MODEL EPIDEMI SIRS STOKASTIK DENGAN STUDI KASUS INFLUENZA

Skripsi
disusun sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika

oleh

Novia Nilam Nurlazuardini

4111411024

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
2015

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan.

Semarang, 29 April 2015

Novia Nilam Nurlazuardini
NIM. 4111411024

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Model Epidemi SIRS Stokastik dengan Studi Kasus Influenza

disusun oleh

Novia Nilam Nurlazuardini

4111411024

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES pada pada tanggal 8 Mei 2015.

Panitia:

Ketua

Prof. Dr. Wiyanto, M.Si
NIP. 196310121988031001

Sekretaris

Drs. Arief Agoestanto, M.Si
NIP. 196807221993031005

Ketua Penguji

Drs. Supriyono, M.Si
NIP. 195210291980031002

Anggota Penguji/
Pembimbing Utama

Muhammad Kharis, S.Si., M.Sc.
NIP. 198210122005011001

Anggota Penguji/
Pembimbing Pendamping

Putriaji H., S.Si, M.Pd, M.Sc
NIP. 198208182006042001

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

- Hanya kepada Engkaulah kami menyembah dan hanya kepada Engakaulah kami mohon pertolongan (QS. Al Fatihah: 5)
- Solusi sederhana atas kekecewaan adalah bangun dan bergeraklah (Peter McWilliams)
- Aksi tindakan yang terkecil sekalipun jauh lebih baik daripada hanya sekedar keinginan terbesar (John Burroughs)
- Allah lebih tahu apa yang terbaik untuk hamba-Nya.

PERSEMBAHAN

Untuk Allah SWT atas segala rahmat-Nya.

Untuk Bapak dan Mamah atas semua yang telah diberikan untukku.

Untuk Mbahti, Reza dan Zulfi atas do'a, dukungan dan semangat untukku.

Untuk Nurul, Milla, Ulya, Puji, Elok, Dwi Efri, Atmira, Danang, Rifan, Gesti, Mujib, Rully, dan Ni'mah atas dukungan dan semangat untukku selama ini.

Untuk semua teman-teman Matematika angkatan 2011 yang menemani jalanku untuk berjuang menghadapi tantangan dan rintangan selama ini.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Model Epidemi SIRS Stokastik dengan Studi Kasus Influenza”. Penulisan skripsi ini sebagai syarat mutlak yang harus dipenuhi oleh penulis untuk memperoleh gelar sarjana sains di Universitas Negeri Semarang.

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan karena adanya bimbingan, bantuan, dan dukungan dari berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Fatkhur Rokhman, M.Hum, Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Prof. Dr. Wiyanto, M.Si, Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si, Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
4. Dra. Kristina Wijayanti, M.Si, Ketua Prodi Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
5. Muhammad Kharis, S.Si, M.Sc, Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, semangat, motivasi, dan pengarahan.
6. Putriaji H., S.Si, M.Pd, M.Sc, Dosen Pembimbing II dan Dosen Wali yang telah memberikan bimbingan, semangat, motivasi, dan pengarahan.
7. Drs. Supriyono, M.Si, Dosen Penguji yang telah memberikan semangat, motivasi, kritik, dan saran.

Penulis sadar dengan apa yang telah disusun dan disampaikan masih banyak kekurangan dan jauh dari sempurna. Untuk itu penulis menerima segala kritik dan saran yang sifatnya membangun untuk skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Semarang,   April 2015

Penulis

ABSTRAK

Nurlazuardini, N. N. 2015. *Model Epidemi SIRS Stokastik dengan Studi Kasus Influenza*. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang. Pembimbing I Muhammad Kharis, S.Si, M.Sc dan Pembimbing II Putriaji Hendikawati, S.Si, M.Pd, M.Sc.

Kata kunci: Model Epidemi SIRS Stokastik, Rasio Reproduksi Dasar, Proses CMJ Waktu Kontinu, Proses BGW Waktu Diskrit.

Model epidemi diklasifikasikan menjadi dua kelas, yaitu model yang bersifat deterministik dan stokastik. Model epidemi deterministik sudah banyak diteliti. Pada model epidemi deterministik ketidakpastian dalam suatu populasi tidak dapat dijabarkan. Sehingga diperlukan model stokastik untuk menyelesaikannya. Permasalahan yang diangkat dalam penelitian ini adalah bagaimana menurunkan model epidemi SIRS stokastik dengan studi kasus influenza, bagaimana analisa model epidemi SIRS stokastik untuk penyebaran penyakit influenza dan bagaimana perilaku penyakit ini untuk masa yang akan datang. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui model epidemi SIRS stokastik dengan studi kasus influenza, mengetahui analisa model epidemi SIRS stokastik untuk penyebaran penyakit influenza serta mengetahui perilaku penyakit ini untuk masa yang akan datang.

Metode yang digunakan untuk menganalisis masalah adalah dengan studi pustaka. Langkah-langkah yang digunakan adalah menentukan masalah, merumuskan masalah, studi pustaka, analisis dan pemecahan masalah dan penarikan kesimpulan. Model SIRS stokastik untuk penyebaran influenza yang diperoleh adalah sebagai berikut.

$S_d(t+h) = S_d(t) - B(t+h) + W(t+h),$

$I_d(t+h) = I_d(t) + B(t+h) - D(t+h),$

$R_d(t+h) = R_d(t) + D(t+h) - W(t+h),$

dengan $N(t+h) = S_d(t) + I_d(t) + R_d(t)$. Dari model tersebut dilakukan penyelipan model deterministik pada proses stokastik tersebut, sehingga diperoleh persamaan

$\frac{d\hat{S}(t)}{dt} = -\hat{S}(t)\lambda\frac{\hat{I}(t)p}{N} + \hat{R}(t)\beta,$

$\frac{d\hat{I}(t)}{dt} = \hat{S}(t)\,\lambda\frac{\hat{I}(t)p}{N} - \hat{I}(t)\gamma$, dan

$\frac{d\hat{R}(t)}{dt} = \hat{I}(t)\gamma - \hat{R}(t)\beta.$

Proses untuk mencari nilai rasio reproduksi dasar dengan menggunakan proses CMJ waktu kontinu dengan menyelipkan proses BGW waktu diskrit untuk beberapa proses. Nilai rasio reproduksi dasar yang diperoleh adalah $R_0 = \frac{\lambda p}{\gamma}$. Diperoleh bahwa jika $R_0 < 1$ maka endemik hilang dan jika $R_0 \geq 1$ maka terjadi endemik. Hasil simulasi model dengan menggunakan Maple sama dengan hasil analisis.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Arti
β	Ruang sampel dari suatu eksperimen acak
$\mathcal{A}$	Suatu lapangan sigma yang terdiri atas himpunan–himpunan bagian dari β
$\mathbb{P}$	Peluang suatu kejadian
$\mathcal{S}$	*Sample Space*
$\mathcal{F}$	*Even Space*
E(X)	Nilai harapan suatu peubah acak X
S_h	Himpunan diskrit dari *time point*
N(t)	Jumlah populasi pada selang waktu $t \in [0, \infty)$
S(t)	Jumlah individu rentan pada selang waktu $t \in [0, \infty)$ pada waktu kontinu
I(t)	Jumlah individu yang terinfeksi penyakit pada selang waktu $t \in [0, \infty)$ pada waktu kontinu
R(t)	Jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit pada selang waktu $[0, t)$ untuk $t > 0$ pada waktu kontinu
$W(t)$	Jumlah individu yang sembuh yang kembali menjadi individu rentan selama kurun waktu $[0, t)$ untuk $t > 0$ pada waktu kontinu
$S_d(t)$	Jumlah individu rentan terinfeksi penyakit pada waktu diskrit
$I_d(t)$	Jumlah individu yang terinfeksi penyakit pada waktu diskrit

$R_d(t)$	Jumlah individu yang sembuh dari penyakit pada waktu diskrit
$W_d(t)$	Jumlah individu yang sembuh dari penyakit yang kembali menjadi individu rentan pada waktu diskrit
B(t)	Jumlah individu yang rentan yang terinfeksi pada selang waktu $t \in [0, \infty)$
D(t)	Jumlah individu yang terinfeksi yang sembuh dari penyakit pada selang waktu $t \in [0, \infty)$
$P(t)$	Probabilitas bersyarat individu yang rentan terinfeksi pada selang waktu $t \in (t, t+h]$
p_R	Probabilitas bersyarat dari individu yang terinfeksi yang sembuh atau kebal dari penyakit
p_W	Probabilitas bersyarat dari individu yang sembuh menjadi individu rentan
p	Probabilitas individu rentan terinfeksi
q	Probabilitas individu rentan tidak terinfeksi
$p(t)$	Probabilitas seorang individu yang rentan terinfeksi selama jangka waktu $(t, t+h]$ per kontak
$q(t)$	Probabilitas individu rentan terlepas dari penginfeksian pada selang waktu $(t, t+h]$
$C(t)$	Jumlah kontak seorang individu yang rentan dengan individu yang terinfeksi pada selang waktu $(t, t+h]$
$f(c,t)$	Fungsi kepadatan peluang dari $C(t)$

λ	Parameter proses Poisson dari $C(t)$
$G(q(t), t)$	*Probability generating function* dari $C(t)$
$\xi_k(B)$	kumpulan dari indikator Bernoulli yang independen dan berdistribusi sama dari individu rentan yang terinfeksi
$B_d(t+h) = b$	$B_d(t)$ pada jangka waktu $(t, t+h]$
D_I	Durasi periode penginfeksian dari individu yang telah terinfeksi
γ	Parameter distribusi eksponensial dari durasi periode penginfeksian dari individu yang telah terinfeksi
$E_d(t+h)$	jumlah individu rentan yang tidak terinfeksi selama jangka waktu $(t, t+h]$
$\xi_k(D)$	Indikator Bernoulli yang independen dan berdistribusi sama dari individu rentan yang sembuh.
$D_d(t+h) = l$	$D_d(t)$ pada jangka waktu $(t, t+h]$
$L_d(t+h)$	jumlah individu terinfeksi yang tidak sembuh selama jangka waktu $(t, t+h]$
D_R	Durasi periode daya tahan tubuh seorang individu yang sembuh
β	Parameter distribusi eksponensial dari durasi periode daya tahan tubuh seorang individu yang sembuh D_R
q_W	Probabilitas bersyarat untuk menjadi individu yang sembuh pada saat $t+h$
$W_d(t+h)$	$W_d(t)$ pada jangka waktu $(t, t+h]$

$\xi_k(W)$	Indikator Bernoulli yang independen dan berdistribusi sama dari individu rentan yang kembali menjadi individu rentan.
$X_d(t+h)=w$	Jumlah individu yang kebal atau tidak kembali menjadi individu rentan selama jangka waktu $(t, t+h]$
$\mathfrak{B}(t)$	Pemberian pembaruan dari proses yang bergantung pada waktu t, sub-σ-algebra dari himpunan fungsi acak $\{S_d(u), I_d(u), R_d(u) \mid u \leq t\}$.
X	Jumlah total dari individu rentan yang terinfeksi oleh individu awal yang telah terinfeksi pada periode penginfeksiannya
$h(u)$	*Probability generating function* dari *X*
B	Jumlah total individu rentan yang terinfeksi oleh individu yang terinfeksi pada periode penginfeksiannya
$f(n)$	F.k.p. Dari *X*
$\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$	Distribusi dari individu rentan yang terinfeksi adalah,
$g_n(u)$	*Probability generating function* dari ukuran generasi ke-n
$m=E[X]$	Kondisi ambang batas (*threshold*) dari proses BGW yang menunjukkan ekspektasi berhingga dari jumlah total individu rentan yang terinfeksi oleh beberapa individu yang terinfeksi
$G(t)$	Fungsi distribusi dari variabel acak *T*
$g(t)=G'(t)$	Fungsi kepadatan peluang dari T
$f(u,t)$	*Probability generating function* dari proses *K*
$h(u,t)$	*Probability generating function* dari $A(t)$

$\mathfrak{S}$	ukuran generasi menggunakan rantai Markov dengan ruang keadaan (*state space*) tak hingga
p_{ij}	Probabilitas transisi setimbang dari B_{n+1}
Z	Probabilitas bersyarat dari kepunahan populasi individu rentan
m	Kondisi ambang batas (*threshold*) dari proses BGW.
$\mathcal{H}$	Proses awal pada *life history*
$Z(t)$	Jumlah dari individu-individu yang terinfeksi pada suatu populasi pada waktu $t \in [0, \infty)$ dengan $Z(0) = 1$
C	Kepunahan pada waktu kontinu dan misalkan himpunan ω
B	Kepunahan dari penempelan proses BGW
$v(t)$	fungsi mean dari proses *K*
$m(t)$	fungsi mean dari proses *A*
$J(t)$	Probabilitas individupada awal penginfeksian
$M(t)$	Mean dari fungsi acak $Z(t)$.
$M_I(t)$	Mean dari $Z_I(t)$
$M_R(t)$	Mean dari $Z_R(t)$
$Y(t)$	Fungsi dari keberlangsungan dari durasi periode penginfeksian dan didefinisikan $B(t)$ yang menggambarkan jumlah yang diharapkan dari individu yang terinfeksi pada populasi saat $t > 0$ yang diperoleh atau dihasilkan dari seorang individu yang terinfeksi awal pada waktu $t = 0$.

$L(t)$	Probabilitas individu yang terinfeksi menjadi individu yang pulih pada waktu $t > 0$
E_n	Waktu tunggu antar kontak
$l(x)$	F.k.p. dari E_n
$L(x)$	fungsi distribusi dari E_n
T_n	Penjumlahan dari peubah acak E yang independen dan berdistribusi sama (*independent and identically distributed*)
$V(t)$	Jumlah kontak seorang individu yang rentan dengan orang yang terinfeksi pada selang waktu $(0, t]$ untuk $t > 0$
$\hat{\jmath}(y)$	Transformasi Laplace dari $l(x)$
$\grave{\grave{\iota}}_n(y)$	Transformasi Laplace dari penjumlahan T_n

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Proses perkembangan dan kemajuan dunia saat ini tidak dapat dipisahkan dari peran matematika sebagai ratunya ilmu. Sesuai dengan julukan yang diberikan, hampir tidak ada aktivitas yang tidak dapat digambarkan dengan matematika. Matematika berperan penting dalam kemajuan ilmu diantaranya adalah ilmu di bidang kesehatan, teknologi dan sosial. Salah satu peran matematika di bidang kesehatan adalah dengan memodelkan penyebaran penyakit menular. Hal ini dijelaskan dalam Lekone & Finkenstädt (2006) yang mengatakan bahwa model matematika muncul sebagai alat yang berharga untuk memperoleh pengetahuan dari dinamika penyebaran penyakit menular.

Model matematika untuk penyakit menular diklasifikasikan menjadi dua kelas, yaitu model yang bersifat deterministik dan model yang besifat stokastik. Menurut Nåsell (2000) kedua model tersebut dibutuhkan dan memiliki kelebihan dan kekurangan masing-masing. Pada model matematika untuk penyakit menular tersebut sebuah populasi dibagi menjadi beberapa subpopulasi di antaranya sub populasi individu yang rentan terhadap suatu penyakit atau yang disebut dengan *Susceptible* (S), subpopulasi individu yang sudah terinfeksi suatu penyakit tetapi belum bisa menularkannya kepada individu lain atau dapat dikatakan bahwa subpopulasi berada pada masa laten yang disebut dengan *Exposed* (E), subpopulasi individu yang terinfeksi suatu penyakit atau yang disebut dengan *Infected* (I) dan subpopulasi individu yang sembuh dari suatu penyakit atau disebut dengan *Removed* (R). Model epidemi tersebut antara lain adalah SI, SIS, SIR dan SEIR. Model-model tersebut memiliki bentuk penyebaran dan karakteristik yang berbeda-beda.

Model epidemi SIRS merupakan model epidemi yang memiliki karakteristik bahwa setiap individu yang rentan terhadap suatu penyakit berinteraksi dengan individu yang telah terinfeksi suatu penyakit menular sehingga tertular penyakit menular tersebut. Menggunakan pengobatan medis atau melalui proses alam, individu yang telah tertular dapat sembuh. Setelah sembuh dari penyakit, tidak menutup kemungkinan bahwa individu yang sudah sembuh dari penyakit tidak dapat terinfeksi kembali. Individu yang telah sembuh dari penyakit dapat kembali menjadi individu rentan, tergantung pada daya tubuh yang dimiliki.

Model matematika digunakan untuk menggambarkan perilaku epidemi jika meluas dan jika hilang. Biasanya penyebaran penyakit dimodelkan hanya dengan menggunakan model epidemi deterministik. Meskipun banyak penelitian yang menggunakan dan menggambarkan model deterministik, akan tetapi menurut Mode & Sleeman (2000: 1) semua model deterministik tidak lengkap dalam artian bahwa variasi dan ketidak pastian yang menjadi ciri khas dari model epidemi pada populasi tidak dapat ditampung atau dijelaskan dengan menggunakan rumus deterministik. Sehingga dibutuhkan model epidemi stokastik yang memperhitungkan variasi perhitungan pada suatu epidemi yang diambil dari segi probabilitas. Pada model deterministik pengaruh acak dari individu tidak dipertimbangkan. Sedangkan pada model stokastik, pengaruh acak dari individu dipertimbangkan, sehingga pada model stokastik menggunakan peluang di dalam memodelkan.

Penyebaran penyakit dapat dipandang sebagai kejadian acak yang bergantung pada variabel waktu sehingga penyebaran suatu penyakit merupakan proses stokastik. Perubahan banyaknya orang yang terinfeksi suatu penyakit dipandang sebagai proses stokastik dalam selang waktu kontinu sehingga dapat digambarkan dengan model stokastik waktu kontinu. Salah satu penyakit menular dimana proses penularannya dapat digambarkan menggunakan model SIRS adalah penyakit influenza. Penyakit ini sering terjadi di masyarakat sekitar dan dianggap remeh. Hal ini dikarenakan menurut Casagrandi *et al.* (2006) biasanya influenza dirasakan oleh penderitanya sebentar saja dan hanya mengalami sedikit demam, seperti sebuah pajak yang harus dibayar oleh masyarakat pada musim "flu". Padahal, menurut WHO pada tahun 1972–1992 rata-rata orang yang meninggal akibat influenza sebanyak 21.000 kematian per musim.

Menurut Carrat *et al.* (2006) saat dimana orang dapat menularkan virus pada orang lain atau disebut dengan *shedding* virus influenza yang dimulai dari satu hari sebelum gejala muncul dan virus akan dilepaskan selama 5 sampai dengan 7 hari, meskipun banyak orang dapat menyebarkan virus dengan periode yang lebih lama. Menurut WHO, biasanya pada dua musim flu tahunan terdapat tiga sampai lima juta kasus berat dan sampai 500.000 kasus kematian di seluruh dunia. Seseorang yang tertular penyakit influenza akan merasa lemas untuk melakukan sesuatu, sehingga tidak dapat mengerjakan pekerjaannya dengan tepat. Hal ini merupakan suatu kerugian yang diperoleh ketika terserang penyakit influenza. Menurut Emmeluth (2003: 39) banyak dokter yang akan menganjurkan kepada pasien yang terserang influenza untuk banyak istirahat karena individu yang tertular penyakit influenza akan mengalami ngantuk di sekolah maupun di kantor dan jika individu yang tertular penyakit influenza melakukan kontak dengan orang lain, maka individu tersebut dapat menularkannya. Saran selanjutnya adalah dengan minum minuman yang tidak mengandung alkohol, kafein dan perbanyak minum air putih.

Penyakit influenza pernah dikaji oleh Anggoro *el al*. (2013) yang memodelkan dengan model SIRPS dan menggunakan vaksinasi pada populasi konstan dan penyakit influenza juga pernah dikaji oleh Nashrullah *et al*. (2013) yang menggunakan model SIRS dengan vaksinasi. Pada penelitian tersebut, model yang digunakan adalah model deterministik padahal banyak kejadian yang tidak dapat digambarkan menggunakan model deterministik. Penyebaran penyakit merupakan proses stokastik karena bergantung pada variabel waktu. Sehingga penyebaran penyakit termasuk dalam proses stokastik. Sehingga pada penelitian ini akan dibahas tentang penyebaran penyakit menggunakan model stokastik yang akan menyelipkan model deterministik pada beberapa proses. Pembentukan model mengacu pada Mode & Sleeman (2000: 202) yang memodelkan penyakit HIV dengan model SIR stokastik. Model epidemi stokastik juga pernah dikaji oleh Yunita *et al*. (2013) yang mengkaji model epidemik SIR stokastik dengan studi kasus penyakit cacar air.

Dewasa ini, proses perkembangan teknologi khususnya komputer dan perangkat lunak berkembang dengan cepat. Perkembangan ini sangat membantu dalam menyelesaikan permasalahan–permasalahan dalam bidang matematika. Salah satu perangkat lunak (*software*) berbasis matematika yang sangat membantu dalam menyelesaikan permasalahan matematika adalah Maple. Maple adalah perangkat lunak (*software*) yang digunakan dalam perhitungan aljabar, matematika, dan statistika. Menurut Karian & Tanis (2008), prosedur pada Maple menyediakan dasar-dasar untuk mempelajari kalkulus yang didasari dengan probabilitas dan statistika.

Berdasarkan latar belakang di atas, penulis mengangkat judul "*Model Epidemi SIRS Stokastik dengan Studi Kasus Influenza*" yang harapannya dapat membantu mengatasi penyebaran penyakit Influenza.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, penulis merumuskan beberapa permasalahan sebagai berikut.

(1) Bagaimana model epidemi SIRS stokastik untuk penyebaran penyakit influenza?

(2) Bagaimana analisa model epidemi SIRS stokastik untuk penyebaran penyakit influenza?

(3) Bagaimana perilaku penyakit ini untuk masa yang akan datang?

1.3 Batasan Masalah

Pada penulisan ini, permasalahan dibatasi dengan laju kelahiran sama dengan laju kematian, populasi diasumsikan tertutup, dan program yang digunakan adalah Maple.

1.4 Tujuan Penulisan

Sejalan dengan rumusan masalah, tujuan penulisan ini adalah untuk:

(1) Mengetahui model epidemi SIRS stokastik untuk penyebaran penyakit influenza.

(2) Mengetahui analisa model epidemi SIRS stokastik untuk penyebaran penyakit influenza.

(3) Mengetahui perilaku penyakit ini untuk masa yang akan datang.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari hasil penulisan ini adalah sebagai berikut.

(1) Bagi Penulis

Peneliti dapat mengetahui model epidemi SIRS stokastik untuk penyebaran penyakit influenza dan simulasinya.

(2) Bagi Pihak Lain

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangsih kepada mahasiswa untuk melakukan penelitian selanjutnya dan dapat membantu dinas kesehatan dalam mengambil kebijakan terkait penyebaran penyakit influenza.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulis skripsi disusun dalam tiga bagian utama, yaitu bagian awal, bagian inti, dan bagian akhir skripsi.

1.6.1 Bagian Awal

Dalam penulisan skripsi ini, bagian awal berisi halaman judul, pernyataan, pengesahan, motto dan persembahan, kata pengantar, abstrak, daftar isi, daftar gambar, daftar tabel, dan daftar lampiran.

1.6.2 Bagian Inti

Bagian inti dari penulisan skripsi ini adalah isi skripsi yang terdiri dari lima bab, yaitu:

BAB 1 : PENDAHULUAN

Berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, sistematika penulisan.

BAB 2 : TINJAUAN PUSTAKA

Tinjauan pustaka berisi mengenai teori-teori yang mendukung dan berkaitan dengan pembahasan skripsi sehingga dapat membantu penulis maupun pembaca dalam memahami isi skripsi. Bab ini terdiri dari pengertian peluang, pengertian nilai harapan, fungsi kepadatan peluang, fungsi distribusi, distribusi binomial, distribusi poisson, distribusi eksponensial, proses poisson, model epidemi, proses stokastik, model epidemi SIRS, rantai Markov, proses stokastik Markov, fungsi pembangkit, bilangan reproduksi dasar, Proses CMJ, pengertian penyakit influenza, distribusi gamma, persamaan diferensial, proses pencabangan waktu diskrit, kekonvergenan, dan transformasi Laplace.

BAB 3 : METODE PENELITIAN

Berisi tentang prosedur atau langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi menentukan masalah, merumuskan masalah, studi pustaka, analisis dan pemecahan masalah, dan penarikan simpulan.

BAB 4 : HASIL DAN PEMBAHASAN

Berisi tentang model epidemi SIRS stokastik untuk penyebaran penyakit influenza dan simulasinya

BAB 5 : PENUTUP

Berisi kesimpulan dari penulisan skripsi ini dan saran.

1.6.3 Bagian Akhir

Berisi daftar pustaka sebagai acuan penulisan yang memberikan informasi tentang buku dan literatur lain yang digunakan dalam skripsi ini serta lampiran yang mendukung kelengkapan skripsi.

1.7 Penegasan Istilah

1.7.1 Model Epidemi

Model epidemi adalah model matematika yang digunakan untuk mengetahui model pada penyebaran penyakit menular pada suatu daerah dan waktu tertentu.

1.7.2 Model Epidemi SIRS

Model epidemi SIRS merupakan model epidemi yang menggambarkan penyebaran suatu penyakit menular yang dapat disembuhkan dan seiring berjalannya waktu, individu tersebut dapat kembali menjadi individu rentan kembali.

1.7.3 Model Epidemi SIRS Stokastik

Model epidemi SIRS stokastik adalah model epidemi SIR yang menggunakan peluang dalam memodelkannya.

1.7.4 Influenza

Merupakan penyakit yang dapat disembuhkan dan dalam kurun waktu tertentu, penderitanya dapat kembali terserang penyakit tersebut yang disebabkan oleh daya tahan tubuh yang dimilikinya.

BAB 2

LANDASAN TEORI

2.1 Peluang

Definisi 2.1

Misalkan β ruang sampel dari suatu eksperimen acak dan $\mathcal{A}$ suatu lapangan sigma yang terdiri atas himpunan–himpunan bagian dari β. Peluang adalah fungsi $\mathbb{P}$ dari $\mathcal{A}$ kepada [0,1] yang bersifat:

(i) $\mathbb{P}$ (A) ≥ 0 untuk setiap A di $\mathcal{A}$

(ii) $\mathbb{P}$ $(\beta) = 1$

(iii) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{A}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_i)$ untuk setiap $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots$ di $\mathcal{A}$ dimana $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ bila $i \neq j$

(Djauhari, 1990: 17).

Definisi 2.2

Misalkan A dan B dua peristiwa dimana $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Peluang bersyarat dari A jika diketahui B, ditulis $\mathbb{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ dan didefinisikan oleh

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})}$$

(Djauhari, 1990: 93).

Definisi 2.3

Kejadian $A_1, A_2, \dots, A_k$ merupakan kejadian yang saling bebas jika dan hanya jika probabilitas irisan setiap himpunan ke-2, ke-3, ..., ke-*k* ini adalah hasil perkalian masing-masing probabilitas. Ditulis dengan

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \dots \cap A_{i_r}) = \mathbb{P}(A_{i_1}).\,\mathbb{P}(A_{i_2}).\,\mathbb{P}(A_{i_3}).\,\dots.\,\mathbb{P}(A_{i_r})$$
$$= \prod_{j=1}^{r} \mathbb{P}(A_{i_j})$$

(Hines & Montgomery, 1990: 24).

2.2 *Probability Space*

Menurut LaValle (2006), sebuah *probability space* memiliki tiga urutan yaitu $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ yang menunjukkan

1. *Sample space*: Sebuah himpunan tak kosong $\mathcal{S}$ disebut dengan *sample space* jika himpunan tersebut menggambarkan semua hasil yang mungkin terjadi,
2. *Event space*: Sebuah kumpulan $\mathcal{F}$ dari subset $\mathcal{S}$ disebut *even space*. Jika $\mathcal{S}$ diskrit, maka biasanya $\mathcal{F} = pow(\mathcal{S})$. Jika $\mathcal{S}$ kontinu, maka $\mathcal{F}$ biasanya adalah sebuah sigma-aljabar pada $\mathcal{S}$, dan
3. Fungsi probabilitas: Sebuah fungsi $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ yang menunjukkan probabilitas dari kejadian pada saat $\mathcal{F}$. Biasanya disebut dengan sebuah distribusi probabilitas dari $\mathcal{S}$.

2.3 Fungsi Kepadatan Peluang

Fungsi kepadatan peluang (*probability density function*) merupakan suatu konsep statistika yang digunakan untuk memperoleh gambaran tentang distribusi dari sebuah peubah acak tertentu.

Definisi 2.4

Misalkan $\mathcal{A}$ ruang dari peubah acak diskrit X ($\mathcal{A}$ terbilang). Fungsi f yang bersifat:

(i) $f(x) \geq 0$ untuk setiap x di $\mathcal{A}$

(ii) $\sum_{x\ di\ \mathcal{A}} f(x) = 1$

dinamakan fungsi kepadatan peluang (f.k.p.) dari sebuah peubah acak diskrit X (Djauhari, 1990: 41).

Definisi 2.5

Misalkan $\mathcal{A}$ ruang dari peubah acak kontinu X. Fungsi f dari $\mathcal{A}$ ke dalam $\mathbb{R}$ yang memenuhi:

(i) $f(x) \geq 0$ untuk setiap x di $\mathcal{A}$

(ii) $\int_{x \in \mathcal{A}} f(x)dx = 1$

dinamakan fungsi kepadatan peluang (f.k.p.) dari sebuah peubah acak kontinu X (Djauhari, 1990: 43).

2.4 Nilai Harapan (*Expeted Value*)

Menurut Praptono (1986: 1.8) harapan suatu peubah acak X, ditulis E(X) didefinisikan sebagai

$$\mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x)$$

atau

$$\mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) dx, \text{ untuk X kontinu}$$

$$\mathrm{E(X)} = \sum_x \, x(X = x) \text{ untuk X diskrit}$$

bila integral ini ada.

2.5 Nilai Harapan Bersyarat (*Conditional Expectation*)

Menurut Praptono (1986: 1.28) peubah acak diskrit didefinisikan dengan probabilitas bersyarat sebagai berikut.

$$\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}, \text{untuk } \mathbb{P}(\mathrm{Y = y}) > 0.$$

Nilai harapan atau *expected value* bersyarat ialah

$$E(X|Y = y) = \sum_x x \, \mathbb{P}(X = x|Y = y).$$

Nilai harapan X bila diketahui $Y = y$ didefinisikan sebagai

$$Y = E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x|y)$$

dimana $F(x|y) = \mathbb{P}(X \leq x|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|y) \, dx.$

Jika X diskrit, maka $E(X) = \sum_y E(X|Y = y)\mathbb{P}(Y = y).$

Jika X kontinu, maka $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X|Y = y) \, f(y) dy.$

2.6 Fungsi Distribusi

Definisi 2.6

Misalkan X suatu peubah acak. Fungsi F dari $\mathbb{R}$ ke dalam [0,1] yang didefinisikan oleh:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \text{ untuk setiap } x \text{ di } \mathbb{R} \tag{2.1}$$

dinamakan fungsi distribusi dari X. Oleh karena itu, jika f adalah f.k.p. dari X, maka:

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{t \leq X} f(t), ; \text{bila } X \text{ diskrit} \\ \int_{-\infty}^{X} f(t)dt \; ; \text{bila } X \text{ kontinu} \end{cases} \tag{2.2}$$

(Djauhari, 1990: 53).

Menurut Djauhari (1990: 55) sifat-sifat fungsi distribusi $F(x)$ sebagai berikut.

(i) $0 \leq F(x) \leq 1$ untuk setiap x di $\mathbb{R}$.

(ii) $F(x)$ adalah fungsi yang tidak turun, artinya jika $x_1 \leq x_2$ maka $F(x_1) \leq F(x_2)$.

(iii) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ dan $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

(iv) $F(x)$ kontinu dimana-mana.

2.7 Distribusi Binomial

Menurut Djauhari (1990: 149) peubah acak X yang memiliki f.k.p.

$$f(x) = \begin{cases} C_x^n p^x (1-p)^{n-x} \; ; x = 1,2, \dots, n \\ 0 \qquad ; x \text{ yang lain} \end{cases} \tag{2.3}$$

dikatakan berdistribusi binomial dengan parameter n dan p. Disingkat $X{\sim}B(n,p)$.

2.8 Distribusi Poisson

Menurut Djauhari (1990: 163) peubah acak X dikatakan berdistribusi Poisson dengan parameter λ, ditulis $X{\sim}p(\lambda)$, jika memiliki f.k.p. sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \; ; x = 0,1,2, \dots \\ 0 \quad ; x \text{ yang lain} \end{cases} \tag{2.4}$$

Mean dari X

$$\mu = \lambda$$

Variansi dari X

$$\sigma^2 = \lambda$$

Teorema 2.1

Misalkan $X \sim B(n,p)$. Jika $n \to \infty$, $p \neq 0$, dan (np) konstan, maka $B(n,p) \to p(\lambda)$ dengan $\lambda = np$.

2.9 Proses Poisson

Proses poisson adalah rantai markov waktu kontinu $\{X(t)\}$ didefinisikan pada $\{0,1,2,\ldots\}$ dengan aturan berikut.

1. Untuk $t = 0$, $X(0) = 0$.
2. Untuk Δt yang cukup kecil, probabilitas transisi memenuhi

$$p_{i+1,i}(\Delta t) = \mathbb{P}\{X(t+\Delta t) = i+1 | X(t) = i\} = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

$$p_{ii}(\Delta t) = \mathbb{P}\{X(t+\Delta t) = i | X(t) = i\} = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

$$p_{ji}(\Delta t) = \mathbb{P}\{X(t+\Delta t) = j | X(t) = i\} = o(\Delta t), j \geq i+2$$

$$p_{ji}(\Delta t) = 0, j < 1$$

dimana notasi $o(\Delta t)$ adalah simbol Landan (Allen, 2003: 174).

2.10 Distribusi Eksponensial

Menurut Sugito & Mukid (2011) peubah acak kontinu X berdistribusi eksponensial dengan parameter $\theta > 0$. Jika mempunyai fungsi distribusi dalam bentuk:

$$f(x;\ \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{\frac{x}{\theta}}\ ;\ x > 0 \\ 0\ ;\ x \text{ yang lainnya} \end{cases} \tag{2.5}$$

dengan θ merupakan parameter skala. Sedangkan fungsi distribusi kumulatifnya adalah $F(X;\theta) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}\ , x > 0$. Mean dan variansinya adalah $\mu = \frac{1}{\theta}$ dan $\sigma^2 = \frac{1}{\theta^2}$.

Menurut Hines & Montgomery (1990: 179) distribusi eksponensial mempunyai sebuah daya tarik dan memiliki sifat yang unik untuk variabel kontinu; yaitu

$$\mathbb{P}(X > x + s |\ X > x) = \frac{\mathbb{P}(X>x+s)}{\mathbb{P}(X>x)} = \frac{e^{-\lambda(x+s)}}{e^{-\lambda s}} = -e^{-\lambda s}.$$

2.11 Ruang Keadaan (*State Space*)

Menurut Praptono (1986: 2.3) himpunan harga-harga yang mungkin untuk suatu variable acak X_n dari suatu proses stokastik $\{X_n, n \geq 1\}$ disebut ruang keadaan (*state space*).

2.12 Rantai Markov

Menurut Richey (2010) diberikan *state space* berhingga $\mathbb{S} = \{1, 2, \dots, N\}$, sebuah rantai Markov adalah proses stokastik yang didefinisikan oleh sebuah runtutan peubah acak, $X_i \in \mathbb{S}$, untuk $i = 1, 2, \dots$ sehingga

$$\mathbb{P}(X_{i+1} = x_{i+1} | X_i = x_i, \dots, X_k = x_i) = \mathbb{P}(X_{i+1} = x_{i+1} |\ X_k = x_i).$$

2.13 Sigma-Ajabar

Menurut LaValle (2006: 192), sebuah koleksi $\mathfrak{B}$ dari himpunan bagian X disebut sigma aljabar jika memenuhi aksioma berikut ini:

a. Himpunan kosong di $\mathfrak{B}$
b. Jika $B \in \mathfrak{B}$, maka $X \backslash B \in \mathfrak{B}$
c. Untuk semua koleksi dari bilangan yang dapat dihitung dari himpunan $\mathfrak{B}$, gabungannya juga harus berada di $\mathfrak{B}$.

2.14 Model Epidemi

Model epidemi adalah model matematika yang digunakan untuk mengetahui model pada penyebaran penyakit menular pada suatu daerah dan waktu tertentu. Menurut Mode & Sleeman (2000), model epidemik matematika untuk penyakit menular dapat diklasifikasikan menjadi dua kelas, yaitu model deterministik dan model stokastik. Model deterministik sering kali diformulasikan dengan sistem persamaan diferensial. Sedangkan model stokastik diformulasikan sebagai proses stokastik dengan kumpulan peubah acak dan memiliki solusi berupa distribusi probabilitas untuk setiap peubah acak.

2.15 Model Epidemi SIRS

Model epidemi SIRS merupakan model epidemi yang menggambarkan penyebaran suatu penyakit menular yang dapat disembuhkan dan seiring berjalannya waktu, individu tersebut dapat kembali menjadi individu rentan kembali. Model ini terdiri dari tiga kelas yaitu S (*susceptible*), I (*infected*) dan R (*recovered*). *Susceptible* menggambarkan orang yang rentan terhadap penyakit. *Infected* menggambarkan orang yang telah terinfeksi. *Recovered* menggambarkan orang yang telah lolos dari penjangkitan penyakit. N menggambarkan populasi total.

Saat model penyebaran penyakit menular pada suatu populasi adalah model SIRS, maka individu yang rentan terhadap penyakit terserang bakteri atau virus penyebab penyakit tersebut. Sehingga orang tersebut tertular penyakit tersebut, kemudian dengan melakukan pengobatan atau proses alam, orang tersebut sembuh dari penyakit. Seiring berjalannya waktu, individu tersebut dapat kembali menjadi individu rentan kembali dikarenakan daya tahan tubuh yang dimiliki.

2.16 Proses Stokastik

Menurut Allen (2003: 24), proses stokastik adalah kumpulan peubah acak $\{X_t, t \in T, s \in S\}$, dimana *T* adalah himpunan indeks dan *S* adalah jangka waktu yang dimiliki sampel pada umumnya dari peubah acak. Untuk setiap *t*, $X_t(s)$ menunjukkan satu peubah acak yang didefinisikan oleh *S*. Untuk setiap $s \in S$, $X_t(s)$ berhubungan dengan fungsi yang didefinisikan pada *T* yang disebut *sample path* atau *stochastic realization* dari proses. Menurut Praptono (1986: 2.1) proses stokastik adalah himpunan variabel acak yang merupakan fungsi waktu (*time*) atau sering pula disebut dengan proses acak (*random process*).

2.17 Proses Stokastik Markov

Menurut Allen (2003: 42), sebuah proses stokastik Markov adalah proses stokastik dimana kejadian yang akan datang dari suatu sistem hanya bergantung pada waktu yang sedang terjadi (waktu kini) dan tidak pada waktu lampau.

Definisi 2.7

Sebuah proses stokastik waktu diskrit $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ disebut memiliki sifat Markov jika

$$\mathbb{P}(X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \ ,$$

dimana nilai $i_k \in \{1,2,\dots\}$ untuk $k = 0,1,2,\dots,n$. Maka proses stokastik disebut Rantai Markov atau lebih spesifiknya rantai Markov waktu diskrit. Hal ini disebut dengan rantai Markov waktu terbatas atau rantai Markov terbatas jika jangka waktunya terbatas (Allen, 2003: 42).

Definisi 2.8

Suatu proses stokastik $\{X(t), t \in [0,\infty)\}$, dikatakan rantai markov waktu kontinu jika memenuhi kondisi berikut: untuk setiap urutan dari bilangan real yang memenuhi $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$,

$$\mathbb{P}(X(t_{n+1}) = \ i_{n+1} | X(t_0) = i_0, X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n)$$

$$= \mathbb{P}(X(t_{n+1}) = \ i_{n+1} | \ X(t_n) = i_n)$$

(Allen, 2003: 172).

Menurut Praptono (1986: 3.32) *state* dalam ruang *state* rantai Markov mempunyai sifat berlainan, yaitu *absorbing state*, *recurreent state*, dan *transient state*.

Definisi 2.9

Suatu *state* $a \in \mathcal{S}$ pada suatu rantai Markov disebut *absorbing state* bila $\mathbb{P}(a, a) = 1$ atau $\mathbb{P}(a, y) = 0$ untuk $y \neq a$ (Praptono, 1986: 3.10).

Definisi 2.10

$$\rho_{xy} = \mathbb{P}_x(T_y < \infty)$$

menunjukkan probabilitas rantai Markov bermula dari x akan mencapai y pada suatu waktu yang berhingga. Keadaan khusus

$$\rho_{yy} = \mathbb{P}_y(T_y < \infty)$$

menunjukkan probabilitas rantai Markov bermula dari y akan pernah kembali ke y lagi.

Suatu *state* $y \in \mathcal{S}$ disebut rekuren bila $\rho_{yy} = 1$, dan tansien bila $\rho_{yy} < 1$ (Praptono, 1986: 3.32).

2.18 Fungsi Pembangkit

Menurut Sutarno *et al*. (2005: 35) fungsi pembangkit merupakan alat untuk menangani masalah-masalah pemilihan dan penyusunan dengan pengulangan. Fungsi pembangkit diperlukan untuk menyelesaikan masalah yang tidak memperhatikan urutan.

Definisi 2.11

Probability generating function (p.g.f.) dari peubah acak *X* adalah fungsi yang didefinisikan sebagai sebuah himpunan bagian dari bilangan riil yang dinotasikan dengan

$$\mathcal{P}_X(t) = E(t^X) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j,$$

untuk $t \in \mathbb{R}$ dan $|t| \leq 1$ (Allen, 2003: 18).

Misalkan f menunjukkan f.k.p. dari X, maka $f(n) = \mathbb{P}(X = n)$ untuk $n \in \mathbb{N}$. *Probability generating function* dapat diperoleh dari f.k.p. yang dimiliki oleh peubah acak X sebagai berikut.

$$\mathcal{P}_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) t^n.$$

Probability generating function sering digunakan untuk meringkas deskripsi dari urutan dari probabilitas untuk suatu peubah acak X.

Definisi 2.12

$$\Phi(t) = f(0) + \sum_{j=0}^{\infty} f(y) t^y a), 0 \leq t \leq 1 \quad (2.6)$$

dan f fungsi idensitas. $\Phi(t)$ disebut fungsi pembangkit probabilitas (*probability generating function*) (Praptono, 1986: 4.29).

Definisi 2.13

Menurut Sutarno *et al*. (2005: 35) deret kuasa didefinisikan sebagai deret tak terhingga yang berbentuk

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Deret tak terhingga ini selalu konvergen untuk $|x| < R$, untuk suatu bilangan positif R. R dalam hal ini disebut radius konvergensi dari deret kuasa di atas.

Definisi 2.14

Misalkan $(a_k) = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ adalah sebuah barisan bilangan. Fungsi pembangkit biasa (*ordinary generating function*) dari barisan $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ adalah deret kuasa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \qquad (2.7)$$

Sutarno, *et al.* (2005:36).

Definisi 2.15

Sutarno, *et al.* (2005: 42) mengatakan bahwa untuk barisan bilangan real $a_0,\ a_1,\ a_2, \dots,$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2 x^2}{2!} + \frac{a_3 x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} \qquad (2.8)$$

disebut fungsi pembangkit eksponensial (*exponential generating function*) bagi barisan tersebut. Beberapa idensitas ekspansi untuk fungsi pembangkit eksponensial yaitu:

a. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ (2.9)

b. $e^{nx} = 1 + nx + n^2 \frac{x^2}{2!} + n^3 \frac{x^3}{3!} + \cdots + n^r \frac{x^r}{r!} + \cdots$ (2.10)

c. $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ (2.11)

d. $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$, dan (2.12)

e. $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$ (2.13)

Identitas ekspansi yang digunakan dalam skripsi ini adalah identitas a dan b.

2.19 Angka Rasio Reproduksi Dasar

Angka rasio reproduksi dasar digunakan untuk mengetahui kestabilan dari penyebaran penyakit. Menurut Mode & Sleeman (2000: 168), hal yang sangat berperan dalam pembelajaran epidemik pada penyakit menular adalah angka rasio reproduksi dasar R_0, yang mendefinisikan jumlah yang diharapkan dari kasus tambahan yang dihasilkan oleh satu individu yang terinfeksi pada populasi *susceptible* yang besar selama periode penginfeksiannya. Rasio tersebut diperlukan sebagai parameter untuk mengetahui tingat penyebaran suatu penyakit. Ketika $R_0 \leq 1$ maka epidemik hilang atau punah.

2.20 Proses Pencabangan (*Branching Process*) Waktu Diskrit

Menurut Allen (2003: 139) proses pencabangan waktu diskrit adalah tipe yang spesial dari rantai Markov waktu diskrit. Proses pencabangan waktu diskrit adalah rantai Markov waktu diskrit dimana variabel waktu dan ruang keadaan adalah diskrit dan keadan pada waktu $n+1$ bergantung hanya kepada keadaan dari sistem pada waktu n. Teknik yang digunakan dalam proses pencabangan adalah teknik *probability generating function*. Jika pada generasi ke-*n* jumlah populasi adalah nol, $X_n = 0$ maka proses berhenti, $X_{n+k} = 0$ untuk $k = 1, 2, \ldots$. Maka keadaan pada nol merupakan *absorbing state* yaitu transisi *one-step* $p_{00} = 1$. Menurut Praptono (1986: 3.32) *absorbing state* dalam rantai Markov adalah *state* yang memiliki sifat $\mathbb{P}(a, a) = 1$.

2.21 Proses Pencabangan Bienaymé-Galton-Watson (BGW)

Proses pencabangan BGW berbentuk rantai Markov waktu diskrit. Menurut Mode & Sleeman (2000: 169), pembatasan masalah dari proses BGW hanya urutan generasi dari keturunan yang digunakan pada rumus waktu diskrit. Contohnya, pada keadaan epidemik dari penyakit menular, sebuah keturunan dari individu yang terinfeksi yang dihasilkan adalah seseorang yang terinfeksi oleh individu yang telah terinfeksi tersebut dan generasi dari keturunan yang dihasilkan oleh individu yang telah terinfeksi adalah jumlah total dari orang yang ditularkannya selama periode penginfeksiannya. Perluasan dari proses pencabangan BGW sebagai berikut.

1. Bellman-Harris *process* merupakan proses pencabangan dimana individu yang bebas memiliki panjang waktu yang berbeda-beda.
2. Sevast'yanov merupakan proses pencabangan yang bergantung pada jangka waktu seseorang untuk hidup dan bereproduksi.
3. *Branching Process* pada kasus terjadinya imigrasi.
4. *Branching Process* pada lingkungan yang acak.
5. Crump-Mode-Jagers: individu memiliki jangka waktu untuk hidup berbeda-beda ketika kelahiran terjadi sebagai *point process*, waktu yang digunakan adalah waktu kontinu dan diikuti oleh beberapa tipe ketergantungan antara reproduksi dan kehidupan.
6. *General multi-type processes*: Ney, Sevast'yanov, Mode.

Teorema 2.2

Diasumsikan distribusi untuk suatu keturunan $\{p_k\}$ dan fungsi kepadatan peluang $f(t)$ yang memenuhi persamaan $0 < p_0$ dan $0 < p_0 + p_1 < 1$ dan sifat:

(1) $f(0) = p_0 > 0$ dan $f(1) = 1$.

(2) $f(t)$ kontinu untuk $t \in [0,1]$.

(3) $f(t)$ terdiferensial secara tak berhingga untuk $t \in [0,1)$.

(4) $f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k t^{k-1} > 0$ untuk $t \in (0,1]$, dimana $f'(t)$ didefinisikan dengan $m = f'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k$.

(5) $f''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k t^{k-2} > 0$ untuk $t \in (0,1)$.

Diasumsikan $X_0 = 1$. Maka keadaan ke-$1, 2, \ldots$, merupakan transisi. Jika $m > 1$ maka $\lim_{n\to\infty} v\{X_n = 0\} = q$, dimana $0 < q < 1$ merupakan *unique fixed point* dari *probability generating function*, $f(q) = q$ *dan* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = \infty\} = 1 - q$ (Allen, 2003: 150).

2.22 Proses Crump-Mode-Jagers (CMJ)

Proses CMJ merupakan cabang proses dari proses BGW. Menurut Mode & Sleeman (2000: 169) proses CMJ digunakan untuk menyelesaikan masalah ketika periode penginfeksian memiliki durasi yang acak dan sepanjang durasi tersebut seseorang yang terinfeksi mungkin menginfeksi orang lain secara acak pada suatu waktu. Proses CMJ dapat dilihat sebagai pendekatan untuk pembelajaran pada model stokastik pada epidemik untuk populasi tertutup yang lebih ekstensif seperti proses SIR. Untuk sebuah *one-type* proses CMJ, parameter ambang batas pada sebuah keadaan epidemik, merupakan jumlah yang diharapkan dari individu yang terinfeksi oleh satu individu yang terinfeksi selama periode penginfeksiannya.

Teorema 2.3

Misalkan $f(0) > 0$.

(i) Jika $m \leq 1$, maka $z = 1$.

(ii) Tetapi, jika $m > 1$, maka $0 < z < 1$ dan merupakan akar terkecil dari persamaan $u = h(u)$ pada (0,1)

(Mode & Sleeman, 2000: 174).

Teorema 2.4

Misalkan $h(s)$ probabilitas fungsi pembangkit (*probability generating function*) pada persamaan

$$m = E[N] = \int_0^\infty b(x)\big(1 - G(x)\big)dx \tag{2.14}$$

dimana m adalah ekspektasi dari jumlah total orang yang rentan yang terinfeksi oleh beberapa orang yang terinfeksi sepanjang periode penginfeksiannya.

$b(x)$ adalah densitas dari *mean function* dari *K-process*.

$G(x)$ adalah fungsi distribusi dari peubah acak pada *life cycle model* ($\mathcal{H} = (T, K)$).

Misalkan $\mathbb{P}[N = 0] = h(0) > 0$, dan misalkan q adalah probabilitas dari proses CMJ waktu kontinu menjadi punah, diberikan $Z(0) = 1$.

(i) Jika $R_0 \leq 1$, maka $q = 1$

(ii) Tetapi jika $R_0 > 1$, maka q adalah akar terkecil dari persamaan $s = h(s)$ pada (0,1)

(Mode & Sleeman, 2000: 178).

Lemma 2.1

(i) $\mathbb{P}[B] = 1$.

(ii) Jika D merupakan suatu himpunan pada $\mathcal{F}$, maka $\mathbb{P}[D \cap B] = \mathbb{P}[D]$.

(Mode & Sleeman, 2000: 210).

2.23 Proses Bernoulli

Menurut Praptono (1986: 2.7) proses stokastik sederhana yang terkenal adalah proses Bernoulli, yaitu $\{X_n, n \geq 1\}$, dimana indikator Bernoulli $\xi = 0, 1$ untuk setiap $X_n, n = 1, 2, \ldots$ dan memenuhi

a. $X_1, X_2, \ldots$, independen dan

b. $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ dan $\mathbb{P}(X_n = 0) = q = 1 - p$ untuk semua n.

2.24 Kekonvergenan

Teorema 2.5

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rangkaian yang konvergen, maka $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ (Goldberg, 1976: 69).

Teorema 2.6

Menurut Schechter (1997), misalkan (X, Σ, μ) merupakan *measure space*. Misalkan $f_1, f_{2,\ldots}$ merupakan *pointwise non-decreasing* barisan dari $[0, \infty]$-nilai Σ-

measurable fungsi, yaitu untuk setiap $k \geq 1$ dan untuk setiap x pada X, $0 \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$.

Kemudian, *pointwise limit* dari barisan (f_n) menjadi *f*. Sehingga, untuk setiap *x* pada *X*,

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \tag{2.15}$$

Kemudian, f Σ *–measurable* dan

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k d\mu = \int f d\mu \tag{2.16}$$

Teorema 2.7

Menurut Khotimah *et al.* (2011) diketahui $f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$ fungsi, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ dengan f_n terintegral Riemann pada $[a,b]$ untuk setiap n dan f_n konvergen ke fungsi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Jika barisan fungsi f_n monoton pada $[a,b]$ dan ada bilangan $M_1 > 0$ sehingga $|f_n(x)| \leq M_1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $x \in [a,b]$, maka fungsi terintegral Riemann pada $[a,b]$ dan

$$(R)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n \tag{2.17}$$

2.25 Transformasi Laplace

Menurut Stroud & Booth (2003) diberikan fungsi $f(t)$ yang didefinisikan untuk nilai dari variabel $t > 0$ maka transformasi Laplace dari $f(t)$ yang dinotasikan dengan

$$L\{f(t)\}$$

didefinisikan dengan

$$L\{f(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \tag{2.18}$$

dimana *s* merupakan sebuah variabel yang memiliki nilai yang dipilih untuk memastikan bahwa semi tak berhingga integral yang konvergen.

2.26 Distribusi Gamma

Menurut Djauhari (1990: 173) pemakaian model distribusi gamma dapat dijumpai sebagai model peluang untuk masalah waktu tunggu (*waiting time*). Misalkan peubah acak W menunjukkan waktu yang dibutuhkan untuk memperoleh *k* kali sukses. Fungsi distribusi dari *W* adalah:

$G(w) = \mathbb{P}(W \leq w) = 1 - \mathbb{P}(W > w)$.

Sedangkan peristiwa $W > w$ ekivalen dengan peristiwa bahwa dalam selang waktu w terjadi paling banyak $(k-1)$ kali sukses. Oleh karena itu,

$\lambda =$ rata-rata banyaknya sukses dalam selang waktu satuan, dan

$X =$ banyaknya sukses dalam selang waktu *w*, maka

(i) $X \sim p(\lambda, w)$

(ii) $\mathbb{P}(W > w) = \mathbb{P}(X \leq k-1) = \sum_{\lambda=0}^{k-1} \frac{(\lambda w)^X e^{-\lambda w}}{x!}$.

Definisi 2.16

Peubah acak *X* dikatakan berdistribusi gamma dengan parameter $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$, ditulis $X \sim G(\alpha, \beta)$, jika f.k.p. dari *X* adalah:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}; x > 0 \\ 0 \qquad ; x \leq 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

Mean dan variansi dari *X* adalah:

$\mu = \alpha\beta$

$\sigma^2 = \alpha\beta^2$

(Djauhari, 1990: 175).

2.27 Persamaan Diferensial

Menurut Waluya (2006: 1) persamaan diferensial didefinisikan sebagai persamaan yang memuat satu atau beberapa turunan fungsi yang tak diketahui. Menurut peubah bebas, persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi dua macam yaitu persamaan diferensial biasa dan parsial sedangkan persamaan diferensial dilihat dari bentuk fungsi atau pangkatnya juga dibedakan menjadi dua yaitu persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial non linear.

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan dari variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas. Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang mengandung turunan parsial dari variabel tak bebas terhadap dua variabel bebas atau lebih.

2.28 Sistem Persamaan Diferensial

Menurut Waluya, sebagaimana dikutip dalam Astuti (2012) diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{2.20}$$

dengan kondisi awal $x_i(t_0) = x_{i0}$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$. Sistem (2.20) dapat ditulis menjadi

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.21}$$

dengan $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E,\ f = (f_1, f_2, \ldots, f_n),\ \dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$ dan kondisi awal $x(t_0) = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) = x_0$. Selanjutnya notasi $x(t) = (x_0, , t)$ menyatakan solusi sistem (2.21) dengan nilai awal x_0.

Sistem dari dua persamaan diferensial dengan dua fungsi yang tak diketahui berbentuk.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)\ x_1 + a_{12}(t) x_2 + f_1(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)\ x_1 + a_{22}(t) x_2 + f_2(t) \end{aligned} \tag{2.22}$$

dimana koefiensi $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ dan f_1, f_2 merupakan fungsi t yang kontinu pada selang I dan x_1, x_2 adalah fungsi t yang tak diketahui. Sistem (2.22) memiliki penyelesaian eksplisit jika koefisien $a_{11}, a_{12}, a_{21},\ dan\, a_{22}$ semuanya konstanta.

Sistem persamaan diferensial linear dengan n buah fungsi-fungsi yang tak diketahui berbentuk

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)\ x_1 + a_{12}(t) x_2 + \ldots + a_{1n}(t) x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)\ x_1 + a_{22}(t) x_2 + \ldots + a_{2n}(t) x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)\ x_1 + a_{n2}(t) x_2 + \ldots + a_{nn}(t) x_n + f_n(t) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Atau secara singkat:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_i + f_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Sistem persamaan yang terdiri dari *n* buah persamaan differensial tak linear dengan *n* buah fungsi tak diketahui. Bentuk umum sistem persamaan differensial tak linear dapat ditulis:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y, t)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x, y, t) \qquad (2.24)$$

dengan *F (x, y, t)* dan *G (x, y, t)* adalah fungsi-fungsi tak linier dari *x* dan *y* secara kualitatif dibanding kuantitatif.

Contoh:

Perhatikan sistem persamaan diferensial berikut ini:

$$x' = 2x - y - 5t \qquad (2.25)$$

$$y' = 3x + 6y - 4$$

Tunjukkan bahwa

$$x = C_1e^{5t} + C_2e^{3t} + 2t + 1$$

$$y = -3C_1e^{5t} - C_2e^{3t} - t$$

adalah solusi umum dari sistem (2.25).

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan bahwa $x = e^{5t}$, $x = e^{3t}$ dan $y = -3e^{5t}, y = -e^{3t}$ adalah dua solusi bebas linear dari system persamaan diferensial linear homogen yang berkaitan dengan sistem (2.25), yaitu sistem

$$x' = 2x - y \qquad (2.26)$$

$$y' = 3x + 6y$$

Substitusikan $x = e^{5t}$, $x' = 5e^{5t}, y = -3e^{5t}$ dan $y' = -15e^{5t}$ ke dalam (2.26).

Diperoleh

$$5e^{5t} = 2e^{5t} + 3e^{5t}$$

$$-15e^{5t} = 3e^{5t} - 18e^{5t}.$$

Substitusikan $x = e^{3t}$, $x' = 3e^{5t}, y = -e^{3t}$ dan $y' = -3e^{3t}$ ke dalam (2.26).

Diperoleh

$$3e^{3t} = 2e^{3t} + e^{3t}$$

$$-3e^{3t} = 3e^{3t} - 6e^{3t}.$$

Jadi $x = e^{5t},\ x = e^{3t},\ y = -3e^{5t}$ dan $y = -e^{3t}$ adalah solusi dari sistem (2.26).

Akan ditunjukkan bahwa kedua solusi tersebut bebas linear.

$$\begin{vmatrix} e^{5t} & e^{5t} \\ -3e^{5t} & -e^{3t} \end{vmatrix} = 2e^{8t} \neq 0$$

Jadi kedua solusi tersebut bebas linear.

Akan ditunjukkan bahwa $x = 2t + 1$ dan $y = -t$ adalah solusi dari sistem (2.25).

Substitusikan $x = 2t + 1,\ x' = 2, y = -t,$ dan $y' = 1$ ke dalam sistem (2.25), maka

$$2 = 4t + 2 + t - 5t$$

$$-1 = 6t + 3 - 6t - 4$$

Jadi $x = 2t + 1$ dan $y = -t$ benar solusi dari system (2.25).

Jadi $x = C_1e^{5t} + C_2e^{3t} + 2t + 1$ dan $y = -3C_1e^{5t} - C_2e^{3t} - t$ adalah benar solusi umum sistem persamaan diferensial (2.25) (Pamuntjak & Santosa, 1990: 5.7-5.8).

2.29 Persamaan Diferensial Autonomus

Menurut Zill & Cullen (2009: 37) persamaan diferensial biasa dimana variabel bebasnya tidak muncul secara eksplisit disebut autonomus. Jika x menunjukkan variable bebas, maka persamaan diferensial orde satu dapat dituliskan dengan $f(y, y') = 0$ atau dengan bentuk normalnya dengan

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \tag{2.20}$$

Diasumsikan fungsi f pada (2.20) dan turunannya f' fungsi kontinu dari y pada suatu interval I. Persamaan orde satu

$$\frac{dy}{dt} = 1 + y^2 \text{ dan } \frac{dy}{dt} = 0{,}2xy \tag{2.21}$$

dimana $y^2 = f(y)$ dan $xy = f(x, y)$ merupakan autonomus dan nonautonomus secara berturut-turut.

2.30 Penyakit Influenza

2.30.1 Etiologi

Influenza merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh virus RNA dari familia *Orthomyxoviridae* (virus influenza) yang menyerang unggas dan mamalia. Menurut Derouich & Boutayeb (2008) virus influenza diklasifikasikan menjadi tiga kelas yaitu virus influenza A, B, dan C. Virus tipe A memiliki pengaruh yang sangat besar pada kehidupan sehari-hari. Hal ini dikarenakan virus ini dapat menggabungkan gen-gennya dengan *strain* virus yang lain yang ada pada binatang. Salah satu contoh binatang yang dapat digabungkan adalah burung, babi, dan kuda. Menurut Hay *et al.* (2001) virus influenza dapat dibagi lagi menjadi beberapa kelompok berdasarkan serotipe-serotipe yang berbeda berdasarkan respon antibodi yang dimiliki masing-masing individu terhadap virus ini.

2.30.2 Penularan

Ada tiga cara penularan virus influenza, yang pertama adalah melalui penularan langsung yaitu penularan saat orang yang terinfeksi dari bersin atau batuk orang yang sudah terinfeksi virus influenza dan masuk langsung ke tubuh orang lain yang belum terinfeksi melalui mata, hidung atau mulut. Cara yang kedua adalah melalui udara yaitu saat seorang individu yang tidak terinfeksi menghirup udara yang mengandung aerosol (butiran kecil yang ada pada udara) yang mengandung virus influenza yang dihasilkan oleh orang yang terinfeksi virus influenza saat batuk atau bersin. Cara yang ketiga adalah penularan yang disebabkan oleh permukaan yang telah terkontaminasi virus influenza.

Anak- anak sangat rentan terhadap virus ini. Anak-anak dapat menularkan virus ini sebelum mereka mengalami gejala hingga dua minggu setelah mereka terinfeksi. Seorang yang telah terinfeksi virus influenza biasanya dapat menularkannya satu hari sebelum gejala dan virus akan dilepaskan selama 5 sampai 7 hari. Jangka waktu virus influenza dapat bertahan di luar tubuh beragam. Virus dapat bertahan selama satu sampai dua hari pada permukaan yang keras dan tidak berpori seperti plastik, 5 menit pada kulit, dan 15 menit pada tissue kering. Virus dapat bertahan lama jika virus tersebut terdapat pada lendir atau mukus.

Virus juga dapat dinonaktifkan dengan pemanasan hingga 56℃ selama 60 menit dan dengan menggunakan asam pada pH< 2.

a. Gejala

Menurut Zambon (1999), penginfeksian akut memiliki permulaan dengan ciri-ciri gejala yaitu demam (pada daerah yang memiliki suhu 39-40℃), kedinginan, batuk, sakit kepala, nyeri pada otot, sakit pada tenggorokan, tidak enak badan, dan banyak lagi gejala yang tidak spesifik.

b. Cara mencegah dan penyembuhan

Vaksinasi dapat dilakukan untuk mencegah penularan virus influenza. Whitley & Monto (2006) mengatakan bahwa kelompok yang beresiko tertular virus influenza tinggi adalah wanita hamil dan anak kecil. Penderita influenza diharapkan untuk banyak beristirahat, minum banyak cairan, menghindari penggunaan alkohol dan rokok, dan apabila diperlukan, mengonsumsi obat seperti asetaminofen (parasetamol) untuk meredakan gejala demam dan nyeri otot yang berhubungan dengan flu.

2.31 Maple

Maple merupakan salah satu perangkat lunak *(software)* yang dikembangkan oleh Waterloo Inc. Kanada. Maple sering digunakan untuk keperluan *Computer Algebraic System (CAS)*. Maple dapat digunakan untuk keperluan penyelesaian permasalahan persamaan diferensial dan visualisasinya, karena Maple memiliki kemampuan menyederhanakan persamaan, hingga suatu solusi persamaan diferensial dapat dipahami dengan baik. Menu-menu yang terdapat pada tampilan program Maple ini terdiri dari menu *File, Edit, View, Insert, Format, Spreadsheet, Option, Window*, dan *Help.*

Bahasa yang digunakan pada *Maple* merupakan bahasa pemrograman yang sekaligus sebagai bahasa aplikasi, sebab pernyataan atau *statement* yang merupakan input pada *Maple* berupa deklarasi pada bahasa program dan perintah *(command)* yang sering digunakan pada bahasa aplikasi.

BAB 3
METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini metode yang penulis gunakan adalah metode studi pustaka. Langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut.

3.1 Menentukan Masalah

Tahap ini dilakukan pencarian sumber pustaka dan memilih bagian dalam sumber pustaka tersebut yang dapat dijadikan sebagai permasalahan yang akan dikaji. Dalam hal ini penulis mengambil materi tentang pemodelan penyakit menggunakan metode SIRS stokastik dengan studi kasus pada penyakit influenza.

3.2 Merumuskan Masalah

Masalah yang ditemukan kemudian dirumuskan kedalam pertanyaan yang harus diselesaikan yaitu sebagai berikut.

(1) Bagaimana model epidemi SIRS stokastik untuk penyebaran penyakit influenza?

(2) Bagaimana analisa model epidemi SIRS stokastik untuk penyebaran penyakit influenza?

(3) Bagaimana perilaku penyakit ini untuk masa yang akan datang?

Perumusan masalah di atas mengacu pada beberapa pustaka yang ada. Selanjutnya dengan menggunakan pendekatan teoritik, maka dapat ditemukan jawaban permasalahan sehingga tercapai tujuan penulisan skripsi.

3.3 Studi Pustaka

Pada langkah ini dilakukan kajian sumber-sumber pustaka dengan cara mengumpulkan data atau informasi yang berkaitan dengan masalah, mengumpulkan konsep pendukung yang diperlukan dalam menyelesaikan masalah, sehingga didapatkan suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah.

3.4 Analisis dan Pemecahan Masalah

Dari berbagai sumber pustaka yang sudah menjadi bahan kajian, diperoleh suatu pemecahan masalah di atas. Selanjutnya dilakukan langkah-langkah pemecahan masalah sebagai berikut.

1. Mencari model epidemi SIRS stokastik untuk penyebaran penyakit influenza.
2. Menyelipkan model deterministik pada model stokastik yang telah diperoleh
3. Mencari R_0 menggunakan proses CMJ dengan menyelipkan proses BGW untuk beberapa proses.
4. Menentukan analisa model epidemi SIRS stokastik untuk penyebaran penyakit influenza.
5. Melakukan simulasi dari model yang telah diperoleh.
6. Menentukan perilaku penyakit ini untuk masa yang akan datang.

3.5 Penarikan Kesimpulan

Langkah terakhir dalam metode penelitian adalah penarikan kesimpulan yang diperoleh dari hasil langkah pemecahan masalah.

BAB 5

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, diperoleh kesimpulan berikut.

1. Model epidemi SIRS stokastik untuk penyebaran penyakit influenza pada penulisan ini adalah

   $S_d(t+h) = S_d(t) - B(t+h) + W(t+h)$

   $I_d(t+h) = I_d(t) + B(t+h) - D(t+h)$

   $R_d(t+h) = R_d(t) + D(t+h) - W(t+h)$

   $N(t+h) = S_d(t) + I_d(t) + R_d(t)$

   dengan

   $B(t) \sim \text{Bin}(S_d(t), P(t))$

   $D(t) \sim \text{Bin}(I_d(t), p_R)$

   $W(t) \sim \text{Bin}(R_d(t), p_R)$

   sehingga diperoleh $N(t+h) = N$.

   Penyelipan model deterministik pada model stokastik membentuk persamaan

   $\frac{d\hat{S}(t)}{dt} = -\hat{S}(t)\lambda\frac{\hat{I}(t)p}{N} + \hat{R}(t)\beta$

   $\frac{d\hat{I}(t)}{dt} = \hat{S}(t)\,\lambda\frac{\hat{I}(t)p}{N} - \hat{I}(t)\gamma$

   $\frac{d\hat{R}(t)}{dt} = \hat{I}(t)\gamma - \hat{R}(t)\beta$

2. Dari model epidemi SIRS stokastik untuk penyebaran penyakit influenza pada penulisan ini diperoleh angka rasio reproduksi dasar $R_0 = \frac{\lambda p}{\gamma}$. Pada saat $R_0 < 1$ maka epidemik punah atau berakhir. Saat $R_0 \geq 1$ maka epidemik terjadi.
3. Berdasarkan angka $R_0 = \frac{\lambda p}{\gamma}$ dengan nilai λ dan γ yang tetap dan nilai p yang berubah, diperoleh hasil bahwa jika nilai $R_0 < 1$ maka populasi individu rentan akan bertambah dan populasi individu yang terinfeksi akan berkurang bahkan hilang. Kemudian, jika $R_0 > 1$ maka populasi individu rentan akan berkurang dan populasi individu yang terinfeksi akan bertambah. Hal ini menunjukkan bahwa semakin besar peluang individu rentan terinfeksi oleh individu yang terinfeksi dengan jumlah rata-rata individu yang terinfeksi menularkan penyakit kepada individu rentan dan jumlah rata-rata individu yang terinfeksi sembuh benilai konstan maka semakin besar pula jumlah individu rentan yang terinfeksi.

5.2 Saran

Pada penelitian ini, banyaknya individu yang sembuh yang kembali menjadi individu rentan berdistribusi binomial. Untuk pengkajian lebih lanjut dapat dilakukan dengan menggunakan distribusi Poisson karena banyaknya individu yang sembuh yang kembali menjadi individu rentan bergantung pada selang waktu.

DAFTAR PUSTAKA

Allen, L.J.S. 2003. *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology*. USA: Pearson Education,INC.

Astuti, R. D. 2012. *Pemodelan Matematika Penyakit Chikungunya pada Populasi Konstan*. Skripsi. Semarang: FMIPA Universitas Negeri Semarang.

Nashrullah, A., Supriyono & M. Kharis. 2013. Pemodelan SIRS untuk Penyakit Influenza dengan Vaksinasi Pada Populasi Manusia Tak Konstan. *UNNES Journal of Mathematics*, 1: 46-54.

Anggoro, A. D., M. Kharis & Supriyono. 2013. Pemodelan Sirps Untuk Penyakit Influenza dengan Vaksinasi Pada Populasi Konstan. Skripsi. Semarang: FMIPA Universitas Negeri Semarang.

Carrat, F., J. Luong, H. Lao, A. V. Sallé, C. Lajaunie, & H. Wackernagel. 2006. A 'small-world-like' model for comparing interventions aimed at preventing and controlling influenza pandemics. *BMC Medicine*, 4:26.

Casagrandi, R., L. Bolzoni, S. A. Levin & V. Andreasen. 2006. The SIRC Model and Influenza A. *Mathematical Biosciences*, 200: 152-169.

Derouich, M. & A. Boutayeb. 2008. An Avian Influenza Mathematical Model. *Applied Mathematical Sciences*, 36: 1749-1760.

Djauhari, M. A. 1990. *Statistika Matematika*. Bandung: ITB.

Emmeluth, D. 2003. *Influenza* (*Deadly Disease and Epidemics*). New York: Chelsea House.

Hay, A., V. Gregory, A. Douglas, & Y. Lin. 2001. The Evolution of Human Influenza Viruses. *Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci*, 356(1416):1861–1870.

Hines, W. W. & D. C. Montgomery. 1972. *Probabilita dan Statistik dalam Ilmu Rekayasa dan Manajemen* (2^{th} ed.). Translated by Rudiansyah. 1990. Jakarta: Penerbit Universitas Indonesia.

Karian, Z. & E. A. Tanis. 2008. *Probability and Statistics: Exploration with Maple* (2^{nd} ed.). New Jersey: Pearson Prentice Hall, Upper Saddie River.

Khotimah, R. P., S. Darmawijaya & Ch. R. Indrati. 2011. Teorema-Teorema Kekonvergenan pada Integral Riemann, Lebesgue dan Henstock. *Prosiding Seminar Nasional Matematika*. Solo: Universitas Muhammadiah Surakarta.

LaValle, S.M. 2006. *Palanning Algorithms*. Inggris: Cambridge University. Tersedia di http://planning.cs.uiuc.edu/node432.html [diakses 29-01-2015].

LaValle, S.M. 2006. *Sampling-Based Motion Planning*. Inggris: Cambridge University Press.

Lekone, P.E., & B. F. Finkenstädt. 2006. Statistical Inference in a Stochastic Epidemic SEIR Model with Control Intervention: Ebola as a Case Study. *Biometrics*, 62 : 1170-1177.

Mode, C. J. & C.K. Sleeman. 2000. *Stochastic Processes in Epidemiology*. Singapore: World Scientific.

Nåsell, I. 2002. Stochastic Models of Some Endemic Infections. *Mathematical Biosciences*, 179: 1-19.

Nashrullah, A., Supriyono & M. Kharis. Pemodelan SIRS untuk Penyakit Influenza dengan Vaksinasi pada Populasi Manusia Tak Konstan. *UNNES Journal of Mathematics*, 2 (1): 46-54.

Pamuntjak, R. J. & W. Santosa. 1990. *Pesamaan Diferensial Biasa*. Bandung: ITB.

Praptono. 1986. *Materi Pokok Pengantar Proses Stokastik I.* Jakarta: Karunika.

Richey, M. 2010. The Evolution of Markov Chain Monte Carlo Methods. *The American Mathematical Monthly*. Amerika: Mathematical Association of America.

Schecter, E. 1997. *Handbook of Analysis and its Foundation.* San Diego: Academic Press.

Sugito & M. A. Mukid. 2011. Distribusi Poisson dan Distribusi Eksponensial dalam Proses Stokastik. *Media Statistika*, 4(2):113-120.

Sutarno, H., N. Priatna, & Nurjanah. 2005. *Matematika Diskrit*. Malang: UM Press.

Waluya, S.B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Whitley R.J. & A.S. Monto. 2006. Prevention and Treatment of Influenza in High-Risk Groups: Children, Pregnant Women, Immunocompromised Hosts, and Nursing Home Residents. *The Journalion of Infection Disease*, 194:133-138.

World Health Organization. 2009. *Influenza* (*Seasonal*), *WHO REPORT 2009.*

Yunita, F., P. Widyaningsih & Respatiwulan. Model Stokastik Susceptible Infected Recovered (SIR). *Prosiding Penguatan Matematika dan Pendidikan Matematika untuk Indonesia yang Lebih Baik*. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.

Zambon, M.C. 1999. Epidemiology and Pathogenesis of Influenza. *Journal of Antimicrobial Chemotherapy*, 44:3-9.

Zill, D. G. & M. R. Cullen. 2009. *Differential Equations with Boundary-Value Problems* (7th ed.). USA: Hearthside Publishing Service.

LAMPIRAN

Lampiran 1

Print Out Maple 12 untuk Kasus Bebas Penyakit

> $restart:$
> $with(DEtools):$
> $with(plots):$
> $unprotect(\gamma):$
> $\lambda := 5; p := 0.01; \beta := 1; \gamma := 1; R0 := \frac{\lambda \cdot p}{\gamma};$

$$\lambda := 5$$
$$p := 0.01$$
$$\beta := 1$$
$$\gamma := 1$$
$$R0 := 0.05$$

> $s0 := 9.9; i0 := 0.1; r0 := 0;$

$$s0 := 9.9$$
$$i0 := 0.1$$
$$r0 := 0$$

> $s1 := 9.0; i1 := 0.8; r1 := 0.2;$

$$s1 := 9.0$$
$$i1 := 0.8$$
$$r1 := 0.2$$

> $PD1 := diff(s(t), t) = r(t) \cdot \beta - s(t) \cdot i(t) \cdot \lambda \cdot p;$

$$PD1 := \frac{d}{dt} s(t) = r(t) - 0.05\, s(t)\, i(t)$$

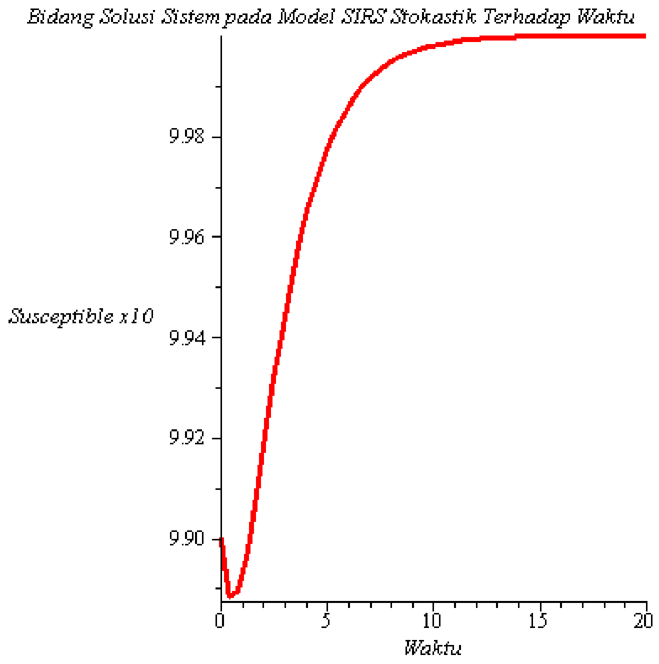
> $PD2 := diff(i(t), t) = s(t) \cdot i(t) \cdot p \cdot \lambda - i(t) \cdot \gamma;$

$$PD2 := \frac{d}{dt} i(t) = 0.05\, s(t)\, i(t) - i(t)$$

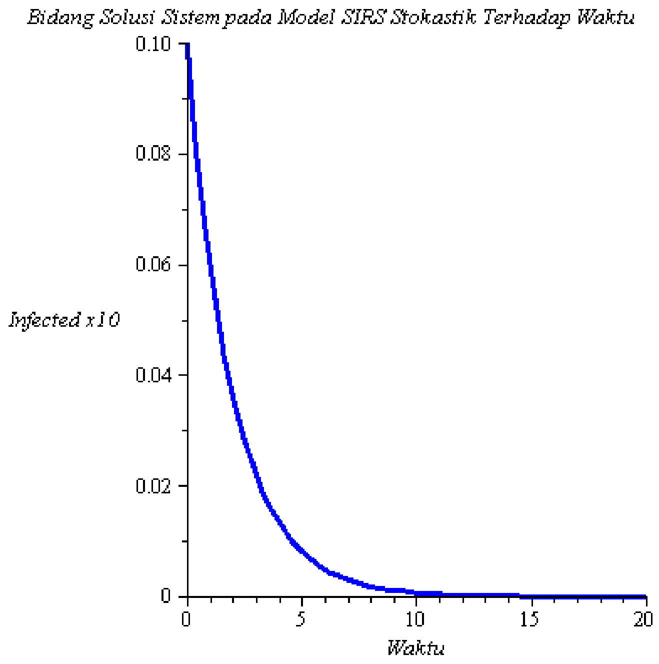
> $PD3 := diff(r(t), t) = i(t) \cdot \gamma - r(t) \cdot \beta;$

$$PD3 := \frac{d}{dt} r(t) = i(t) - r(t)$$

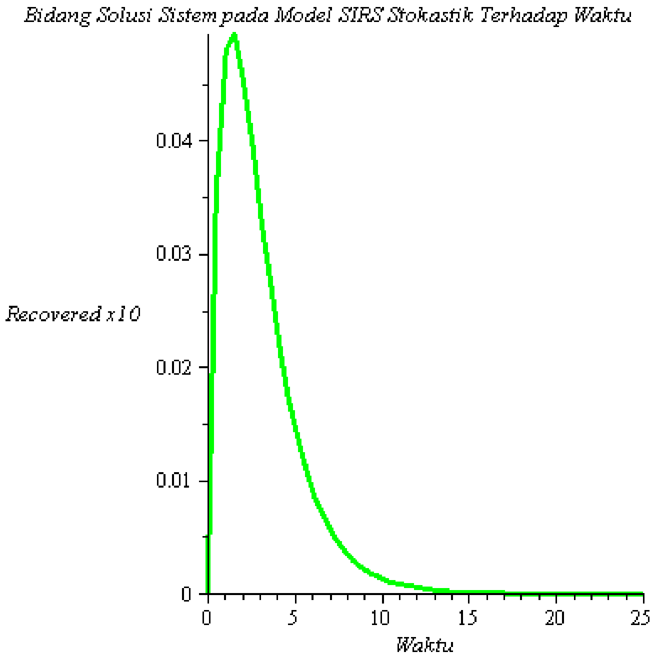
> $DEplot([PD1, PD2, PD3], [s(t), i(t), r(t)], t = 0..20, [[s(0) = 9.9,$
$i(0) = 0.1, r(0) = 0]], stepsize = 0.8, scene = [t, s(t)], labels = [$
'Waktu','Susceptible (x10)'], title =
'Bidang Solusi Sistem pada Model SIRS Stokastik Terhadap
Waktu', linecolour = red);



> $DEplot([PD1, PD2, PD3], [s(t), i(t), r(t)], t = 0..20, [[s(0) = 9.9, i(0) = 0.1, r(0) = 0]], stepsize = 0.8, scene = [t, i(t)], labels = [\text{'Waktu','Infected (x10)'}], title = \text{'Bidang Solusi Sistem pada Model SIRS Stokastik Terhadap Waktu'}, linecolour = blue);$



> $DEplot([PD1, PD2, PD3], [s(t), i(t), r(t)], t = 0..25, [[s(0) = 9.9, i(0) = 0.1, r(0) = 0]], stepsize = 0.8, scene = [t, r(t)], labels = ['Waktu', 'Recovered\ (x10)'], title = 'Bidang\ Solusi\ Sistem\ pada\ Model\ SIRS\ Stokastik\ \ Terhadap\ Waktu', linecolour = green);$



Lampiran 2

Print Out **Maple 12 untuk Kasus Endemik**

> $restart:$

> $with(DEtools):$

> $with(plots):$

> $unprotect(\gamma):$

> $\lambda := 5; p := 0.4; \beta := 1; \gamma := 1; R0 := \frac{\lambda \cdot p}{\gamma};$

$$\lambda := 5$$

$$p := 0.4$$

$$\beta := 1$$

$$\gamma := 1$$

$$R0 := 2.0$$

> $s0 := 9.9; i0 := 0.1; r0 := 0;$

$$s0 := 9.9$$

$$i0 := 0.1$$

$$r0 := 0$$

> $s1 := 9.0; i1 := 0.8; r1 := 0.2;$

$$s1 := 9.0$$

$$i1 := 0.8$$

$$r1 := 0.2$$

> $PD1 := diff(s(t), t) = r(t) \cdot \beta - s(t) \cdot i(t) \cdot \lambda \cdot p;$

$$PD1 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} s(t) = r(t) - 2.0\, s(t)\, i(t)$$

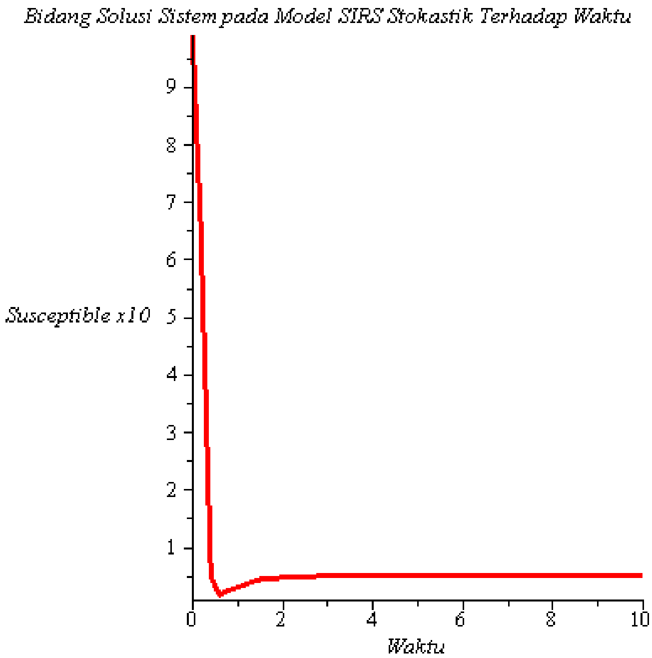
> $PD2 := diff(i(t), t) = s(t) \cdot i(t) \cdot p \cdot \lambda - i(t) \cdot \gamma;$

$$PD2 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) = 2.0\, s(t)\, i(t) - i(t)$$

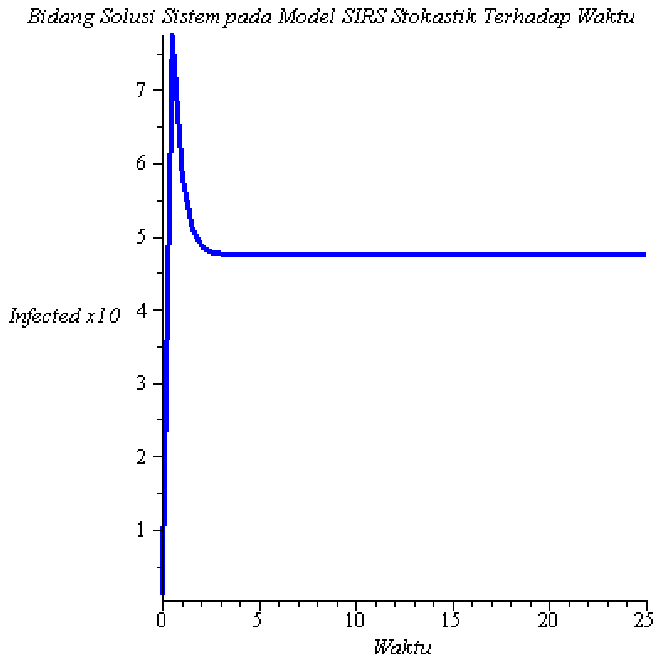
> $PD3 := diff(r(t), t) = i(t) \cdot \gamma - r(t) \cdot \beta;$

$$PD3 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(t) = i(t) - r(t)$$

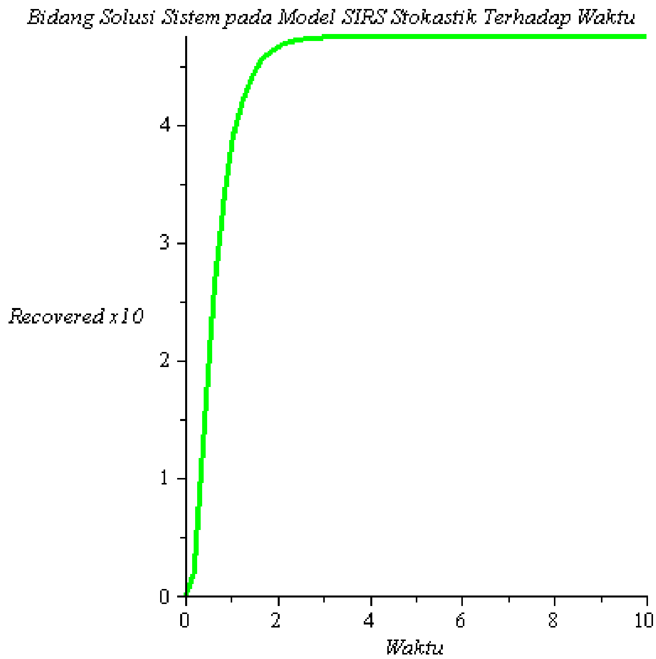
> *DEplot*([*PD1*, *PD2*, *PD3*], [*s*(*t*), *i*(*t*), *r*(*t*)], *t* = 0 ..10, [[*s*(0) = 9.9, *i*(0) = 0.1, *r*(0) = 0]], *stepsize* = 0.8, *scene* = [*t*, *s*(*t*)], *labels* = ['*Waktu*','*Susceptible (x10)*'], *title* = '*Bidang Solusi Sistem pada Model SIRS Stokastik Terhadap Waktu*', *linecolour* = *red*);



> *DEplot*([*PD1*, *PD2*, *PD3*], [*s*(*t*), *i*(*t*), *r*(*t*)], *t* = 0 ..25, [[*s*(0) = 9.9, *i*(0) = 0.1, *r*(0) = 0]], *stepsize* = 0.8, *scene* = [*t*, *i*(*t*)], *labels* = ['*Waktu*','*Infected (x10)*'], *title* = '*Bidang Solusi Sistem pada Model SIRS Stokastik Terhadap Waktu*', *linecolour* = *blue*);



> $DEplot([PD1, PD2, PD3], [s(t), i(t), r(t)], t = 0..10, [[s(0) = 9.9, i(0) = 0.1, r(0) = 0]], stepsize = 0.8, scene = [t, r(t)], labels = ['Waktu','Recovered\ (x10)'], title = 'Bidang\ Solusi\ Sistem\ pada\ Model\ SIRS\ Stokastik\ \ Terhadap\ Waktu', linecolour = green);$



Lampiran 3

Surat Penetapan Dosen Pembimbing Skripsi

KEPUTUSAN
DEKAN FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
Nomor: 743/P/2014
Tentang
PENETAPAN DOSEN PEMBIMBING SKRIPSI/TUGAS AKHIR SEMESTER GASAL/GENAP
TAHUN AKADEMIK 2014/2015

Menimbang : Bahwa untuk memperlancar mahasiswa Jurusan/Prodi Matematika/Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam membuat Skripsi/Tugas Akhir, maka perlu menetapkan Dosen-dosen Jurusan/Prodi Matematika/Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam UNNES untuk menjadi pembimbing.

Mengingat :
1. Undang-undang No.20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional (Tambahan Lembaran Negara RI No.4301, penjelasan atas Lembaran Negara RI Tahun 2003, Nomor 78)
2. Peraturan Rektor No. 21 Tahun 2011 tentang Sistem Informasi Skripsi UNNES
3. SK. Rektor UNNES No. 164/O/2004 tentang Pedoman penyusunan Skripsi/Tugas Akhir Mahasiswa Strata Satu (S1) UNNES;
4. SK Rektor UNNES No.162/O/2004 tentang penyelenggaraan Pendidikan UNNES;

Menimbang : Usulan Ketua Jurusan/Prodi Matematika/Matematika Tanggal 28 Oktober 2014

MEMUTUSKAN

Menetapkan :

PERTAMA : Menunjuk dan menugaskan kepada:

1. Nama : Muhammad Kharis, S.Si., M.Sc.
   NIP : 198210122005011001
   Pangkat/Golongan : III/B
   Jabatan Akademik : Lektor
   Sebagai Pembimbing I
2. Nama : Putriaji Hendikawati, S.Si., M.Pd., M.Sc.
   NIP : 198208182006042001
   Pangkat/Golongan : III/B
   Jabatan Akademik : Lektor
   Sebagai Pembimbing II

Untuk membimbing mahasiswa penyusun skripsi/Tugas Akhir :

Nama : NOVIA NILAM NURLAZUARDINI
NIM : 4111411024
Jurusan/Prodi : Matematika/Matematika
Topik : Inferensi Statistika pada Model Epidemi SIR Stokastik dalam Studi Kasus Influenza

KEDUA : Keputusan ini mulai berlaku sejak tanggal ditetapkan.

DITETAPKAN DI : SEMARANG
PADA TANGGAL : 11 November 2014
DEKAN

Prof. Dr. Wiyanto, M.Si.
NIP 196310121988031001

Tembusan
1. Pembantu Dekan Bidang Akademik
2. Ketua Jurusan
3. Petinggal

4111411024
FM-03-AKD-24/Rev. 00