + \frac{2(\rho + \mu)}{m} + 2\sqrt{2\left(1 - \frac{(\rho + \mu)}{m}\right)} \right)$

diperoleh

$$-\frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} - (\rho + \mu) + \frac{2(\rho + \mu)^2}{m} + 2(\rho + \mu) \sqrt{2\left(1 - \frac{(\rho + \mu)}{m}\right)} \leq 0$$

sehingga

$$\begin{aligned} & \left(-r + \left[r - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} - (\rho + \mu) \right] \right) \\ & + \frac{2(\rho + \mu)}{m} \left(r - \left[r - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} - (\rho + \mu) \right] - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right) \\ & + 2 \sqrt{2(\rho + \mu) \left(1 - \frac{(\rho + \mu)}{m} \right) \left(r - \left[r - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} - (\rho + \mu) \right] - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right)} \leq 0. \end{aligned}$$

Disubstitusikan $r - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} - (\rho + \mu) = h$ sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} & (-r + h) + \frac{2(\rho+\mu)}{m} \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \right) \\ & + 2 \sqrt{2(\rho + \mu) \left(1 - \frac{(\rho+\mu)}{m} \right) \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \right)} \leq 0. \end{aligned}$$

Diperoleh $\tau + 2\sqrt{\delta} \leq 0$.

Oleh sebab $\tau < 0$ dan $\delta > 0$ maka $\tau - 2\sqrt{\delta} < 0$ sehingga

$$\tau^2 - 4\delta = (\tau - 2\sqrt{\delta})(\tau + 2\sqrt{\delta}) \geq 0.$$

Pada kasus ini didapatkan $\tau < 0$ dan $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ sehingga

$$\tau < \sqrt{\tau^2 - 4\delta} < -\tau.$$

Diperoleh $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\delta}) < 0$ dan $\lambda_2 = \frac{1}{2}(\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\delta}) < 0$.

Oleh sebab $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$, maka dapat disimpulkan bahwa titik E_2 merupakan titik simpul yang stabil (*stable node point*).

Kasus $m < 2(\rho + \mu)$ dan $h < r \left(1 - \frac{2a(\rho+\mu)}{K[2(\rho+\mu)-m]} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \right)$

1. Diperiksa tanda τ

Dipunyai $h < r \left(1 - \frac{2a(\rho+\mu)}{K[2(\rho+\mu)-m]} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \right)$, maka

$$-1 + \frac{h}{r} < -\frac{2a(\rho+\mu)}{K[2(\rho+\mu)-m]} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}.$$

Oleh sebab $m < 2(\rho + \mu)$, maka $2(\rho + \mu) - m > 0$ sehingga diperoleh

$$\left(-1 + \frac{2(\rho+\mu)}{m} \right) (r - h) > \frac{2(\rho+\mu)}{m} \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}.$$

Jadi, $\left(-1 + \frac{2(\rho+\mu)}{m} \right) (r - h) - \frac{2(\rho+\mu)}{m} \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} > 0$ sehingga $\tau > 0$.

2. Diperiksa tanda $\tau^2 - 4\delta$ untuk $\tau > 0$

Misalkan dipilih $r - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} - (\rho + \mu) = h$, dengan $0 \leq h < r$.

a. Untuk $r > \frac{K}{a} (m - (\rho + \mu)) \left(-1 + \frac{2(\rho+\mu)}{m} - 2\sqrt{2 \left(1 - \frac{(\rho+\mu)}{m} \right)} \right)$

diperoleh

$$-\frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} - (\rho + \mu) + \frac{2(\rho+\mu)^2}{m} - 2(\rho + \mu) \sqrt{2 \left(1 - \frac{(\rho+\mu)}{m} \right)} > 0$$

sehingga

$$\begin{aligned} & \left(-r + \left[r - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} - (\rho + \mu) \right] \right) \\ & + \frac{2(\rho+\mu)}{m} \left(r - \left[r - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} - (\rho + \mu) \right] - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \right) \\ & - 2 \sqrt{2(\rho + \mu) \left(1 - \frac{(\rho+\mu)}{m} \right) \left(r - \left[r - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} - (\rho + \mu) \right] - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \right)} < 0. \end{aligned}$$

Disubstitusikan $r - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} - (\rho + \mu) = h$ sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} & (-r + h) + \frac{2(\rho+\mu)}{m} \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \right) \\ & - 2 \sqrt{2(\rho + \mu) \left(1 - \frac{(\rho+\mu)}{m} \right) \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \right)} < 0. \end{aligned}$$

Diperoleh $\tau - 2\sqrt{\delta} < 0$.

Oleh sebab $\tau > 0$ dan $\delta > 0$ maka $\tau + 2\sqrt{\delta} > 0$ sehingga

$$\tau^2 - 4\delta = (\tau - 2\sqrt{\delta})(\tau + 2\sqrt{\delta}) < 0.$$

Pada kasus ini didapatkan $\tau > 0$ dan $\tau^2 - 4\delta < 0$ sehingga

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\tau + \left(\frac{1}{2}\sqrt{|\tau^2 - 4\delta|} \right) i \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\tau - \left(\frac{1}{2}\sqrt{|\tau^2 - 4\delta|} \right) i.$$

Diperoleh $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = \frac{1}{2}\tau > 0$.

Oleh sebab $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) > 0$, maka dapat disimpulkan bahwa titik E_2 merupakan titik spiral yang tidak stabil (*unstable spiral point*).

b. Untuk $r \leq \frac{K}{a}(m - (\rho + \mu)) \left(-1 + \frac{2(\rho + \mu)}{m} - 2\sqrt{2\left(1 - \frac{(\rho + \mu)}{m}\right)} \right)$

diperoleh

$$-\frac{ar}{K}\sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} - (\rho + \mu) + \frac{2(\rho + \mu)^2}{m} - 2(\rho + \mu)\sqrt{2\left(1 - \frac{(\rho + \mu)}{m}\right)} \geq 0$$

sehingga

$$\begin{aligned} & \left(-r + \left[r - \frac{ar}{K}\sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} - (\rho + \mu) \right] \right) \\ & + \frac{2(\rho + \mu)}{m} \left(r - \left[r - \frac{ar}{K}\sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} - (\rho + \mu) \right] - \frac{ar}{K}\sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right) \\ & - 2\sqrt{2(\rho + \mu)\left(1 - \frac{(\rho + \mu)}{m}\right)} \left(r - \left[r - \frac{ar}{K}\sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} - (\rho + \mu) \right] - \frac{ar}{K}\sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Disubstitusikan $r - \frac{ar}{K}\sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} - (\rho + \mu) = h$ sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} & (-r + h) + \frac{2(\rho + \mu)}{m} \left(r - h - \frac{ar}{K}\sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right) \\ & - 2\sqrt{2(\rho + \mu)\left(1 - \frac{(\rho + \mu)}{m}\right)} \left(r - h - \frac{ar}{K}\sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Diperoleh $\tau - 2\sqrt{\delta} \geq 0$.

Oleh sebab $\tau > 0$ dan $\delta > 0$ maka $\tau + 2\sqrt{\delta} > 0$ sehingga

$$\tau^2 - 4\delta = (\tau - 2\sqrt{\delta})(\tau + 2\sqrt{\delta}) \geq 0.$$

Pada kasus ini didapatkan $\tau > 0$ dan $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ sehingga

$$-\tau < \sqrt{\tau^2 - 4\delta} < \tau.$$

Diperoleh

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\delta}) > 0 \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\delta}) > 0.$$

Oleh sebab $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 > 0$, maka dapat disimpulkan bahwa titik E_2 merupakan titik simpul yang tidak stabil (*unstable node point*).

Kasus $m < 2(\rho + \mu)$ dan $h = r \left(1 - \frac{2a(\rho + \mu)}{K[2(\rho + \mu) - m]} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right)$

1. Diperiksa tanda τ

Dipunyai $h = r \left(1 - \frac{2a(\rho + \mu)}{K[2(\rho + \mu) - m]} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right)$, sehingga

$$-1 + \frac{h}{r} = -\frac{2a(\rho + \mu)}{K[2(\rho + \mu) - m]} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}}.$$

Diperoleh

$$\left(-1 + \frac{2(\rho + \mu)}{m} \right) (r - h) = \frac{2(\rho + \mu)}{m} \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}}.$$

Jadi, $\left(-1 + \frac{2(\rho + \mu)}{m} \right) (r - h) - \frac{2(\rho + \mu)}{m} \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} = 0$ sehingga $\tau = 0$.

2. Diperiksa tanda $\tau^2 - 4\delta$ untuk $\tau = 0$

Jelas

$$\tau^2 - 4\delta = -4\delta < 0.$$

Diperoleh

$$\sqrt{\tau^2 - 4\delta} = \sqrt{-4\delta} = \pm i2\sqrt{\delta},$$

sehingga nilai-nilai eigennya adalah

$$\lambda_1 = i\sqrt{\delta} \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\delta}.$$

Oleh sebab λ_1 dan λ_2 merupakan imajiner murni, maka dapat disimpulkan bahwa titik E_2 merupakan titik pusat (*center point*).

Berikut dibangun teorema untuk kestabilan titik ekulibrium E_2 .

Teorema 4

Diberikan $E_2(W^*, P^*)$ titik ekulibrium Sistem (4.1),

1. Jika $m > 2(\rho + \mu)$ atau $m < 2(\rho + \mu)$ dan $h > r \left(1 - \frac{2a(\rho + \mu)}{K[2(\rho + \mu) - m]} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right)$, maka titik E_2 *stable spiral point* atau *stable node point*,
2. Jika $m < 2(\rho + \mu)$ dan $h < r \left(1 - \frac{2a(\rho + \mu)}{K[2(\rho + \mu) - m]} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right)$, maka titik E_2 *unstable spiral point* atau *unstable node point*, serta
3. Jika $m < 2(\rho + \mu)$ dan $h = r \left(1 - \frac{2a(\rho + \mu)}{K[2(\rho + \mu) - m]} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right)$ maka titik E_2 *center point*.

4.1.4 Simulasi Numerik

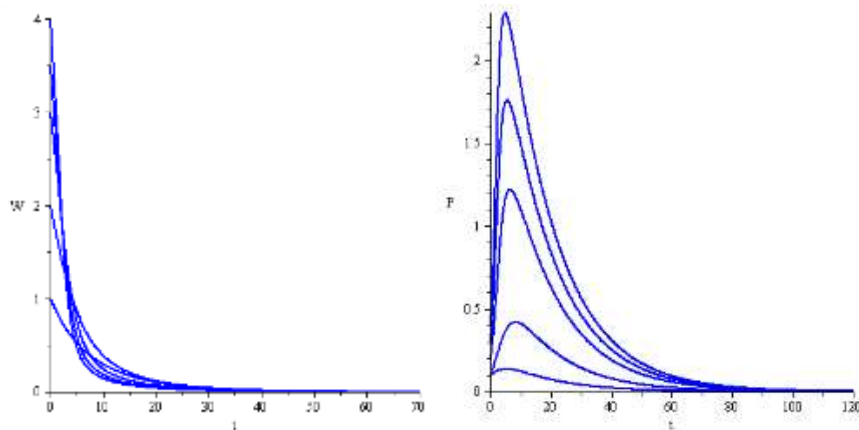
Simulasi numerik model *predator-prey* dilakukan dengan menggunakan program Maple 12. Parameter yang digunakan dalam simulasi numerik disajikan pada Tabel 4.1 yang terbagi dalam tujuh kasus yang berbeda.

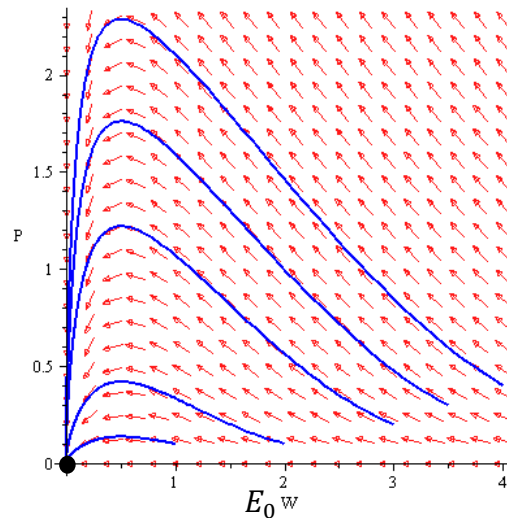
Tabel 4.1 Parameter Simulasi Numerik

Kasus	r	h	K	a	m	ρ	μ	Kestabilan
1	0,1	0,2	10	2	1	0,02	0,04	E_0 stable node
2	0,118	0,117	70	2	0,061	0,02	0,01	E_0 saddle E_1 stable node
3	0,118	0,038125	3	2	1	0,02	0,04	E_0 dan E_1 saddle E_2 stable spiral
4	0,11	0,10307	2	2	1	0,001	0,001	E_0 dan E_1 saddle E_2 stable node
5	0,1	0,036501	70	2	0,1	0,04	0,02	E_0 dan E_1 saddle E_2 unstable spiral
6	0,08	0,05489	70	1	0,021	0,01	0,01	E_0 dan E_1 saddle E_2 unstable node
7	0,1	0,08655	70	1	0,021	0,01	0,01	E_0 dan E_1 saddle E_2 center

Kasus 1: $h > r$

Pada kasus 1, titik ekuilibrium yang eksis hanya titik E_0 . Hasil simulasi numerik kasus 1 ditunjukkan pada Gambar 4.1 dan Gambar 4.2 dengan *input* dan *output* simulasi selengkapnya tersaji pada Lampiran 1.

**Gambar 4.1.** Bidang Solusi Kasus 1: $W \rightarrow t$ (kiri) dan $P \rightarrow t$ (kanan)



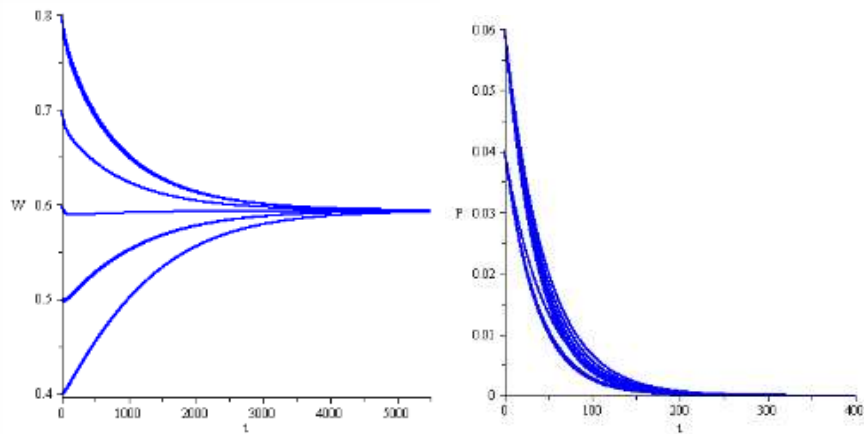
Gambar 4.2. Trayektori Kasus 1

Gambar 4.1 memperlihatkan populasi eceng gondok mengalami penurunan hingga mendekati kepunahan, sedangkan populasi ikan *Grass carp*, pada awalnya mengalami peningkatan, namun kemudian mengalami penurunan hingga mendekati kepunahan. Hal ini disebabkan laju pemanenan eceng gondok lebih dari laju pertumbuhan eceng gondok, sehingga populasi eceng gondok menurun. Akibatnya, populasi ikan *Grass carp* ikut mengalami penurunan. Selain itu, tingkat kejenuhan ikan *Grass carp* yang tinggi dalam mengkonsumsi eceng gondok turut mempengaruhi penurunan populasi ikan *Grass carp*.

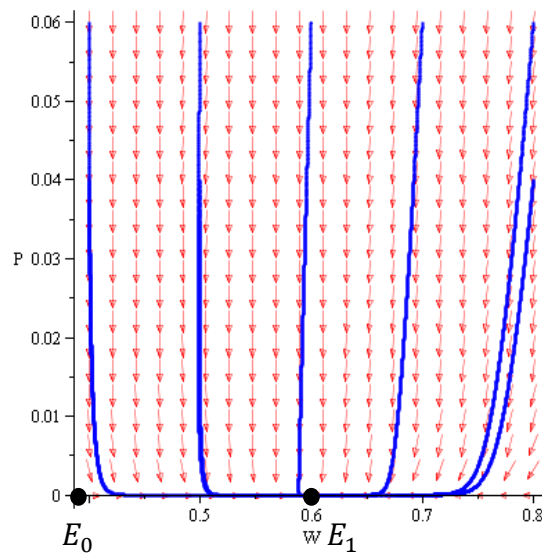
Pada Gambar 4.2, terlihat semua trayektori bergerak mendekati titik ekuilibrium E_0 dari berbagai arah sehingga titik E_0 *stable node point*. Jadi, pada kasus ini akan terjadi kepunahan kedua populasi.

Kasus 2: $h < r$ dan $a \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} > K \left(1 - \frac{h}{r}\right)$

Pada kasus 2, titik ekuilibrium yang eksis adalah E_0 dan E_1 . Hasil simulasi numerik untuk kasus 2 ditunjukkan pada Gambar 4.3 dan Gambar 4.4 dengan *input* dan *output* simulasi selengkapnya tersaji pada Lampiran 2.



Gambar 4.3. Bidang Solusi Kasus 2: $W \rightarrow t$ (kiri) dan $P \rightarrow t$ (kanan)



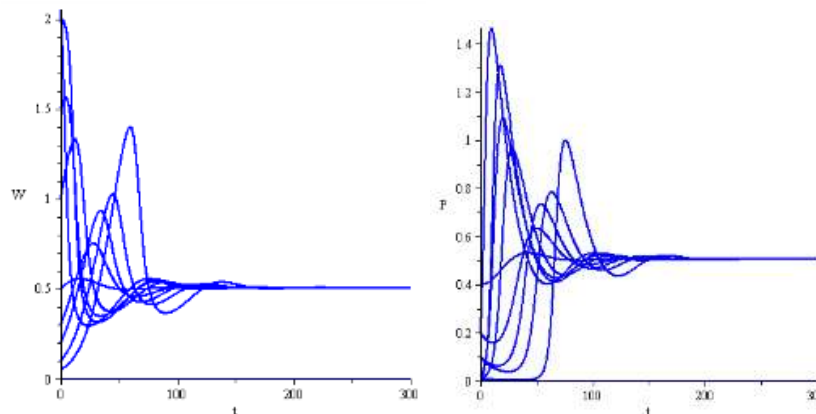
Gambar 4.4. Trayektori Kasus 2

Gambar 4.3 memperlihatkan bahwa populasi ikan *Grass carp* mengalami penurunan hingga mendekati kepunahan. Hal ini disebabkan laju interaksi ikan *grass carp* dan eceng gondok tidak jauh berbeda dengan laju pemanenan dan kematian ikan *Grass carp*. Ditambah lagi, tingkat kejenuhan ikan *Grass carp* dalam mengonsumsi eceng gondok relatif tinggi. Di sisi lain, populasi eceng gondok mengalami peningkatan jika populasi awalnya rendah dan mengalami penurunan jika populasi awalnya tinggi, hingga mencapai kondisi di mana populasi cenderung konstan.

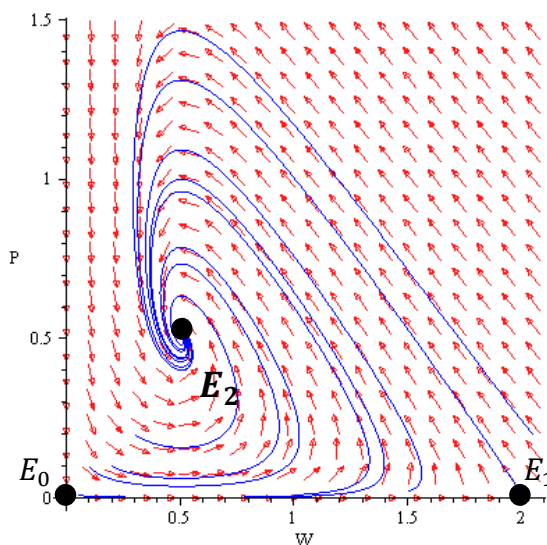
Pada Gambar 4.4, semua trayektori mendekati E_1 dari berbagai arah sehingga titik E_1 *stable node point*. Selain itu, trayektori mendekati E_0 pada sumbu P dan menjauhi E_0 pada sumbu W sehingga titik E_0 *unstable saddle point*. Jadi, akan terjadi kepunahan ikan *Grass carp* dan kelestarian eceng gondok.

Kasus 3: $m > 2(\rho + \mu)$, $r > h + \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}}$, dan $\tau^2 - 4\delta < 0$

Pada kasus 3, titik ekuilibrium yang eksis adalah E_0 , E_1 , dan E_2 . Hasil simulasi numerik untuk kasus 3 ditunjukkan pada Gambar 4.5 dan Gambar 4.6 dengan *input* dan *output* simulasi selengkapnya tersaji pada Lampiran 3.



Gambar 4.5. Bidang Solusi Kasus 3: $W \rightarrow t$ (kiri) dan $P \rightarrow t$ (kanan)



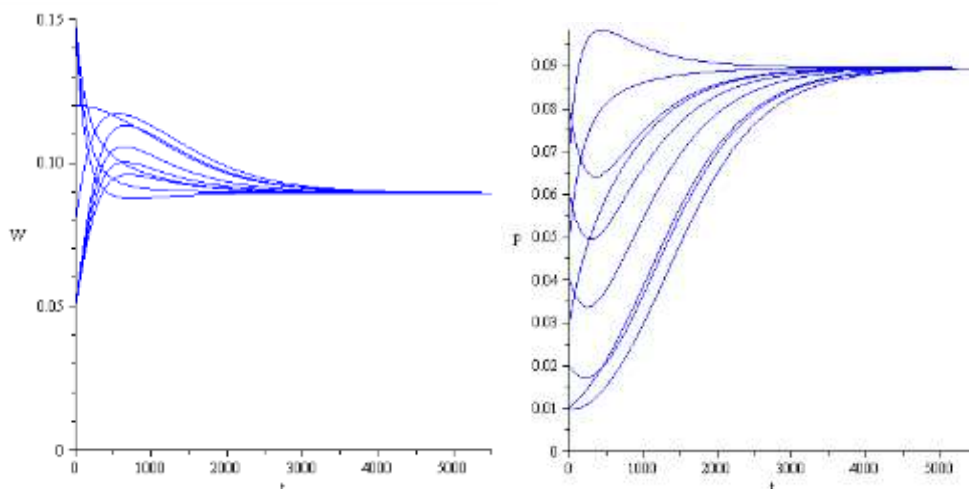
Gambar 4.6. Trayektori Kasus 3

Gambar 4.5 memperlihatkan bahwa populasi ikan *Grass carp* dan eceng gondok mengalami dinamika pertumbuhan seiring dengan peningkatan waktu. Dinamika ini akan berhenti ketika populasi ikan *Grass carp* dan eceng gondok mencapai kondisi yang konstan pada populasinya masing-masing.

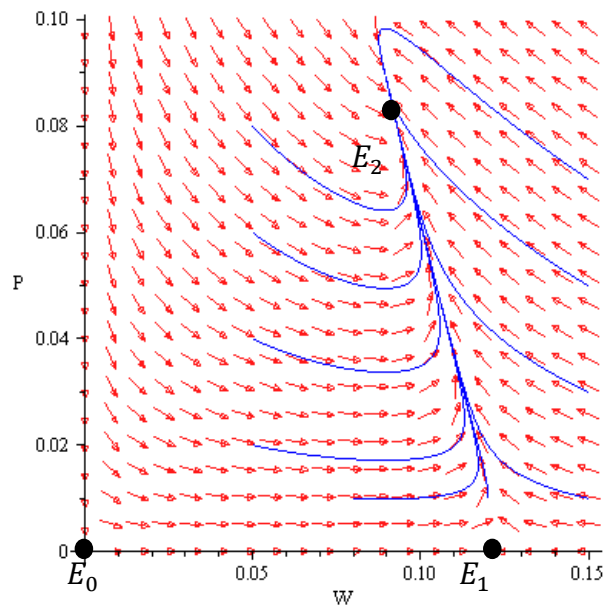
Pada Gambar 4.6, semua trayektori mendekati E_2 dari berbagai arah secara spiral sehingga titik E_2 *stable spiral point*. Selain itu, trayektori bergerak mendekati E_0 searah sumbu P dan menjauhi E_0 searah sumbu W , sedangkan pada E_1 trayektori mendekat sepanjang sumbu W dan menjauh pada sumbu lainnya sehingga titik E_0 dan E_1 *unstable saddle point*. Jadi, pada kasus ini akan terjadi kelestarian ikan *Grass carp* dan eceng gondok sehingga kedua populasi akan hidup berdampingan.

Kasus 4: $m > 2(\rho + \mu)$, $r > h + \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}}$, dan $\tau^2 - 4\delta \geq 0$

Pada kasus 4, titik ekuilibrium yang eksis adalah E_0 , E_1 , dan E_2 . Hasil simulasi numerik untuk kasus 4 ditunjukkan pada Gambar 4.7 dan Gambar 4.8 dengan *input* dan *output* simulasi selengkapnya tersaji pada Lampiran 4.



Gambar 4.7. Bidang Solusi Kasus 4: $W \rightarrow t$ (kiri) dan $P \rightarrow t$ (kanan)



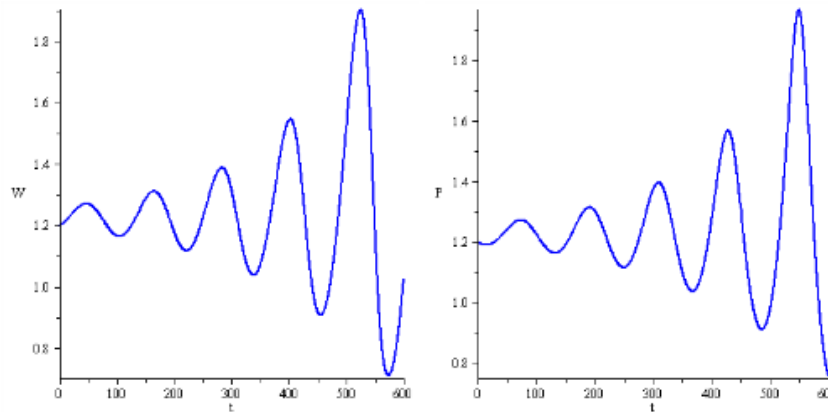
Gambar 4.8. Trayektori Kasus 4

Gambar 4.7 memperlihatkan bahwa pada beberapa kondisi awal yang diberikan, populasi ikan *Grass carp* dan eceng gondok mengalami peningkatan sebelum mengalami penurunan dan menuju kondisi stabil. Sebaliknya, terdapat juga kondisi awal yang mengakibatkan populasi ikan *Grass carp* dan eceng gondok mengalami penurunan sebelum mengalami peningkatan dan menuju kondisi stabil. jika populasi awalnya rendah dan mengalami penurunan jika populasi atau sebaliknya, sebelum mendekati populasi yang konstan.

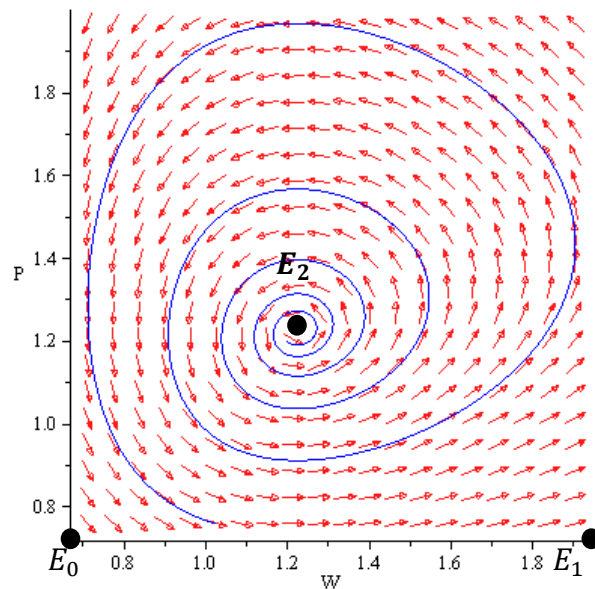
Pada Gambar 4.8, semua trayektori bergerak mendekati E_2 sehingga titik E_2 *stable node point*. Selain itu, trayektori bergerak mendekati E_0 searah sumbu P dan menjauhi E_0 searah sumbu W , sedangkan pada E_1 trayektori mendekat sepanjang sumbu W dan menjauh pada sumbu lainnya sehingga titik E_0 dan E_1 *unstable saddle point*. Jadi, pada kasus ini akan terjadi kelestarian populasi ikan *Grass carp* dan eceng gondok sehingga kedua populasi akan hidup berdampingan.

Kasus 5: $m < 2(\rho + \mu)$, $h < r \left(1 - \frac{2a(\rho + \mu)}{K[2(\rho + \mu) - m]} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}}\right)$, dan $\tau^2 - 4\delta < 0$

Pada kasus 5, titik ekuilibrium yang eksis adalah E_0 , E_1 , dan E_2 . Hasil simulasi numerik untuk kasus 5 ditunjukkan pada Gambar 4.9 dan Gambar 4.10 dengan *input* dan *output* simulasi selengkapnya tersaji pada Lampiran 5.



Gambar 4.9. Bidang Solusi Kasus 5: $W \rightarrow t$ (kiri) dan $P \rightarrow t$ (kanan)



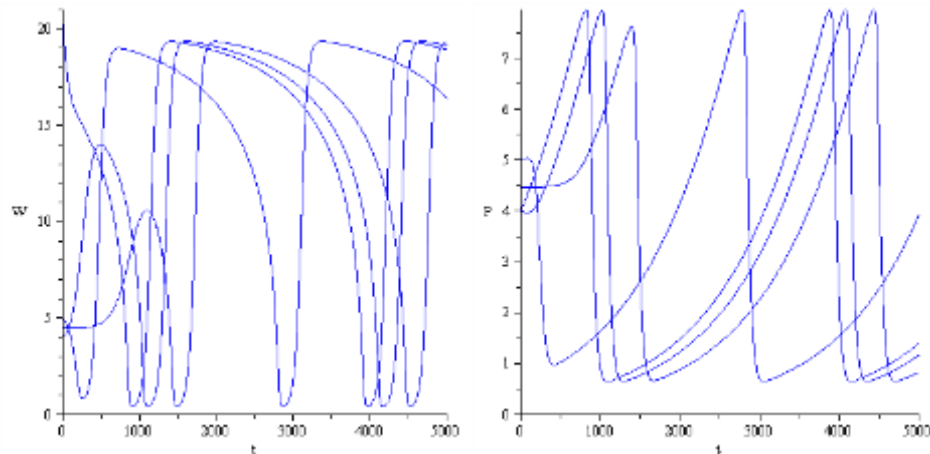
Gambar 4.10. Trayektori Kasus 5

Gambar 4.9 memperlihatkan bahwa dengan kondisi awal yang diberikan, populasi ceng gondok dan ikan *Grass carp* terus mengalami perubahan seiring bertambahnya waktu. Pada Gambar 4.10, semua trayektori menjauhi E_2 secara

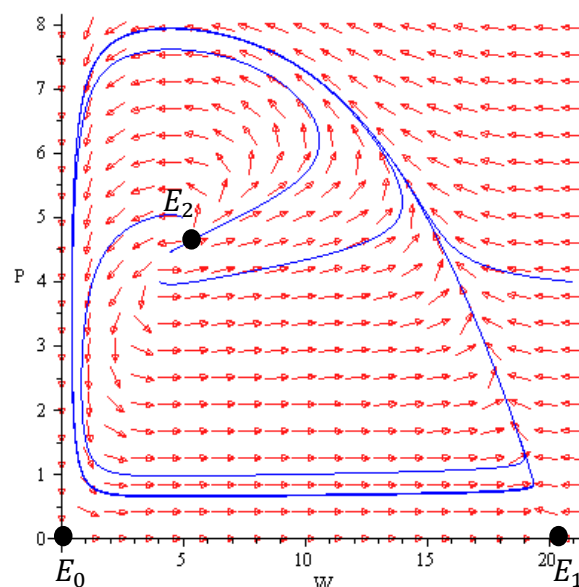
spiral sehingga titik E_2 *unstable spiral point*. Selain itu, trayektori di sekitar E_2 bergerak melewati E_0 dan E_1 sehingga titik E_0 dan E_1 *unstable saddle point*. Jadi, pada kasus ini tidak terjadi kestabilan populasi.

Kasus 6: $m < 2(\rho + \mu)$, $h < r \left(1 - \frac{2a(\rho + \mu)}{K[2(\rho + \mu) - m]} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}}\right)$, dan $\tau^2 - 4\delta \geq 0$

Pada kasus 6, titik ekuilibrium yang eksis adalah E_0 , E_1 , dan E_2 . Hasil simulasi numerik untuk kasus 4 ditunjukkan pada Gambar 4.11 dan Gambar 4.12 dengan *input* dan *output* simulasi selengkapnya tersaji pada Lampiran 6.



Gambar 4.11. Bidang Solusi Kasus 6: $W \rightarrow t$ (kiri) dan $P \rightarrow t$ (kanan)

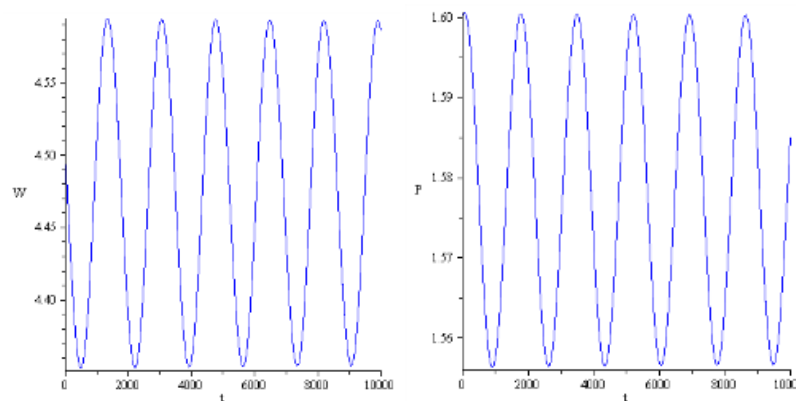


Gambar 4.12. Trayektori Kasus 6

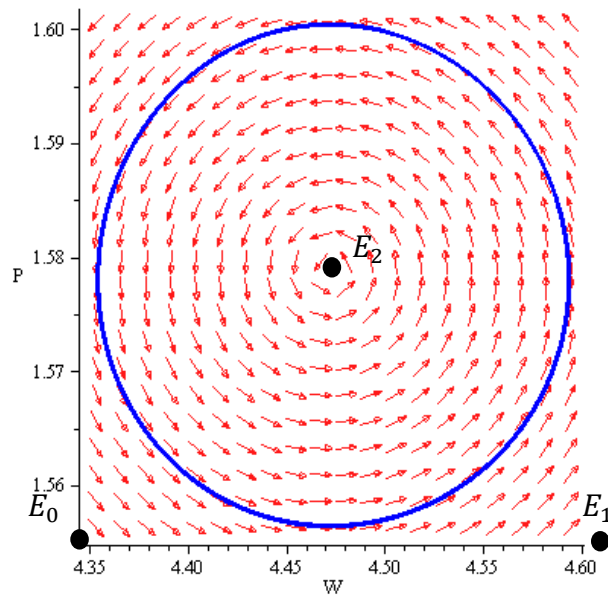
Gambar 4.11 memperlihatkan dengan kondisi awal yang diberikan, populasi ikan *Grass carp* dan eceng gondok mengalami dinamika yang cenderung mendekati stabil periodik seiring meningkatnya waktu. Pada Gambar 4.12, semua trayektori menjauhi E_2 ke berbagai arah sehingga titik E_2 *unstable node point*. Selain itu, trayektori mendekati E_0 sepanjang sumbu P dan menjauhi E_0 sepanjang sumbu W , serta mendekati E_1 sepanjang sumbu W dan menjauhi E_1 pada sumbu lainnya, sehingga titik E_0 dan E_1 *unstable saddle point*. Pada kasus ini, diindikasikan trayektori di sekitar E_2 membentuk *limit cycle*. Jadi, pada kasus ini tidak terjadi kestabilan populasi.

Kasus 7: $m < 2(\rho + \mu)$ dan $h = r \left(1 - \frac{2a(\rho + \mu)}{K[2(\rho + \mu) - m]} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right)$

Pada kasus 7, titik ekuilibrium yang eksis adalah E_0 , E_1 , dan E_2 . Hasil simulasi numerik untuk kasus 7 ditunjukkan pada Gambar 4.13 dan Gambar 4.14 dengan *input* dan *output* simulasi selengkapnya tersaji pada Lampiran 7.



Gambar 4.13. Bidang Solusi Kasus 7: $W \rightarrow t$ (kiri) dan $P \rightarrow t$ (kanan)



Gambar 4.14. Trayektori Kasus 7

Gambar 4.13 memperlihatkan bahwa dengan kondisi awal yang diberikan, populasi ikan *Grass carp* dan eceng gondok mengalami pertumbuhan dan penurunan populasi secara periodik. Sedangkan pada Gambar 4.14, semua trayektori mengelilingi titik E_2 secara tertutup sehingga titik E_2 *center point*. Selain itu, trayektori di sekitar E_2 bergerak melewati E_0 dan E_1 sehingga titik E_0 dan E_1 *unstable saddle point*. Jika diberikan kondisi awal yang lebih besar, maka trayektori yang dihasilkan akan mendekati loop yang mengelilingi titik E_2 , sehingga pada kasus ini diindikasikan trayektori membentuk *limit cycle*. Jadi, pada kasus ini kedua populasi akan hidup berdampingan dengan perubahan yang terus terjadi pada kedua populasi secara periodik.

4.2 Pembahasan

Berdasarkan model *predator-prey* yang telah dibangun pada Sistem (4.1), dapat diinterpretasikan bahwa populasi eceng gondok, W , akan meningkat hingga mencapai kapasitas maksimal dari daya dukung lingkungan, K . Populasi eceng gondok akan menurun ketika proses pengontrolan dengan menggunakan ikan *Grass carp* dan pemanenan dilakukan. Efek pengurangan populasi eceng gondok digambarkan melalui persamaan, $hW + \frac{mW^2P}{a^2+W^2}$. Di sisi lain, populasi ikan *Grass carp*, P , akan meningkat pada laju maksimal $\frac{mW^2}{a^2+W^2} - (\rho + \mu)$ ketika terdapat banyak eceng gondok, dan akan menurun pada laju maksimal $\rho + \mu$ ketika terdapat sedikit eceng gondok dan pemanenan ikan *Grass carp* yang signifikan.

Kondisi kesetimbangan yang dapat dicapai yakni, kesetimbangan trivial (kepunahan kedua populasi), kesetimbangan kepunahan ikan *Grass carp*, dan kesetimbangan interior (kelestarian kedua populasi). Di mana kedua populasi akan menuju titik kesetimbangan jika titik tersebut bersifat stabil.

1. Titik Kesetimbangan Trivial (Kepunahan Kedua Populasi)

Kesetimbangan ini akan tercapai jika laju pemanenan eceng gondok yang dilakukan lebih besar dari laju pertumbuhan eceng gondok ($h > r$). Di sini diasumsikan laju pemanenan dan laju pertumbuhan eceng gondok konstan. Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan pada kasus 1, model ini memprediksi bahwa populasi eceng gondok akan mencapai kesetimbangantrivial dalam waktu sekitar 70 hari (Gambar 4.1a), sedangkan populasi ikan *Grass carp* akan mencapai kesetimbangan trivial dalam waktu sekitar 120 hari (Gambar 4.1b).

2. Titik Keseimbangan Kepunahan Ikan *Grass carp*

Keseimbangan ini akan tercapai jika laju pemanenan eceng gondok kurang dari laju pertumbuhan eceng gondok ($h < r$) dan parameter-parameter yang berlaku memenuhi pertidaksamaan $a \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} > K \left(1 - \frac{h}{r}\right)$, dengan ρ dan μ parameter ikan *Grass carp*, m dan a parameter interaksi, serta K , r , dan h parameter eceng gondok. Di sini diasumsikan semua parameter konstan dan bernilai positif selain ρ yang dapat bernilai nol. Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan pada kasus 2, model ini memprediksi bahwa populasi eceng gondok akan mencapai kesetimbangan ini dalam waktu sekitar 5.500 hari (Gambar 4.3a), sedangkan populasi ikan *Grass carp* akan mencapai kesetimbangan ini dalam waktu sekitar 400 hari (Gambar 4.3b).

Kepadatan populasi eceng gondok pada kesetimbangan ini dipengaruhi oleh laju pertumbuhan, laju pemanenan, dan daya dukung lingkungan eceng gondok. Semakin tinggi daya dukung lingkungan, kepadatan populasi eceng gondok akan semakin besar. Dan semakin tinggi laju pemanenan, kepadatan populasi eceng gondok akan semakin berkurang.

3. Titik Keseimbangan Interior (Kelestarian Kedua Populasi)

Keseimbangan ini tercapai jika laju pertumbuhan eceng gondok lebih dari laju pemanenan eceng gondok ditambah $\frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}}$ dan memenuhi salah satu dari dua kondisi berikut, yakni laju interaksi kedua populasi lebih dari dua kali laju pengurangan ikan *Grass carp* ($m > 2\rho + 2\mu$) atau laju interaksi kedua populasi kurang dari dua kali laju pengurangan ikan *Grass carp* ($m < 2\rho + 2\mu$)

dengan laju pertumbuhan eceng gondok kurang dari laju pemanenan eceng gondok ditambah $\frac{2a(\rho+\mu)}{K[2(\rho+\mu)-m]} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}$. Berdasarkan simulasi pada kasus 3 dan 4, model ini memprediksi populasi eceng gondok dan ikan *Grass carp* mencapai kesetimbangan sekitar 300 hari (Gambar 4.5) dan 5.500 hari (Gambar 4.7).

Kepadatan kedua populasi pada kesetimbangan ini dipengaruhi oleh laju $m - (\rho + \mu)$. Pada laju minimum $m - (\rho + \mu)$, kepadatan populasi eceng gondok akan meningkat sedangkan kepadatan populasi ikan *Grass carp* akan menurun, sebaliknya, pada laju maksimum $m - (\rho + \mu)$, kepadatan populasi eceng gondok akan menurun sedangkan kepadatan populasi ikan *Grass carp* akan meningkat.

Dari ketiga kondisi kesetimbangan yang dapat dicapai, kesetimbangan interior merupakan solusi yang paling efektif dalam menanggulangi populasi eceng gondok yang setiap saat dapat kembali melakukan invasi. Keberadaan ikan *Grass carp* akan selalu membatasi populasi eceng gondok sehingga pertumbuhan eceng gondok yang terlampaui besar dapat dihindari.

BAB 5

PENUTUP

5.1. Simpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan, berikut simpulan yang diperoleh.

1. Model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan, yakni

$$\frac{dW}{dt} = rW \left(1 - \frac{W}{K}\right) - hW - \frac{mW^2}{a^2+W^2} P,$$
$$\frac{dP}{dt} = P \left(\frac{mW^2}{a^2+W^2} - (\rho + \mu) \right),$$

dengan $W(0) \geq 0, P(0) \geq 0$.

2. Titik ekuilibrium yang eksis yakni E_0 untuk setiap kondisi, E_1 untuk $h < r$, dan E_2 untuk $m > \rho + \mu > 0$, dan $r > h + \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}$. Dengan demikian, titik kesetimbangan yang dapat dicapai yakni kepunahan kedua populasi, kepunahan ikan *Grass carp*, dan kelestarian kedua populasi.
3. Kestabilan titik ekuilibrium dalam sembilan kasus yang berbeda merupakan *unstable saddle point* (2), *stable spiral point* (1), *stable node point* (3), *unstable spiral point* (1), *unstable node point* (1), dan *center point* (1). Dengan demikian, terdapat empat kasus yang dapat mencapai titik kesetimbangan.

4. Simulasi numerik memberikan hasil yang sesuai dengan perhitungan analitik. Di mana simulasi yang dihasilkan memberikan prediksi dalam pengontrolan yang dilakukan.

5.2. Saran

Pada penelitian selanjutnya, dapat dilakukan analisis lebih lanjut untuk trayektori yang diindikasikan membentuk *limit cycle*. Kestabilan global dari titik ekuilibrium juga dapat dianalisis. Selain itu, agar sistem kontrol yang dilakukan berjalan dengan optimal, maka kesetimbangan bionomik perlu dianalisis dengan menggunakan parameter yang sesuai dengan kondisi di lapangan.

DAFTAR PUSTAKA

- Agarwal, M. & R. Pathak. 2012. Persistence and Optimal Harvesting of Prey-Predator Model with Holling Type III Functional Response. *International Journal of Engineering, Science and Technology*, 4(3): 78-96.
- Anton, H. 1987. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.
- Artha, R.Y., W.M. Kusumawinahyu, & M. Marjo. 2013. Model Pertumbuhan Populasi Predator-Prey Dengan Efek Allee dan Fungsi Respon Holling Tipe II. *Jurnal Mahasiswa Matematika*, 1(5).
- Babo, D., J. Sampekalo, & H. Pangkey. 2013. Pengaruh Beberapa Jenis Pakan Hijauan terhadap Pertumbuhan Ikan *Grass carp Stenopharyngodon Idella*. *Budidaya Perairan*, 1(3): 1-6.
- Barnes, B & G.R. Fulford. 2002. *Mathematical Modelling with Case Studies (a Differential Equation Approach Using Maple)*. London: Taylor & Francis.
- Boyce, W.E. & DiPrima, R.C. 2000. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: Department of Mathematical Sciences Rensselaer Polytechnic Institute.
- Buchanan, A.L. 2013. Damage by Neochetina Weevils (*Coleoptera: Curculionidae*) Induces Resistance in *Eichhornia Crassipes* (*Commelinales: Pontederiaceae*). *Florida Entomologist*, 96(2):458-462.
- Gopal, B. 1987. Water Hyacinth. *Elsevier*.
- Gutiérrez, E.L., E.F. Ruiz, E.G. Uribe, & J.M. Martínez. 2001. Biomass and Productivity of Water Hyacinth and their Application in Control Programs. *ACIAR Proceeding 102*.
- Hasan, S.H., D. Ranjan, & M. Talat. 2010. Water Hyacinth Biomass (WHB) for the Biosorption of Hexavalent Chromium: Optimization of Process Parameters. *BioResources*, 5(2): 563-575.
- Hunsicker, M.E., *et al.* 2011. Function Response and Scaling in Predator-Prey Interactions of Marine Fishes: Contemporary Issues and Emerging Concepts. *Ecology Letters*.
- Jeschke, J.M., M. Kopp, & R. Tollrian. 2002. Predator Functional Responses: Discriminating Between Handling and Digesting Prey. *Ecological Monographs*, 72(1): 95-112.

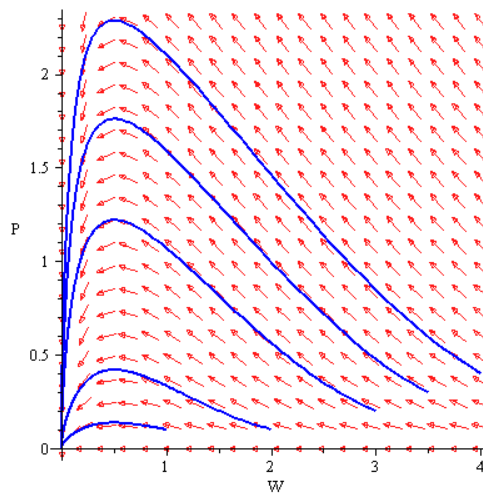
- Jiang, Q & J. Wang. 2013. Qualiitative Analysis of a Harvested Predator-Prey System with Holling Type III Functional Response. *Advances in Difference Equations a Springer Open Journal*: 249-258.
- Murray, G.P.D., R.A. Stillman, R.E. Gozlan, & J.R. Britton. 2013. Experimental Predictions of The Functional Response of a Freshwater Fish. *Ethology*, 119: 751–761.
- Odum, E.P. 1973. *Dasar-dasar Ekologi* (3rd ed.). Translite by Samingan, T. 1993. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.
- Olsder, G.J. 1994. *Mathematic System Theory*. The Netherlands: Delftore Uitgevers Maatscappij.
- Pasaribu, G. & Sahwita. 2006. *Konservasi dan Rehabilitasi Sumberdaya Hutan*. Padang.
- Penfound, W.T. & T.T. Earle. 1948. Biology of the Water Hyacinth. *Ecological Monographs*. 18: 447–472.
- Perko, L. 1991. *Differential Equation and Dynamical System*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Purnamasari, D., Faisal., & A.J. Noor. 2009. Kestabilan Sistem *Predator-Prey* Leslie. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, 3(2): 51-59.
- Ratnani, R.D., I. Hartati, & L. Kurniasari. 2011. Pemanfaatan Eceng Gondok (*Eichhornia crassipes*) untuk Menurunkan Kandungan COD (Chemical Oxygen Demond), pH, Bau, dan Warna pada Limbah Cair Tahu. *Momentum*, 7(1): 41-47.
- Rifa'i, M. & Subchan. 2015. Analisa Kestabilan dan Kendali Optimal pada Model Pemanenan Prey Predator dengan Fungsi Repon Tipe III. *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika*. Surakarta: Universitas Muhammadiyah Surakarta.
- Sahwalita. 2010. Prospek Pemanfaatan Eceng Gondok untuk Industri Kerajinan Kertas Seni di Kawasan Wisata Sungai Musi untuk Peningkatan Pendapatan Masyarakat. *Jurnal Pembangunan Manusia edisi 5*.
- Sapdi, D. Buchori, U. Kartosuwondo, S. Tjitrosemito, & B. Sahari. 2006. Persebaran Agens Hayati *Neochetina spp.* (Coleoptera: Curculionidae) di Jawa Barat dan DKI Jakarta. *Jurnal Entomologi Indonesia*, 3(1): 20-29.
- Soeprobowati, T.R. 2012. Mitigasi Danau Eutrofik: Studi Kasus Danau Rawapening. *Prosiding Seminar Nasional Limnologi IV*.

- Trisakti, B., N. Suwargana, & J.S. Cahyono. 2014. Pemanfaatan Data Penginderaan Jauh untuk Memantau Parameter Status Ekosistem Perairan Danau (Studi Kasus: Danau Rawa Pening). *Seminar Nasional Penginderaan Jauh*.
- Tucker, A. 1989. *A Unified Introduction to Linear Algebra. Models, Methods, and Theory*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Waluya, S.B. 2011. *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (2nd ed.). Semarang: Unnes Press.
- Wiggins, S. 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. New York: Springer-Verlag.
- Wibisono, R., B.H. Armadi, & B. Feriyanto. 2014. Eceng Gondok, Masalah menjadi Manfaat. *SNTMUT*, 978-602-70012-0-6.
- Wijayanti, P. & M. Kharis. 2015. Analisis Model Predator-Prey Dua Spesies dengan Fungsi Respon Holling Tipe III. *Unnes Journal of Mathematics*, 4(1).
- Wilson, J.R., M. Rees, N. Holst, M.B. Thomas, & G. Hill . 2001. Water Hyacinth Population Dynamics. *ACIAR Proceeding 102*.
- Wilson, J.R., N. Holst, & M. Rees. 2005. Determinants and Patterns of Population Growth in Water Hyacinth. *Aquatic Botany*, 81: 51–67.
- Zhang, X., R. Xu, & Q. Gan. 2011. Periodic Solution in a Delayed Predator-Prey Model with Holling Type III Functional Response and Harvesting Term. *World Journal of Modelling and Simulation*, 7(1): 70-80.

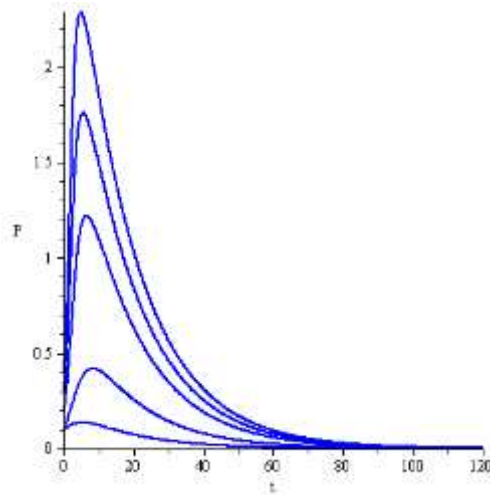
Lampiran

Lampiran 1. Input dan Output Simulasi Kasus 1

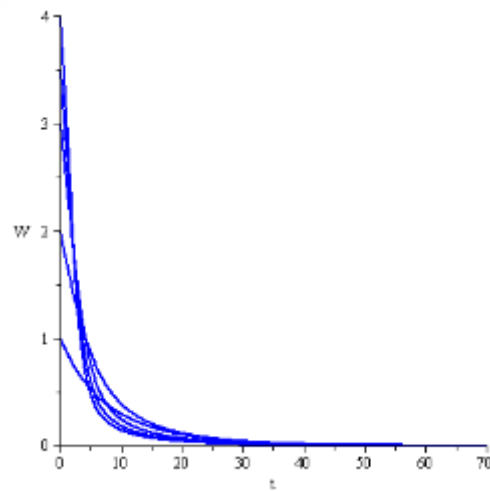
- > `restart : with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) :`
- > `r := 0.1 : K := 10.0 : h := 0.2 : m := 1 : a := 2 : u := 0.04 : p := 0.02 :`
- > `r - h;`
- > `solve` $\left(\left[r \cdot W \cdot \left(1 - \frac{W}{K} \right) - h \cdot W - \frac{m \cdot W \cdot W \cdot P}{a \cdot a + W \cdot W}, \frac{m \cdot W \cdot W \cdot P}{a \cdot a + W \cdot W} - u \cdot P - p \cdot P \right], [W, P] \right);$
 $[[W = 0., P = 0.], [W = -10., P = 0.], [W = 0.5052911526P =$
 $-0.884705112q, [W = -0.5052911526P = 0.799598729q]$
- > `de1 := diff(W(t), t) = r · W(t) · (1 - $\frac{W(t)}{K}$) - h · W(t) - $\frac{m \cdot W(t) \cdot W(t) \cdot P(t)}{a \cdot a + W(t) \cdot W(t)}$;`
 $de1 := \frac{d}{dt} W(t) = 0.1 W(t) (1 - 0.1000000000W(t)) - 0.2 W(t) - \frac{W(t)^2 P(t)}{4 + W(t)^2}$
- > `de2 := diff(P(t), t) = $\frac{m \cdot W(t) \cdot W(t) \cdot P(t)}{a \cdot a + W(t) \cdot W(t)}$ - u · P(t) - p · P(t);`
 $de2 := \frac{d}{dt} P(t) = \frac{W(t)^2 P(t)}{4 + W(t)^2} - 0.06 P(t)$
- > `inits := [0, 2, 0.1], [0, 3, 0.2], [0, 1, 0.1], [0, 3.5, 0.3], [0, 4, 0.4];`
 $inits := [0, 2, 0.1], [0, 3, 0.2], [0, 1, 0.1], [0, 3.5, 0.3], [0, 4, 0.4]$
- > `DEplot([de1, de2], [W, P], t = 0..120, [inits], scene = [W, P],
linecolour = blue, thickness = 2, stepsize = 0.1, arrows
= medium);`



- > `DEplot([de1, de2], [W, P], t = 0..120, [inits], scene = [t, P],
linecolour = blue, thickness = 2, stepsize = 0.1);`

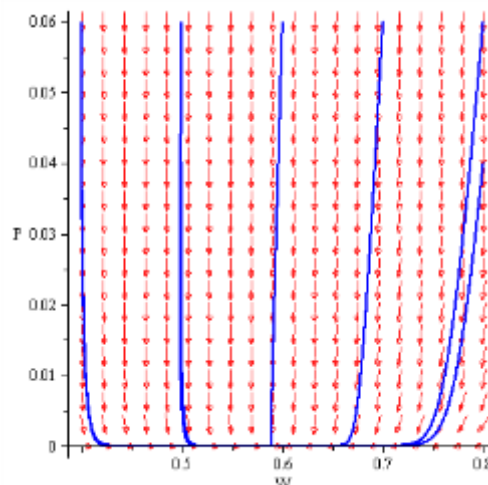


> *DEplot*([*de1*, *de2*], [*W*, *P*], *t* = 0..70, [*inits*], *scene* = [*t*, *W*],
linecolour = blue, *thickness* = 2, *stepsize* = 0.1);

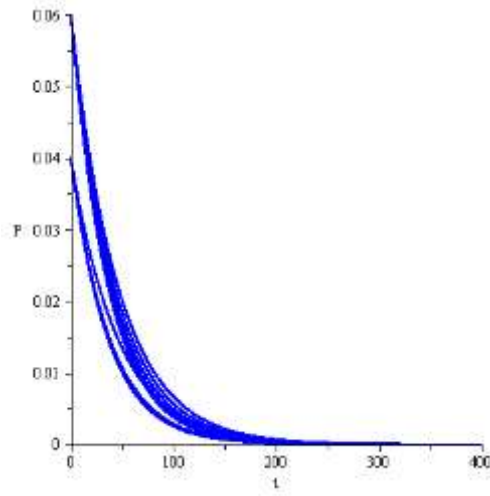


Lampiran 2. Input dan Output Simulasi Kasus 2

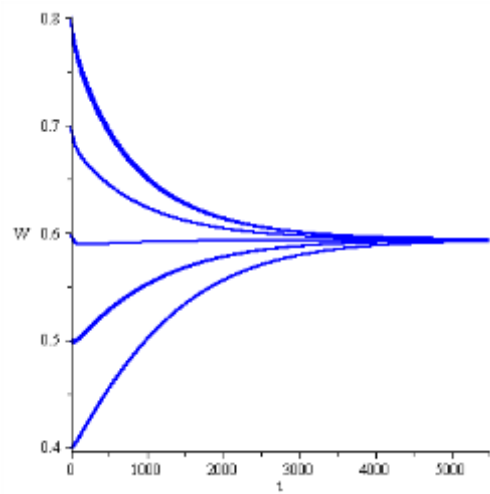
- > restart : with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) :
- > r := 0.118 : K := 70.0 : h := 0.117 : m := 0.061 : a := 2 : u := 0.01 : p := 0.02 :
- > solve($\left[r \cdot W \cdot \left(1 - \frac{W}{K} \right) - h \cdot W - \frac{m \cdot W \cdot W \cdot P}{a \cdot a + W \cdot W}, \frac{m \cdot W \cdot W \cdot P}{a \cdot a + W \cdot W} - u \cdot P - p \cdot P \right], [W, P]$);
- [[W = 0., P = 0.], [W = 0.5932203388, P = 0.], [W = 1.967477507, P = -0.1519289372], [W = -1.967477507, P = -0.2830941044]]
- > de1 := diff(W(t), t) = r · W(t) · $\left(1 - \frac{W(t)}{K} \right) - h \cdot W(t) - \frac{m \cdot W(t) \cdot W(t) \cdot P(t)}{a \cdot a + W(t) \cdot W(t)}$;
- $de1 := \frac{d}{dt} W(t) = 0.118 W(t) (1 - 0.01428571429 W(t)) - 0.117 W(t) - \frac{0.061 W(t)^2 P(t)}{4 + W(t)^2}$
- > de2 := diff(P(t), t) = $\frac{m \cdot W(t) \cdot W(t) \cdot P(t)}{a \cdot a + W(t) \cdot W(t)} - u \cdot P(t) - p \cdot P(t)$;
- $de2 := \frac{d}{dt} P(t) = \frac{0.061 W(t)^2 P(t)}{4 + W(t)^2} - 0.03 P(t)$
- > inits5 := [0, 0.8, 0.04], [0, 0.8, 0.06], [0, 0.6, 0.06], [0, 0.7, 0.06], [0, 0.4, 0.04], [0, 0.5, 0.06], [0, 0.4, 0.06], [0, 0.5, 0.04];
- inits5 := [0, 0.8, 0.04], [0, 0.8, 0.06], [0, 0.6, 0.06], [0, 0.7, 0.06], [0, 0.4, 0.04], [0, 0.5, 0.06], [0, 0.4, 0.06], [0, 0.5, 0.04]
- > DEplot([de1, de2], [W, P], t = 0 .. 5500, [inits5], scene = [W, P], linecolour = blue, thickness = 2, stepsize = 0.1, arrows = medium);



- > DEplot([de1, de2], [W, P], t = 0 .. 400, [inits5], scene = [t, P], linecolour = blue, thickness = 2, stepsize = 0.1, arrows = medium);

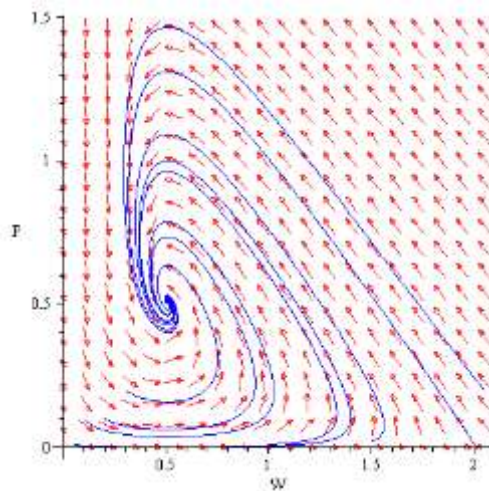


> `DEplot([de1, de2], [W, P], t = 0..5500, [inits5], scene = [t, W],
 linecolour = blue, thickness = 2, stepsize = 0.1, arrows
 = medium);`

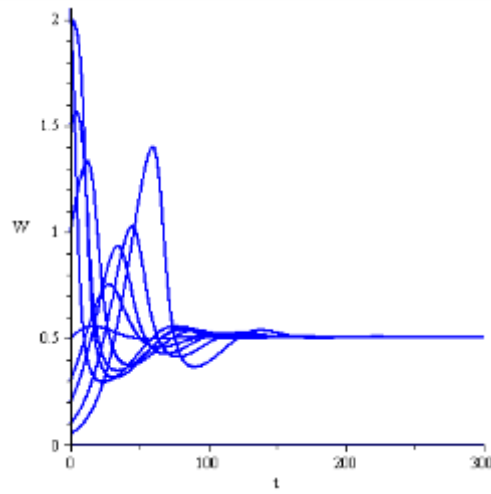


Lampiran 3. Input dan Output Simulasi Kasus 3

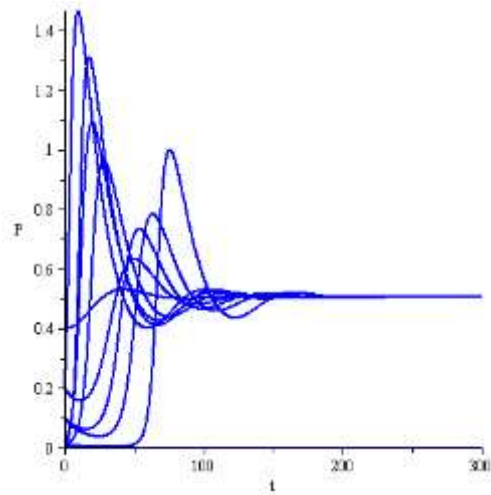
- > restart : with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) :
- > r := 0.118 : K := 3.0 : m := 1 : a := 2 : u := 0.04 : p := 0.02 :
- > $r - \frac{1}{a} \left(K \cdot \text{sqrt}(m \cdot (p + u) - (p + u) \cdot (p + u)) \cdot \left(2 \cdot \text{sqrt} \left(2 - \frac{2 \cdot (p + u)}{m} \right) + \frac{2 \cdot (p + u)}{m} - 1 \right) \right);$
 -0.545394024
- > $h := r - \frac{a \cdot r \cdot \text{sqrt} \left(\frac{(p + u)}{m - p - u} \right)}{K} - p - u;$
 $h := 0.0381252146$
- > solve $\left(\left[r \cdot W \cdot \left(1 - \frac{W}{K} \right) - h \cdot W - \frac{m \cdot W \cdot W \cdot P}{a \cdot a + W \cdot W}, \frac{m \cdot W \cdot W \cdot P}{a \cdot a + W \cdot W} - u \cdot P - p \cdot P \right], [W, P] \right);$
 $[[W = 0., P = 0.], [W = 2.030714882, P = 0.], [W = 0.5052911526, P = 0.5052911527], [W = -0.5052911526, P = -0.8400429257]]$
- > de1 := diff(W(t), t) = $r \cdot W(t) \cdot \left(1 - \frac{W(t)}{K} \right) - h \cdot W(t) - \frac{m \cdot W(t) \cdot W(t) \cdot P(t)}{a \cdot a + W(t) \cdot W(t)}$;
 $de1 := \frac{d}{dt} W(t) = 0.118 W(t) (1 - 0.3333333333 W(t)) - 0.03812521466 W(t) - \frac{W(t)^2 P(t)}{4 + W(t)^2}$
- > de2 := diff(P(t), t) = $\frac{m \cdot W(t) \cdot W(t) \cdot P(t)}{a \cdot a + W(t) \cdot W(t)} - u \cdot P(t) - p \cdot P(t)$;
 $de2 := \frac{d}{dt} P(t) = \frac{W(t)^2 P(t)}{4 + W(t)^2} - 0.06 P(t)$
- > inits := [0, 2.05, 0.2], [0, 2, 0.01], [0, 1, 0.01], [0, 1.5, 0.02], [0, 0.5, 0.4],
[0, 0.1, 0.1], [0, 0.05, 0.01], [0, 0.3, 0.2], [0, 0.2, 0.1], [0, 0.1, 0.1], [0, 0, 0];
inits := [0, 2.05, 0.2], [0, 2, 0.01], [0, 1, 0.01], [0, 1.5, 0.02], [0, 0.5, 0.4], [0, 0.1, 0.1], [0, 0.05, 0.01], [0, 0.3, 0.2], [0, 0.2, 0.1], [0, 0.1, 0.1], [0, 0, 0]
- > DEplot([de1, de2], [W, P], t = 0 .. 300, [inits], scene = [W, P],
linecolour = blue, thickness = 1, stepsize = 0.1, arrows = medium);



- > DEplot([de1, de2], [W, P], t = 0 .. 300, [inits], scene = [t, W],
linecolour = blue, thickness = 2, stepsize = 0.1);

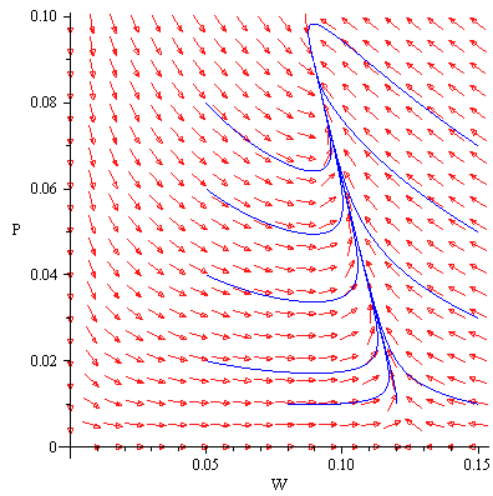


> *DEplot*([*de1*, *de2*], [*W*, *P*], *t* = 0..300, [*inits*], *scene* = [*t*, *P*],
linecolour = blue, *thickness* = 2, *stepsize* = 0.1);

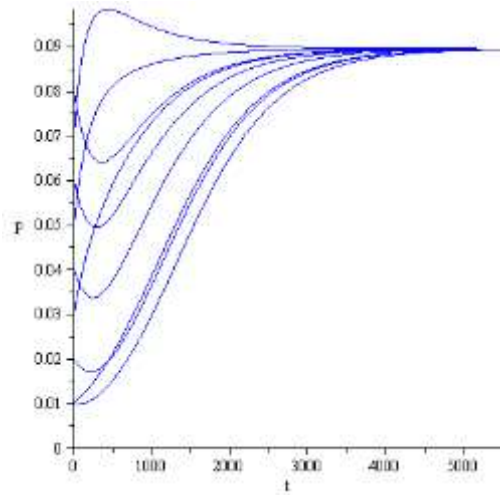


Lampiran 4. Input dan Output Simulasi Kasus 4

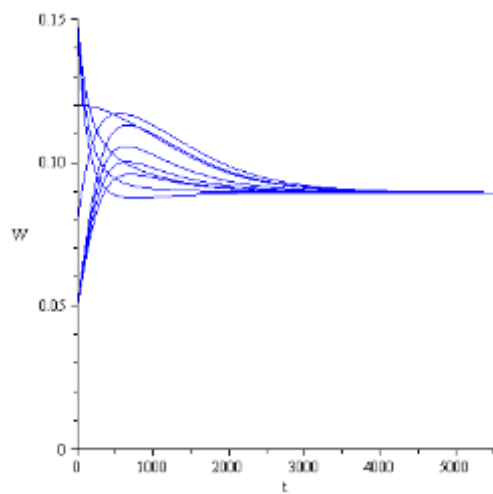
- > restart : with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) :
- > r := 0.11 : K := 2.0 : m := 1 : a := 2 : u := 0.001 : p := 0.001 :
- > $r - \frac{1}{a} \left(K \cdot \sqrt{m \cdot (p + u) - (p + u) \cdot (p + u)} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{2 - \frac{2 \cdot (p + u)}{m}} \right) + \frac{2 \cdot (p + u)}{m} - 1 \right)$;
0.0282597851.
- > $h := r - \frac{a \cdot r \cdot \sqrt{\frac{(p + u)}{m - p - u}}}{K} - p - u$;
h := 0.103075723'
- > solve $\left(\left[r \cdot W \cdot \left(1 - \frac{W}{K} \right) - h \cdot W - \frac{m \cdot W \cdot W \cdot P}{a \cdot a + W \cdot W}, \frac{m \cdot W \cdot W \cdot P}{a \cdot a + W \cdot W} - u \cdot P - p \cdot P \right], [W, P] \right)$;
[[W = 0., P = 0.], [W = 0.1258959327 P = 0.], [W = 0.0895322962 P = 0.0895322962], [W = -0.0895322962 P = -0.530414060]]
- > de1 := diff(W(t), t) = $r \cdot W(t) \cdot \left(1 - \frac{W(t)}{K} \right) - h \cdot W(t) - \frac{m \cdot W(t) \cdot W(t) \cdot P(t)}{a \cdot a + W(t) \cdot W(t)}$;
- de1 := $\frac{d}{dt} W(t) = 0.11 W(t) (1 - 0.5000000000 W(t)) - 0.1030757237 W(t) - \frac{W(t)^2 P(t)}{4 + W(t)^2}$
- > de2 := diff(P(t), t) = $\frac{m \cdot W(t) \cdot W(t) \cdot P(t)}{a \cdot a + W(t) \cdot W(t)} - u \cdot P(t) - p \cdot P(t)$;
- de2 := $\frac{d}{dt} P(t) = \frac{W(t)^2 P(t)}{4 + W(t)^2} - 0.002 P(t)$
- > inits := [0, 0.12, 0.01], [0, 0.08, 0.01], [0, 0.05, 0.08], [0, 0.05, 0.06], [0, 0.05, 0.04], [0, 0.05, 0.02], [0, 0.15, 0.03], [0, 0.15, 0.05], [0, 0.15, 0.07], [0, 0, 0];
- inits := [0, 0.12, 0.01], [0, 0.08, 0.01], [0, 0.05, 0.08], [0, 0.05, 0.06], [0, 0.05, 0.04], [0, 0.05, 0.02], [0, 0.15, 0.03], [0, 0.15, 0.05], [0, 0.15, 0.07], [0, 0, 0]
- > DEplot([de1, de2], [W, P], t = 0 .. 5500, [inits], scene = [W, P], linecolour = blue, thickness = 1, stepsize = 0.1);



> *DEplot*([*de1*, *de2*], [*W*, *P*], *t* = 0 .. 5500, [*inits*], *scene* = [*t*, *P*],
linecolour = blue, *thickness* = 1, *stepsize* = 0.1);



> *DEplot*([*de1*, *de2*], [*W*, *P*], *t* = 0 .. 5500, [*inits*], *scene* = [*t*, *W*],
linecolour = blue, *thickness* = 1, *stepsize* = 0.1);



Lampiran 5. Input dan Output Simulasi Kasus 5

```

> restart : with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) :
> r := 0.1 : K := 70.0 : m := 0.1 : a := 1 : u := 0.04 : p := 0.02 :
> r -  $\frac{1}{a} \left( K \cdot \sqrt{m \cdot (p + u) - (p + u) \cdot (p + u)} \cdot \left( -2 \cdot \sqrt{2 - \frac{2 \cdot (p + u)}{m}} \right) + \frac{2 \cdot (p + u)}{m} - 1 \right) \right)$ ;
5.548635510

> h := r -  $\frac{a \cdot r \cdot \sqrt{\frac{(p + u)}{m - p - u}}}{K} - p - u$ ;
h := 0.0382503644

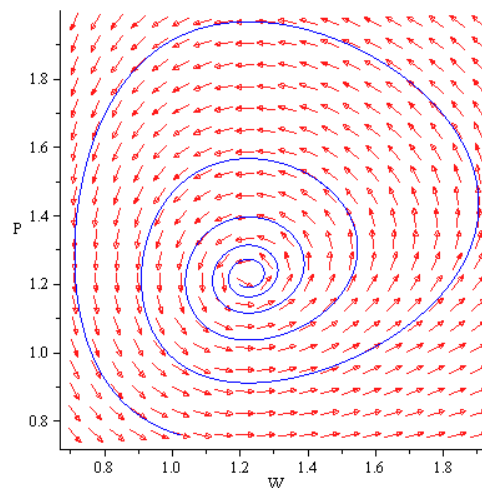
> h - r \cdot  $\left( 1 - \frac{2 \cdot a \cdot (p + u) \cdot \sqrt{\frac{p + u}{m - p - u}}}{K \cdot (2 \cdot (p + u) - m)} \right)$ ;
-0.0512518223

> solve  $\left( \left[ r \cdot W \cdot \left( 1 - \frac{W}{K} \right) - h \cdot W - \frac{m \cdot W \cdot W \cdot P}{a \cdot a + W \cdot W}, \frac{m \cdot W \cdot W \cdot P}{a \cdot a + W \cdot W} - u \cdot P - p \cdot P \right], [W, P] \right)$ ;
[[W = 0., P = 0.], [W = 43.22474486, P = 0.], [W = 1.224744871, P = 1.224744871], [W = -1.224744871, P = -1.296173443]]

> inits := [0, 1.2, 1.2];
inits := [0, 1.2, 1.2]

> DEplot([de1, de2], [W, P], t = 0 .. 600, [inits], scene = [W, P],
linecolour = blue, thickness = 1, stepsize = 0.1, arrows = medium);

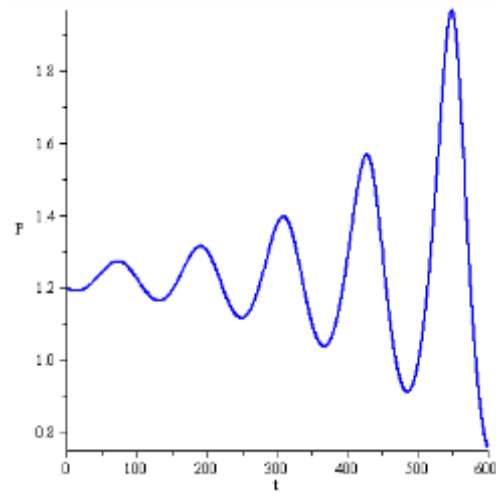
```



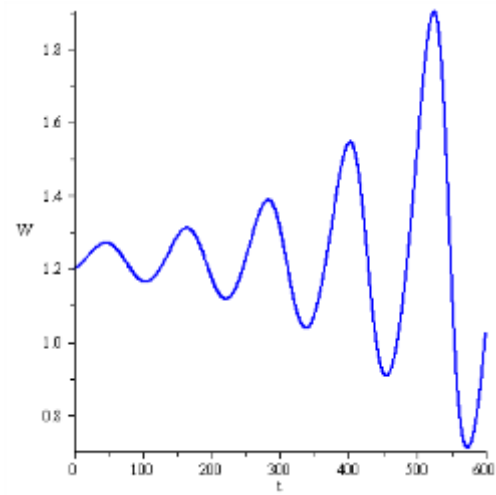
```

> DEplot([de1, de2], [W, P], t = 0 .. 600, [inits], scene = [t, P],
linecolour = blue, thickness = 2, stepsize = 0.1);

```



> *DEplot*([*de1*, *de2*], [*W*, *P*], *t* = 0 .. 600, [*inits*], *scene* = [*t*, *W*],
linecolour = blue, *thickness* = 2, *stepsize* = 0.1);



Lampiran 6. Input dan Output Simulasi Kasus 6

```

> restart : with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) :

> r := 0.08 : K := 62.5 : m := 0.021 : a := 1 : u := 0.01 : p := 0.01 :
> r - \frac{1}{a} \left( K \cdot \sqrt{m \cdot (p + u) - (p + u) \cdot (p + u)} \cdot \left( -2 \cdot \sqrt{2} \right. \right.
    \left. \left. - \frac{2 \cdot (p + u)}{m} \right) + \frac{2 \cdot (p + u)}{m} - 1 \right);
    -0.0003722507:

> h := r - \frac{a \cdot r \cdot \sqrt{\frac{(p + u)}{m - p - u}}}{K} - p - u;
    h := 0.0542756659:

> h - r \cdot \left( 1 - \frac{2 \cdot a \cdot (p + u) \cdot \sqrt{\frac{p + u}{m - p - u}}}{K \cdot (2 \cdot (p + u) - m)} \right);
    -0.0136731044:

> a \cdot \sqrt{\frac{p + u}{m - p - u}} - K \cdot \left( 1 - \frac{h}{r} \right);
    -15.62500000:

> solve \left( \left[ r \cdot W \cdot \left( 1 - \frac{W}{K} \right) - h \cdot W - \frac{m \cdot W \cdot W \cdot P}{a \cdot a + W \cdot W}, \frac{m \cdot W \cdot W \cdot P}{a \cdot a + W \cdot W} - u \cdot P - p \cdot P \right], [W, P] \right);
    [[W = 0., P = 0.], [W = 20.09713595 P = 0.], [W = 4.472135955 P
    = 4.472135954], [W = -4.472135955 P = -7.032135954]]

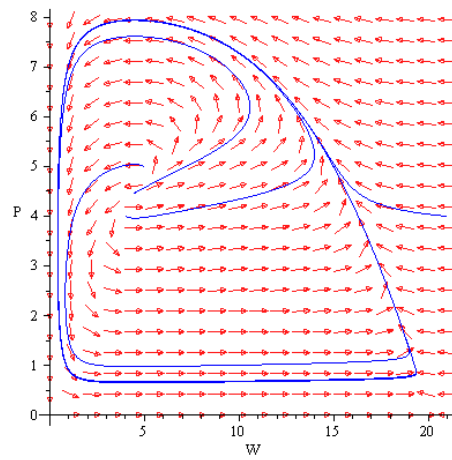
> de1 := diff(W(t), t) = r \cdot W(t) \cdot \left( 1 - \frac{W(t)}{K} \right) - h \cdot W(t) - \frac{m \cdot W(t) \cdot W(t) \cdot P(t)}{a \cdot a + W(t) \cdot W(t)};
    de1 := \frac{d}{dt} W(t) = 0.08 W(t) (1 - 0.016000000000W(t))
    - 0.05427566598W(t) - \frac{0.021 W(t)^2 P(t)}{1 + W(t)^2}

> de2 := diff(P(t), t) = \frac{m \cdot W(t) \cdot W(t) \cdot P(t)}{a \cdot a + W(t) \cdot W(t)} - u \cdot P(t) - p \cdot P(t);
    de2 := \frac{d}{dt} P(t) = \frac{0.021 W(t)^2 P(t)}{1 + W(t)^2} - 0.02 P(t)

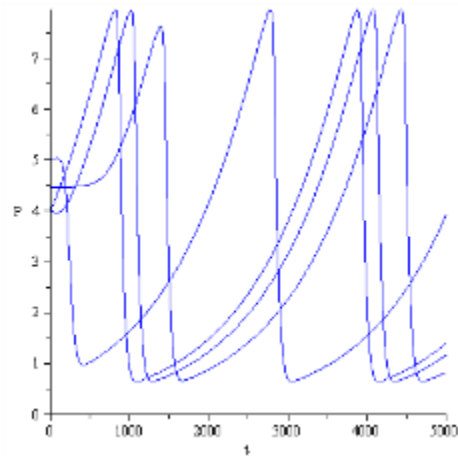
> inits := [0, 4.47, 4.47], [0, 5, 5], [0, 4, 4], [0, 0, 0], [0, 21, 4];
    inits := [0, 4.47, 4.47], [0, 5, 5], [0, 4, 4], [0, 0, 0], [0, 21, 4]

> DEplot([de1, de2], [W, P], t = 0 .. 5000, [inits], scene = [W, P],
    linecolour = blue, thickness = 1, stepsize = 0.1, arrows = medium);

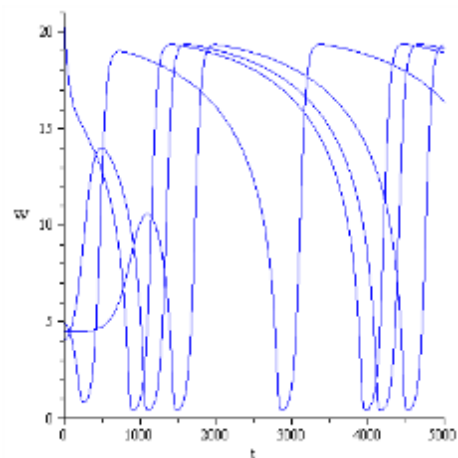
```



> `DEplot([de1, de2], [W, P], t = 0..5000, [inits], scene = [t, P],
linecolour = blue, thickness = 1, stepsize = 0.1, arrows = medium);`



> `DEplot([de1, de2], [W, P], t = 0..5000, [inits], scene = [t, W],
linecolour = blue, thickness = 1, stepsize = 0.1, arrows = medium);`



Lampiran 7. Input dan Output Simulasi Kasus 7

```

> restart : with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) :
> r := 0.1 : K := 70.0 : a := 1 : m := 0.021 : u := 0.01 : p := 0.01 :
> m - 2·(p + u);
                                -0.019

> r - h;
                                0.0134500329.

> h := r·(1 - (2·a·(p + u)·sqrt((p + u)/(m - p - u))) / (K·(2·p + 2·u - m)));
                                h := 0.0865499670.
> solve([r·W·(1 - W/K) - h·W - (m·W·W·P)/(a·a + W·W), (m·W·W·P)/(a·a + W·W) - u·P - p·P], [W, P]);
                                [[W = 0., P = 0.], [W = 9.415023062 P = 0.], [W = 4.472135955 P
                                = 1.578947369], [W = -4.472135955 P = -4.436090227]]

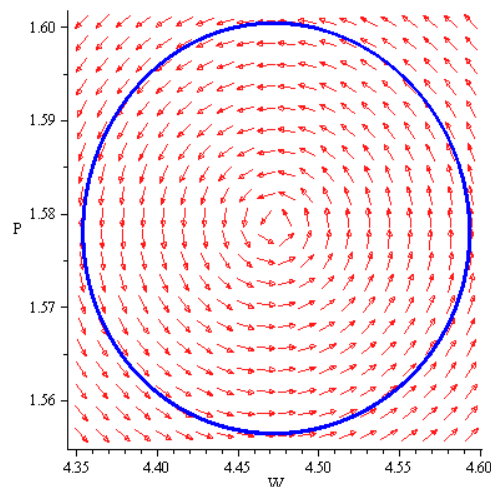
> de1 := diff(W(t), t) = r·W(t)·(1 - W(t)/K) - h·W(t) - (m·W(t)·W(t)·P(t))/(a·a + W(t)·W(t));
                                de1 := d/dt W(t) = 0.1 W(t) (1 - 0.01428571429W(t))
                                - 0.08654996705W(t) - (0.021 W(t)2 P(t))/(1 + W(t)2)

> de2 := diff(P(t), t) = (m·W(t)·W(t)·P(t))/(a·a + W(t)·W(t)) - u·P(t) - p·P(t);
                                de2 := d/dt P(t) = (0.021 W(t)2 P(t))/(1 + W(t)2) - 0.02 P(t)

> inits3 := [0, 4.5, 1.6];
                                inits3 := [0, 4.5, 1.6]

> DEplot([de1, de2], [W, P], t = 0 .. 10000 [inits3], scene = [W, P],
                                linecolour = blue, thickness = 1, stepsize = 0.1, arrows = medium);

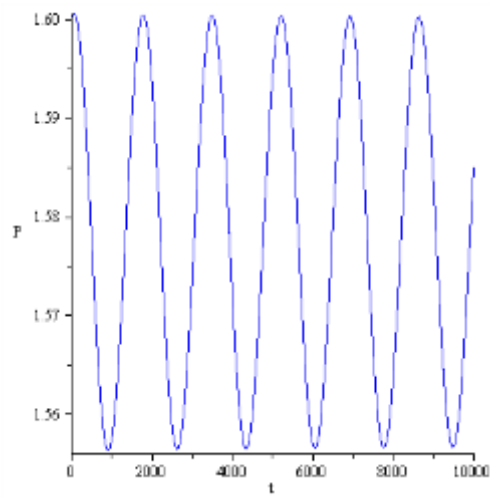
```



```

> DEplot([de1, de2], [W, P], t = 0 .. 10000 [inits3], scene = [t, P],
                                linecolour = blue, thickness = 1, stepsize = 0.1, arrows = medium);

```



> *DEplot*([*de1*, *de2*], [*W*, *P*], *t* = 0 .. 10000, [*inits3*], *scene* = [*t*, *W*],
linecolour = *blue*, *thickness* = 1, *stepsize* = 0.1, *arrows* = *medium*);

