



**MODEL MATEMATIKA DAN SOLUSI DARI
SISTEM GETARAN DUA DERAJAT KEBEBASAN
(GETARAN TERGANDENG)**

skripsi

disajikan sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar sarjana sains

Jurusan Matematika

oleh
Wahyu Eko Wijayanto

4150405504

Matematika S1

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG**

2009

PENGESAHAN

Skripsi ini telah dipertahankan di hadapan Sidang Panitia Ujian Skripsi Jurusan Matematika FMIPA UNNES pada tanggal 25 Agustus 2009

Panitia:

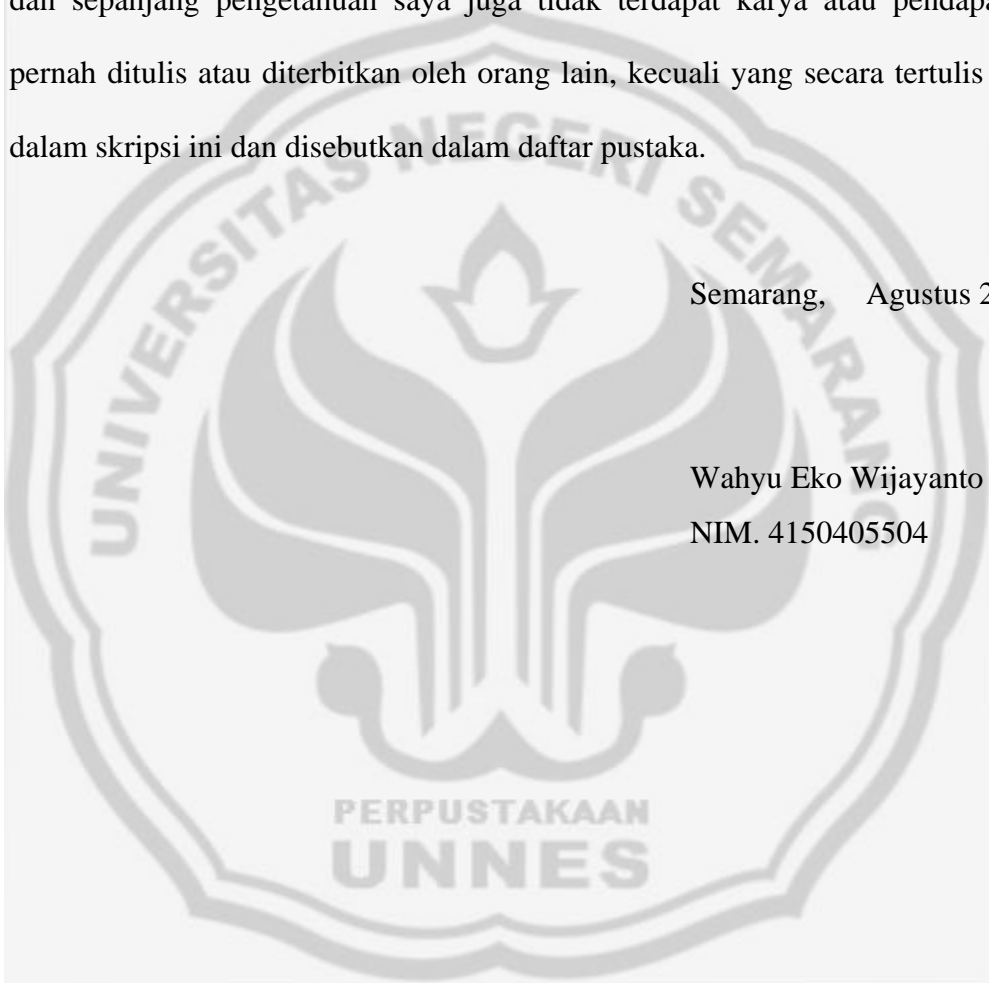
Ketua	Sekretaris
Dr. Kasmadi Imam S., M.S. NIP. 130781011	Drs. Edy Soedjoko, M.Pd NIP. 131693657
Penguji	
Drs. Rochmad, M.Si NIP. 131651607	
Penguji/ Pembimbing I	Penguji/ Pembimbing II
Dr. S. T. Budi Waluya NIP. 132046848	Drs. Wuryanto, M.Si NIP. 131281225

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa dalam isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dirujuk dalam skripsi ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Semarang, Agustus 2009

Wahyu Eko Wijayanto
NIM. 4150405504



MOTTO DAN PERSEMBAHAN

❖ MOTTO:

- “Tiap individu belajar dengan cara dan motivasinya masing-masing”
(Po- Kungfu Panda Movie)
- “Tugas kita bukanlah untuk berhasil. Tugas kita adalah untuk mencoba, karena didalam mencoba itulah kita menemukan dan belajar bagaimana membangun kesempatan untuk berhasil” (Mario Teguh)

❖ PERSEMBAHAN:

- Ayah dan Ibuku tercinta untuk semua doa, dukungan dan kasih sayangnya.
- Si kembar Mahfud dan Mahmud adik-adik terbaikku.
- Semua keluargaku beserta kehangatan yang mereka berikan.
- Seluruh sahabat yang selalu ada untuk membantuku dan memberiku semangat.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “MODEL MATEMATIKA DAN SOLUSI DARI SISTEM GETARAN DUA DERAJAT KEBEBASAN (GETARAN TERGANDENG)”. Penulisan skripsi ini sebagai syarat mutlak yang harus dipenuhi oleh penulis untuk memperoleh gelar sarjana sains di Universitas Negeri Semarang.

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan karena adanya bimbingan, bantuan, dan dukungan dari berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Sudijono Sastroatmodjo, M.Si, Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Dr. Kasmadi Imam S, M.S, Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Edy Soedjoko, M.Pd, Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
4. Dr. ST. Budi Waluya, Pembimbing Utama yang telah memberikan bimbingan, motivasi, dan pengarahan.
5. Drs. Wuryanto, M.Si, Pembimbing Pendamping yang telah memberikan bimbingan, motivasi, dan pengarahan.
6. Ayah dan Ibu tercinta yang senantiasa mendoakan serta memberikan dukungan baik secara moral maupun spiritual.
7. Anak matematika 2005 yang telah memberikan dorongan dan motivasi hingga terselesaikannya penulisan skripsi ini.

8. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya penulisan skripsi ini.

Penulis sadar dengan apa yang telah disusun dan disampaikan masih banyak kekurangan dan jauh dari sempurna. Untuk itu penulis menerima segala kritik dan saran yang sifatnya membangun untuk skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Semarang, Agustus 2009

Penulis



ABSTRAK

Wijayanto, W. E. 2009. *Model Matematika dan Solusi dari Sistem Getaran Dua Derajat Kebebasan (Getaran Tergandeng)*. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang. Pembimbing I: Dr. S. T. Budi Waluya, Pembimbing II: Drs. Wuryanto, M. Si.

Kata kunci: Model Matematika, Solusi Model, Sistem Getaran Dua Derajat Kebebasan.

Persamaan diferensial linear muncul dalam banyak model dalam fenomena kehidupan nyata. Persamaan diferensial linear homogen yang memiliki koefisien tetap mempunyai penerapan penting di bidang rekayasa. Sebagai contoh Hukum kedua Newton mengenai gerak meliputi turunan (percepatan) dan dengan sendirinya persamaan diferensial linear orde dua memegang peranan penting dalam masalah gerak, khususnya dalam masalah sistem pegas massa. Terdapat beberapa penelitian dan referensi yang membahas mengenai sistem pegas massa yang terdiri dari satu pegas dan satu massa. Untuk mengembangkan ilmu pengetahuan dan teknologi, maka perlu dilakukan penelitian lebih lanjut mengenai sistem pegas massa yang terdiri lebih dari sebuah pegas dan sebuah massa.

Permasalahan yang diangkat dalam penelitian ini adalah bagaimana penurunan model matematika dari sistem getaran dua derajat kebebasan, bagaimana menentukan solusi dari sistem getaran dua derajat kebebasan, bagaimana aplikasi program *Maple* pada sistem getaran dua derajat kebebasan, dan bagaimana interpretasi dari solusi model sistem getaran dua derajat kebebasan. Metode yang digunakan untuk menganalisis masalah adalah studi pustaka. Langkah-langkah yang dilakukan adalah menentukan masalah, merumuskan masalah, studi pustaka, analisis pemecahan masalah, dan penarikan kesimpulan.

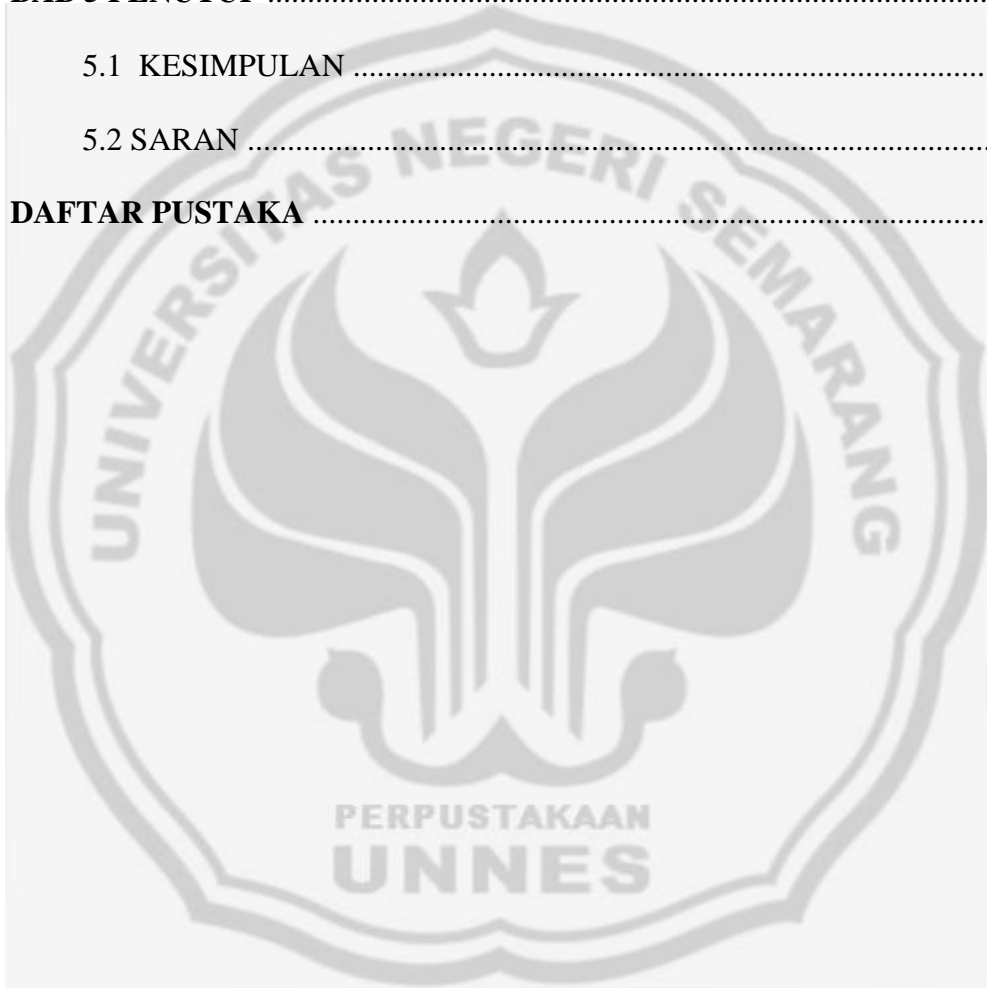
Pembahasan dilakukan dengan analisis untuk menentukan model matematika dari sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdang) tanpa redaman dan tanpa gaya luar. Setelah didapatkan model matematikanya, kemudian dicari solusi dari sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdang) tanpa redaman dan tanpa gaya luar dengan kondisi awal $x(0) = x_0, y(0) = y_0, x'(0) = u_0$ dan $y'(0) = v_0$. Dari analisis diperoleh solusi dari sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdang) tanpa redaman dan tanpa gaya luar. Dengan menggunakan *Maple*, dapat diperoleh visualisasi untuk solusi dari sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdang) dan mengetahui bagaimana pengaruh posisi awal, kecepatan awal, massa, dan konstanta pegas terhadap amplitudo getaran dari sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdang) tersebut. Posisi awal, kecepatan awal, dan massa benda berbanding lurus dengan amplitudo getaran artinya semakin besar posisi awal, kecepatan awal, dan massa benda maka diprediksi semakin besar amplitudo getaran dan sebaliknya. Sedangkan, konstanta pegas berbanding terbalik dengan Amplitudo getaran, artinya semakin besar konstanta pegas maka diprediksi semakin kecil amplitudo getaran dan sebaliknya.

DAFTAR ISI

	Halaman
Halaman Judul	i
Pengesahan	ii
Pernyataan	iii
Motto dan Persembahan	iv
Kata Pengantar	v
Abstrak	vii
Daftar Isi	viii
Daftar Gambar	xi
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah dan Pembatasan Masalah	4
1.2.1 Rumusan Masalah	4
1.2.2 Pembatasan Masalah	5
1.3 Tujuan dan Manfaat Penelitian	5
1.3.1 Tujuan Penelitian	5
1.3.2 Manfaat Penelitian	5
1.4 Sistematika Penulisan Skripsi	6
BAB 2 LANDASAN TEORI	8
2.1 Hukum Kedua Newton	8
2.2 Hukum Hooke	9

2.3	Osilasi	10
2.3.1	Model Osilasi Bebas	10
2.3.1.1	Persamaan Sistem tanpa Peredam	12
2.3.1.2	Persamaan Sistem dengan Peredam	13
2.3.2	Model Osilasi dengan Gaya Luar	13
2.4	Sistem Getaran Dua Derajat Kebebasan.....	14
2.5	Persamaan Diferensial Linear Orde Dua	15
2.5.1	Persamaan Homogen dengan Koefisien Konstan	16
2.5.2	Persamaan Tak Homogen	18
2.6	Persamaan Diferensial Linear dan non Linear	19
2.7	aple	20
BAB 3	METODE PENELITIAN	22
3.1	Menentukan Masalah	22
3.2	Perumusan Masalah	22
3.3	Studi Pustaka	23
3.4	Analisis dan Pemecahan Masalah	23
3.5	Penarikan Kesimpulan	24
BAB 4	PEMBAHASAN	24
4.1	Penurunan Model Matematika Dari Sistem Getaran Dua Derajat Kebebasan (Getaran Tergandeng)	25
4.2	Solusi Dari Sistem Getaran Dua Derajat Kebebasan (Getaran Tergandeng)	33

4.3 Contoh penerapan Sistem Getaran Dua Derajat Kebebasan (Getaran Tergandeng) tanpa redaman dan tanpa gaya luar	43
4.4 Interpretasi dari Solusi Model Sistem Getaran Dua Derajat Kebebasan (Getaran Tergandeng)	50
BAB 5 PENUTUP	65
5.1 KESIMPULAN	65
5.2 SARAN	67
DAFTAR PUSTAKA	68



DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 1 Bagan alur penyelesaian masalah	2
Gambar 2 Sistem dalam keadaan keseimbangan statis dan sistem dalam keadaan bergerak	4
Gambar 3 Gaya pemulih pada pegas	9
Gambar 4 Osilasi dari sebuah pegas dan sebuah massa	11
Gambar 5 Sistem getaran dua derajat kebebasan	15
Gambar 6 Sistem pegas massa dengan kondisi awal	26
Gambar 7 Sistem pegas massa kondisi 2 dan kondisi 3	43
Gambar 8 Plot solusi untuk $x(t)$ dari persamaan $x''(t) + 20x(t) - 10y(t) = 0$ dan $y''(t) - 10x(t) + 20y(t) = 0$ dengan syarat awal $x(0) = 1, y(0) = 0, x'(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$	47
Gambar 9 Plot solusi untuk $y(t)$ dari persamaan $x''(t) + 20x(t) - 10y(t) = 0$ dan $y''(t) - 10x(t) + 20y(t) = 0$ dengan syarat awal $x(0) = 1, y(0) = 0, x'(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$	48
Gambar 10 Plot solusi untuk $x(t)$ dan $y(t)$ dari persamaan $x''(t) + 20x(t) - 10y(t) = 0$ dan $y''(t) - 10x(t) + 20y(t) = 0$ dengan syarat awal $x(0) = 1, y(0) = 0, x'(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$	48
Gambar 11 Sistem pegas massa kondisi 2 dan kondisi 3	50

Gambar 12 Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai posisi awal

$x(0)$ dengan

$$m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30, x'(0) = 0, y(0) = 0 \text{ dan } y'(0) = 0$$

.....

51

Gambar 13 Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai posisi awal

$x(0)$ dengan

$$m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30, x'(0) = 0, y(0) = 0 \text{ dan } y'(0) = 0$$

.....

52

Gambar 14 Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai posisi awal

$y(0)$ dengan

$$m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30, x(0) = 0, x'(0) = 0 \text{ dan } y'(0) = 0$$

.....

53

Gambar 15 Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai posisi awal

$y(0)$ dengan

$$m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30, x(0) = 0, x'(0) = 0 \text{ dan } y'(0) = 0$$

.....

53

Gambar 16 Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai kecepatan

awal $x'(0)$ dengan $m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30,$

$$x(0) = 1, y(0) = 1 \text{ dan } y'(0) = 1$$

.....

54

Gambar 17 Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai kecepatan

awal $x'(0)$ dengan $m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30,$

$$x(0) = 1, y(0) = 1 \text{ dan } y'(0) = 1$$

.....

55

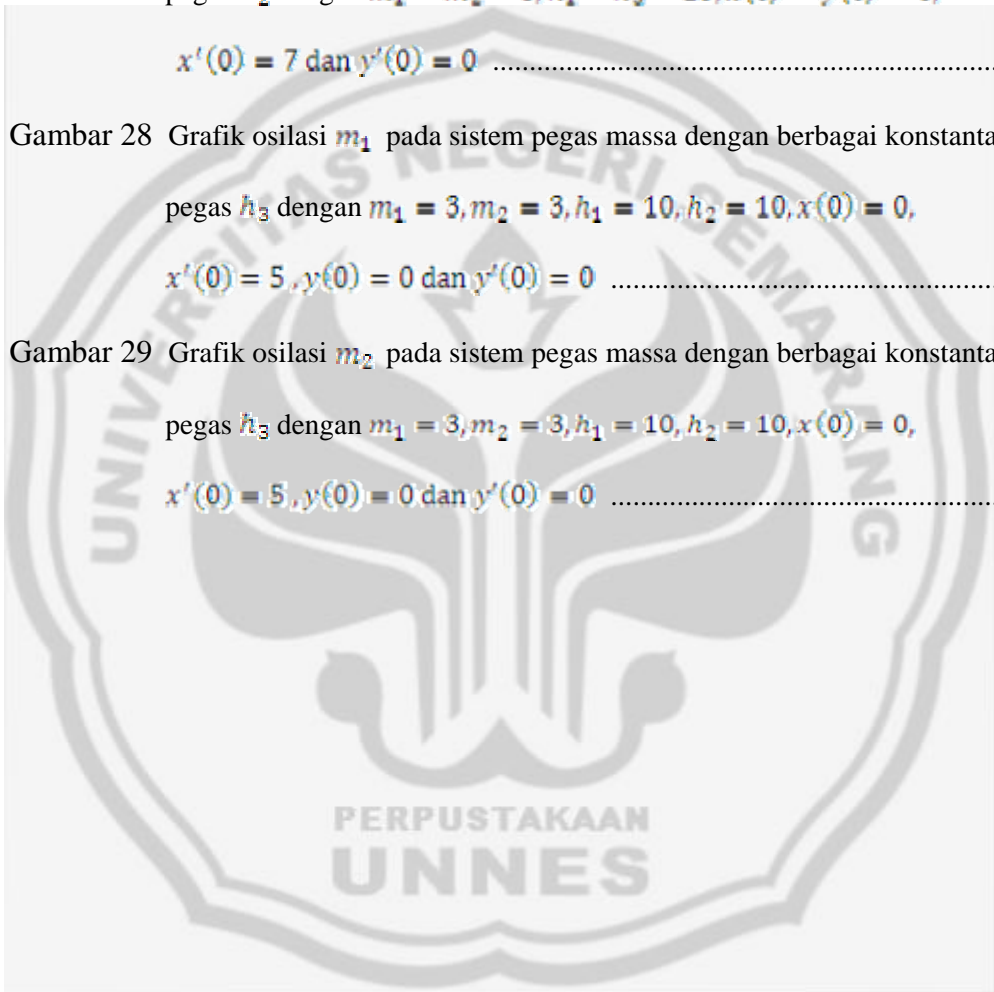
Gambar 18	Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai kecepatan awal $y'(0)$ dengan $m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30,$ $x(0) = 1, x'(0) = 1$ dan $y(0) = 1$	56
Gambar 19	Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai kecepatan awal $y'(0)$ dengan $m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30,$ $x(0) = 1, x'(0) = 1$ dan $y(0) = 1$	56
Gambar 20	Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai massa m_1 dengan $m_2 = 3, h_1 = h_2 = h_3 = 10, x(0) = y(0) = 0,$ $x'(0) = 7$ dan $y'(0) = 0$	57
Gambar 21	Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai massa m_1 dengan $m_2 = 3, h_1 = h_2 = h_3 = 10, x(0) = y(0) = 0,$ $x'(0) = 7$ dan $y'(0) = 0$	58
Gambar 22	Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai massa m_2 dengan $m_1 = 3, h_1 = h_2 = h_3 = 10, x(0) = y(0) = 0,$ $x'(0) = 0$ dan $y'(0) = 5$	59
Gambar 23	Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai massa m_2 dengan $m_1 = 3, h_1 = h_2 = h_3 = 10, x(0) = y(0) = 0,$ $x'(0) = 0$ dan $y'(0) = 5$	59
Gambar 24	Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai konstanta pegas h_1 dengan $m_1 = 2, m_2 = 3, h_2 = 30, h_3 = 30, x(0) = 0,$ $x'(0) = 6, y(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$	60
Gambar 25	Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai konstanta pegas h_1 dengan $m_1 = 2, m_2 = 3, h_2 = 30, h_3 = 30, x(0) = 0,$ $x'(0) = 6, y(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$	61

Gambar 26 Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai konstanta pegas h_2 dengan $m_1 = m_2 = 3, h_1 = h_3 = 10, x(0) = y(0) = 0, x'(0) = 7$ dan $y'(0) = 0$ 62

Gambar 27 Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai konstanta pegas h_2 dengan $m_1 = m_2 = 3, h_1 = h_3 = 10, x(0) = y(0) = 0, x'(0) = 7$ dan $y'(0) = 0$ 62

Gambar 28 Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai konstanta pegas h_3 dengan $m_1 = 3, m_2 = 3, h_1 = 10, h_2 = 10, x(0) = 0, x'(0) = 5, y(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$ 63

Gambar 29 Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai konstanta pegas h_3 dengan $m_1 = 3, m_2 = 3, h_1 = 10, h_2 = 10, x(0) = 0, x'(0) = 5, y(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$ 64



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang bersifat deduktif. Konsep-konsep yang ada di dalam matematika bersifat hierarkis, terstruktur, logis dan sistematis dari konsep yang paling sederhana sampai konsep yang paling kompleks (Winatapura, 1993: 124). Artinya, setiap konsep dapat dibangun berdasarkan konsep terdahulu atau konsep sebelumnya merupakan prasyarat untuk dapat memahami konsep-konsep selanjutnya.

Selain itu matematika juga dapat berperan sebagai ratu ilmu sekaligus pelayan (Winatapura, 1993: 127). Matematika dikatakan sebagai ratu ilmu karena matematika dapat tumbuh dan berkembang untuk dirinya sendiri sebagai suatu ilmu tanpa adanya bantuan dari ilmu lain. Selanjutnya matematika dikatakan sebagai pelayan ilmu lain karena ilmu lain tidak dapat tumbuh berkembang tanpa adanya bantuan matematika. Kajian matematika yang berperan sebagai pelayan ilmu-ilmu lain biasa disebut sebagai matematika terapan (Anonim, 2009).

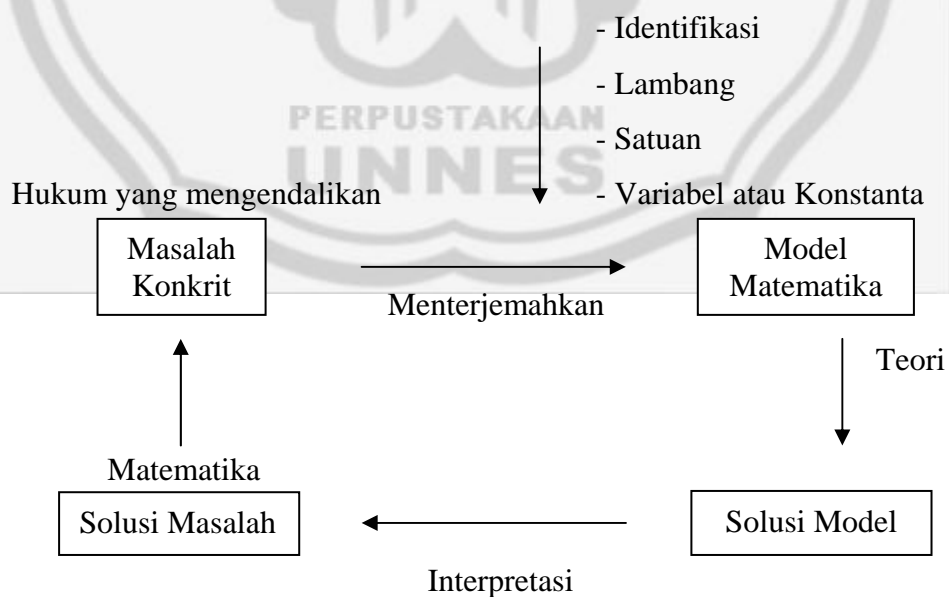
Peran matematika pada masalah kehidupan sehari-hari maupun pada ilmu-ilmu lain disajikan dalam pemodelan matematika. Tahapan mencari solusi permasalahan kehidupan sehari-hari maupun pada ilmu-ilmu lain dengan menggunakan bantuan matematika diberikan sebagai berikut.

1. Pemodelan matematika untuk menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari diawali dengan mengenali masalah tersebut terlebih dahulu yaitu

melalui beberapa langkah yaitu identifikasi masalah, lambang, satuan dan variabel atau konstanta serta menentukan besaran yang terlibat, selain itu dalam proses penterjemahan masalah selalu terdapat hukum yang mengendalikan.

2. Menentukan variabel atau konstanta yang penting dan merinci keterkaitan antara variabel atau konstanta tersebut sehingga dapat disusun model matematika. Model matematika yang terbentuk harus bebas satuan.
3. Dengan memanfaatkan teori-teori dalam matematika dapat diperoleh solusi model.
4. Dengan menginterpretasikan solusi model ditentukan solusi masalah. Pada proses ini satuan muncul kembali (Nagle, 1993:3).

Tahapan mencari solusi permasalahan kehidupan sehari-hari maupun pada ilmu-ilmu lain dengan menggunakan bantuan matematika dapat ditunjukkan pada Gambar 1.



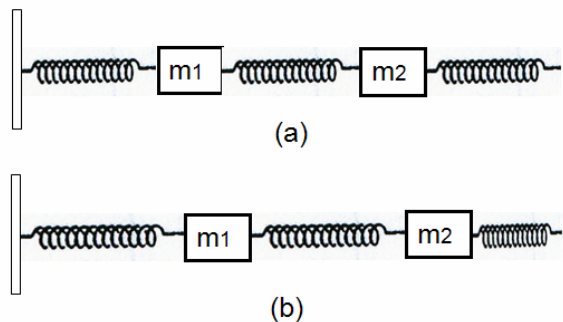
Gambar 1. Bagan alur penyelesaian masalah (Nagle, 1993:3).

Dalam kehidupan sehari-hari dapat ditemukan banyak benda yang bergetar. Senar gitar yang sering dimainkan oleh gitaris grup band, getaran mobil ketika mesinnya dinyalakan dan kejadian lainnya. Getaran dan gelombang merupakan dua hal yang saling berkaitan. Gelombang, baik itu gelombang air laut, gelombang gempa bumi, gelombang suara yang merambat di udara, semuanya bersumber pada getaran. Dengan kata lain, getaran adalah penyebab adanya gelombang.

Getaran harmonis (sederhana) atau gerak harmonik (sederhana) adalah getaran yang dipengaruhi oleh gaya pemulih yang arahnya menuju ke titik keseimbangan dan besarnya sebanding dengan simpangan. Salah satu contoh gerak suatu benda yang termasuk gerak harmonik adalah mekanisme pegas yang bergetar (Anonim, 2008).

Berdasarkan studi literatur (Komaridah, 2008), yang membahas tentang suspensi kendaraan bermotor yang hanya terdiri dari satu pegas dan satu massa, maka untuk mengembangkan ilmu pengetahuan dan teknologi perlu diadakan penelitian lebih lanjut mengenai sistem pegas massa yang terdiri dari lebih dari satu pegas dan lebih dari satu massa.

Dalam hal ini penulis tertarik untuk melakukan penelitian mengenai sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdang). Model dari sistem getaran dua derajat kebebasan dapat ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. (a). Sistem dalam keadaan keseimbangan statis

(b). Sistem dalam keadaan bergerak (Khanafiyah, 2007: 25).

Dari uraian di atas, penulis mengangkat judul "**Pemodelan Matematika dan Solusi dari Sistem Getaran Dua Derajat Kebebasan (Getaran Tergandeng)**". Pada penelitian ini penulis berusaha untuk mendeskripsikan dan menyelesaikan masalah sistem pegas massa dengan menerapkan teori dan dalil matematika serta menggunakan *Maple* sebagai visualisasi dan alat bantu.

1.2 Rumusan Masalah dan Pembatasan Masalah

1.2.1 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka dapat ditarik suatu permasalahan:

- a. Bagaimana pemodelan matematika pada sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdangeng)?
- b. Bagaimana solusi pemodelan matematika pada sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdangeng)?
- c. Bagaimana aplikasi program *Maple* pada sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdangeng)?
- d. Bagaimanakah pengaruh posisi awal, kecepatan awal, massa dan konstanta pegas terhadap amplitudo getaran?

1.2.2 Pembatasan Masalah

Penelitian ini membahas tentang sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdangeng) dengan tiga pegas dan dua massa, dan kondisi sistem pegas massa tanpa redaman dan tanpa gaya luar. Dari penelitian ini hanya akan dibahas gerakan horizontal dari sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdangeng).

1.3 Tujuan dan Manfaat Penelitian

1.3.1 Tujuan penelitian

Tujuan penulisan skripsi ini yaitu:

- a. Mengetahui pemodelan matematika pada sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdangeng).
- b. Mengetahui solusi pemodelan matematika pada sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdangeng).
- c. Mengetahui aplikasi program *Maple* pada sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdangeng).
- d. Mengetahui pengaruh posisi awal, kecepatan awal, massa dan konstanta pegas terhadap amplitudo getaran.

1.3.2 Manfaat penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penyusunan skripsi ini adalah:

- a. Bagi Peneliti

Peneliti dapat mengetahui pemodelan matematika pada sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdangeng).

b. Bagi Pihak Lain

Dengan adanya penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangsih kepada mahasiswa untuk melakukan penelitian selanjutnya.

1.4 Sistematika Penulisan Skripsi

Secara garis besar skripsi ini terdiri dari tiga bagian yaitu bagian awal, bagian inti dan bagian akhir.

Bagian awal terdiri dari halaman sampul, halaman judul, abstrak, pengesahan, motto dan persembahan, daftar isi, daftar gambar dan daftar lampiran. Bagian inti terdiri dari lima bab yaitu:

BAB 1 : PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan skripsi.

BAB 2 : LANDASAN TEORI

Landasan teori berisi mengenai teori-teori yang mendukung dan berkaitan dengan permasalahan skripsi sehingga dapat dijadikan sebagai teori penunjang yang menjadi dasar teori disusunnya skripsi ini. Pada bagian ini terdiri dari hukum kedua newton, hukum hooke, osilasi, sistem getaran dua derajat kebebasan, persamaan diferensial linear orde dua, persamaan diferensial linear dan non linear, dan maple.

BAB 3 : METODE PENELITIAN

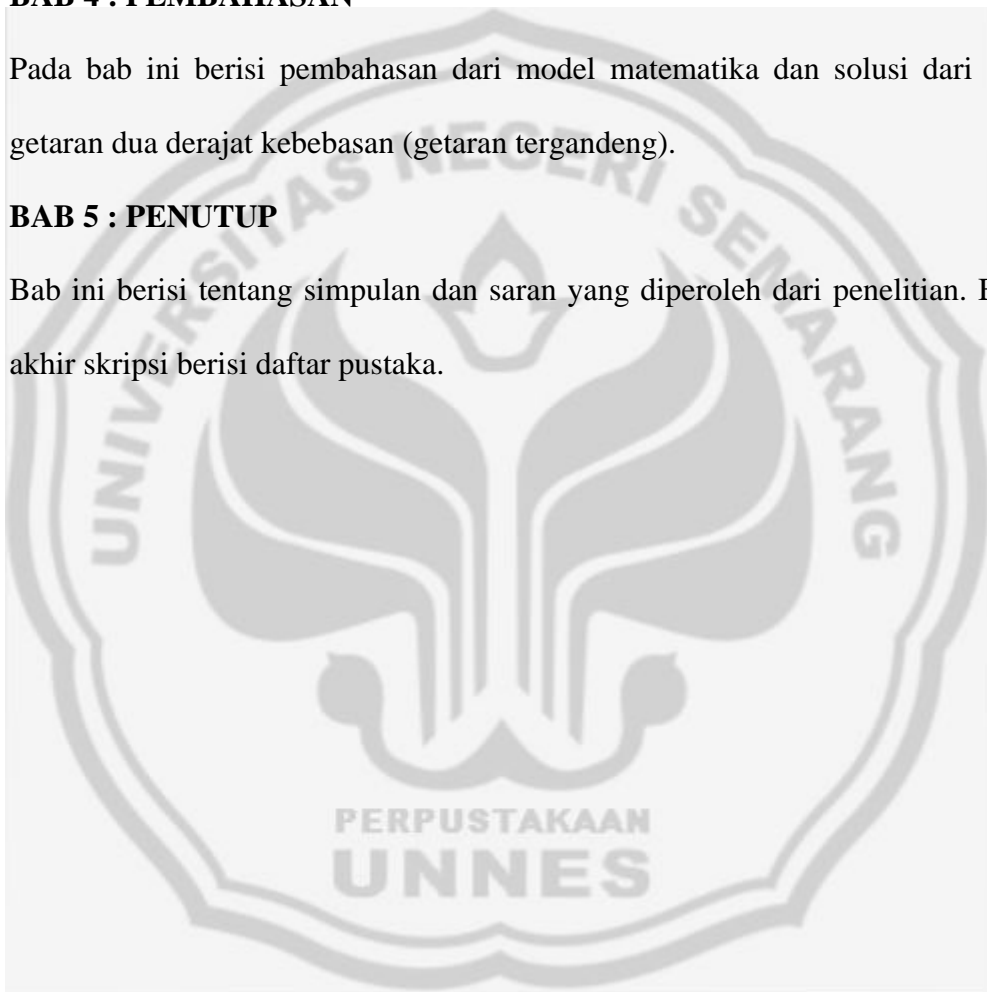
Metode penelitian berisi tentang proses atau langkah penelitian. Bab ini meliputi penemuan masalah, perumusan masalah, studi pustaka, analisis pemecahan masalah dan penarikan simpulan.

BAB 4 : PEMBAHASAN

Pada bab ini berisi pembahasan dari model matematika dan solusi dari sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdangeng).

BAB 5 : PENUTUP

Bab ini berisi tentang simpulan dan saran yang diperoleh dari penelitian. Bagian akhir skripsi berisi daftar pustaka.



BAB 2

LANDASAN TEORI

2.1 Hukum Kedua Newton

Gaya total pada sebuah benda adalah penyebab mengapa benda mengalami percepatan (Giancoli, 1998: 94). Percobaan menunjukkan bahwa jika kombinasi gaya-gaya $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$ diberikan pada sebuah benda, dengan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ adalah gaya-gaya yang bekerja pada sebuah benda, maka benda tersebut akan memiliki percepatan (Young dan Freedman, 1996). Newton mengemas semua hubungan ini dan digabungkan dengan hasil percobaan dalam sebuah pernyataan singkat yang dikenal dengan hukum kedua Newton tentang gerak, yaitu:

“ Jika suatu gaya luar total bekerja pada sebuah benda maka benda akan mengalami percepatan. Arah percepatan tersebut sama dengan arah gaya total. Vektor gaya total sama dengan massa benda dikalikan dengan percepatan benda. Dalam bentuk persamaan, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ (Hukum kedua Newton)”.

Pernyataan alternatifnya adalah bahwa percepatan benda (perubahan kecepatan rata-rata) sama dengan jumlah (resultan) vektor dari semua gaya yang bekerja pada benda, dibagi dengan massanya (Serway dan Jewett, 2004: 57).

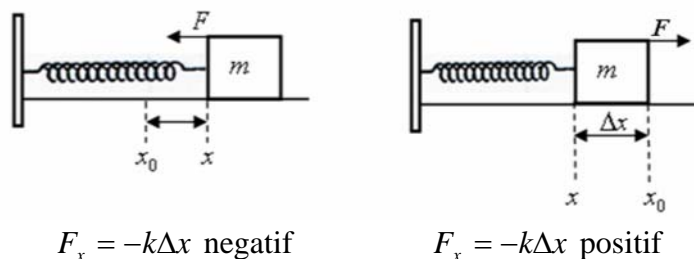
Dalam bentuk persamaan $\frac{\sum F}{m} = a$.

2.2 Hukum Hooke

Sebuah pegas dibuat dengan cara melilitkan kawat yang kaku, menjadi sebuah kumparan. Jika pegas ditekan atau diregangkan kemudian dilepas, pegas kembali ke panjang asalnya, jika perpindahannya tidak terlalu besar. Ada suatu batas untuk perpindahan itu, diatas nilai itu pegas tidak kembali kepanjang semula tetapi tinggal secara permanen dalam keadaan yang telah berubah, jika hanya diperbolehkan perpindahan dibawah batas ini, dapat mengkalibrasi peregangan atau penekanan Δx melalui gaya yang diperlukan untuk menghasilkan peregangan atau penekanan itu. Secara eksperimen ditemukan bahwa, untuk Δx yang kecil, gaya yang dikerjakan oleh pegas mendekati sebanding dengan Δx dan dalam arah berlawanan. Hubungan ini, dikenal sebagai **Hukum Hooke** yang dapat ditulis

$$F_x = -k(x - x_0) = -k\Delta x$$

dengan konstanta k disebut konstanta gaya pegas. Jarak x adalah koordinat ujung pegas atau benda yang diikatkan pada ujung pegas tersebut. Konstanta x_0 adalah nilai koordinat jika pegas tidak diregangkan dari posisi kesetimbangannya. Gaya semacam itu dinamakan gaya pemulih karena gaya ini cenderung memulihkan pegas ke konfigurasi awalnya (Tipler, 1991: 102).



Gambar 3. Gaya pemulih pada pegas (Tipler, 1991: 102).

2.3 Osilasi

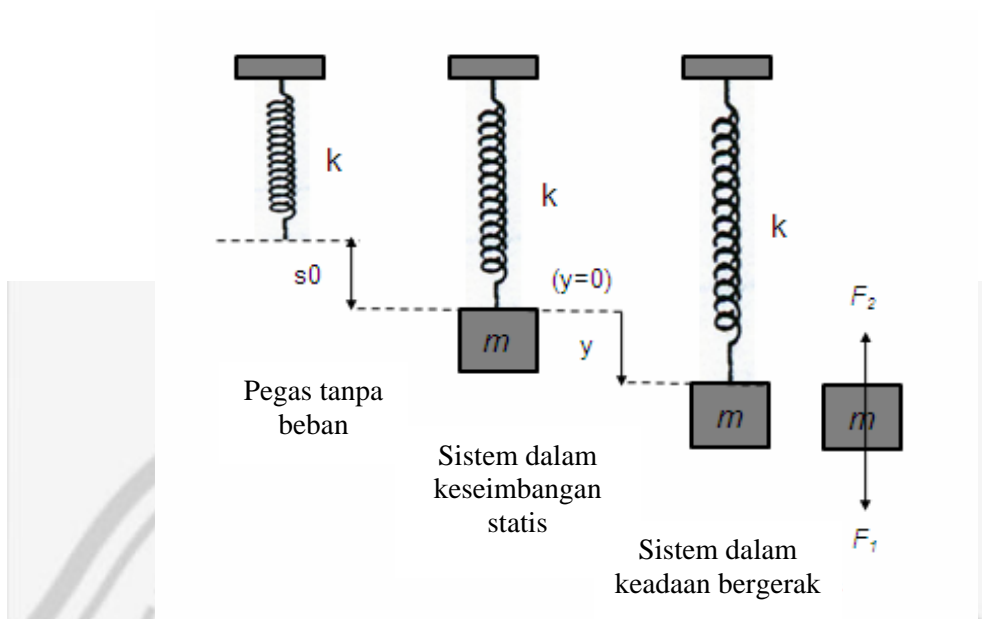
Osilasi terjadi bila sebuah sistem diganggu dari posisi kesetimbangan stabilnya. Karakteristik gerak osilasi yang paling dikenal adalah gerak tersebut bersifat periodik, yaitu berulang-ulang (Sofyan, 2009). Banyak contoh osilasi yang mudah dikenali, misalnya perahu kecil yang berayun turun naik, bandul jam yang berayun ke kiri dan ke kanan, dan senar gitar yang bergetar. Suatu sistem yang menunjukkan gejala gerak harmonik sederhana adalah sebuah benda yang tertambat ke sebuah pegas (Kreyszig, 1993:88).

2.3.1 Model Osilasi Bebas

Diambil suatu pegas biasa yang menahan tekanan dan pemanjangan dan menggantungkannya secara vertikal dari suatu titik tetap (Gambar 4). Di ujung bawah pegas diikat dengan sebuah benda bermassa m . Anggap m sedemikian besar sehingga massa pegas dapat diabaikan. Jika ditarik benda ke bawah pada suatu jarak tertentu dan kemudian melepaskannya, maka benda itu bergerak. Anggap benda bergerak vertikal.

Akan ditentukan gerak sistem mekanisnya. Untuk maksud itu ditinjau gaya-gaya yang bekerja pada benda itu selama pergerakannya. Gaya-gaya ini akan mengarah pada suatu persamaan diferensial, dan dengan menyelesaikan persamaan ini, akan memperoleh pergeseran sebagai suatu fungsi dari waktu.

Di pilih arah ke *bawah* sebagai arah positif dan memandang gaya yang bekerja kebawah sebagai gaya positif dan gaya ke *atas* sebagai gaya negatif (Kreyszig, 1993: 89).



Gambar 4. Osilasi dari sebuah pegas dan sebuah massa (Ardianti, 2008: 13).

Gaya yang paling jelas bekerja pada benda adalah *Gaya Gravitasi* $F_1 = mg$, dengan m merupakan massa benda dan g (980 cm/det^2) merupakan percepatan gravitasi.

Selanjutnya, ditinjau *gaya pegas* F_2 yang bekerja pada benda. Maka,

$$F_2 = -ks$$

dengan s merupakan pergeseran vertikal dari benda (perhatikan bahwa ujung atas pegas bersifat tidak bergerak), konstanta k disebut sebagai *modulus pegas*.

Apabila benda dalam keadaan diam (tidak bergerak), maka gaya gravitasi dan gaya pegas dalam keadaan seimbang, resultan gaya nol,

$$F_1 + F_2 = mg - ks_0 = 0. \quad (1)$$

Dengan s_0 adalah perubahan panjang pegas pada saat benda dalam keadaan diam, yang disebut *posisi keseimbangan statis*.

Pergeseran benda yang diukur dari posisi keseimbangan statis ($y=0$), dilambangkan dengan $y = y(t)$ [t menyatakan waktu], dengan arah ke bawah sebagai arah positif (Gambar 4). Menurut hukum Hooke, pergeseran ini menimbulkan gaya tambahan $-ky$ yang bekerja pada benda. Dengan demikian, resultan gaya yang bekerja pada benda pada posisi $y(t)$ adalah

$$F_1 + F_2 - ky = -ky. \quad (2)$$

(Kreyszig, 1993: 90).

2.3.1.1 Persamaan Sistem Tanpa Peredam

Jika redaman dari suatu sistem demikian kecil sehingga dapat diabaikan, maka (2) adalah resultan dari semua gaya yang bekerja pada benda itu. Persamaan diferensial akan diperoleh dengan menggunakan hukum kedua Newton

$$\text{Massa} \times \text{Kecepatan} = \text{Gaya}.$$

Dengan gaya berarti resultan semua gaya yang bekerja pada benda pada sembarang waktu. Di dalam kasus ini, percepatan adalah $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$ dan resultan diberikan oleh (2). Jadi

$$my'' = -ky.$$

Sehingga gerak sistem itu diatur oleh persamaan diferensial linear yang memiliki koefisien konstan

$$my'' + ky = 0. \quad (3)$$

(Kreyszig, 1993: 91).

2.3.1.2 Persamaan Sistem dengan Peredam

Gaya redaman mempunyai arah yang berlawanan dengan gerak benda saat itu dan dianggap bahwa gaya ini sebanding dengan kecepatan $y' = \frac{dy}{dt}$ dari benda itu. Jadi gaya redamannya berbentuk

$$F_3 = -cy'$$

dengan *konstanta redaman* c positif.

Sekarang resultan gaya yang bekerja pada benda adalah

$$F_1 + F_2 + F_3 = -ky - cy'.$$

Sehingga menurut hukum kedua Newton,

$$my'' = -ky - cy'.$$

Dan lihat bahwa sistem mekanis teredam ditentukan oleh persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan

$$my'' + ky + cy' = 0. \quad (4)$$

(Kreyszig, 1993:92)

2.3.2 Model Osilasi dengan Gaya Luar

Osilasi bebas dari suatu benda pada suatu pegas dapat dilihat pada Gambar 4. Sekarang menganggap adanya suatu gaya peubah $r(t)$ yang bekerja pada sistem itu. Persamaan diferensial yang berkaitan dengan situasi ini diperoleh dari (4) dengan menambahkan gaya $r(t)$, penambahan ini menghasilkan

$$my'' + cy' + ky = r(t). \quad (5)$$

$r(t)$ dinamakan **masukan** (*input*) atau **gaya dorong** (*driving force*), dan penyelesaiannya dinamakan **hasil** (*Output*) **reaksi** (*response*) sistem terhadap gaya dorong.

Gerak yang dihasilkan dinamakan **gerak paksa**, yang berbeda dengan **gerak bebas** yang berkaitan dengan (5), yaitu suatu gerak tanpa adanya gerak luar $r(t)$.

Masukan periodik merupakan hal khusus yang menarik. akan membahas suatu masukan sinusoidal, katakanlah

$$r(t) = F_0 \cos \omega t \quad (F_0 > 0, \omega > 0).$$

Persamaan diferensial yang dibahas sekarang adalah

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t. \quad (6)$$

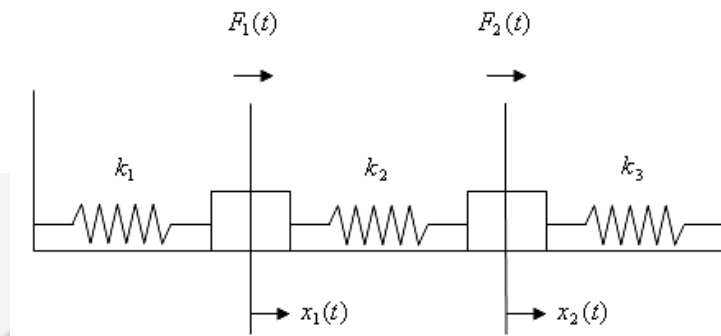
(Kreyszig, 1993: 124).

2.4 Sistem Getaran Dua Derajat Kebebasan

Getaran dapat diklasifikasikan menurut ada tidaknya eksitasi yang bekerja secara kontinu dan menurut derajat kebebasannya atau sistem massanya. Menurut derajat kebebasannya, getaran dapat dibedakan getaran derajat satu, getaran derajat dua atau getaran n derajat sesuai dengan banyaknya koordinat bebas (*independence*) yang diperlukan untuk mendefinisikan persamaan gerak sistem tersebut (Dewanto, 1999: 157).

Sistem getaran dua derajat kebebasan adalah sistem getaran yang memiliki dua frekuensi natural dan memerlukan dua koordinat untuk menyatakan persamaan geraknya. Bila getaran terjadi pada salah frekuensi tersebut maka terdapat hubungan yang pasti antara amplitudo-amplitudo kedua koordinat dan konfigurasi dinyatakan sebagai ragam normal. Sehingga sistem getaran ini

akan memiliki dua bentuk ragam normal sebagaimana frekuensi naturalnya (Dewanto, 1999: 160).



Gambar 5. Sistem getaran dua derajat kebebasan (Waluya, 2006: 126).

2.5 Persamaan Diferensial Linear Orde Dua

Secara umum persamaan diferensial orde dua sangat menarik karena persamaan diferensial orde dua mendiskripsikan lebih luas variasi dari suatu fenomena. Untuk contohnya, akan dibahas sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdangeng). Persamaan diferensial linear orde dua mempunyai bentuk umum:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \quad (7)$$

Dengan $p(t)$, $q(t)$ dan $g(t)$ adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval waktu

I , dan dengan $y' = \frac{dy}{dt}$ (Waluya, 2006:61).

Persamaan linear orde dua dikatakan homogen jika nilai fungsi $g(t)$ pada persamaan (7) adalah nol untuk setiap t . Sebaliknya jika nilai fungsi $g(t)$ tidak nol maka disebut persamaan linear orde 2 non homogen.

2.5.1 Persamaan Homogen dengan Koefisien Konstan

Dimulai dengan membahas apa yang dimaksud dengan koefisien konstan dan persamaan homogen. Yang dimaksud dengan koefisien konstan adalah dengan mengambil fungsi-fungsi $p(t)$ dan $q(t)$ dengan nilai konstan dan jika ambil fungsi $g(t) = 0$ akan sebut sebagai persamaan homogen. Jadi dalam hal ini akan dapat persamaan diferensial homogen dengan koefisien konstan yang dapat dinyatakan sebagai

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (8)$$

Macam-macam solusi persamaan diferensial orde 2 yaitu

$$a. (e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}, \quad (9)$$

$$b. (e^{\lambda t})'' = \lambda^2 e^{\lambda t}, \quad (10)$$

$$c. a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (11)$$

Untuk menyelesaikan masalah persamaan diferensial orde 2, solusi umum dari persamaan linear orde 2 harus menghasilkan dua konstanta sebarang sehingga bisa memenuhi kondisi awalnya.

Terdapat cara mudah untuk menemukan solusi umum persamaan diferensial orde dua homogen dengan koefisien konstan. Perhatikan kembali persamaan (8). Dengan mengasumsikan solusinya dalam bentuk $y = e^{(\lambda t)}$ maka akan didapatkan persamaan kuadrat dalam λ yang nantinya akan namakan persamaan karakteristik untuk λ , yakni

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (12)$$

Jadi dua solusi umum adalah $y_1 = e^{(\lambda+t)}$ dan $y_2 = e^{(\lambda-t)}$, dan solusi umumnya dapat dinyatakan sebagai

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{(\lambda+t)} + c_2 e^{(\lambda-t)}. \quad (13)$$

Konstanta c_1 dan c_2 dapat ditentukan dari kondisi awal $y(t_0)$ dan

$y'(t_0)$. Pada persamaan (11) merupakan solusi untuk kasus $b^2 - 4ac > 0$, akan tetapi juga bisa digunakan untuk kasus $b^2 - 4ac < 0$ atau $b^2 - 4ac = 0$. Telah dipunyai solusi untuk kasus dengan $b^2 - 4ac > 0$, sekarang akan dibahas kasus $b^2 - 4ac < 0$. Dalam kasus ini, diambil akar dari bilangan negatif. Jelas akan memberikan bilangan imajiner dengan $\sqrt{-1} = i$. Dalam hal ini dipunyai dua akar dari persamaan karakteristik, yaitu

$$\lambda_{\pm} = \beta + i\mu. \quad (14)$$

Dengan $\beta = \frac{-b}{2a}$ dan $\mu = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$. Ini mengakibatkan solusinya berbentuk

$$y = c_1 e^{(\beta+i\mu)t} + c_2 e^{(\beta-i\mu)t}. \quad (15)$$

Dengan $y_1 = e^{(\beta+i\mu)t}$ dan $y_2 = e^{(\beta-i\mu)t}$. $e^{\pm i\alpha} = \cos(\alpha) \pm i \sin(\alpha)$. Dan juga bisa dinyatakan bahwa $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ dan $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$. Sehingga solusinya

dapat dinyatakan sebagai

$$y_1 = e^{(\beta+i\mu)t} = e^{\beta t} (\cos(\mu t) + i \sin(\mu t)). \quad (16)$$

$$y_2 = e^{(\beta-i\mu)t} = e^{\beta t} (\cos(\mu t) - i \sin(\mu t)). \quad (17)$$

Solusi-solusi tersebut masih terlalu rumit dan panjang. Dapat disederhanakan dengan memperkenalkan dua solusi baru, yaitu Y_1 dan Y_2 yang didefinisikan sebagai

$$Y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\beta t} \cos(\mu t) \text{ dan } Y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\beta t} \sin(\mu t).$$

Dan didapatkan solusi umumnya sebagai

$$y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 = c_1 e^{\beta t} \cos(\mu t) + c_2 e^{\beta t} \sin(\mu t). \quad (18)$$

Dengan konstanta c_1 dan c_2 ditentukan dari kondisi awal yang diberikan (Waluya, 2006:62-72).

2.5.2 Persamaan Tak Homogen

Bentuk umum dari Persamaan tak homogen adalah:

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \quad (19)$$

Dengan $p(t), q(t)$ dan $g(t)$ adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval I (Waluya, 2006:76).

Teorema

"solusi umum persamaan tak homogen dapat dinyatakan sebagai $y = \phi(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + Y(t)$ " (20)

dengan y_1 dan y_2 adalah basis dari persamaan homogen, c_1 dan c_2 adalah konstanta-konstanta, dan $Y(t)$ adalah penyelesaian dari persamaan tak homogen" (Waluya, 2006:77).

Teorema ini memberikan langkah-langkah membangun solusi persamaan tak homogen adalah sebagai berikut:

- a. Temukan solusi umum persamaan homogenya,
- b. Temukan sebuah solusi untuk persamaan tak homogen,
- c. Jumlahkan keduanya,
- d. Temukan c_1 dan c_2 dari kondisi-kondisi awalnya.

Jika fungsi tebakan merupakan salah satu dari solusi homogenya, maka fungsi tebakan yang dipilih tak pernah membangun sebuah suku yang memenuhi ruas kanan tak homogen $g(t)$, sehingga fungsi tebakannya harus dikalikan dengan t (Supriyono, 2008: 62).

2.6 Persamaan Diferensial Linear dan Non Linear

Dipunyai persamaan diferensial biasa orde n

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (21)$$

Persamaan di atas disebut **linear** jika dapat ditulis dalam bentuk,

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + P_1(x)y' + P_0(x)y = r(x), \quad (22)$$

Koefisien P_0, \dots, P_{n-1} dan r diberikan dalam fungsi x dan y belum diketahui. Jika $y^{(n)}$ mempunyai koefisien 1, ini biasa disebut dengan bentuk standar. Jika suatu persamaan tidak dapat ditulis dalam bentuk persamaan (22) disebut **non linear** (Kreyzig, 1999:33).

2.7 Maple

Maple merupakan salah satu perangkat lunak (*software*) yang dikembangkan oleh Waterloo Inc. Kanada. Maple sering digunakan untuk keperluan *ComputerAlgebraic System (CAS)*. Menu-menu yang terdapat pada tampilan program Maple ini terdiri dari menu *File, Edit, View, Insert, Format, Spreadsheet, Option, Window, dan Help*. Sebagian besar menu-menu di atas merupakan menu standar yang dikembangkan untuk program aplikasi pada system operasi *Windows* (Tung, 2003).

Maple sering digunakan untuk keperluan penyelesaian permasalahan persamaan diferensial dan visualisasinya, karena Maple memiliki kemampuan menyederhanakan persamaan, hingga suatu solusi persamaan diferensial dapat dipahami dengan baik. Keunggulan lain dari Maple untuk aplikasi persamaan diferensial adalah kemampuan melakukan animasi grafik dari suatu fenomena gerakan yang dimodelkan ke dalam persamaan diferensial yang memiliki nilai awal dan syarat batas (Kartono, 2001).

Pernyataan yang sering digunakan untuk keperluan menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial antara lain: *diff* digunakan untuk mendiferensialkan (menurunkan) suatu fungsi, *dsolve* digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, *evalf* memberikan nilai numeric dari suatu persamaan, dan *simplify* digunakan untuk menyederhanakan suatu persamaan. Namun tentu saja pernyataan-pernyataan awal seperti *restart* dan deklarasi variabel/konstanta yang diperlukan tidak boleh diabaikan. Untuk membuat grafik pada Maple digunakan *perintah plot, plot2d, plot3d*, tergantung dimensi dari

pernyataan yang dimiliki. Untuk membuat gerakan animasi digunakan perintah *animate3d*.



BAB 3

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini metode yang penulis gunakan adalah studi pustaka.

Langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut :

3.1 Menentukan Masalah

Dalam tahap ini dilakukan pencarian sumber pustaka dan memilih bagian dalam sumber pustaka tersebut yang dapat dijadikan sebagai permasalahan yang akan dikaji.

3.2 Perumusan Masalah

Masalah yang ditemukan kemudian dirumuskan kedalam pertanyaan yang harus diselesaikan yaitu:

- a. Bagaimana pemodelan matematika pada sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdangeng)?
- b. Bagaimana solusi pemodelan matematika pada sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdangeng)?
- c. Bagaimanakah aplikasi program *Maple* pada sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdangeng)?
- d. Bagaimanakah pengaruh posisi awal, kecepatan awal, massa dan konstanta pegas terhadap amplitudo getaran?

Perumusan masalah di atas mengacu pada beberapa pustaka yang ada. Selanjutnya dengan menggunakan pendekatan teoritik maka dapat ditemukan jawaban permasalahan sehingga tercapai tujuan penulisan skripsi.

3.3 Studi Pustaka

Dalam langkah ini dilakukan kajian sumber-sumber pustaka dengan cara mengumpulkan data atau informasi yang berkaitan dengan masalah, mengumpulkan konsep pendukung yang diperlukan dalam menyelesaikan masalah, sehingga didapatkan suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah.

3.4 Analisis dan Pemecahan Masalah

Dari berbagai sumber pustaka yang sudah menjadi bahankajian, diperoleh suatu pemecahan masalah di atas. Selanjutnya dilakukan langkah-langkah pemecahan masalah sebagai berikut:

- a. Membuat pemodelan matematika pada sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdang).
- b. Mencari solusi dari pemodelan matematika yang telah didapat.
- c. Mengembangkan dan menginterpretasikan model matematika yang telah didapat untuk memperoleh solusi masalah dengan menggunakan program *Maple*.
- d. Menganalisis pengaruh posisi awal, kecepatan awal, massa dan konstanta pegas terhadap amplitudo getaran.

3.5 Penarikan Kesimpulan

Langkah terakhir dalam metode penelitian adalah penarikan kesimpulan yang diperoleh dari hasil langkah pemecahan masalah.



BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

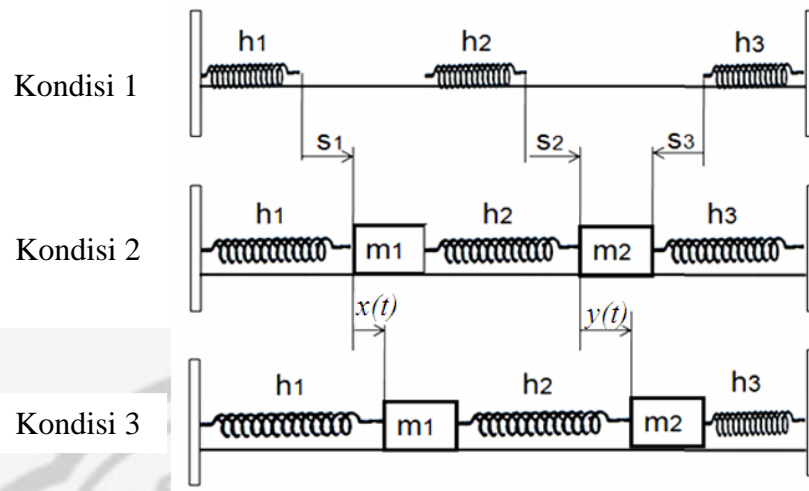
4.1 Penurunan Model Matematika Dari Sistem Getaran Dua

Derajat Kebebasan (Getaran Tergandeng)

Diambil tiga buah pegas biasa yang menahan tekanan dan pemanjangan, dengan k_1 adalah konstanta proporsional pegas pertama, k_2 adalah konstanta proporsional pegas kedua dan k_3 adalah konstanta proporsional pegas ketiga. Dan diambil dua buah benda yang masing-masing bermassa m_1 dan m_2 . Dari tiga pegas dan dua massa tersebut disusun suatu sistem pegas massa sedemikian hingga terlihat seperti pada Gambar 6.

Dianggap bahwa m_1 dan m_2 sedemikian besar sehingga massa kedua pegas dapat diabaikan. Jika ditarik benda ke kanan pada suatu jarak tertentu dan kemudian melepaskannya, maka benda tersebut akan bergerak. Asumsikan benda bergerak horizontal. Tentukan gerak sistem mekanisnya. Untuk itu ditinjau gaya-gaya yang bekerja pada masing-masing benda tersebut selama pergerakan. Gaya-gaya ini akan mengarah pada suatu persamaan diferensial dan dengan menyelesaikan persamaan ini, akan memperoleh pergeseran sebagai suatu fungsi dari waktu (Williamson, 1997: 347-348).

Dipilih arah ke kanan sebagai arah positif dan memandang gaya yang bekerja ke kanan sebagai gaya positif dan gaya ke kiri sebagai gaya negatif.



Gambar 6. Sistem pegas massa dengan kondisi awal $x(0) = x_0, y(0) = y_0, x'(0) = u_0$ dan $y'(0) = v_0$.

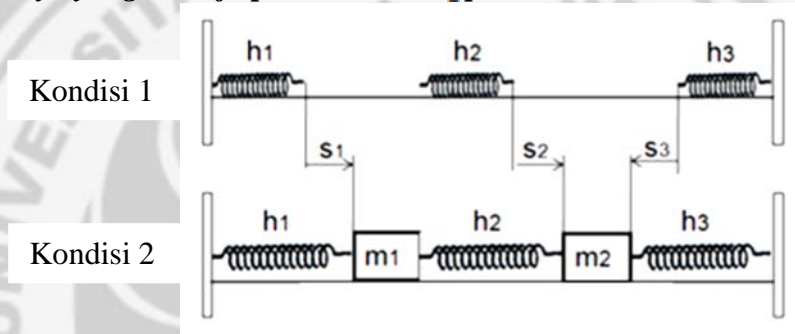
Kondisi 1: Pegas tanpa beban, dengan h_1 adalah konstanta pegas pertama, h_2 adalah konstanta pegas kedua dan h_3 adalah konstanta pegas ketiga. Panjang pegas pertama adalah l , panjang pegas kedua adalah p dan panjang pegas ketiga adalah r . Pegas pertama dan ketiga dikaitkan pada tembok, sedangkan pegas kedua diletakkan diantara pegas pertama dan pegas ketiga.

Kondisi 2: Massa m_1 dikaitkan dengan pegas pertama dan pegas kedua, massa m_2 dikaitkan dengan pegas kedua dan pegas ketiga sehingga pegas pertama meregang s_1 satuan panjang, pegas kedua meregang s_2 satuan panjang dan pegas ketiga meregang s_3 satuan panjang. Setelah mencapai keadaan setimbang, panjang pegas pertama menjadi $(l + s_1)$, panjang pegas kedua menjadi $(p + s_2)$ dan panjang pegas ketiga menjadi $(r + s_3)$.

Kondisi 3 : Massa kedua diberikan gaya luar sebesar $F(t)$ sedemikian hingga terjadi gerak vibrasi dengan posisi unsur massa m_1 pada setiap waktu t diperhitungkan dari keadaan setimbang adalah $x(t)$. Sedangkan posisi unsur massa m_2 pada setiap waktu t diperhitungkan dari keadaan setimbang adalah $y(t)$.

4.1.1 Gaya yang bekerja pada massa m_1

4.1.1.1 Gaya yang bekerja pada massa m_1 pada kondisi 2



a. Gaya Hooke (F_H)

i. Pada pegas pertama

$$F_{H1} = -h_1 s_1, \text{ dengan } h_1 \text{ adalah konstanta pegas pertama.}$$

Gaya Hooke pegas pertama bernilai negatif karena pegas pertama berada disebelah kiri m_1 (h_1 bernilai negatif) dan pegas pertama merenggang s_1 satuan panjang.

ii. Pada pegas kedua

$$F_{H2} = h_2 s_2, \text{ dengan } h_2 \text{ adalah konstanta pegas kedua.}$$

Gaya Hooke pegas kedua bernilai positif karena pegas kedua berada disebelah kanan m_1 (h_2 bernilai positif) dan pegas kedua merenggang s_2 satuan panjang.

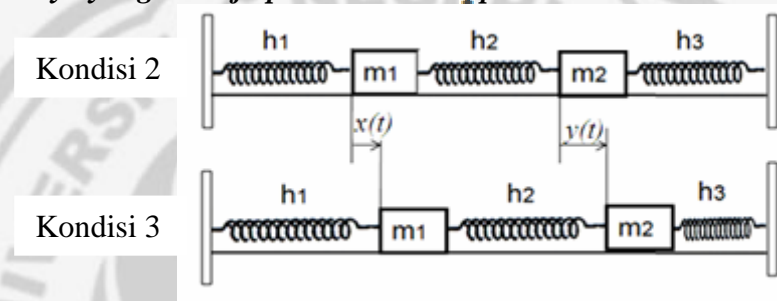
Apabila benda dalam keadaan diam (tidak bergerak), maka resultan gayanya nol, sehingga diperoleh

$$\sum F = 0$$

$$\Leftrightarrow F_{H1} + F_{H2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-h_1 s_1) + h_2 s_2 = 0. \quad (23)$$

4.1.1.2 Gaya yang bekerja pada massa m_1 pada kondisi 3



a. Gaya Hooke (F_H)

i. Pada pegas pertama

$$F_{H1} = -h_1[s_1 + x(t)], \text{ dengan } h_1 \text{ adalah konstanta pegas pertama.}$$

Gaya Hooke pegas pertama bernilai negatif karena pegas pertama berada disebelah kiri m_1 (h_1 bernilai negatif) dan pegas pertama merenggang $s_1 + x(t)$ satuan panjang.

ii. Pada pegas kedua

$$F_{H2} = h_2[s_2 + (y - x)(t)], \text{ dengan } h_2 \text{ adalah konstanta pegas kedua.}$$

Gaya Hooke pegas kedua bernilai positif karena pegas pertama berada disebelah kanan m_1 (h_2 bernilai positif) dan pegas kedua merenggang $[s_2 + (y - x)(t)]$ satuan panjang.

b. Gaya Peredam (F_d)

$$F_d = -cx'(t).$$

dengan c merupakan konstanta peredam. Misalnya ketika sistem pegas massa berosilasi dan jika gesekan dengan udara diperhitungkan maka gesekan dengan udara merupakan konstanta peredam.

Berdasarkan Hukum Newton (benda bergerak) yaitu total gaya yang bekerja berbanding lurus dengan hasil kali massa dengan percepatan. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \sum F &= ma \\ \Leftrightarrow F_{H1} + F_{H2} + F_d &= m_1 x''(t) \\ \Leftrightarrow -h_1[s_1 + x(t)] + h_2[s_2 + (y - x)(t)] - cx'(t) &= m_1 x''(t) \\ \Leftrightarrow -h_1 s_1 - h_1 x(t) + h_2 s_2 + h_2 (y - x)(t) - cx'(t) &= m_1 x''(t). \end{aligned}$$

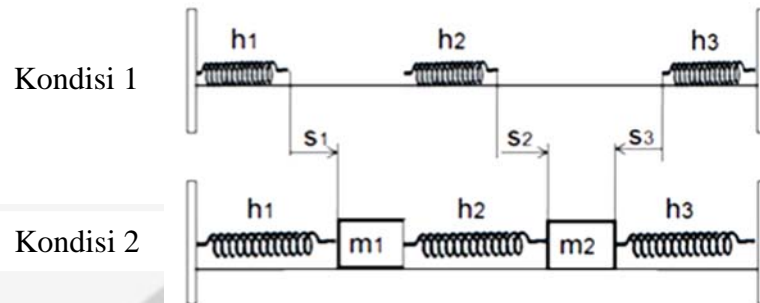
Dengan menggunakan persamaan (21) diperoleh

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -h_1 x(t) + h_2 (y - x)(t) - cx'(t) &= m_1 x''(t) \\ \Leftrightarrow m_1 x''(t) + cx'(t) + h_1 x(t) - h_2 (y - x)(t) &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Jadi, (24) adalah persamaan diferensial orde dua yang bekerja pada m_1 .

4.1.2 Gaya yang bekerja pada massa m_2

4.1.2.1 Gaya yang bekerja pada massa m_2 pada kondisi 2



a. Gaya Hooke (F_H)

i. Pada pegas kedua

$$F_{H2} = -h_2 s_2, \text{ dengan } h_2 \text{ adalah konstanta pegas kedua.}$$

Gaya Hooke pegas kedua bernilai negatif karena pegas kedua berada disebelah kiri m_2 (h_2 bernilai negatif) dan pegas kedua merenggang s_2 satuan panjang.

ii. Pada pegas ketiga

$$F_{H3} = h_3 s_3, \text{ dengan } h_3 \text{ adalah konstanta pegas ketiga.}$$

Gaya Hooke pegas ketiga bernilai positif karena pegas ketiga berada disebelah kanan m_2 (h_3 bernilai positif) dan pegas ketiga merenggang s_3 satuan panjang.

Apabila benda dalam keadaan diam, maka resultan gayanya nol, sehingga

diperoleh

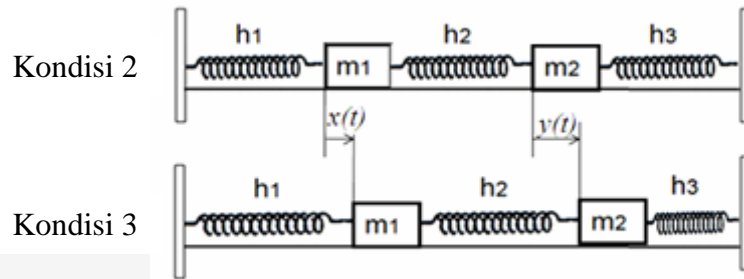
$$\sum F = 0$$

$$\Leftrightarrow F_{H2} + F_{H3} = 0$$

$$\Leftrightarrow -h_2 s_2 + h_3 s_3 = 0.$$

(25)

4.1.2.2 Gaya yang bekerja pada massa m_2 pada kondisi 3



a. Gaya Hooke (F_H)

i. Pada pegas kedua

$F_{H2} = -h_2[s_2 + (y - x)(t)]$, dengan h_2 adalah konstanta pegas kedua.

Gaya Hooke pegas kedua bernilai negatif karena pegas kedua berada disebelah kiri m_2 (h_2 bernilai negatif) dan pegas kedua merenggang $[s_2 + (y - x)(t)]$ satuan panjang.

ii. Pada pegas ketiga

$F_{H3} = h_3[s_3 - y(t)]$, dengan h_3 adalah konstanta pegas ketiga.

Gaya Hooke pegas ketiga bernilai positif karena pegas ketiga berada disebelah kanan m_2 (h_3 bernilai positif) dan panjang pegas ketiga berkurang $y(t)$ satuan panjang, sehingga panjang pegas ketiga menjadi $[s_3 - y(t)]$ satuan panjang.

b. Gaya Peredam (F_d)

$F_d = -cy'(t)$, dengan c merupakan konstanta peredam.

c. Gaya Luar ($F(t)$)

Berdasarkan Hukum Newton (benda bergerak) yaitu total gaya yang bekerja berbanding lurus dengan hasil kali massa dengan percepatan. Sehingga diperoleh

$$\sum F = ma$$

$$\Leftrightarrow F_{H2} + F_{H3} + F_d + F(t) = m_2 y''(t)$$

$$\Leftrightarrow -h_2[s_2 + (y-x)(t)] + h_3[s_3 - y(t)] - cy'(t) + F(t) = m_2 y''(t)$$

$$\Leftrightarrow -h_2 s_2 - h_2(y-x)(t) + h_3 s_3 - h_3 y(t) - cy'(t) + F(t) = m_2 y''(t)$$

Dengan menggunakan persamaan (23) diperoleh

$$\Leftrightarrow -h_2(y-x)(t) - h_3 y(t) - cy'(t) + F(t) = m_2 y''(t)$$

$$\Leftrightarrow m_2 y''(t) + cy'(t) + h_3 y(t) + h_2(y-x)(t) = F(t). \quad (26)$$

Jadi, (26) adalah persamaan diferensial orde dua yang bekerja pada m_2 .

Dari hasil tersebut, diketahui bahwa model matematika suatu sistem pegas massa yang terdiri dari tiga pegas dan dua massa dengan peredam dan gaya luar, yang hanya bergantung pada variabel bebas yaitu t (waktu) berbentuk persamaan diferensial biasa orde dua.

Jika pada model tersebut diberikan suatu nilai awal baik yang terkait dengan kedudukan awal yaitu $x(0)$ dan $y(0)$, maupun dengan kecepatan awal yaitu $x'(0)$ dan $y'(0)$ maka dapat diketahui perilaku fenomena tersebut melalui interpretasi grafik fungsi dengan syarat awal $x(0) = x_0, y(0) = y_0, x'(0) = u_0$ dan $y'(0) = v_0$.

Jadi kajian sistem pegas massa diberikan dalam model matematika adalah

$$m_1 x''(t) + cx'(t) + h_1 x(t) - h_2(y-x)(t) = 0 \quad (27.a)$$

$$m_2 y''(t) + c y'(t) + h_3 y(t) + h_2 (y - x)(t) = F(t) \quad (27.b)$$

dengan syarat awal $x(0) = x_0, y(0) = y_0, x'(0) = u_0$ dan $y'(0) = v_0$.

Jika sistem pegas massa tersebut tanpa redaman dan tanpa gaya luar maka $c x'(t) = 0, c y'(t) = 0$, dan $F(t) = 0$. Dari (27) diperoleh model matematika sistem pegas massa berupa sistem persamaan linear homogen orde dua yaitu

$$m_1 x''(t) + h_1 x(t) - h_2 (y - x)(t) = 0 \quad (28.a)$$

$$m_2 y''(t) + h_3 y(t) + h_2 (y - x)(t) = 0 \quad (28.b)$$

atau

$$m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} = -h_1 x + h_2 (y - x) \quad (29.a)$$

$$m_2 \frac{d^2 y}{dt^2} = -h_2 (y - x) - h_3 y \quad (29.b)$$

dengan syarat awal $x(0) = x_0, y(0) = y_0, x'(0) = u_0$ dan $y'(0) = v_0$.

4.2 Solusi dari Sistem Getaran Dua Derajat Kebebasan (Getaran Tergandeng)

Dari persamaan (28) telah diperoleh model matematika sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terganggu) tanpa redaman dan tanpa gaya luar sebagai berikut.

$$m_1 x''(t) + h_1 x(t) - h_2 (y - x)(t) = 0 \quad (30.a)$$

$$m_2 y''(t) + h_3 y(t) + h_2 (y - x)(t) = 0 \quad (30.b)$$

dengan syarat awal $x(0) = x_0, y(0) = y_0, x'(0) = u_0$ dan $y'(0) = v_0$.

Dari persamaan (30.a) diperoleh

$$\begin{aligned}
 m_1 x''(t) + h_1 x(t) - h_2 (y - x)(t) &= 0 \\
 \Leftrightarrow m_1 x''(t) + h_1 x(t) - h_2 y(t) + h_2 x(t) &= 0 \\
 \Leftrightarrow m_1 x''(t) + (h_1 + h_2)x(t) - h_2 y(t) &= 0.
 \end{aligned} \tag{31.a}$$

Dari persamaan (30.b) diperoleh

$$\begin{aligned}
 m_2 y'''(t) + h_3 y(t) + h_2 (y - x)(t) &= 0 \\
 \Leftrightarrow m_2 y'''(t) + h_3 y(t) + h_2 y(t) - h_2 x(t) &= 0 \\
 \Leftrightarrow m_2 y'''(t) + (h_3 + h_2)y(t) - h_2 x(t) &= 0 \\
 \Leftrightarrow m_2 y'''(t) + (h_3 + h_2)y(t) &= h_2 x(t) \\
 \Leftrightarrow x(t) = \frac{m_2 y'''(t) + (h_3 + h_2)y(t)}{h_2}.
 \end{aligned} \tag{31.b}$$

Turunan pertama dan turunan kedua dari $x(t)$ pada persamaan (31.b) adalah sebagai berikut.

$$x'(t) = \frac{m_2 y'''(t) + (h_3 + h_2)y'(t)}{h_2}. \tag{32.a}$$

$$x''(t) = \frac{m_2 y^{(iv)}(t) + (h_3 + h_2)y''(t)}{h_2}. \tag{32.b}$$

Substitusikan (31.b) dan (32.b) ke dalam persamaan (31.a), sehingga diperoleh

$$m_1 x''(t) + (h_1 + h_2)x(t) - h_2 y(t) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow m_1 \left(\frac{m_2 y^{(iv)}(t) + (h_3 + h_2) y''(t)}{h_2} \right) + (h_1 + h_2) \left(\frac{m_2 y''(t) + (h_3 + h_2) y(t)}{h_2} \right) - h_2 y(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{m_1 m_2 y^{(iv)}(t) + m_1 h_3 y''(t) + m_1 h_2 y''(t) + h_1 m_2 y''(t) + h_2 m_2 y''(t)}{h_2} \\ &\quad + \frac{h_1 h_3 y(t) + h_1 h_2 y(t) + h_2 h_3 y(t) + h_2^2 y(t) - h_2^2 y(t)}{h_2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow m_1 m_2 y^{(iv)}(t) + (m_1 h_3 + m_1 h_2 + m_2 h_1 + m_2 h_2) y''(t) + (h_1 h_3 \\ &\quad + h_1 h_2 + h_2 h_3) y(t) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Persamaan karakteristik dari persamaan (33) adalah

$$m_1 m_2 r^4 + (m_1 h_3 + m_1 h_2 + m_2 h_1 + m_2 h_2) r^2 + (h_1 h_3 + h_1 h_2 + h_2 h_3) = 0. \quad (34)$$

Misalkan $s = r^2$ maka persamaan (34) menjadi

$$m_1 m_2 s^2 + (m_1 h_3 + m_1 h_2 + m_2 h_1 + m_2 h_2) s + (h_1 h_3 + h_1 h_2 + h_2 h_3) = 0. \quad (35)$$

Ini adalah persamaan kuadrat dalam s . Dengan rumus, diperoleh akar-akar persamaan (35)

$$\begin{aligned} s_{1,2} = & \frac{-(m_1 h_3 + m_1 h_2 + m_2 h_1 + m_2 h_2)}{2 m_1 m_2} \\ & \pm \frac{\sqrt{(m_1 h_3 + m_1 h_2 + m_2 h_1 + m_2 h_2)^2 - 4(m_1 m_2)(h_1 h_3 + h_1 h_2 + h_2 h_3)}}{2 m_1 m_2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Misalkan $P = m_1 h_3 + m_1 h_2 + m_2 h_1 + m_2 h_2$ dan

$$\begin{aligned} D &= (m_1 h_3 + m_1 h_2 + m_2 h_1 + m_2 h_2)^2 - 4(m_1 m_2)(h_1 h_3 + h_1 h_2 + h_2 h_3) \\ &= m_1^2 h_3^2 + m_1^2 h_2^2 + m_2^2 h_1^2 + m_2^2 h_2^2 + 2m_1^2 h_2 h_3 + 2m_2^2 h_1 h_2 \\ &\quad + 2m_1 m_2 h_2^2 + 2m_1 m_2 h_1 h_3 + 2m_1 m_2 h_2 h_3 + 2m_1 m_2 h_1 h_2 - 4m_1 m_2 h_1 h_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4m_1m_2h_1h_2 - 4m_1m_2h_2h_3 \\
= & m_1^2h_3^2 + m_1^2h_2^2 + m_2^2h_1^2 + m_2^2h_2^2 + 2m_1^2h_2h_3 + 2m_2^2h_1h_2 \\
& + 2m_1m_2h_2^2 - 2m_1m_2h_1h_3 - 2m_1m_2h_1h_2 - 2m_1m_2h_2h_3.
\end{aligned}$$

Maka persamaan (36) menjadi

$$s_{1,2} = \frac{-P \pm \sqrt{D}}{2m_1m_2}.$$

Jadi

$$s_1 = \frac{-P + \sqrt{D}}{2m_1m_2} \quad s_2 = \frac{-P - \sqrt{D}}{2m_1m_2} \quad (37)$$

Karena $s = r^2$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
r^2 &= \frac{-P + \sqrt{D}}{2m_1m_2} \quad \text{atau} \quad r^2 = \frac{-P - \sqrt{D}}{2m_1m_2} \\
r_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{-P + \sqrt{D}}{2m_1m_2}} \quad \text{atau} \quad r_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-P - \sqrt{D}}{2m_1m_2}}
\end{aligned}$$

Jadi akar-akar karakteristik dari persamaan (34) adalah

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{\sqrt{-2m_1m_2(P + \sqrt{D})}}{2m_1m_2}, \\
r_2 &= -\frac{\sqrt{-2m_1m_2(P + \sqrt{D})}}{2m_1m_2},
\end{aligned} \quad (38)$$

$$r_3 = \frac{\sqrt{-2m_1m_2(P - \sqrt{D})}}{2m_1m_2}, \text{ dan}$$

$$r_4 = -\frac{\sqrt{-2m_1m_2(P - \sqrt{D})}}{2m_1m_2}.$$

Dari akar-akar karakteristik tersebut diperoleh solusi $y(t)$ (posisi unsur massa m_2 pada setiap waktu t diperhitungkan dari keadaan setimbang) dari persamaan (33) adalah

$$y(t) = c_1 e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{-\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} + c_3 e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} + c_4 e^{\left(\frac{-\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} \quad (39)$$

Turunan pertama dari $y(t)$ pada persamaan (39) adalah sebagai berikut

$$y'(t) = c_1 \left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} + c_2 \left(\frac{-\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right) e^{\left(\frac{-\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} + c_3 \left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} + c_4 \left(\frac{-\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right) e^{\left(\frac{-\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} \quad (40.a)$$

Turunan kedua dari $y(t)$ pada persamaan (39) adalah sebagai berikut

$$y''(t) = c_1 \left(\frac{-P - \sqrt{D}}{2m_1 m_2}\right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t}$$

$$+ c_2 \left(\frac{-P - \sqrt{D}}{2m_1 m_2} \right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \quad (40.b)$$

$$+ c_3 \left(\frac{-P + \sqrt{D}}{2m_1 m_2} \right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t}$$

$$+ c_4 \left(\frac{-P + \sqrt{D}}{2m_1 m_2} \right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t}$$

Substitusikan $y(t)$ dari persamaan (39) dan turunan kedua dari $y(t)$ pada persamaan (40.b) ke persamaan (31.b).

$$x(t) = \frac{m_2 y''(t) + (h_2 + h_3)y(t)}{h_2}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{m_2}{h_2} y''(t) + y(t) + \frac{h_3}{h_2} y(t)$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{m_2}{h_2} \left[c_1 \left(\frac{-P - \sqrt{D}}{2m_1 m_2} \right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} + c_2 \left(\frac{-P - \sqrt{D}}{2m_1 m_2} \right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \right.$$

$$\left. + c_3 \left(\frac{-P + \sqrt{D}}{2m_1 m_2} \right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} + c_4 \left(\frac{-P + \sqrt{D}}{2m_1 m_2} \right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \right]$$

$$+ \left[c_1 e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} + c_2 e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} + c_3 e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \right.$$

$$\left. + c_4 e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \right] + \frac{h_3}{h_2} \left[c_1 e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} + c_2 e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + c_3 e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} + c_4 e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} \Bigg] \\
\Rightarrow x(t) &= c_1 \left(\frac{-P - \sqrt{D}}{2m_1 h_2}\right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} + c_2 \left(\frac{-P - \sqrt{D}}{2m_1 h_2}\right) e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} \\
& + c_3 \left(\frac{-P + \sqrt{D}}{2m_1 h_2}\right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} + c_4 \left(\frac{-P + \sqrt{D}}{2m_1 h_2}\right) e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} \\
& + c_1 e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} + c_3 e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} \\
& + c_4 e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} + c_1 \frac{h_3}{h_2} e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} + c_2 \frac{h_3}{h_2} e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} \\
& + c_3 \frac{h_3}{h_2} e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} + c_4 \frac{h_3}{h_2} e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} \\
\Rightarrow x(t) &= c_1 \left(\frac{-P - \sqrt{D}}{2m_1 h_2} + 1 + \frac{h_3}{h_2}\right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} \\
& + c_2 \left(\frac{-P - \sqrt{D}}{2m_1 h_2} + 1 + \frac{h_3}{h_2}\right) e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} \\
& + c_3 \left(\frac{-P + \sqrt{D}}{2m_1 h_2} + 1 + \frac{h_3}{h_2}\right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} \\
& + c_4 \left(\frac{-P + \sqrt{D}}{2m_1 h_2} + 1 + \frac{h_3}{h_2}\right) e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} \\
\Rightarrow x(t) &= c_1 \left(\frac{2m_1 h_2 + 2m_1 h_3 - P - \sqrt{D}}{2m_1 h_2}\right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t}
\end{aligned}$$

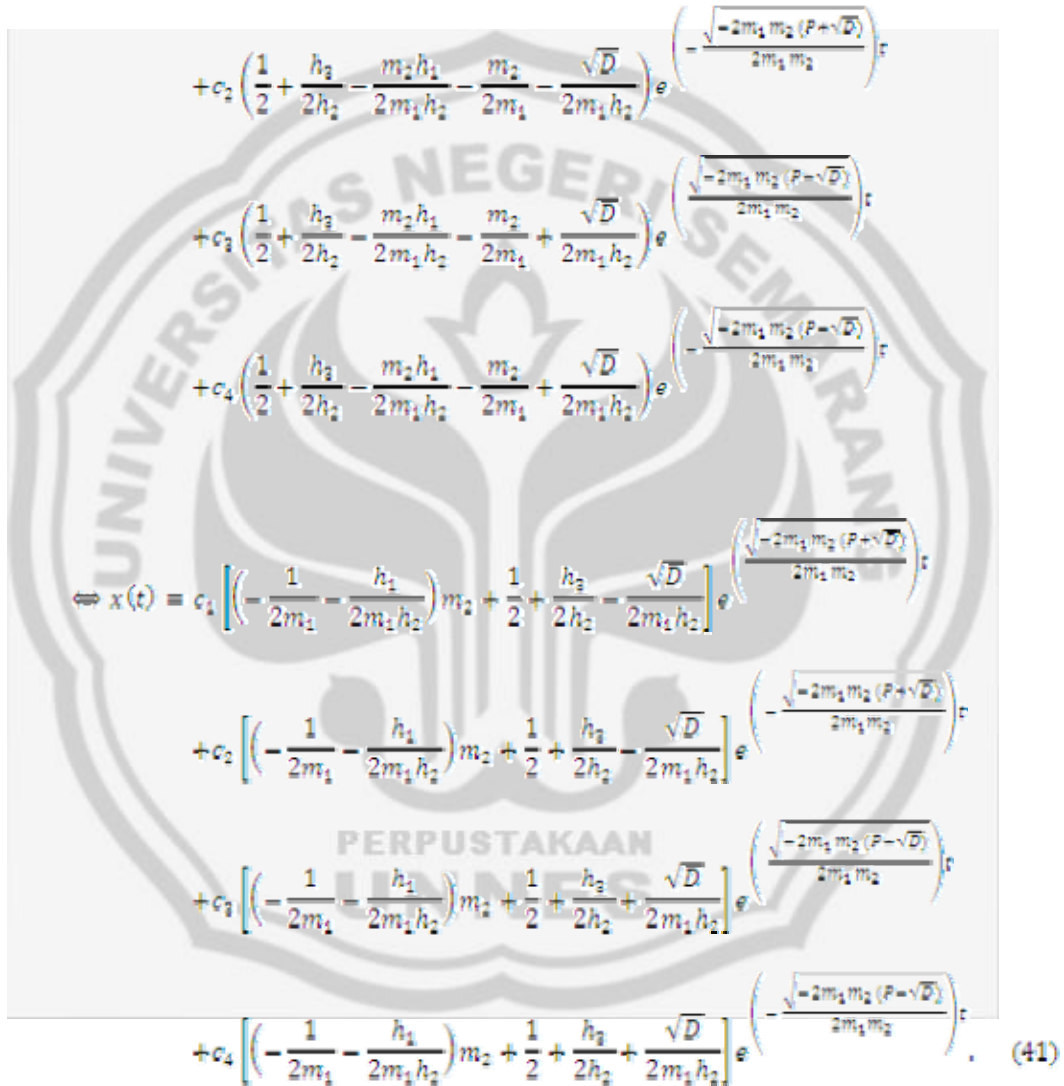
$$\begin{aligned}
 &+ c_2 \left(\frac{2m_1 h_2 + 2m_1 h_3 - P - \sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \\
 &+ c_3 \left(\frac{2m_1 h_2 + 2m_1 h_3 - P + \sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \\
 &+ c_4 \left(\frac{2m_1 h_2 + 2m_1 h_3 - P + \sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t}.
 \end{aligned}$$

Karena $P = m_1 h_3 + m_1 h_2 + m_2 h_1 + m_2 h_2$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 x(t) &= c_1 \left(\frac{2m_1 h_2 + 2m_1 h_3 - (m_1 h_3 + m_1 h_2 + m_2 h_1 + m_2 h_2) - \sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \\
 &+ c_2 \left(\frac{2m_1 h_2 + 2m_1 h_3 - (m_1 h_3 + m_1 h_2 + m_2 h_1 + m_2 h_2) - \sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \\
 &+ c_3 \left(\frac{2m_1 h_2 + 2m_1 h_3 - (m_1 h_3 + m_1 h_2 + m_2 h_1 + m_2 h_2) + \sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \\
 &+ c_4 \left(\frac{2m_1 h_2 + 2m_1 h_3 - (m_1 h_3 + m_1 h_2 + m_2 h_1 + m_2 h_2) + \sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \\
 \Leftrightarrow x(t) &= c_1 \left(\frac{m_1 h_2 + m_1 h_3 - m_2 h_1 - m_2 h_2 - \sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \\
 &+ c_2 \left(\frac{m_1 h_2 + m_1 h_3 - m_2 h_1 - m_2 h_2 - \sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \\
 &+ c_3 \left(\frac{m_1 h_2 + m_1 h_3 - m_2 h_1 - m_2 h_2 + \sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t}
 \end{aligned}$$

$$+c_4 \left(\frac{m_1 h_2 + m_1 h_2 - m_2 h_1 - m_2 h_2}{2m_1 h_2} + \sqrt{D} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = c_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{h_2}{2h_2} - \frac{m_2 h_1}{2m_1 h_2} - \frac{m_2}{2m_1} - \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t}$$



$$+c_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{h_2}{2h_2} - \frac{m_2 h_1}{2m_1 h_2} - \frac{m_2}{2m_1} - \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t}$$

$$+c_3 \left(\frac{1}{2} + \frac{h_2}{2h_2} - \frac{m_2 h_1}{2m_1 h_2} - \frac{m_2}{2m_1} + \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right) e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t}$$

$$+c_4 \left(\frac{1}{2} + \frac{h_2}{2h_2} - \frac{m_2 h_1}{2m_1 h_2} - \frac{m_2}{2m_1} + \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = c_1 \left[\left(-\frac{1}{2m_1} - \frac{h_1}{2m_1 h_2} \right) m_2 + \frac{1}{2} + \frac{h_2}{2h_2} - \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right] e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t}$$

$$+c_2 \left[\left(-\frac{1}{2m_1} - \frac{h_1}{2m_1 h_2} \right) m_2 + \frac{1}{2} + \frac{h_2}{2h_2} - \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right] e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t}$$

$$+c_3 \left[\left(-\frac{1}{2m_1} - \frac{h_1}{2m_1 h_2} \right) m_2 + \frac{1}{2} + \frac{h_2}{2h_2} + \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right] e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t}$$

$$+c_4 \left[\left(-\frac{1}{2m_1} - \frac{h_1}{2m_1 h_2} \right) m_2 + \frac{1}{2} + \frac{h_2}{2h_2} + \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right] e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t}. \quad (41)$$

Jadi solusi dari model matematika sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdang) tanpa redaman dan tanpa gaya luar dari (28) diperoleh dari persamaan (39) dan (41) yaitu

$$\begin{aligned}
 x(t) = & c_1 \left[\left(-\frac{1}{2m_1} - \frac{h_1}{2m_1 h_2} \right) m_2 + \frac{1}{2} + \frac{h_3}{2h_2} - \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right] e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \\
 & + c_2 \left[\left(-\frac{1}{2m_1} - \frac{h_1}{2m_1 h_2} \right) m_2 + \frac{1}{2} + \frac{h_3}{2h_2} - \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right] e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \\
 & + c_3 \left[\left(-\frac{1}{2m_1} - \frac{h_1}{2m_1 h_2} \right) m_2 + \frac{1}{2} + \frac{h_3}{2h_2} + \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right] e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \\
 & + c_4 \left[\left(-\frac{1}{2m_1} - \frac{h_1}{2m_1 h_2} \right) m_2 + \frac{1}{2} + \frac{h_3}{2h_2} + \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right] e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t}. \quad (42.a)
 \end{aligned}$$

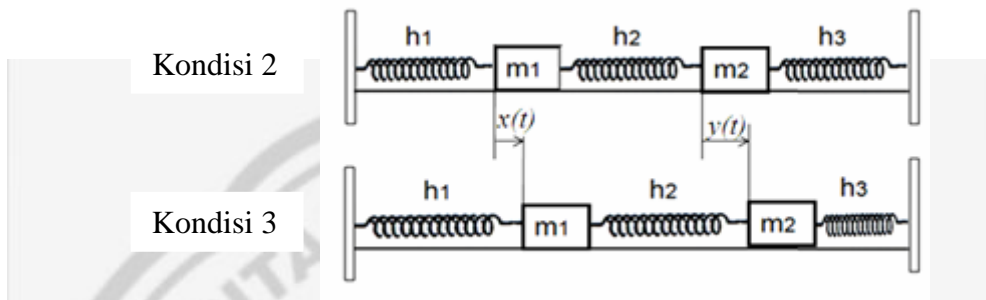
$$\begin{aligned}
 y(t) = & c_1 e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} + c_2 e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} + c_3 e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \\
 & + c_4 e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \quad (42.b)
 \end{aligned}$$

dengan $P = m_1 h_3 + m_1 h_2 + m_2 h_1 + m_2 h_2$ dan

$$\begin{aligned}
 D = & m_1^2 h_3^2 + m_1^2 h_2^2 + m_2^2 h_1^2 + m_2^2 h_2^2 + 2m_1^2 h_2 h_3 + 2m_2^2 h_1 h_2 \\
 & + 2m_1 m_2 h_2^2 - 2m_1 m_2 h_1 h_3 - 2m_1 m_2 h_1 h_2 - 2m_1 m_2 h_2 h_3.
 \end{aligned}$$

Dengan syarat awal $x(0) = x_0, y(0) = y_0, x'(0) = u_0$ dan $y'(0) = v_0$.

4.3 Contoh penerapan Sistem Getaran Dua Derajat Kebebasan (Getaran Tergandeng) tanpa redaman dan tanpa gaya luar



Gambar 7. Sistem pegas massa kondisi 2 dan kondisi 3.

Kondisi 2: Sistem pegas massa dalam keadaan setimbang, dengan h_1 adalah konstanta pegas pertama, h_2 adalah konstanta pegas kedua dan h_3 adalah konstanta pegas ketiga.

Kondisi 3 : Massa kedua diberikan gaya luar sebesar $F(t)$ sedemikian hingga terjadi gerak vibrasi dengan posisi unsur massa m_1 pada setiap waktu t diperhitungkan dari keadaan setimbang adalah $x(t)$. Sedangkan posisi unsur massa m_2 pada setiap waktu t diperhitungkan dari keadaan setimbang adalah $y(t)$.

Model matematika dari sistem pegas massa pada Gambar 7 yaitu sistem pegas massa tanpa redaman dan tanpa gaya luar dapat dilihat pada persamaan (26)

yaitu:

$$m_1 x''(t) + h_1 x(t) - h_2 (y - x)(t) = 0 \quad (43.a)$$

$$m_2 y''(t) + h_3 y(t) + h_2 (y - x)(t) = 0. \quad (43.b)$$

Dengan syarat awal $x(0) = x_0, y(0) = y_0, x'(0) = u_0$ dan $y'(0) = v_0$.

Misalkan pada sistem pegas massa (Gambar 7) akan diberikan beberapa nilai parameter yaitu $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $h_1 = 10$, $h_2 = 10$ dan $h_3 = 10$, syarat awal $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$. Akan ditentukan perpindahan massa m_1 dan m_2 terhadap waktu (t) yang dinotasikan dengan $x(t)$ dan $y(t)$.

Penyelesaian:

Dari sistem (43.a) dan (43.b) di dapat.

$$x''(t) + 20x(t) - 10y(t) = 0 \quad (44.a)$$

$$y''(t) - 10x(t) + 20y(t) = 0. \quad (44.b)$$

Dengan syarat awal $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$.

Solusi dari model matematika osilasi sistem getaran dua derajat kebebasan yaitu persamaan (42) sebagai berikut.

$x(t)$: Posisi unsur massa m_1 pada setiap waktu t diperhitungkan dari keadaan setimbang.

$$\begin{aligned}
 x(t) = & c_1 \left[\left(-\frac{1}{2m_1} - \frac{h_1}{2m_1 h_2} \right) m_2 + \frac{1}{2} + \frac{h_2}{2h_2} - \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right] e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \\
 & + c_2 \left[\left(-\frac{1}{2m_1} - \frac{h_1}{2m_1 h_2} \right) m_2 + \frac{1}{2} + \frac{h_2}{2h_2} - \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right] e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \\
 & + c_3 \left[\left(-\frac{1}{2m_1} - \frac{h_1}{2m_1 h_2} \right) m_2 + \frac{1}{2} + \frac{h_2}{2h_2} + \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right] e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t} \\
 & + c_4 \left[\left(-\frac{1}{2m_1} - \frac{h_1}{2m_1 h_2} \right) m_2 + \frac{1}{2} + \frac{h_2}{2h_2} + \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right] e^{\left(-\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2} \right) t}. \quad (42.a)
 \end{aligned}$$

$y(t)$: Posisi unsur massa m_2 pada setiap waktu t diperhitungkan dari keadaan setimbang.

$$y(t) = c_1 e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1m_2(P+\sqrt{D})}}{2m_1m_2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{-\sqrt{-2m_1m_2(P+\sqrt{D})}}{2m_1m_2}\right)t} + c_3 e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1m_2(P-\sqrt{D})}}{2m_1m_2}\right)t} + c_4 e^{\left(\frac{-\sqrt{-2m_1m_2(P-\sqrt{D})}}{2m_1m_2}\right)t} \quad (42.b)$$

dengan $P = m_1h_3 + m_1h_2 + m_2h_1 + m_2h_2$ dan

$$D = m_1^2h_3^2 + m_1^2h_2^2 + m_2^2h_1^2 + m_2^2h_2^2 + 2m_1^2h_2h_3 + 2m_2^2h_1h_2 + 2m_1m_2h_2^2 - 2m_1m_2h_1h_3 - 2m_1m_2h_1h_2 - 2m_1m_2h_2h_3.$$

Maka dapat diperoleh

$$\begin{aligned} P &= m_1h_3 + m_1h_2 + m_2h_1 + m_2h_2 \\ &= 1(10) + 1(10) + 1(10) + 1(10) \\ &= 40. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dan } D &= m_1^2h_3^2 + m_1^2h_2^2 + m_2^2h_1^2 + m_2^2h_2^2 + 2m_1^2h_2h_3 + 2m_2^2h_1h_2 \\ &\quad + 2m_1m_2h_2^2 - 2m_1m_2h_1h_3 - 2m_1m_2h_1h_2 - 2m_1m_2h_2h_3 \\ &= 400. \\ \sqrt{D} &= 20. \end{aligned}$$

Substitusikan $m_1 = 1, m_2 = 1, h_1 = 10, h_2 = 10, h_3 = 10, P = 40$, dan

$\sqrt{D} = 20$ ke persamaan (42.a) dan (42.b) maka diperoleh

$$\begin{aligned} x(t) &= -c_1 e^{\left(\frac{\sqrt{-120}}{2}\right)t} - c_2 e^{\left(\frac{-\sqrt{-120}}{2}\right)t} + c_3 e^{\left(\frac{\sqrt{-40}}{2}\right)t} + c_4 e^{\left(\frac{-\sqrt{-40}}{2}\right)t} \\ \Leftrightarrow x(t) &= -c_1 e^{i\sqrt{30}t} - c_2 e^{-i\sqrt{30}t} + c_3 e^{i\sqrt{10}t} + c_4 e^{-i\sqrt{10}t} \\ \Leftrightarrow x(t) &= -c_1 e^{i\sqrt{30}t} - c_2 e^{-i\sqrt{30}t} + c_3 e^{i\sqrt{10}t} + c_4 e^{-i\sqrt{10}t} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = -c_1 \cos \sqrt{30}t - c_2 \sin \sqrt{30}t + c_3 \cos \sqrt{10}t + c_4 \sin \sqrt{10}t. \quad (45.a)$$

$$y(t) = c_1 e^{\left(\frac{\sqrt{-120}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{\sqrt{-120}}{2}\right)t} + c_3 e^{\left(\frac{\sqrt{-40}}{2}\right)t} + c_4 e^{\left(-\frac{\sqrt{-40}}{2}\right)t}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = c_1 e^{(\sqrt{-30})t} + c_2 e^{(-\sqrt{-30})t} + c_3 e^{(\sqrt{-10})t} + c_4 e^{(-\sqrt{-10})t}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = c_1 e^{i\sqrt{30}t} + c_2 e^{-i\sqrt{30}t} + c_3 e^{i\sqrt{10}t} + c_4 e^{-i\sqrt{10}t}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = c_1 \cos \sqrt{30}t + c_2 \sin \sqrt{30}t + c_3 \cos \sqrt{10}t + c_4 \sin \sqrt{10}t. \quad (45.b)$$

Jadi solusi umum masalah pada persamaan (44.a) dan (44.b) diperoleh dari persamaan (45.a) dan (45.b) sebagai berikut.

$$x(t) = -c_1 \cos \sqrt{30}t - c_2 \sin \sqrt{30}t + c_3 \cos \sqrt{10}t + c_4 \sin \sqrt{10}t \text{ dan}$$

$$y(t) = c_1 \cos \sqrt{30}t + c_2 \sin \sqrt{30}t + c_3 \cos \sqrt{10}t + c_4 \sin \sqrt{10}t$$

Turunan pertama dari solusi umum tersebut adalah sebagai berikut.

$$x'(t) = \sqrt{30}c_1 \sin \sqrt{30}t - \sqrt{30}c_2 \cos \sqrt{30}t - \sqrt{10}c_3 \sin \sqrt{10}t + \sqrt{10}c_4 \cos \sqrt{10}t$$

$$y'(t) = -\sqrt{30}c_1 \sin \sqrt{30}t + \sqrt{30}c_2 \cos \sqrt{30}t - \sqrt{10}c_3 \sin \sqrt{10}t + \sqrt{10}c_4 \cos \sqrt{10}t$$

Syarat awal model matematika tersebut adalah $x(0) = 1, y(0) = 0, x'(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$.

$$\text{Dari } x(0) = 1 \text{ diperoleh } -c_1 + c_3 = 1. \quad (46.a)$$

$$\text{Dari } y(0) = 0 \text{ diperoleh } c_1 + c_3 = 0. \quad (46.b)$$

$$\text{Dari } x'(0) = 0 \text{ diperoleh } -\sqrt{30}c_2 + \sqrt{10}c_4 = 0. \quad (46.c)$$

$$\text{Dari } y'(0) = 0 \text{ diperoleh } \sqrt{30}c_2 + \sqrt{10}c_4 = 0. \quad (46.d)$$

Dari persamaan (46.a) dan (46.b) diperoleh

$$c_1 = -\frac{1}{2} \text{ dan } c_3 = \frac{1}{2}$$

Dari persamaan (46.c) dan (46.d) diperoleh

$$C_2 = 0 \text{ dan } C_4 = 0.$$

Dengan mengganti konstanta pada solusi umum dari persamaan (45.a) dan (45.b) diperoleh solusi khusus dari masalah masalah sistem pegas massa pada persamaan (44.a) dan (44.b) adalah sebagai berikut.

$$x(t) = \frac{1}{2} \cos\sqrt{10}t + \frac{1}{2} \cos\sqrt{30}t. \quad (47.a)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \cos\sqrt{10}t - \frac{1}{2} \cos\sqrt{30}t. \quad (47.b)$$

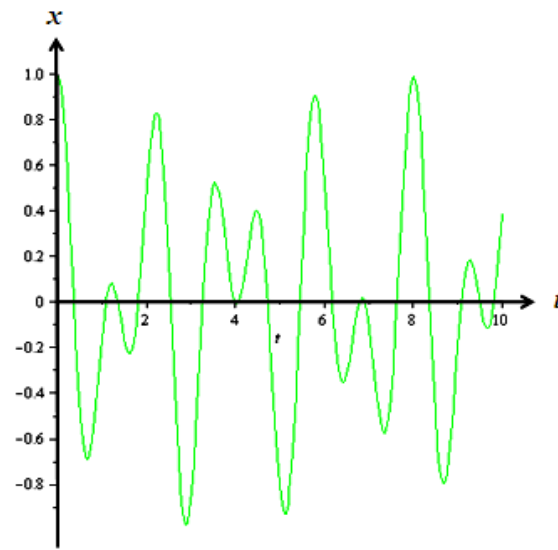
Dengan menggunakan program *Maple*, dari solusi (42.a) dan (42.b) diperoleh

$$x1 := x(t) = \frac{1}{2} \cos\sqrt{10}t + \frac{1}{2} \cos\sqrt{30}t$$

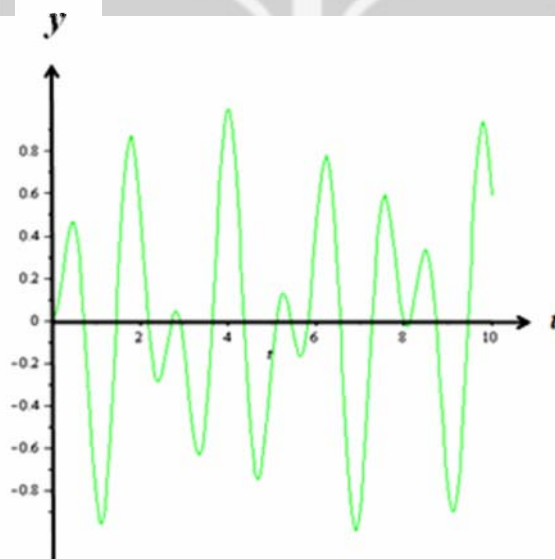
dan

$$y1 := y(t) = \frac{1}{2} \cos\sqrt{10}t - \frac{1}{2} \cos\sqrt{30}t.$$

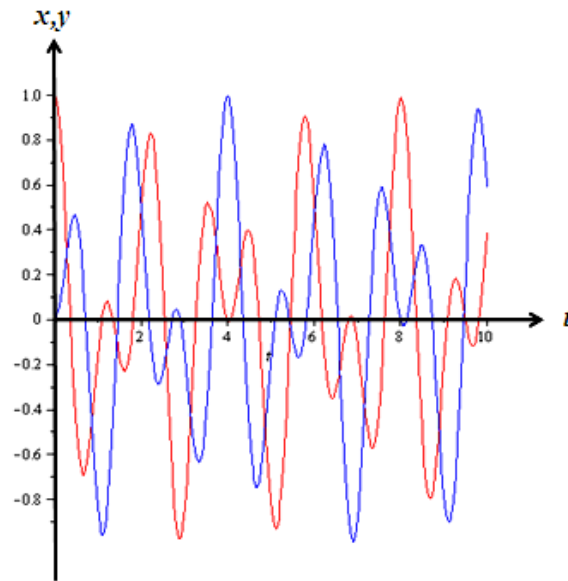
Plot solusi $x(t)$ dan $y(t)$ dapat diberikan dengan Gambar 8, 9, dan 10.



Gambar 8. Plot solusi untuk $x(t)$ dari persamaan $x''(t) + 20x(t) - 10y(t) = 0$ dan $y''(t) - 10x(t) + 20y(t) = 0$ dengan syarat awal $x(0) = 1, y(0) = 0, x'(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$.



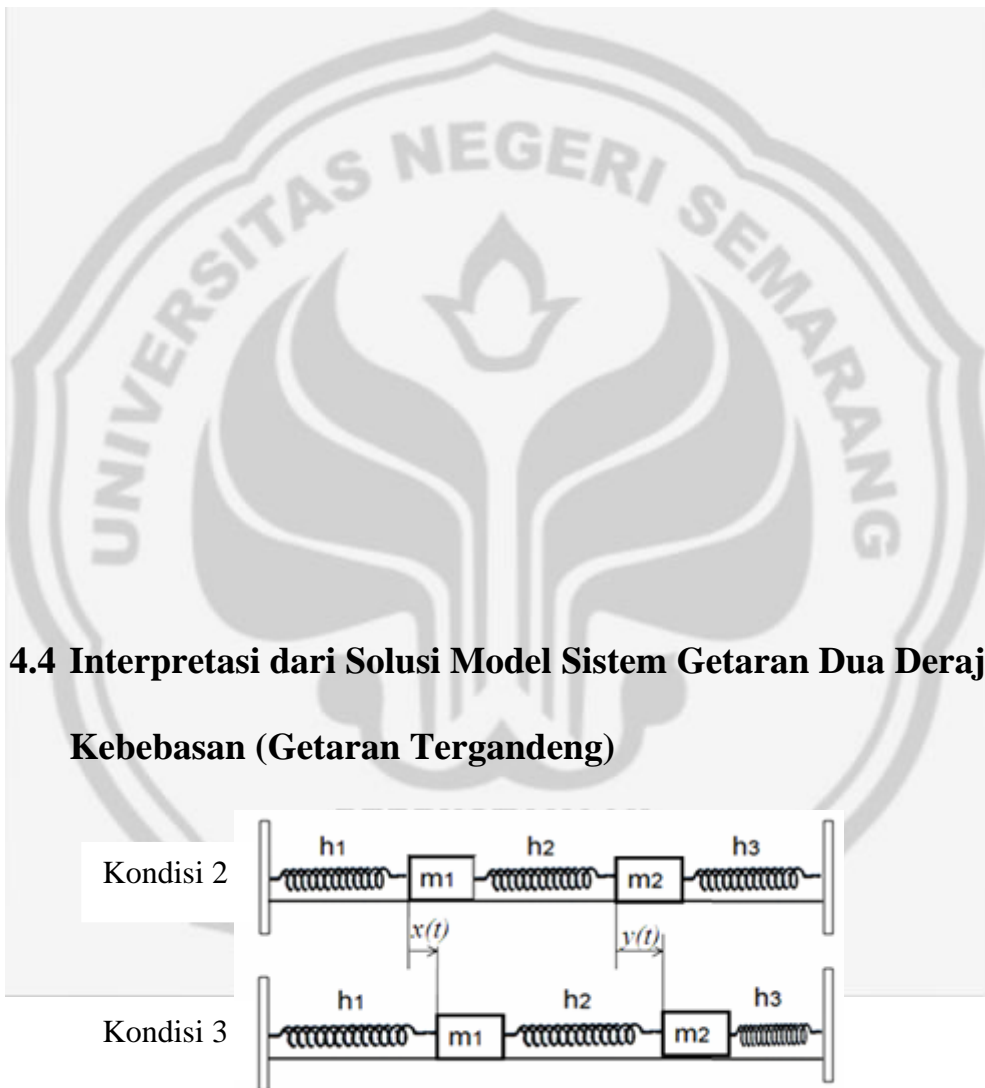
Gambar 9. Plot solusi untuk $y(t)$ dari persamaan $x''(t) + 20x(t) - 10y(t) = 0$ dan $y''(t) - 10x(t) + 20y(t) = 0$ dengan syarat awal $x(0) = 1, y(0) = 0, x'(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$.



Gambar 10. Plot solusi untuk $x(t)$ dan $y(t)$ dari persamaan $x''(t) + 20x(t) - 10y(t) = 0$ dan $y''(t) - 10x(t) + 20y(t) = 0$ dengan syarat awal $x(0) = 1, y(0) = 0, x'(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$.

Gambar 10 merupakan gabungan plot solusi untuk $x(t)$ dan $y(t)$. Pada Gambar tersebut terlihat bahwa pada periode $t = 0$ sampai $t = 10$ terdapat beberapa titik potong antara plot solusi untuk $x(t)$ (posisi unsur massa m_1 pada setiap waktu t diperhitungkan dari keadaan setimbang) dan plot solusi untuk $y(t)$ (posisi unsur massa m_2 pada setiap waktu t diperhitungkan dari keadaan setimbang). Dengan kata lain, dalam periode waktu tersebut m_1 dan m_2 beberapa kali melakukan gerakan dengan arah dan jarak simpangan yang sama.

Dilihat dari Gambar 8 sd 10 diperoleh bahwa energi mekanika gerak osilasi pada sistem pegas massa tersebut tidak berkurang terhadap waktu karena tidak terdapat gaya peredam pada sistem tersebut.



Gambar 11. Sistem pegas massa kondisi 2 dan kondisi 3.

Kondisi 2: Sistem pegas massa dalam keadaan setimbang, dengan h_1 adalah konstanta pegas pertama, h_2 adalah konstanta pegas kedua dan h_3 adalah konstanta pegas ketiga.

Kondisi 3 : Massa kedua diberikan gaya luar sebesar $F(t)$ sedemikian hingga terjadi gerak vibrasi dengan posisi unsur massa m_1 pada setiap waktu t diperhitungkan dari keadaan setimbang adalah $x(t)$. Sedangkan posisi unsur massa m_2 pada setiap waktu t diperhitungkan dari keadaan setimbang adalah $y(t)$.

Model matematika dari sistem pegas massa pada Gambar diatas yaitu sistem pegas massa tanpa redaman dan tanpa gaya luar dapat dilihat pada persamaan (26) yaitu

$$m_1 x''(t) + h_1 x(t) - h_2 (y - x)(t) = 0 \quad (26.a)$$

$$m_2 y''(t) + h_3 y(t) + h_2 (y - x)(t) = 0. \quad (26.b)$$

Dengan syarat awal $x(0) = x_0, y(0) = y_0, x'(0) = u_0$ dan $y'(0) = v_0$.

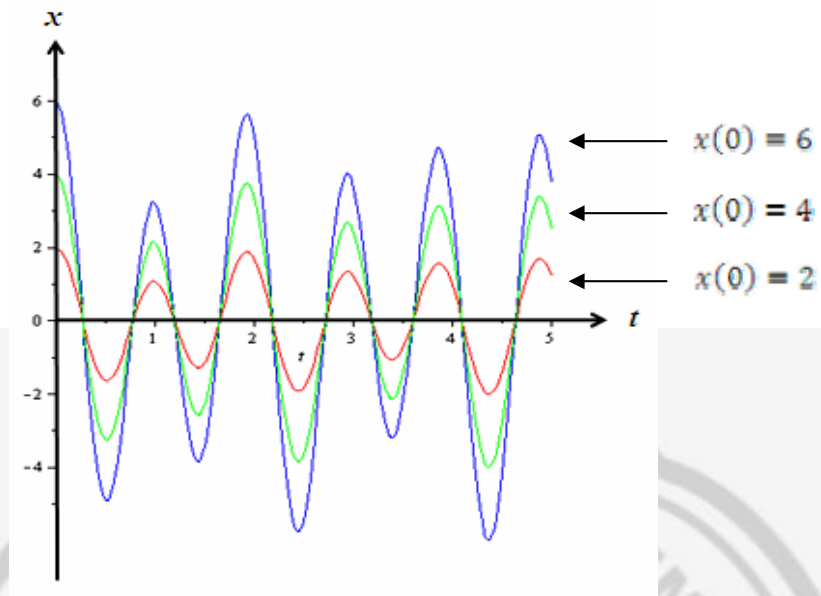
4.4.1 Pengaruh posisi awal terhadap Amplitudo getaran m_1 dan m_2

4.4.1.1 Pengaruh $x(0)$ terhadap Amplitudo m_1 dan m_2

Misalkan diberikan beberapa nilai parameter yaitu

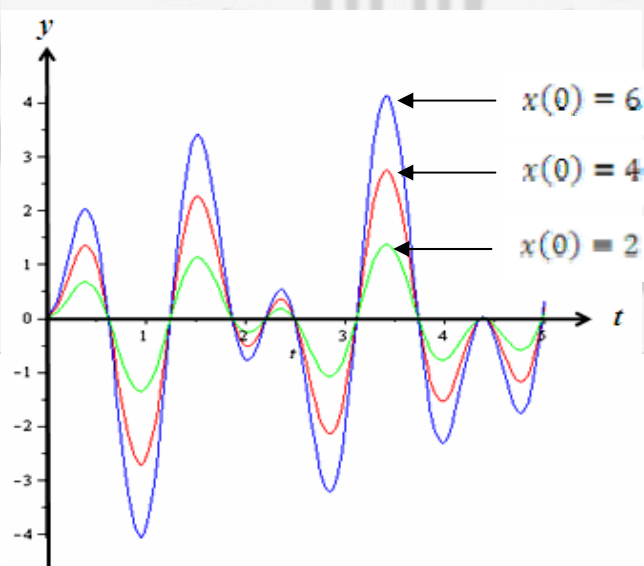
$$m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30, x'(0) = 0, y(0) = 0 \text{ dan } y'(0) = 0$$

dengan berbagai nilai $x(0)$. Maka, grafik osilasi m_1 dan grafik osilasi m_2 dapat diberikan dengan Gambar 12 dan Gambar 13.



Gambar 12. Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai posisi awal $x(0)$ dengan

$$m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30, x'(0) = 0, y(0) = 0 \text{ dan } y'(0) = 0$$



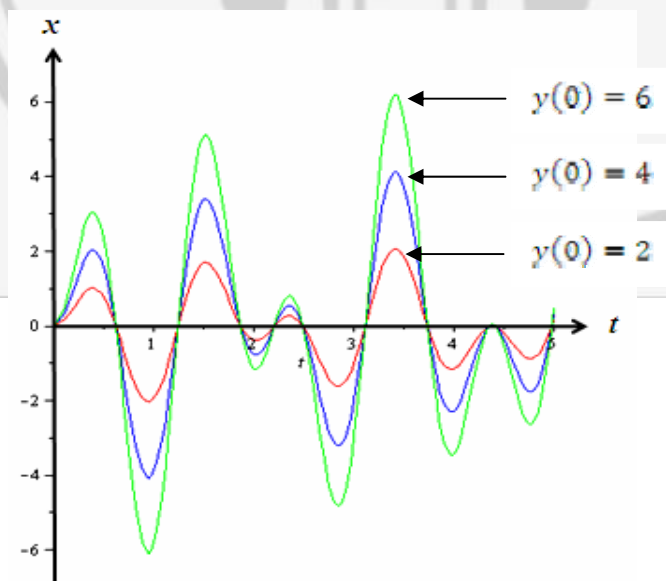
Gambar 13. Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai posisi awal $x(0)$ dengan

$$m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30, x'(0) = 0, y(0) = 0 \text{ dan } y'(0) = 0$$

Dari hasil simulasi dengan menggunakan program Maple seperti terlihat pada Gambar 12 dan Gambar 13 diperoleh bahwa jika nilai $x(0)$ berbeda maka akan berbeda pula amplitudo getaran dari m_1 dan m_2 . Pada Gambar 12 dan Gambar 13 terlihat grafik dengan $x(0) = 2$ mempunyai amplitudo yang paling kecil dibandingkan grafik dengan $x(0) = 4$ dan grafik dengan $x(0) = 6$ yang merupakan grafik dengan amplitudo terbesar. Dari dasar itu maka dapat diduga bahwa semakin besar $x(0)$ maka semakin besar pula amplitudo getaran.

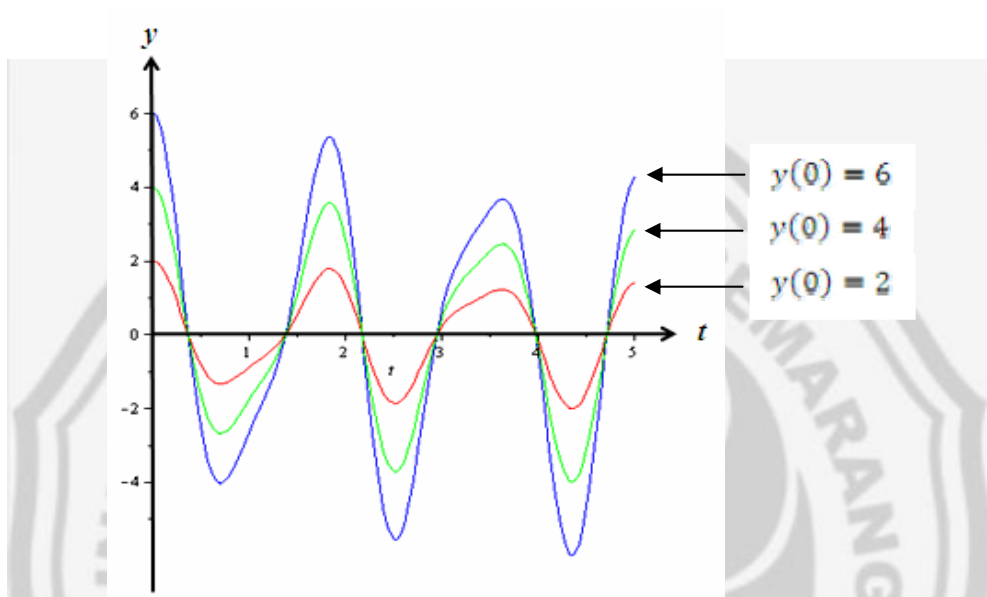
4.4.1.2 Pengaruh $y(0)$ terhadap Amplitudo m_1 dan m_2

Misalkan diberikan beberapa nilai parameter yaitu $m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30, x(0) = 0, x'(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$ dengan berbagai nilai $y(0)$. Maka, grafik osilasi m_1 dan grafik osilasi m_2 dapat diberikan dengan Gambar 14 dan Gambar 15.



Gambar 14. Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai posisi awal $y(0)$ dengan

$$m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30, x(0) = 0, x'(0) = 0 \text{ dan } y'(0) = 0$$



Gambar 15. Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai posisi awal $y(0)$ dengan

$$m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30, x(0) = 0, x'(0) = 0 \text{ dan } y'(0) = 0$$

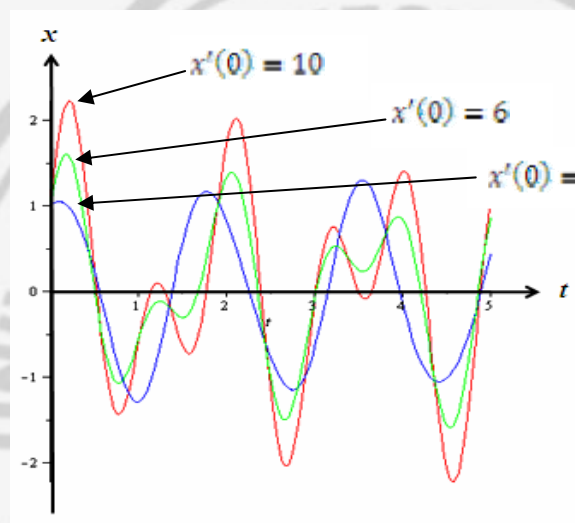
Dari hasil simulasi dengan menggunakan program Maple seperti terlihat pada Gambar 14 dan Gambar 15 diperoleh bahwa jika nilai $y(0)$ berbeda maka

akan berbeda pula amplitudo getaran dari m_1 dan m_2 . Pada Gambar 14 dan Gambar 15 terlihat grafik dengan $y(0) = 2$ mempunyai amplitudo yang paling kecil dibandingkan grafik dengan $y(0) = 4$ dan grafik dengan $y(0) = 6$ yang merupakan grafik dengan amplitudo terbesar. Dari dasar itu maka dapat diduga bahwa semakin besar $y(0)$ maka semakin besar pula amplitudo getaran.

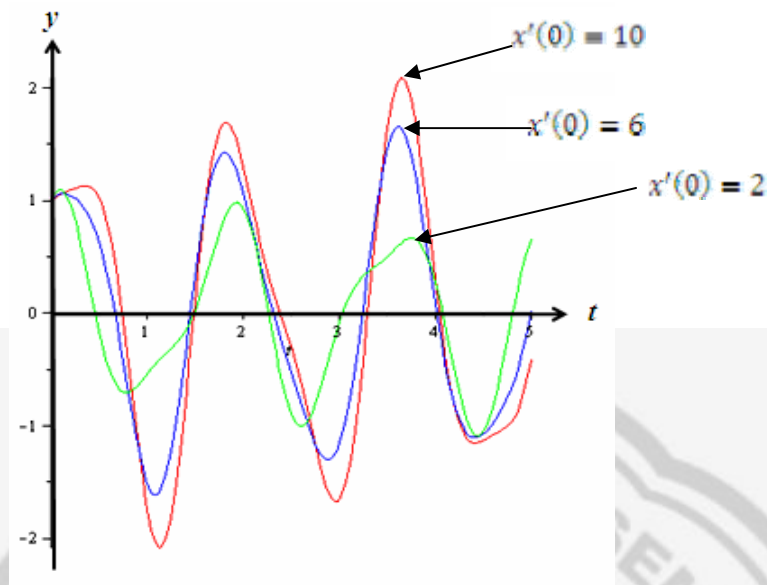
4.4.2 Pengaruh Kecepatan Awal terhadap Amplitudo getaran

4.4.2.1 Pengaruh $x'(0)$ terhadap Amplitudo getaran

Misalkan diberikan beberapa nilai parameter yaitu $m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30, x(0) = 1, y(0) = 1$ dan $y'(0) = 1$ dengan berbagai nilai $x'(0)$. Maka, grafik osilasi m_1 dan grafik osilasi m_2 dapat diberikan dengan Gambar 16 dan Gambar 17.



Gambar 16. Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai kecepatan awal $x'(0)$ dengan $m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30, x(0) = 1, y(0) = 1$ dan $y'(0) = 1$.

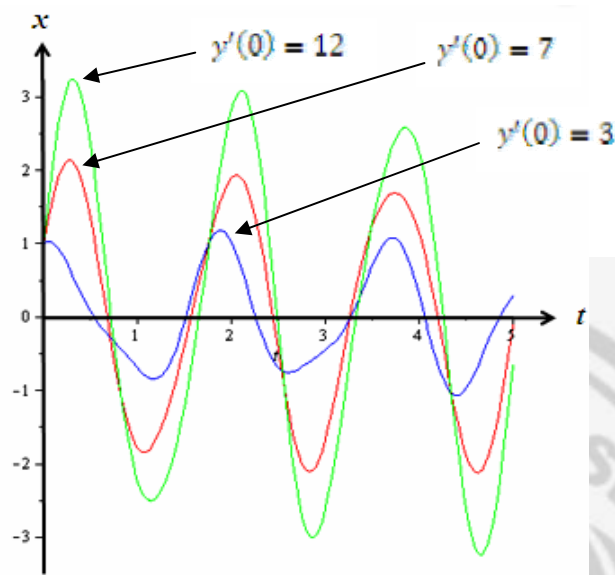


Gambar 17. Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai kecepatan awal $x'(0)$ dengan $m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30, x(0) = 1, y(0) = 1$ dan $y'(0) = 1$.

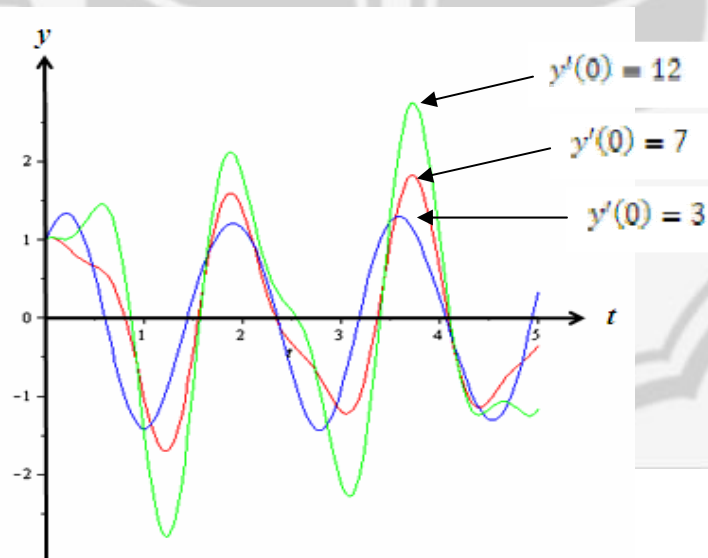
Dari hasil simulasi dengan menggunakan program Maple seperti terlihat pada Gambar 16 dan Gambar 17 diperoleh bahwa jika nilai $x'(0)$ berbeda maka akan berbeda pula amplitudo getaran dari m_1 dan m_2 . Pada Gambar 16 dan Gambar 17 terlihat grafik dengan $x'(0) = 2$ mempunyai amplitudo yang paling kecil dibandingkan grafik dengan $x'(0) = 6$ dan grafik dengan $x'(0) = 10$ yang merupakan grafik dengan amplitudo terbesar. Dari dasar itu maka dapat diduga bahwa semakin besar $x'(0)$ maka semakin besar pula amplitudo getaran.

4.4.2.2 Pengaruh $y'(0)$ terhadap Amplitudo Getaran

Misalkan diberikan beberapa nilai parameter yaitu $m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30, x(0) = 1, x'(0) = 1$ dan $y(0) = 1$ dengan berbagai nilai $y'(0)$. Maka, grafik osilasi m_1 dan grafik osilasi m_2 dapat diberikan dengan Gambar 18 dan Gambar 19.



Gambar 18. Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai kecepatan awal $y'(0)$ dengan $m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30, x(0) = 1, x'(0) = 1$ dan $y(0) = 1$.



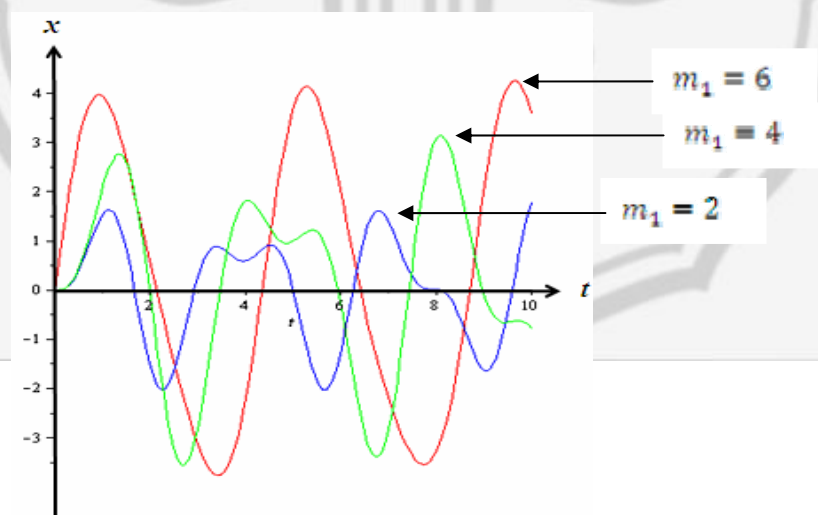
Gambar 19. Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai kecepatan awal $y'(0)$ dengan $m_1 = 2, m_2 = 3, h_1 = 40, h_2 = 30, h_3 = 30, x(0) = 1, x'(0) = 1$ dan $y(0) = 1$.

Dari hasil simulasi dengan menggunakan program Maple seperti terlihat pada Gambar 18 dan Gambar 19 diperoleh bahwa jika nilai $y'(0)$ berbeda maka akan berbeda pula amplitudo getaran dari m_1 dan m_2 . Pada Gambar 18 dan Gambar 19 terlihat grafik dengan $y'(0) = 3$ mempunyai amplitudo yang paling kecil dibandingkan grafik dengan $y'(0) = 7$ dan grafik dengan $y'(0) = 12$ yang merupakan grafik dengan amplitudo terbesar. Dari dasar itu maka dapat diduga bahwa semakin besar $y'(0)$ maka semakin besar pula amplitudo getaran.

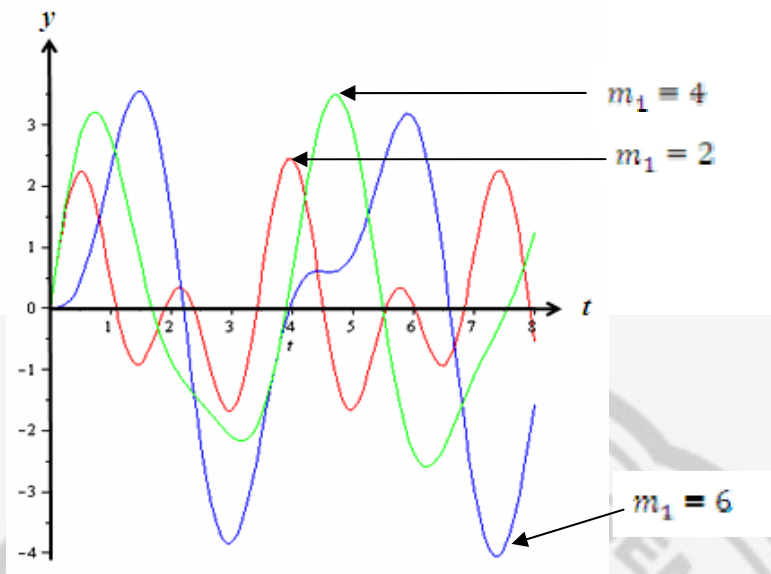
4.4.3 Pengaruh massa terhadap Amplitudo Getaran

4.4.3.1 Pengaruh m_1 terhadap Amplitudo Getaran

Misalkan diberikan beberapa nilai parameter yaitu $m_2 = 3, h_1 = h_2 = h_3 = 10, x(0) = y(0) = 0, x'(0) = 7$ dan $y'(0) = 0$ dengan berbagai nilai m_1 . Maka, grafik osilasi m_1 dan grafik osilasi m_2 dapat diberikan dengan Gambar 20 dan Gambar 21.



Gambar 20. Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai massa m_1 dengan $m_2 = 3, h_1 = h_2 = h_3 = 10, x(0) = y(0) = 0, x'(0) = 7$ dan $y'(0) = 0$.

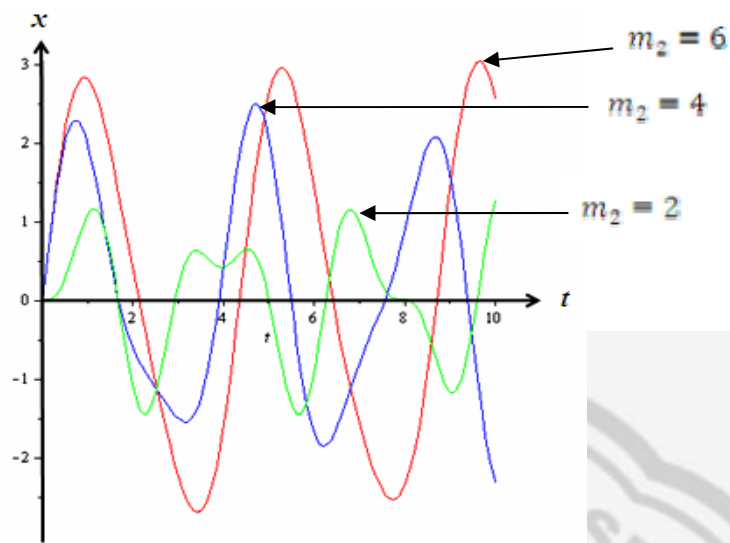


Gambar 21. Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai massa m_1 dengan $m_2 = 3, h_1 = h_2 = h_3 = 10, x(0) = y(0) = 0, x'(0) = 7$ dan $y'(0) = 0$.

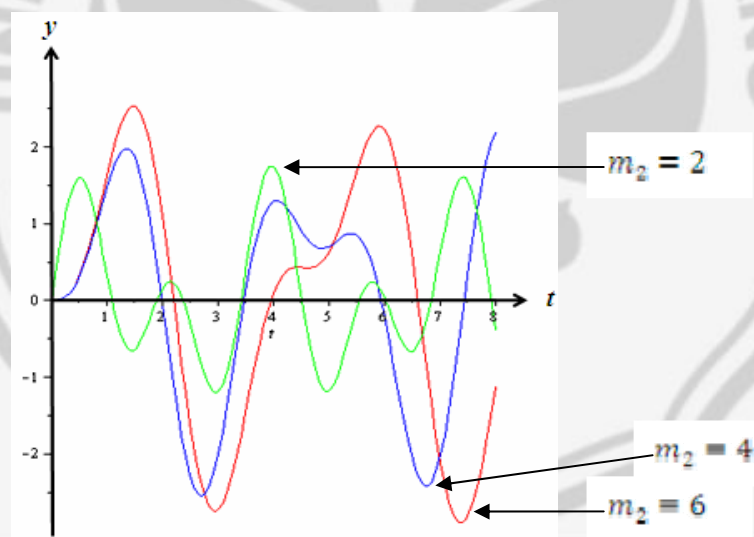
Dari hasil simulasi dengan menggunakan program Maple seperti terlihat pada Gambar 20 dan Gambar 21 diperoleh bahwa jika nilai m_1 berbeda maka akan berbeda pula amplitudo getaran dari m_1 dan m_2 . Pada Gambar 20 dan Gambar 21 terlihat grafik dengan nilai m_1 terkecil juga mempunyai amplitudo yang paling kecil sedangkan grafik dengan nilai m_1 terbesar memiliki amplitudo terbesar pula. Dari dasar itu maka dapat diduga bahwa semakin besar m_1 maka semakin besar amplitudo getaran.

4.4.3.2 Pengaruh m_2 terhadap Amplitudo Getaran

Misalkan diberikan beberapa nilai parameter yaitu $m_1 = 3, h_1 = h_2 = h_3 = 10, x(0) = y(0) = 0, x'(0) = 0$ dan $y'(0) = 5$ dengan berbagai nilai m_2 . Maka, grafik osilasi m_1 dan grafik osilasi m_2 dapat diberikan dengan Gambar 22 dan Gambar 23.



Gambar 22. Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai massa m_2 dengan $m_1 = 3, h_1 = h_2 = h_3 = 10, x(0) = y(0) = 0, x'(0) = 0$ dan $y'(0) = 5$.



Gambar 23. Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai massa m_2 dengan $m_1 = 3, h_1 = h_2 = h_3 = 10, x(0) = y(0) = 0, x'(0) = 0$ dan $y'(0) = 5$.

Dari hasil simulasi dengan menggunakan program Maple seperti terlihat pada Gambar 22 dan Gambar 23 diperoleh bahwa jika nilai m_2 berbeda maka

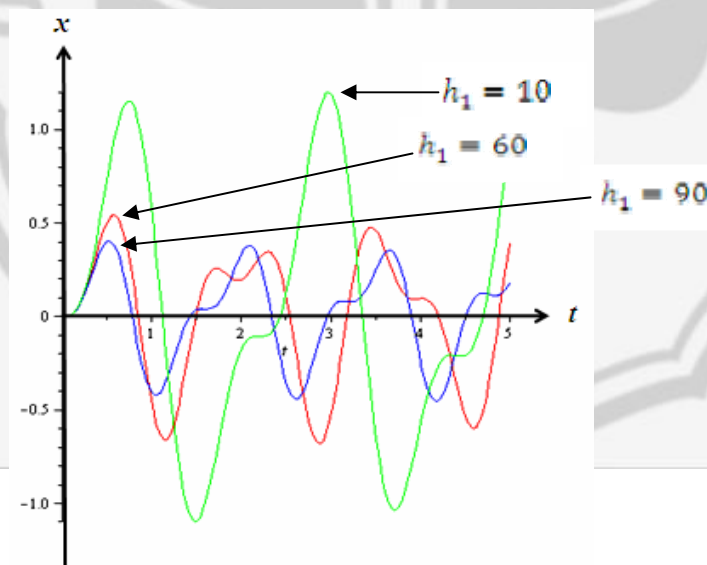
akan berbeda pula amplitudo getaran dari m_1 dan m_2 . Pada Gambar 22 dan Gambar 23 terlihat grafik dengan nilai m_2 terkecil juga mempunyai amplitudo yang paling kecil sedangkan grafik dengan nilai m_2 terbesar memiliki amplitudo terbesar pula. Dari dasar itu maka dapat diduga bahwa semakin besar m_2 maka semakin besar amplitudo getaran.

4.4.4 Pengaruh konstanta pegas terhadap Amplitudo Getaran

4.4.4.1 Pengaruh h_1 terhadap Amplitudo getaran

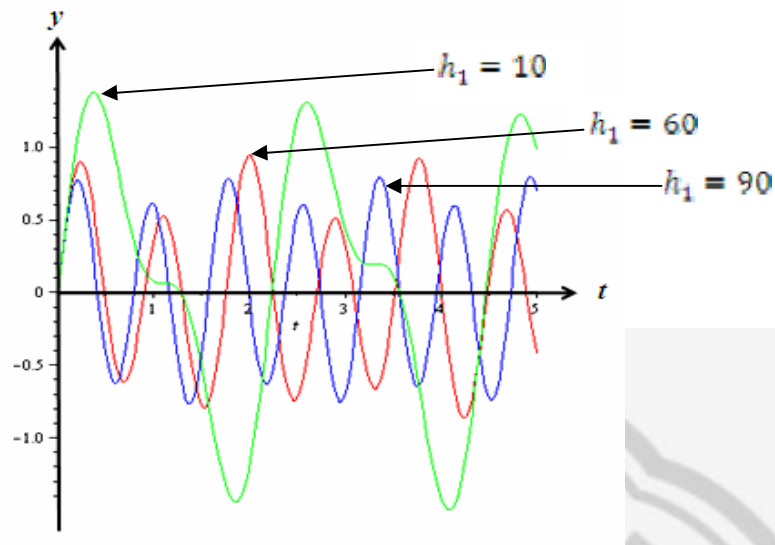
Misalkan diberikan beberapa nilai parameter yaitu $m_1 = 2, m_2 = 3, h_2 = 30, h_3 = 30, x(0) = 0, x'(0) = 6, y(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$

dengan berbagai nilai h_1 . Maka, grafik osilasi m_1 dan grafik osilasi m_2 dapat diberikan dengan Gambar 24 dan Gambar 25.



Gambar 24. Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai konstanta pegas h_1 dengan

$$m_1 = 2, m_2 = 3, h_2 = 30, h_3 = 30, x(0) = 0, x'(0) = 6, y(0) = 0 \text{ dan } y'(0) = 0$$

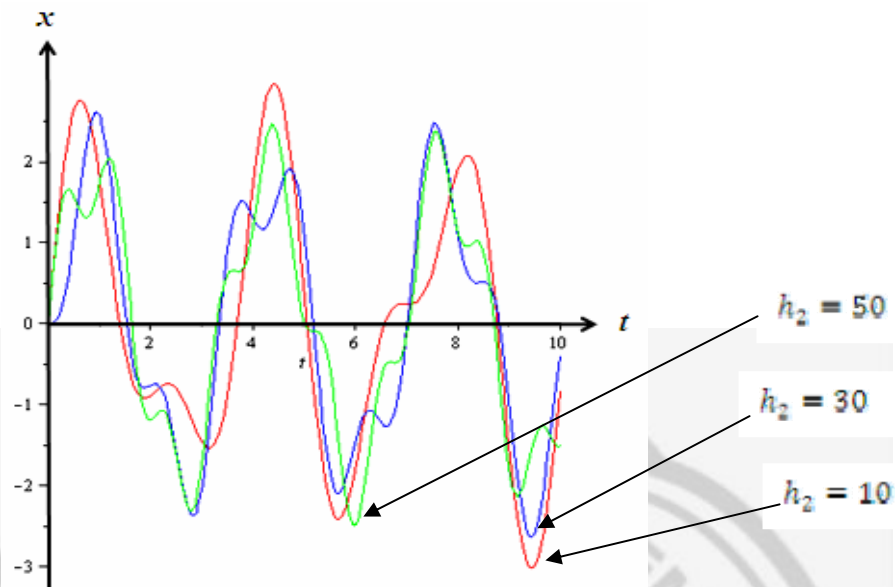


Gambar 25. Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai konstanta pegas h_1 dengan $m_1 = 2, m_2 = 3, h_2 = 30, h_3 = 30, x(0) = 0, x'(0) = 6, y(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$.

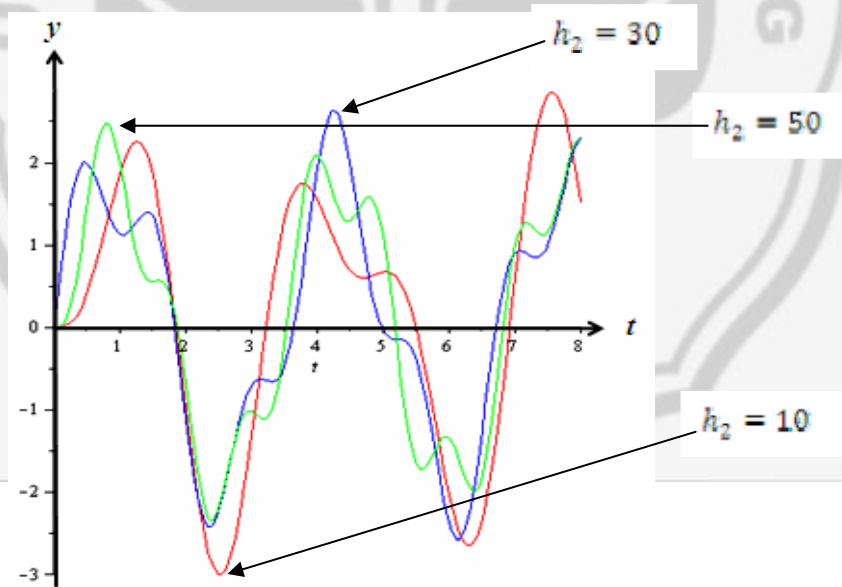
Dari hasil simulasi dengan menggunakan program Maple seperti terlihat pada Gambar 24 dan Gambar 25 diperoleh bahwa jika nilai h_1 berbeda maka akan berbeda pula amplitudo getaran dari m_1 dan m_2 . Pada Gambar 24 dan Gambar 25 terlihat grafik dengan nilai h_1 terkecil mempunyai amplitudo yang paling besar sedangkan grafik dengan nilai h_1 terbesar memiliki amplitudo terkecil. Dari dasar itu maka dapat diduga bahwa semakin besar h_1 maka semakin kecil amplitudo getaran.

4.4.4.2 Pengaruh h_2 terhadap Amplitudo getaran

Misalkan diberikan beberapa nilai parameter yaitu $m_1 = m_2 = 3, h_1 = h_3 = 10, x(0) = y(0) = 0, x'(0) = 4$ dan $y'(0) = 0$ dengan berbagai nilai h_2 . Maka, grafik osilasi m_1 dan grafik osilasi m_2 dapat diberikan dengan Gambar 26 dan Gambar 27.



Gambar 26. Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai konstanta pegas h_2 dengan $m_1 = m_2 = 3, h_1 = h_3 = 10, x(0) = y(0) = 0, x'(0) = 4$ dan $y'(0) = 0$.

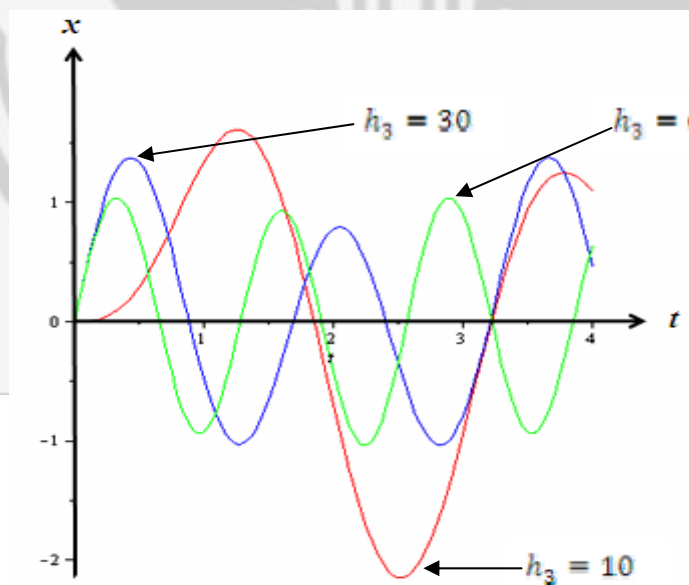


Gambar 27. Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai konstanta pegas h_2 dengan $m_1 = m_2 = 2, h_1 = h_3 = 10, x(0) = y(0) = 0, x'(0) = 4$ dan $y'(0) = 0$.

Dari hasil simulasi dengan menggunakan program Maple seperti terlihat pada Gambar 26 dan Gambar 27 diperoleh bahwa jika nilai h_2 berbeda maka akan berbeda pula amplitudo getaran dari m_1 dan m_2 . Pada Gambar 26 dan Gambar 27 terlihat grafik dengan nilai h_2 terkecil mempunyai amplitudo yang paling besar sedangkan grafik dengan nilai h_2 terbesar memiliki amplitudo terkecil. Dari dasar itu maka dapat diduga bahwa semakin besar h_2 maka semakin kecil amplitudo getaran.

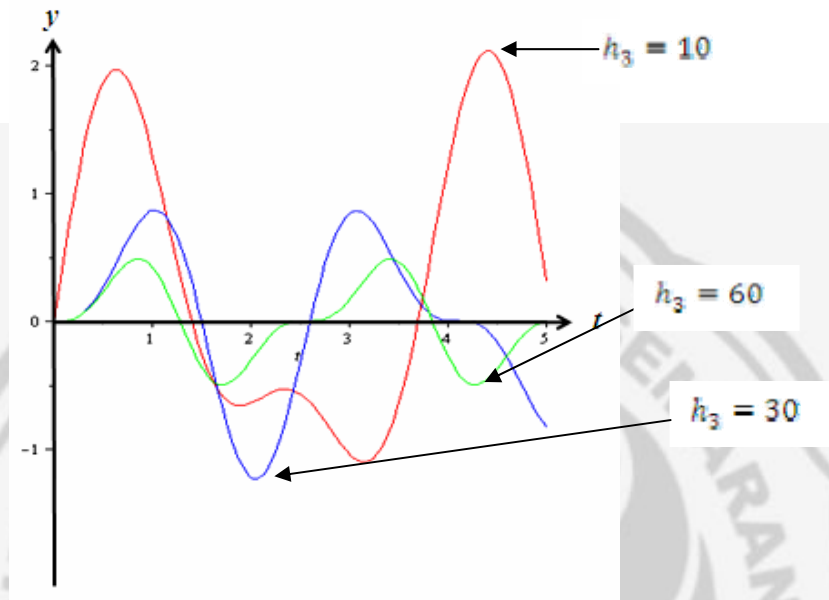
4.4.4.3 Pengaruh h_3 terhadap Amplitudo getaran

Misalkan diberikan beberapa nilai parameter yaitu $m_1 = 3, m_2 = 3, h_1 = 10, h_2 = 10, x(0) = 0, x'(0) = 5, y(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$ dengan berbagai nilai h_3 . Maka, grafik osilasi m_1 dan grafik osilasi m_2 dapat diberikan dengan Gambar 28 dan Gambar 29.



Gambar 28. Grafik osilasi m_1 pada sistem pegas massa dengan berbagai konstanta pegas h_3 dengan

$$m_1 = 3, m_2 = 3, h_1 = 10, h_2 = 10, x(0) = 0, x'(0) = 5, y(0) = 0 \text{ dan } y'(0) = 0$$



Gambar 29. Grafik osilasi m_2 pada sistem pegas massa dengan berbagai konstanta pegas h_3 dengan

$$m_1 = 3, m_2 = 3, h_1 = 10, h_2 = 10, x(0) = 0, x'(0) = 5, y(0) = 0 \text{ dan } y'(0) = 0$$

Dari hasil simulasi dengan menggunakan program Maple seperti terlihat pada Gambar 28 dan Gambar 29 diperoleh bahwa jika nilai h_3 berbeda maka akan berbeda pula amplitudo getaran dari m_1 dan m_2 . Pada Gambar 28 dan Gambar 29 terlihat grafik dengan nilai h_3 terkecil mempunyai amplitudo yang paling besar sedangkan grafik dengan nilai h_3 terbesar memiliki amplitudo terkecil. Dari dasar itu maka dapat diduga bahwa semakin besar h_3 maka semakin kecil amplitudo getaran.



BAB 5

PENUTUP

5.1 KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan diperoleh beberapa kesimpulan yaitu sebagai berikut:

1. Model matematika sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terganggung) tanpa redaman dan tanpa gaya luar yaitu:

$$\begin{aligned} m_1 x''(t) + h_1 x(t) - h_2 (y - x)(t) &= 0 \\ m_2 y''(t) + h_3 y(t) + h_2 (y - x)(t) &= 0 \end{aligned}$$

dengan syarat awal $x(0) = x_0, y(0) = y_0, x'(0) = u_0$ dan $y'(0) = v_0$.

2. Solusi dari model matematika sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terganggung) tanpa redaman dan tanpa gaya luar yaitu:

$$\begin{aligned} x(t) = & c_1 \left[\left(-\frac{1}{2m_1} - \frac{h_1}{2m_1 h_2} \right) m_2 + \frac{1}{2} + \frac{h_3}{2h_2} + \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right] e^{\left(\frac{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}{2m_1 m_2} \right) t} \\ & + c_2 \left[\left(-\frac{1}{2m_1} - \frac{h_1}{2m_1 h_2} \right) m_2 + \frac{1}{2} + \frac{h_3}{2h_2} - \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right] e^{\left(\frac{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}{2m_1 m_2} \right) t} \\ & + c_3 \left[\left(-\frac{1}{2m_1} - \frac{h_1}{2m_1 h_2} \right) m_2 + \frac{1}{2} + \frac{h_3}{2h_2} + \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right] e^{\left(\frac{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}{2m_1 m_2} \right) t} \\ & + c_4 \left[\left(-\frac{1}{2m_1} - \frac{h_1}{2m_1 h_2} \right) m_2 + \frac{1}{2} + \frac{h_3}{2h_2} + \frac{\sqrt{D}}{2m_1 h_2} \right] e^{\left(\frac{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}{2m_1 m_2} \right) t} \end{aligned}$$

$$y(t) = c_1 e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{-\sqrt{-2m_1 m_2 (P + \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} \\ + c_3 e^{\left(\frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t} + c_4 e^{\left(\frac{-\sqrt{-2m_1 m_2 (P - \sqrt{D})}}{2m_1 m_2}\right)t}$$

dimana $P = m_1 h_3 + m_1 h_2 + m_2 h_1 + m_2 h_2$ dan

$$D = m_1^2 h_3^2 + m_1^2 h_2^2 + m_2^2 h_1^2 + m_2^2 h_2^2 + 2m_1^2 h_2 h_3 + 2m_2^2 h_1 h_2 \\ - 2m_1 m_2 h_1 h_3 - 2m_1 m_2 h_1 h_2 - 2m_1 m_2 h_2 h_3.$$

dengan syarat awal $x(0) = x_0, y(0) = y_0, x'(0) = u_0$ dan $y'(0) = v_0$

3. Aplikasi *Maple* untuk visualisasi solusi dari sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terganggu) dapat dilihat pada Gambar 8 sampai dengan Gambar 29.
4. Interpretasi dari solusi model sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terganggu) yaitu sebagai berikut:
 - a. Posisi awal berbanding lurus dengan Amplitudo getaran, artinya semakin besar posisi awal maka diprediksi semakin besar amplitudo getaran dan semakin kecil posisi awal maka diprediksi semakin kecil pula amplitudo getarannya.
 - b. Kecepatan awal berbanding lurus dengan Amplitudo getaran, artinya semakin besar kecepatan awal maka diprediksi semakin besar amplitudo getaran dan semakin kecil kecepatan awal maka diprediksi semakin kecil pula amplitudo getarannya.

- c. Massa benda berbanding lurus dengan Amplitudo getaran, artinya semakin besar massa maka diprediksi semakin besar amplitudo getaran dan semakin kecil massa maka diprediksi semakin kecil pula amplitudo getarannya.
- d. Konstanta pegas berbanding terbalik dengan Amplitudo getaran, artinya semakin besar konstanta pegas maka diprediksi semakin kecil amplitudo getaran dan semakin kecil konstanta pegas maka diprediksi semakin besar amplitudo getarannya.

5.2 SARAN

Berkaitan dengan hasil penelitian, ada beberapa hal yang perlu mendapat perhatian yaitu:

1. Penelitian ini mengkaji masalah sistem pegas massa dalam satu kondisi yaitu sistem pegas massa tanpa redaman dan tanpa gaya luar. Untuk itu perlu penelitian lebih lanjut untuk masalah sistem pegas massa dengan redaman dan dengan gaya luar.
2. Untuk menjelaskan lebih jelas tentang model matematika dan solusi dari sistem getaran dua derajat kebebasan (getaran terdangeng) perlu disajikan dengan jelas grafik-grafik dan interpretasi dari grafik-grafik tersebut agar lebih mudah dipahami.

DAFTAR PUSTAKA

- Anonim. *Getaran* . Tersedia di: <http://www.wordpress.com>. [8 November 2008].
- Anonim. *Metematika sebagai Raja dan Sekaligus Pelayan. Matematika*. Tersedia di: <http://www.wikipedia.com>. [8 Juli 2009].
- Ardianti, E.D. 2008. *Solusi dari Osilasi Dua Pegas dan Dua Massa*. Skripsi Jurusan Matematika: Universitas Negeri Semarang.
- Dewanto, J. *Kajian Teoritik Sistem Getaran*. Tersedia di: <http://www.puslit.petra.ac.id>. [7 Mei 2009].
- Dewanto, J. 1999. Klasifikasi Getaran. *Jurnal Teknik Mesin*. Vol. 1, No. 2, hal 156-162.
- Giancoli, D. C. 1998. *Fisika*. Alih Bahasa: Y. Hanum. Jakarta: Erlangga.
- Kartono. 2001. *Maple untuk Persamaan Differensial*. Yogyakarta: J & J Learning.
- Khanafiyah, S., Sarwi, S. E. Nugroho, Ellianawati. 2007. *Fenomena Gelombang*. Semarang: Universitas Negeri Semarang.
- Komaridah, I. 2008. *Pemodelan Matematika pada Sistem Suspensi Kendaraan Bermotor*. Skripsi Jurusan Matematika: Universitas Negeri Semarang.
- Kreyszig, E. 1993. *Matematika Teknik Lanjutan*. Jakarta: Erlangga.
- Kreyszig, E. 2006. *Advanced Engineering Mathematics 9th Edition*. United States: John Wiley & Sons, Inc.
- Nagle, R. E & E. B. Saff. 1996. *Fundamentals of Differential Equation and Boundary Value Problems*. New York: Addison-Wesley Publishing Company.
- Serway & Jewett. 2004. Hukum-Hukum Newton tentang Gerak. *Physics for Scientists and Engineers*. Hal 56-66.
- Sofyan. *Elastisitas*. Tersedia di: <http://atophysics.wordpress.com>. [7 Februari 2009].
- Supriyono & P. Hendikawati. 2008. *Persamaan Diferensial Biasa*. Semarang: Universitas Negeri Semarang.

Tipler, P. A. 1991. *Fisika Untuk Sains Dan Teknik*. Alih Bahasa: L. Prasetio, R. W. Adi. Jakarta: Erlangga.

Tung, K. Y. 2003. *Visualisasi dan Simulasi Fisika Dengan Aplikasi Program Maple*. Yogyakarta: ANDI OFFSET.

Waluya, S. B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Winatapura, S.U. 1993. *Strategi Belajar Mengajar Matematika*. Jakarta: Universitas Terbuka Depdikbud.

Young, H. D dan R. A. Freedman. 1996. *Fisika Universitas Jilid I*. Jakarta: Erlangga.

