# ESTIMATOR TAK BIAS LINIER TERBAIK PADA MODEL LINIER UNTUK KASUS HOMOSKEDASTIK DAN HETEROSKEDASTIK

skripsi

disajikan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

Hani Tikawati

4150404002



**JURUSAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG**

**2009**

## PENGESAHAN

Skripsi ini telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES pada tanggal :

Panitia:

| | |
|---|---|
| Ketua | Sekretaris |
| Drs. Kasmadi Imam S., M.S.<br>NIP. 130781011 | Drs. Edy Soedjoko, M.Pd.<br>NIP. 131693657 |
| | Penguji |
| | Dra. Scolastika Mariani, M.Si<br>NIP. 131931636 |
| Penguji/Pembimbing I | Penguji/ Pembimbing II |
| Prof. Dr. YL Sukestiyarno<br>NIP. 131404322 | Dra. Sunarmi, M.Si<br>NIP. 131763886 |

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya yang diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dirujuk dalam skripsi ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Semarang,

Hani Tikawati
NIM. 4150404002

# ABSTRAK

Tikawati, Hani. Estimator Tak Bias Linier Terbaik Pada Model Linier Untuk Kasus Homoskedastik dan Heteroskedastik. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang. Pembimbing I Prof. Dr. YL Sukestiyarno, pembimbing II Dra. Sunarmi, M.Si

Kata kunci : Estimator tak bias linier terbaik, model linier, homoskedastik, heteroskedastik

Suatu estimator dikatakan baik jika memenuhi beberapa kriteria diantaranya yaitu tak bias dan mempunyai variansi minimum (*Minimum Variance Unbiased Estimator* = MVUE*)*. MVUE dapat dicari dengan dua metode, yaitu *Cramer Rao Lower Bound* (CRLB) dan konsep statistik cukup. Jika kedua metode tersebut gagal digunakan, maka diperlukan suatu batasan baru yaitu estimator harus linier pada observasi selain syarat tak bias dan variansi minimum. Estimator dengan sifat tersebut dinamakan Best Linear Unbiased Estimator (BLUE). BLUE identik dengan MVUE untuk model linier. Oleh karena model linier dapat bersifat homoskedastik dan heteroskedastik, maka pada skripsi ini BLUE dibahas pada model linier untuk kasus homoskedastik dan heteroskedastik. Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk menentukan estimator yang linier, tak bias, dan mempunyai variansi minimum (BLUE).

Uji homoskedastik pada prinsipnya ingin menguji apakah sebuah grup mempunyai varians yang sama diantara anggota grup tersebut. Jika varians sama, dan ini yang seharusnya terjadi, maka dikatakan ada homoskedastik. Sedangkan jika varians tidak sama, dikatakan terjadi heteroskedastik. Alat untuk menguji homoskedastik bisa dibagi dua, yakni dengan alat analisis Levene Test, atau dengan Analisis Residual yang berupa grafik. Yang saya gunakan dalam pembahasan skripsi ini adalah dengan Analisis Residual.

Pada skripsi ini dibahas tentang model linier yang bersifat homoskedastik dan heteroskedastik, estimator linier, sifat tak bias. Estimator linier dan tak bias dicari dengan dua metode, yaitu metode kuadrat terkecil dan metode pengali *Lagrange*. Estimator yang diperoleh dibuktikan mempunyai variansi minimum.

Berdasarkan pembahasan dapat diambil kesimpulan tentang bentuk umum estimator linier, syarat perlu dan cukup agar estimator tak bias, dan BLUE untuk model linier pada kasus homoskedastik dan heteroskedastik.

# MOTTO DAN PERSEMBAHAN

## MOTTO

- ❖ Rencana adalah jembatan menuju mimpimi, jika tidak membuat rencana berarti tidak memiliki pijakan langkahmu menuju apa yang kamu cita-citakan.
- ❖ The man who says he never has time is the laziest man.
- ❖ Anda harus melakukan hal yang Anda pikir tidak dapat Anda lakukan.

## PERSEMBAHAN

Puji syukur serta ucapan terima kasih atas selesainya penyusunan skripsi ini saya persembahkan untuk:

(1) Allah SWT

(2) Kedua orang tuaku

(3) Kedua adikku Hasyim dan Ririn

(4) Pipih Pohan

(5) Teman-teman MatReg angkatan 2004

(6) Temen-teman di Mimosa Kost

(7) Almamaterku UNNES

# KATA PENGANTAR

Puji syukur alhamdulillah senantiasa kami panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah serta inayah–Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Skripsi yang berjudul "*Estimator Tak Bias Linier Terbaik Pada Model Linier Untuk Kasus Homoskedastik dan Heteroskedastik*", disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains.

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada semua pihak yang telah membantu terlaksananya penyusunan skripsi ini, diantaranya:

(1) Prof. Dr. Sudijono Sastroatmodjo, M. Si, Rektor Universitas Negeri Semarang.

(2) Drs. Kasmadi Imam S, M. Si, Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.

(3) Drs. Edy Soedjoko, M. Pd, Ketua Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang.

(4) Prof. Dr. YL Sukestiyarno, dosen pembimbing pertama.

(5) Dra. Sunarmi, M. Si, dosen pembimbing kedua.

(6) Dra. Scolastika Mariani, M. Si, dosen penguji.

(7) Ayah, Ibu, Pipih Pohan dan adikku yang senantiasa mendukung studiku.

(8) Teman-teman program studi matematika angkatan 2004.

(9) Teman-teman di Mimosa Kos, yang senantiasa menemani saya untuk menyelesaikan skripsi ini.

Dalam penyusunan skripsi ini, kami menyadari masih banyak kekurangan. Untuk itu kami mengharapkan saran dan kritik yang bersifat membangun untuk perbaikan penyusunan selanjutnya.

Semarang,                2009

Penyusun

# DAFTAR ISI

## DAFTAR GAMBAR

Halaman

# DAFTAR TABEL

Halaman

## DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

# ARTI LAMBANG

| | |
|---|---|
| $X_1, X_2, \cdots, X_P$ | : Variabel random |
| $Y_1, \cdots, Y_n$ | : Observasi |
| $\boldsymbol{X}$ | : Matriks variabel random |
| $\boldsymbol{Y}$ | : Vektor observasi |
| $\sigma^2$ | : Variansi |
| $\mu$ | : Mean |
| $\varepsilon$ | : Vektor kesalahan random |
| $\boldsymbol{I}$ | : Matriks identitas |
| $\boldsymbol{L}$ | : Matriks konstanta |
| $L^{'}$ | : Matriks konstanta pada model linier kasus homoskedastik |
| $L^{''}$ | : Matriks konstanta pada model linier kasus heteroskedastik |
| J | : Fungsi pengali Lagrange |
| S | : Ruang sampel |
| $\theta$ | : Vektor parameter pada model linier |
| $\hat{\theta}$ | : Estimator parameter pada model linier |
| $\hat{\theta}^{'}$ | : Estimator parameter pada model linier kasus homoskedastik |
| $\hat{\theta}^{''}$ | : Estimator parameter pada model linier kasus heteroskedastik |
| $\beta$ | : Vektor parameter pada model regresi linier |
| $\hat{\beta}$ | : Estimator vektor parameter pada model regresi linier |
| $\hat{\beta}^{'}$ | : Estimator vektor parameter pada model regresi linier kasus homoskedastik |
| $\hat{\beta}^{''}$ | : Estimator vektor parameter pada model regresi linier kasus heteroskedastik |
| $\Omega$ | : Ruang parameter |

# BAB 1

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang Masalah

Parameter yang tidak diketahui dapat diestimasi nilainya dengan estimator. Dalam hal ini akan dicari estimator yang mendekati nilai dari parameter. Menurut Bain dan Engelhardt (1992: 86), estimator dikatakan baik jika memenuhi kriteria misalnya tak bias dan mempunyai variansi minimum (Minimum Variance Unbiased Estimator = MVUE). Namun estimator tak bias dengan variansi minimum tidak selalu ada. Jika estimator tersebut ada, maka ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukannya, yaitu pendekatan Cramer Rao Lower Bound (CRLB) dan konsep dari statistik cukup. Kedua metode tersebut dapat digunakan apabila fungsi kepadatan probabilitas (fkp) diketahui. Jika fkp tidak diketahui, maka kedua metode tersebut tidak dapat digunakan untuk menentukan MVUE.

Kay (1993: 21) menuliskan bahwa cara untuk mengatasi hal tersebut adalah dengan membatasi estimator harus linier pada observasi selain syarat harus tak bias dan mempunyai variansi minimum. Jika diperoleh estimator dengan syarat linier, tak bias, dan mempunyai variansi minimum maka dinamakan estimator tak bias linier terbaik (Best Linier Unbiased Estimators = BLUE). BLUE identik dengan MVUE untuk model linier. Oleh karena itu, pada skripsi ini dibahas tentang BLUE pada model linier, yaitu suatu model yang menetapkan bahwa respon (Y) tersusun atas mean yang tergantung pada prediktor (Xi) dan kesalahan random (ε) yang mengukur kesalahan dan pengaruh dari variabel lain yang tidak termuat dalam model. Model linier harus memenuhi asumsi-asumsi tertentu. Salah satunya adalah asumsi homoskedastik, yaitu variansi kesalahan random (error) sama.

Menurut Myers (1986: 53), asumsi homoskedastik dapat tidak dipenuhi. Kasalahan random merupakan variabel random yang tidak diketahui nilainya. Oleh karena itu, kesalahan random dapat diestimasi dengan residu. Jika terjadi pelanggaran terhadap asumsi homoskedastik atau terjadi heteroskedastik mangakibatkan standar error residu tidak minimum. Padahal diketahui bahwa residu mengukur tingkat ketelitian dari suatu estimator model linier, semakin kecil standar errornya maka semakin baik estimator. Dengan kata lain, estimator semakin dekat dengan nilai parameter. Jadi adanya heteroskedastik mengakibatkan estimator tersebut bukan merupakan estimator terbaik sebab variansinya minimum.

## 1.2 Rumusan Masalah



Dari latar belakang di atas, maka yang menjadi rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah

(1) Bagaimana menentukan BLUE pada model linier untuk kasus homoskedastik?

(2) Bagaimana menentukan BLUE pada model linier untuk kasus heteroskedastik?

(3) Bagaimana menentukan BLUE pada model linier untuk kasus homoskedastik dan heteroskedastik menggunakan program SPSS 16.0 for Windows?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut :

(1) Dapat menentukan BLUE pada model linier untuk kasus homoskedastik dan heteroskedastik.

(2) Mengetahui simulasi SPSS 16.0 for Windows pada model linier untuk kasus homoskedastik dan heteroskedastik.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Secara teoritis manfaat yang diperoleh dari penulisan skripsi ini adalah dapat menambah pengetahuan dan wawasan dalam menentukan estimator yang bersifat BLUE dari parameter dalam model linier. Manfaat praktisnya adalah dapat digunakan sebagai alat bantu menganalisis data.

## 1.5 Sistematika Skripsi

Secara garis besar skripsi ini dibagi menjadi tiga bagian yaitu bagian awal skripsi, bagian isi skripsi, dan bagian akhir skripsi. Berikut ini dijelaskan masing-masing bagian skripsi.



**(1) Bagian awal skripsi**

Bagian awal skripsi meliputi halaman judul, pernyataan keaslian tulisan, halaman pengesahan, motto dan persembahan, abstrak, kata pengantar, daftar isi, daftar tabel, daftar lampiran, dan arti lambang.

**(2) Bagian isi skripsi**

Bagian isi skripsi secara garis besar terdiri dari lima bab, yaitu:

BAB 1. PENDAHULUAN

Dalam bab ini dikemukakan latar belakang, rumusan dan batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian, penegasan istilah, dan sistematika penulisan skripsi.

BAB 2. LANDASAN TEORI

Dalam bab ini dikemukakan konsep-konsep yang mendasari dan berhubungan dengan pemecahan masalah. Teori-teori tersebut digunakan untuk memecahkan masalah yang diangkat dalam skripsi ini.

BAB 3. METODE PENELITIAN

Dalam bab ini dikemukakan metode yang digunakan dalam penelitian yang berisi langkah-langkah yang dilakukan untuk memecahkan masalah yaitu metode pengumpulan data dan metode analisis data.



BAB 4. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini berisi penyelesaian dari permasalahan yang diungkapkan.

BAB 5. PENUTUP

Dalam bab ini dikemukakan simpulan dari pembahasan dan saran yang berkaitan dengan simpulan.

**(3) Bagian akhir skripsi**

Bagian akhir skripsi meliputi daftar pustaka yang memberikan informasi tentang buku sumber serta literatur yang digunakan serta berisi lampiran-lampiran yang mendukung penulisan skripsi.

# BAB 2

# LANDASAN TEORI

## 2.1 Ruang Sampel dan Variabel Random

Suatu pengamatan yang diulang dalam kondisi yang sama akan menghasilkan suatu hasil yang bersifat tak menentu. Pada setiap pengamatan hanya terdapat suatu hasil yang mungkin.

**Definisi 2.1**

Himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan disebut ruang sampel, dinotasikan dengan S (Bain dan Engelhardt 1992: 2).

Anggota dari ruang sampel tidak harus suatu bilangan, namun biasanya akan ditunjuk suatu bilangan tertentu untuk setiap hasil observasi. Selanjutnya diberikan suatu definisi tentang variabel random.

Variabel random X adalah suatu fungsi yang memetakan setiap hasil *e* yang mungkin pada ruang sampel S dengan suatu bilangan real *x* sedemikian sehingga X(e)=x (Bain dan Engelhardt 1992: 53). Ada dua macam variabel random, yaitu variabel random diskrit dan variabel random kontinu.

Harga harapan juga biasa dinyatakan sebagai ekspektasi E[X] dari peubah acak X dinamakan juga mean atau rata-rata dari X dan dinotasikan dengan E[X] = $\mu$ atau $\mu_x$ .

**Definisi 2.2**

Jika X variabel random diskrit dengan fungsi kepadatan peluang f(x), maka harga harapan atau ekspektasi dari X didefinisikan dengan

$$E[X] = \sum_{X} xf(x)$$

(Djauhari 1990: 66)

**Definisi 2.3**

Jika X variabel random kontinu dengan fungsi kepadatan peluang f(x), maka harga harapan atau ekspektasi dari X didefinisikan dengan

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

(Djauhari 1990: 68)

## 2.2 Fungsi Kepadatan Peluang

**Definisi 2.4**

Suatu fungsi f(x) disebut fungsi kepadatan peluang diskrit jika memenuhi sifat :

(1) $f(x) \geq 0$ untuk setiap x

(2) $\sum_{x} f(x) = 1$

(Djauhari 1990: 41)

**Definisi 2.5**

Suatu fungsi f(x) disebut fungsi kepadatan peluang kontinu jika memenuhi sifat :

(1) $f(x) \geq 0$ untuk setiap x

(2) $\int_x f(x)\,dx = 1$

(Djauhari 1990: 43)

## 2.3 Variansi

Variansi adalah ukuran sebaran dari suatu distribusi variabel random. Notasi untuk variansi adalah Var (X) atau V(X).

**Definisi 2.6**

Variansi dari variabel random X didefinisikan dengan

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2]$$

(Ross 1976: 196)

**Teorema 2.7**

Jika X variabel random, a adalah konstan, maka $Var(aX) = a^2\,Var(X)$.

(Milton dan Arnold 1995: 56)

Bukti Teorema 2.7 :

$$Var(aX) = E\lfloor (aX - E[aX])^2 \rfloor$$

$$= E\lfloor a^2X^2 - 2aXE[aX] + E[aX]^2) \rfloor$$

$$= E\lfloor a^2X^2 - 2aXaE[X] + a^2E[X]^2 \rfloor$$

$$= E[a^2X^2 - 2a^2XE[X] + a^2E[X]^2]$$

$$= a^2E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2]$$

$= a^2E[(X - E[X])]^2$ sesuai dengan definisi 2.6, maka

$$= a^2Var(X)$$

## 2.4 Kovariansi

Kovariansi adalah harga harapan yang digunakan untuk mengukur hubungan antara dua variabel random.

**Definisi 2.8**

Kovariansi dari pasangan variabel random X dan Y didefinisikan

$$Cov(X,Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

Notasi lain untuk kovariansi adalah $\sigma_{XY}$.

Beberapa sifat yang berhubungan dengan kovariansi diberikan dalam teorema-teorema berikut.

**Teorema 2.9**

Jika X dan Y variabel random, a dan b konstan, maka

Cov(aX, bY) = ab Cov(X, Y)

Cov(X + a, Y + a) = Cov(X, Y)

Cov(X, aX + b) = a Var(X)

Bukti Teorema 2.9:

Cov (aX, bY) = E[(aX – E(aX))(bY – E(bY))]

= E[a(X – E(X))b(Y – E(Y))]

= a b E[(X - E(X)(Y - E(Y))]

= ab Cov(X, Y)

Cov (X + a, Y + b) = E[(X + a - E(X + a))(Y + b - E(Y + b))]

= E[(X + a – E(X) – a)(Y + b – E(Y) – b)]

$$= E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$$= Cov(X, Y)$$

$$Cov\,(X, aX + b) = E[(X - E(X))(aX + b - E(aX + b))]$$

$$= E[(X - E(X))(aX + b - aE(X) - b)]$$

$$= E[(X - E(X))\, a\, (X - E(X))]$$

$$= a\, E[(X - E(X))^2]$$

$$= a\, Var\,(X)$$

**Teorema 2.10**

Jika X dan Y variabel random, maka Cov (X, Y) = E(XY) – E(X)E(Y), Cov(X, Y)=0, dengan X dan Y independen.

Bukti Teorema 2.10 :

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$$= E[XY - X\,E(Y) - Y\,E(X) + E(X)\,E(Y)]$$

$$= E[XY] - E[X]\,E[Y] - E[X]\,E[Y] + E[X]\,E[Y]$$

$$= E\,[XY] - E[X]\,E[Y]$$

Jika X dan Y independen, maka $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]\,E[Y]$

$$= E[X]\,E[Y] - E[X]\,E[Y]$$

$$= 0$$

(Bain dan Engelhardt 1992: 174)

## 2.5 Estimator Tak Bias

**Definisi 2.11**

Statistik $T = t(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ yang digunakan untuk mengestimasi $\tau(\theta)$ disebut estimator dari $\tau(\theta)$ atau dinotasikan dengan $\hat{\tau}(\theta)$ dan nilai dari statistik $t = \ell(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ disebut estimasi dari $\tau(\theta)$ .

(Bain dan Engelhardt 1992: 264)

**Definisi 2.12**

Estimator T dikatakan sebagai estimator tak bias dari $\tau(\theta)$ jika E(T) = τ(θ), untuk semua θ ϵ Ω, dengan Ω adalah ruang parameter, jika tidak dipenuhi maka dikatakan sebagai estimator bias dari τ(θ). Jika estimator tidak memenuhi sifat tak bias, maka dapat diberikan suatu definisi tentang estimator bias sebagai berikut.

**Definisi 2.13**

Jika T estimator τ(θ), maka bias estimator didefinisikan sebagai

$$b(T) = E(T) - \tau(\theta)$$

(Bain dan Engelhardt 1992: 265)

## 2.6 Matriks serta Operasi Matriks

### 2.6.1 Definisi Matriks

Menurut Anton dan Rorres (1994: 22), matriks adalah susunan persegi panjang yang terdiri dari elemen berupa bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan elemen dalam matriks.

Misal matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Bilangan-bilangan $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ disebut elemen atau unsur dari matriks *A*. Indeks pertama dari elemen menunjukkan baris dan indeks kedua menunjukkan kolom dimana elemen itu berada.

Ukuran (ordo) sebuah matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom, karena matriks *A* tersebut mempunyai *m* baris dan *n* kolom, maka matriks *A* tersebut berukuran *m x n*.

Contoh :

Matriks $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = (5 \quad 8 \quad 0 \quad 1)$, dan $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ masing-masing mempunyai ukuran *2x2*, *1x4*, dan *3x1*.

**Definisi 2.12**

Jika A adalah sebarang matriks *m x n*, maka *transpos A* dinyatakan oleh $A^T$ dan didefinisikan dengan matriks *n x m* yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari *A*, kolom keduanya adalah baris kedua dari *A*.

Contoh :

$$\text{jika } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}$$

(Anton, H 1992: 27)

**Definisi 2.13**

Sebuah matriks bujur sangkar ***A*** dikatakan simetris jika $A = A^T$ atau $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua elemen baris ke- *i* dan kolom ke- *j*.

(Johnson dan Wichern 1988: 21 )

**2.6.2 Operasi pada Matriks**

***2.6.2.1 Perkalian Matriks dengan Skalar***

**Definisi 2.14**

Jika *A* adalah suatu matriks dan *c* adalah suatu skalar, maka hasil kali *cA* adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari *A* dengan *c*.

(Anton, H 1992: 24)



Contoh:

$$\text{Jika matriks } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \text{ maka } 3A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -6 \\ -3 & -12 \end{bmatrix}$$

### *2.6.2.2* Perkalian Matriks dengan Matriks

**Definisi 2.15**

Jika *A* adalah matriks *m* x *r* dan B adalah matriks *r* x *n*, maka hasil kali *AB* adalah matriks *m* x *n* yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris *i* dan kolom *j* dari matriks *AB*, pilih baris *i* dari matriks *A* dan kolom *j* dari matriks B. Kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan.

(Anton, H 1992: 25)

Contoh:

Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix}$, maka matriks *AB*:

$$AB = \begin{bmatrix} (5x1)+(4x6) & (5x3)+(4x2) & (5x0)+(4X8) \\ (-3x1)+(-2x6) & (-3x3)+(-2x2) & (-3x0)+(-2x8) \\ (1x1)+(8x6) & (1x3)+(8x2) & (1x0)+(8x8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+24 & 15+8 & 0+32 \\ -3+(-12) & -9+(-4) & 0+(-16) \\ 1+48 & 3+16 & 0+64 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 29 & 23 & 32 \\ -15 & -13 & -16 \\ 49 & 19 & 64 \end{bmatrix}$$

**Definisi 2.16**

Sebuah vektor ***u*** dinamakan kombinasi linier dari vektor-vektor $v_1, v_2, \cdots, v_r$ jika vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_rv_r$ dengan $a_1, a_2, \cdots, a_r$ adalah skalar

(Anton dan Rorres 1994: 101 )

**Definisi 2.17**

Jika ***A*** adalah sebuah matriks bujur sangkar dan dapat dicari matriks ***B*** sedemikian hingga ***AB*** = ***BA*** = ***I***, maka ***A*** dikatakan mempunyai invers dan ***B*** dinamakan invers dari ***A*** (Anton, H 1992: 34**)**

**Definisi 2.18**

Bentuk kuadrat $x^T Ax$ disebut definit positif jika $x^T Ax > 0$ untuk semua $\mathbf{x} \neq 0$, dan matriks simetris ***A*** disebut matriks definit positif jika $x^T Ax$ merupakan bentuk kuadrat yang definit positif.

Berikut ini akan diberikan pengertian tentang vektor dan matriks variabel random serta akan dibahas tentang harga harapan dan kovariansinya. Vektor dan matriks variabel random merupakan suatu vektor atau matriks yang elemennya variabel random.

Misalkan diberikan matriks variabel random **Z** berukuran m x n

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & z_{m2} & \cdots & z_{mn} \end{pmatrix}$$

Harga harapan dari suatu matriks adalah matriks dari harga harapan elemen-elemennya. Jadi harga harapan dari **Z** dinyatakan dengan

$$E[Z] = \begin{pmatrix} E[z_{11}] & E[z_{12}] & \cdots & E[z_{1n}] \\ E[z_{21}] & E[z_{22}] & \cdots & E[z_{2n}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E[z_{m1}] & E[z_{m2}] & \cdots & E[z_{mn}] \end{pmatrix}$$

Misalkan ***W*** suatu vektor berukuran m x 1 yang elemennya variabel random $W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_m \end{bmatrix}$, maka kovariansi dari ***W*** didefinisikan dengan

$$Cov(W) = E\left[(W - E[W])(W - E[W])^T\right]$$

$$= E\left\{\begin{bmatrix} W_1 - E(W_1) \\ W_2 - E(W_2) \\ \vdots \\ W_m - E(W_m) \end{bmatrix}\left[W_1 - E(W_1), W_2 - E(W_2) \cdots W_m - E(W_m)\right]\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} Var(W_1) & Cov(W_1, W_2) & \cdots & Cov(W_1, W_m) \\ Cov(W_2, W_1) & Var(W_2) & \cdots & Cov(W_2, W_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(W_m, W_1) & Cov(W_m, W_2) & \cdots & Var(W_m) \end{bmatrix}$$

(Anton dan Rorres 1994: 115
)

**Teorema 2.19**

Bila ***A*** dan ***B*** dua matriks konstan (semua elemennya konstan) dan ***W*** vektor variabel random, maka

(1) E (***AW***) = ***A*** E(***W***)

E (***AWB***) = ***A*** E(***W***) ***B***

(2) jika ***Z*** = ***AW***, maka Cov (***Z***) = ***A*** Cov (***W***) $A^T$

Bukti Teorema 2.19 :

(1) Trivial

(2) Dengan Z = AW, maka Cov(Z) = E[(Z – E(Z))(Z – E(Z))$^T$ ]

= E[(AW – E(AW))(AW – E(AW))$^T$ ]

= E[A(W – E(W))(W – E(W))$^T$ $A^T$ ]

= A E[(W – E(W))(W – E(W))$^T$ ] $A^T$

= A Cov(W) $A^T$

(Sembiring 1995: 115)

## 2.7 Model Linier

Misalkan $X_1, X_2, \cdots, X_{p-1}$ merupakan variabel yang mempengaruhi variabel respon Y, maka model linier menetapkan bahwa Y tersusun atas mean, yang tergantung pada $X_i$ dan kesalahan random (ε) yang mengukur kesalahan dan pengaruh dari variabel lain yang tidak termuat dalam model. Nilai variabel prediktor dapat diambil dari eksperimen, sedangkan kesalahan random dan variabel respon dianggap sebagai variabel random yang diasumsikan mempunyai distribusi tertentu.

Menurut Searle (1971: 264), model linier dengan respon tunggal dinyatakan dengan

(2.1) $$y = \theta_1 x_0 + \theta_2 x_1 + \cdots + \theta_p x_{p-1} + \varepsilon$$

[respon] = [mean (tergantung pada $X_1$, …, $X_{p-1}$ )] + [kesalahan random]

Dari persamaan (2.1), terlihat bahwa mean sebenarnya merupakan fungsi linier dari parameter tak diketahui $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_p$. Dengan mengambil n observasi independen, $y_1, \cdots, y_i, \cdots, y_n$ dan nilai-nilai $x_1, x_2, \cdots, x_{p-1}$ yang bersesuaian, maka model lengkap dapat dinyatakan dengan

(2.2)
$$\begin{aligned} y_1 &= \theta_1 x_{10} + \theta_1 x_{11} + \cdots + \theta_p x_{1p-1} + \varepsilon_1 \\ &\vdots \\ y_i &= \theta_1 x_{i0} + \theta_1 x_{i1} + \cdots + \theta_p x_{ip-1} + \varepsilon_i \\ &\vdots \\ y_n &= \theta_1 x_{n0} + \theta_1 x_{n1} + \cdots + \theta_p x_{np-1} + \varepsilon_n \end{aligned}$$

dengan asumsi :

(2.3) 1. $E[\varepsilon_i] = 0$

2. $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ (konstan)

3. $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, untuk i≠ j

Persamaan (2. 2) dinyatakan dengan notasi matriks sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{11} & \cdots & x_{1p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{i0} & x_{i1} & \cdots & x_{ip-1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ x_{n0} & x_{n1} & \cdots & x_{np-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_k \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\,\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Asumsi pada persamaan (2.4) menjadi

1. $E[\varepsilon] = 0$

2. $Cov(\varepsilon) = E[\varepsilon\varepsilon^T] = \sigma^2 I$

## 2.8 Metode Kuadrat Terkecil

Menurut Seber (1977: 63) untuk menentukan suatu estimator dari model linier Y=Xθ+ε dapat diperoleh dengan metode kuadrat terkecil, yaitu suatu metode yang meminimumkan jumlah kuadrat vektor kesalahan random ε.

Jumlah kuadrat vektor kesalahan random ε akan minimum bila derivatif parsial pertama terhadap parameter yang diestimasi sama dengan nol. Setelah diperoleh persamaan normalnya, maka dapat dicari estimator dari parameternya.

## 2.9 Metode Pengali Lagrange

Menurut Sumartojo (1987: 198) metode pengali Lagrange adalah metode dari optimasi fungsi berkendala yang melibatkan penambahan pengali tak tentu. Pada metode pengali Lagrange, jika permasalahan semula mempunyai n variabel dan m kendala, maka jumlah permasalahan menjadi m + n variabel.

Perumusan metode pengali Lagrange untuk masalah n variabel dapat dinyatakan sebagai berikut :

1. Untuk masalah n variabel dan 1 kendala, fungsi tujuan berbentuk mengoptimasikan (Maksimum / Minimum).

$$Z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Dengan kendala

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c$$

dan fungsi Lagrange-nya adalah

$$J = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda[c - g(x_1, x_2, \cdots, x_n)]$$

Syarat perlu untuk nilai ekstrim dari *J* terdiri dari (n + 1) persamaan sebagai berikut :

a. $\frac{\partial J}{\partial \lambda} = c - g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$

b. $\frac{\partial J}{\partial X_1} = \frac{\partial f}{\partial X_1} - \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_1} = 0$

$\vdots$

$\frac{\partial J}{\partial X_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_n} = 0$

2. Untuk masalah n variabel dan m kendala, fungsi tujuan akan berbentuk mengoptimasikan (Maksimum / Minimum)

$$Z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Dengan kendala

$$g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_j \text{ dengan } j = 1, 2, \ldots, m$$

dan fungsi Lagrange-nya adalah

$$J = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [c_j - g_j(x_1, x_2, \cdots x_n)]$$

Syarat perlu untuk nilai ekstrim dari *J* terdiri dari (n + m) persamaan sebagai berikut :

a. $\frac{\partial J}{\partial \lambda_j} = c_j - g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$

b.
$$\frac{\partial J}{\partial X_1} = \frac{\partial f}{\partial X_1} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_1} = 0$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial J}{\partial X_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_n} = 0$$

## 2.10 Program Komputer SPSS 16.0 for Windows

SPSS merupakan salah satu paket program komputer yang digunakan dalam mengolah data statistik. Banyak program lain yang juga dapat digunakan untuk olah data statistik, misalnya Microstat, SAS, Sttiostica, SPS-2000 dan lain-lain, namun SPSS lebih popular dibandingkan dengan program lainnya.

SPSS merupakan *software* (perangkat lunak) yang paling popular, dan banyak digunakan sebagai alat bantu dalam berbagai macam riset, sehingga program ini paling banyak digunakan di seluruh dunia. SPSS pertama kali diperkenalkan oleh tiga mahasiswa Stanfort University pada 1968. tahun 1984 SPSS sebagai software muncul dengan nama SPSS/PC+ dengan sistem DOS. Lalu pada tahun 1992 SPSS mengeluarkan versi Windows. SPSS dengan sistem Windows ini telah mengeluarkan software dengan berbagai versi, antara lain SPSS for Windows versi 6, versi 7.5, versi 9, versi 10.01, versi 11.0, versi 12, versi 13, versi 14, versi 15, dan SPSS for Windows versi 16.0 (Hartono 2008 : 2).

SPSS sebelumnya dirancang untuk pengolahan data statistik untuk ilmu-ilmu sosial, sehingga SPSS merupakan simgkatan dari *Statistical Package for the Social Sciens.* Namun, dalam perkembangannya selanjutnya penggunaan SPSS diperluas untuk berbagai jenis user (pengguna), misalnya untuk proses produksi di perusahaan, riset ilmu-ilmu sains dan sebagainya. Sehingga SPSS yang sebelumnya singkatan dari *Statistical Package for the Social Sciens* berubah menjadi *Statistical Product and Service Solutions* (Hartono 2008 : 2).

SPSS for Windows menggunakan dua buah tipe windows, yaitu *SPSS Data Editor* dan *Output Viewer*, dimana setiap tipe mempunyai fungsi dan karakteristik sendiri-sendiri yang saling terkait. Data editor memiliki bentuk tampilan sejenis spreadsheet seperti pada excel yang digunakan sebagai fasilitas untuk mengisikan, menyunting, menampilkan isi dari data penelitian.

**2.10.1 Tampilan Spreadsheet**

SPSS data editor memiliki dua spreadsheet (lembar kerja), yaitu sheet pertama dengan nama *data view* dan sheet kedua *variable view*.

1. Sheet *Data View*

Data view merupakan sheet yang menampilkan data base hasil penelitian yang akan diolah atau dianalisis dengan program SPSS for windows. Pada data view ditampilkan kolom-kolom yang disertai nama-nama variable ,yang disingkat *var*.

2. Sheet *Variable View*

Pada data view ditampilkan nama variabel tipe data, lebar kolom, pengguna desimal, lebar persamaan desimal, macam data hasil penelitian (nominal, skala, ordinal), aligment atau peletakan (rata kiri, rata kanan, center, rata kiri-kanan).

### 2.10.2 Tipe Data

Tipe data yang ada pada program SPSS for windows adalah :

(1) *Numeric*

Merupakan tipe angka dengan tanda plus dan data minus di depan angka serta indikator desimal. Lebar maksimal 40 karakter.

*(2) Comma*

Merupaka tipe yang termasuk angka, tanda plus dan tanda minus didepan angka, indikator desimal, serta pemisah ribuan.

*(3) Dot*

Tipe sama dengan tipe comma, yang membedakan hanyalah pemisah ribuan, yang digunakan adalah titik.

*(4) Scientific notation*

Merupakan tipe data yang menggunakan lambang atau notasi ilmiah seperti log, alfa, dan lain-lain.

*(5) Date*

Tipe ini menampilkan data dalam format tanggal atau waktu.

*(6) Dollar*

Tipe ini dalah tanda $, sebuah titik sebagai indikator desimal dan beberapa tanda koma pemisah ribuan.

*(7) Custom currency*

Tipe ini digunakan untuk menampilkan formula mata uang seperti Rp. 5000.

*(8) String*

Digunakan untuk huruf karakter lainnya.

### 2.10.3 Langkah Operasi Untuk Menganalisis Data Dengan SPSS 16.0 for Windows

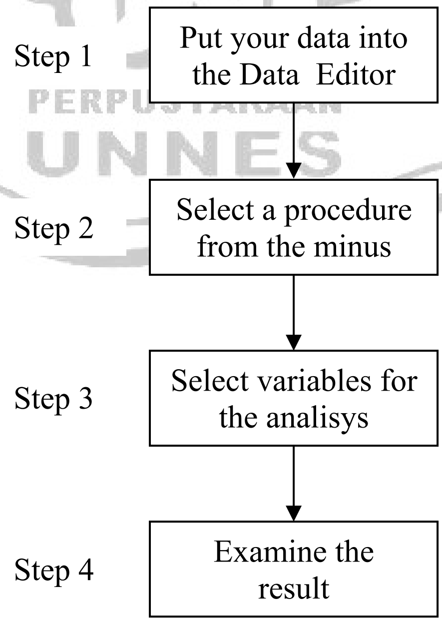
(1) Mengisikan database hasil penelitian yang akan dianalisis pada data editor, yang terlebih dahulu disimpan dan diberi nama atau diidentifikasikan jenis-jenis datanya.

(2) Memilih menu yang akan digunakan pada SPSS for Windows baik grafik, statistik, dan lain-lain.

(3) Memilih dan memilah serta menentukan variabel mana yang yang akan dianalisis, yaitu variabel independent dan variabel dependent atau yang lainnya.

(4) Menjalankan program dengan menu yang dipilih dan kemudian menafsirkan hasil uji pada viewer windows.

Bagan (flowchart) dalam menganalisis data penelitian



### 2.10.4 Windows SPSS 16.0

SPSS menyediakan beberapa windows yang meliputi :

**1.*Windows Data Editor***

Windows ini terbuka secara otomatis beberapa kali program SPSS dijalankan dan berfungsi untuk menginput data SPSS. Menu yang ada pada Data Editor adalah sebagai berikut.

(1) File

Menu file berfungsi untuk menangani hal-hal yang berhubungan dengan file data, seperti membuat file baru, membuka file tertentu, mengambil data dari program lain, mencetak isi data editor, dan lainnya.

(2) Edit

Menu edit berfungsi untuk menangani hal-hal yang berhubungan dengan memperbaiki atau mengubah nilai data. Selain itu, menu edit juga berfungsi untuk mengubah setting options.

(3) View

Menu view berfungsi untuk mengatur toolbar (status bar, penampakan value label lainnya).

(4) Data

Menu data berfungsi untuk membuat perubahan data SPSS secara keseluruhan, seperti mengurutkan data, menyeleksi data berdasarkan kriteria tertentu dan sebagainya.

(5) Transform

Menu transform berfungsi untuk membuat perubahan pada variabel yang telah dipilih dengan kriteria tertentu.

(6) Analyze

Menu analyze merupakan menu inti SPSS yang berfungsi untuk melakukan semua prosedur perhitungan statistik, seperti uji t, uji F, regresi dan lainnya

(7) Graphs

Menu graph berfungsi untuk membuat berbagai jenis grafik untuk mendukung analisis statistik, seperti bar, line, pie dan kombinasinya.

(8) Utilities

Menu utilities adalah yang mendukung program SPSS, seperti memberi informasi tentang variabel yang sekarang sedang dikerjakan, mengatur tampilan menu-menu yang lain.

(9) Window

Menu window berfungsi untuk berpindah diantara menu-menu yang lain di SPSS.

(10) Help

Menu help berfungsi untuk menyediakan bantuan informasi mengenai program SPSS yang bisa diakses secara mudah dan jelas.



**2. *Windows Viewer***

Jika data editor berfungsi untuk memasukan data yang siap diolah oleh SPSS, kemudian melakukan pengolahan data yang dilakukan lewat menu analyze, maka hasil pengolahan data atau informasi ditampilkan lewat window SPSS *viewer*.

Isi viewer bisa berupa beberapa jenis window lagi, yakni sebuah tabel, sebuah grafik dan sebuah teks. Menu viewer ini pada prinsipnya sama dengan menu editor, tentunya disesuaikan untuk kegunaan output pada SPSS

**3. *Windows Syntax Editor***

Walaupun SPSS sudah menyediakan berbagai macam pengolahan data statistik secara memadai, namun ada beberapa perintah atau pilihan yang hanya bisa digunakan dengan SPSS Command language. Isi menu syntax sama dengan menu yang lain, hanya disini ada tambahan submenu *Run* yang berfungsi untuk menjalankan syntax yang telah ditulis.

**4. *Menu Script Editor***

Menu script pada dasarnya digunakan untuk melakukan berbagai pengerjaan SPSS secara otomatis, seperti membuka dan menutup file, export chart, dan lainnya. Isi menu ini sama dengan menu terdahulu, hanya ditambah dengan submenu *script* untuk membuat berbagai subrutin dan fungsi baru, serta submenu *debug* untuk melakukan proses debug pada script.

**5. *Menu Draft Output***

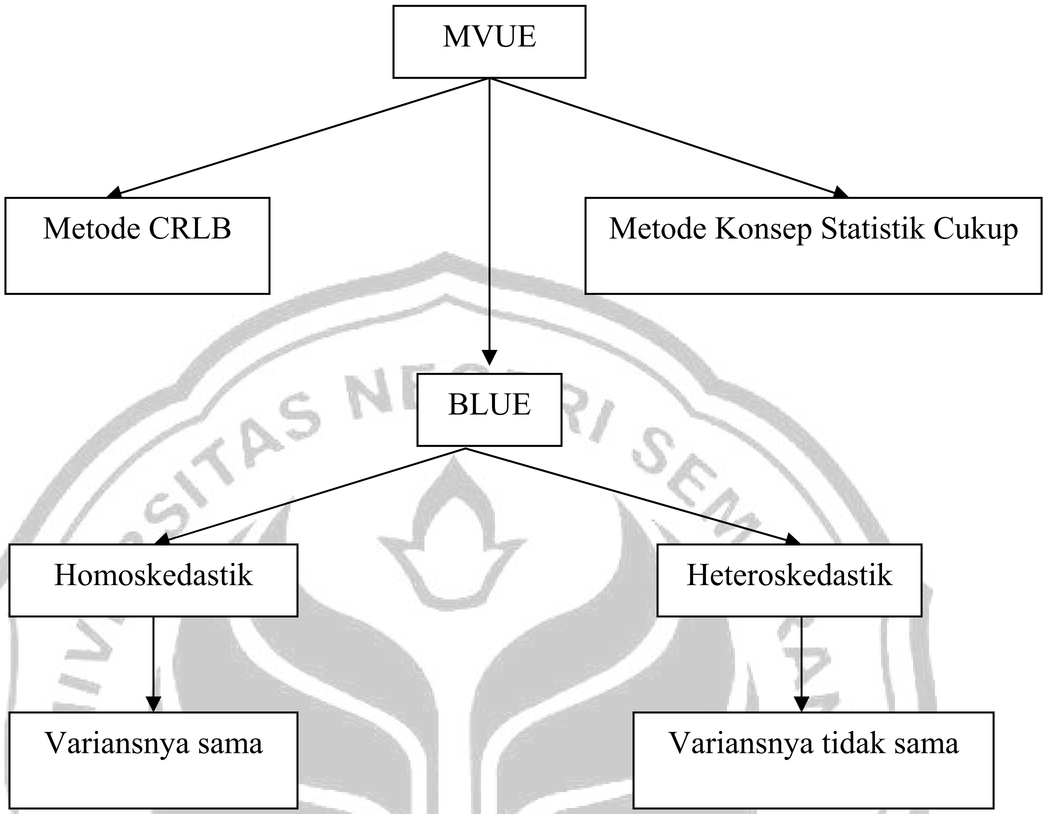
Menu ini juga bisa disebut dengan *draft viewer*, dan pada dasarnya digunakan untuk alternatif output hasil proses SPSS yang berupa teks dan chart.

Output berupa tabel-tabel yang bisa ditampilkan dalam bentuk *simple text.* Sedangkan output grafik (chart) bisa ditampilkan dalam bentuk *metafile picture*.

## 2.11 Kerangka Berpikir

Suatu estimator yang bersifat MVUE dapat dicari dengan menggunakan dua metode, yaitu CRLB dan konsep statistik cukup. Jika kedua metode tersebut tidak dapat digunakan, maka diperlukan suatu batasan baru yaitu estimator harus linier pada observasi. Estimator yang linier, tak bias, dan mempunyai variansi minimum disebut BLUE. Model linier pada kasus homoskedastik dan heteroskedastik dijelaskan pada awal pembahasan skripsi ini. Langkah selanjutnya akan dikonstruksikan bentuk estimator yang linier pada observasi dalam bentuk umum. Estimator linier dalam bentuk umum yang telah diperoleh dikenal sifat tak bias. Estimator akan dicari dengan dua metode, yaitu metode kuadrat terkecil dan metode pengali Lagrange. Estimator yang diperoleh dibuktikan merupakan estimator linier tak bias dengan variansi minimum atau BLUE.

Bagan Kerangka Berpikir



# BAB 3

# METODE PENELITIAN

Skripsi ini dikerjakan dengan mengkaji metode secara teoritis dengan mengacu pada beberapa pustaka. Diberikan pula contoh permasalahan yang diselesaikan berdasarkan pada hasil pembahasan sehingga menjadi lebih mudah dipahami. Penelitian ini dilakukan untuk memecahkan masalah yang pada dasarnya terkumpul pada kajian kritis dan mendalam terhadap bahan-bahan yang relevan. Langkah-langkah yang dilakukan sebagai berikut :

## 3.1 Metode Pengumpulan Data

Metode yang dilakukan dalam penulisan skripsi ini adalah melalui kajian sumber-sumber pustaka dengan cara mengumpulkan data atau informasi yang berkaitan dengan masalah, mengumpulkan konsep pendukung yang diperlukan dalam menyelesaikan masalah sehingga didapatkan suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah.



## 3.2 Metode Analisis Data

Metode analisis dalam pemecahan masalah dilakukan dengan pengkajian kritis dan mendalam terhadap bahan-bahan pustaka yang mendukung khususnya yang berkaitan dengan cara menentukan BLUE. Adapun Langkah-langkah yang ditempuh untuk membahas masalah BLUE adalah sebagai berikut :

1. Memberikan suatu definisi tentang model linier pada kasus homoskedastik dan kasus heteroskedastik.
2. Menentukan estimator linier dalam bentuk umum.

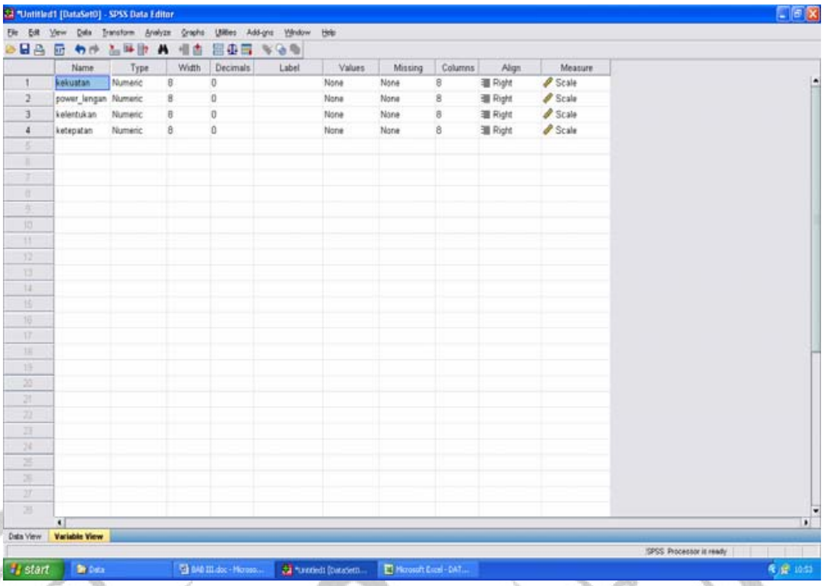
3. Menerapkan sifat ketakbiasan pada estimator linier dalam bentuk umum sehingga dapat diperoleh suatu syarat perlu dan cukup agar estimator memenuhi sifat tak bias.
4. Mencari estimator dengan menggunakan 2 buah metode, yaitu metode kuadrat terkecil dan metode pengali Lagrange untuk masing-masing model linier pada kasus homoskedastik dan kasus heteroskedastik.
5. Kemudian dibuktikan bahwa estimator yang telah dihasilkan mempunyai variansi minimum dengan terlebih dahulu mencari kovariansi dari estimator tersebut.
6. Mengaplikasikan pada suatu contoh kasus.
7. Menganalisis BLUE pada model linier untuk kasus homoskedastik dan heteroskedastik menggunakan program SPSS 16.0 for Windows.

   Langkah-langkah pengolahan data menggunakan SPSS 16.0 for Windows adalah sebagai berikut :

   a. Memasukkan Data

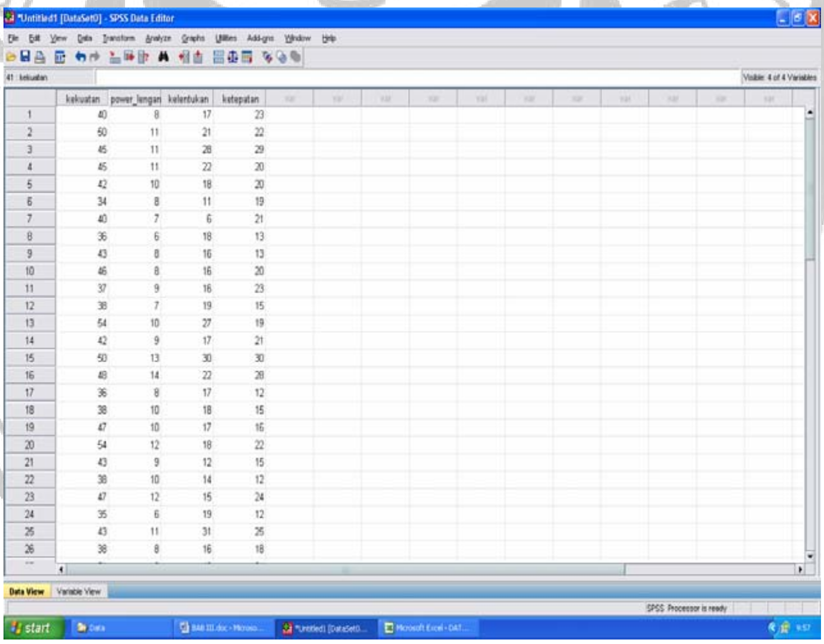
      (1) Buka lembar file

      (2) Memberi nama variabel dan properti yang diperlukan. Buatlah nama untuk setiap variabel baru, jenis data, label data, dan sebagainya dengan cara klik tabsheet *Variabel View* yang ada dibagian kiri bawah.




| | Name | Type | Width | Decimals | Label | Values | Missing | Columns | Align | Measure |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | kekuatan | Numeric | 8 | 0 | | None | None | 8 | Right | Scale |
| 2 | power_lengan | Numeric | 8 | 0 | | None | None | 8 | Right | Scale |
| 3 | kelentukan | Numeric | 8 | 0 | | None | None | 8 | Right | Scale |
| 4 | ketepatan | Numeric | 8 | 0 | | None | None | 8 | Right | Scale |

(3) Mengetik atau memasukkan data dengan cara klik tabsheet *Data View*



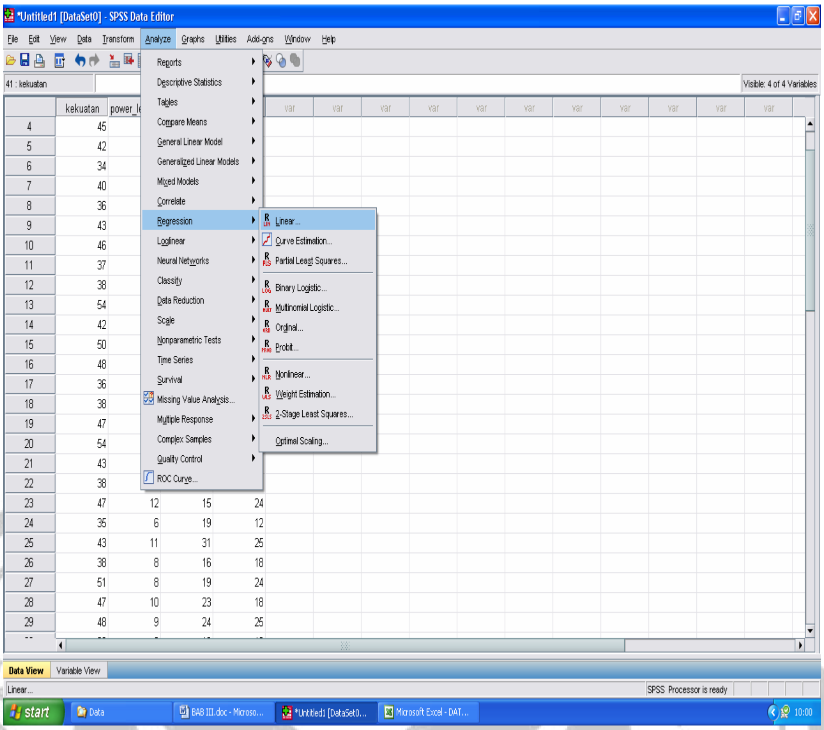

| | kekuatan | power_lengan | kelentukan | ketepatan |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 40 | 8 | 17 | 23 |
| 2 | 50 | 11 | 21 | 22 |
| 3 | 45 | 11 | 28 | 29 |
| 4 | 45 | 11 | 22 | 20 |
| 5 | 42 | 10 | 18 | 20 |
| 6 | 34 | 8 | 11 | 19 |
| 7 | 40 | 7 | 6 | 21 |
| 8 | 36 | 6 | 18 | 13 |
| 9 | 43 | 8 | 16 | 13 |
| 10 | 46 | 8 | 16 | 20 |
| 11 | 37 | 9 | 16 | 23 |
| 12 | 38 | 7 | 19 | 15 |
| 13 | 54 | 10 | 27 | 19 |
| 14 | 42 | 9 | 17 | 21 |
| 15 | 50 | 13 | 30 | 30 |
| 16 | 48 | 14 | 22 | 28 |
| 17 | 36 | 8 | 17 | 12 |
| 18 | 38 | 10 | 18 | 15 |
| 19 | 47 | 10 | 17 | 16 |
| 20 | 54 | 12 | 18 | 22 |
| 21 | 43 | 9 | 12 | 15 |
| 22 | 38 | 10 | 14 | 12 |
| 23 | 47 | 12 | 15 | 24 |
| 24 | 35 | 6 | 19 | 12 |
| 25 | 43 | 11 | 31 | 25 |
| 26 | 38 | 8 | 16 | 18 |

b. Melakukan analisis data

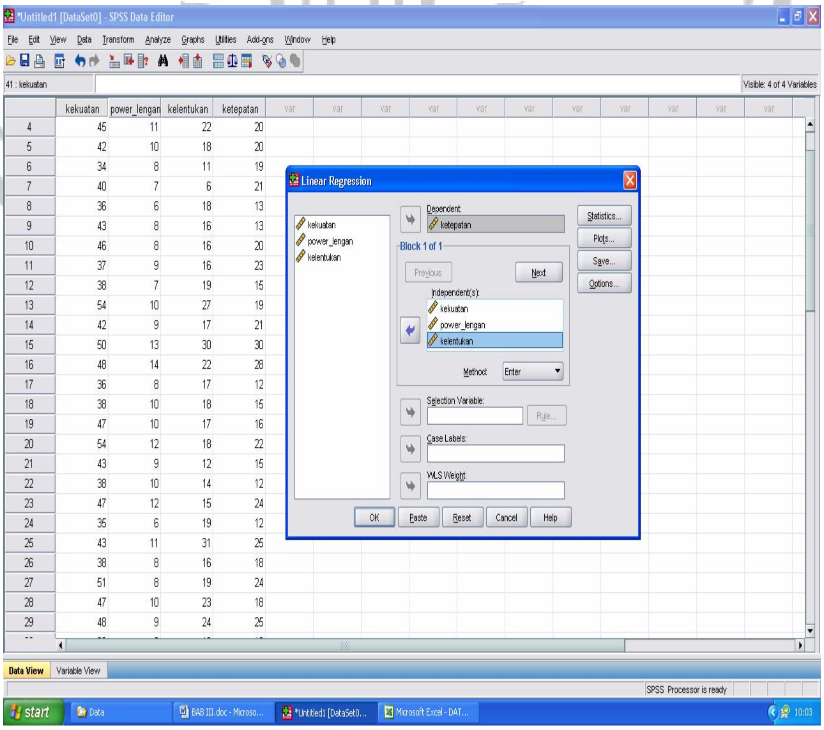
(1) klik Analyze

(2) klik Regression

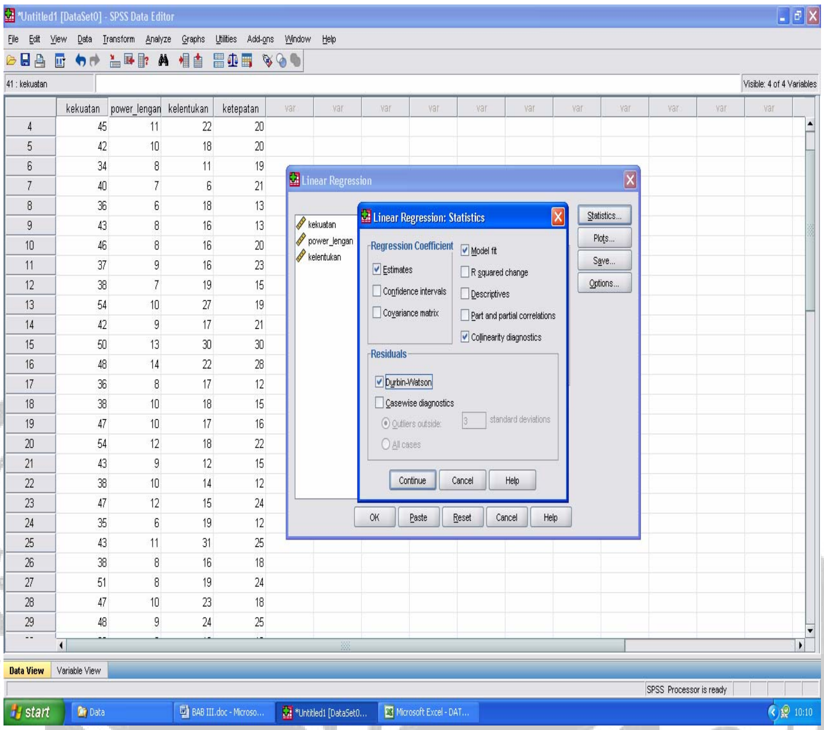
(3) klik Linear



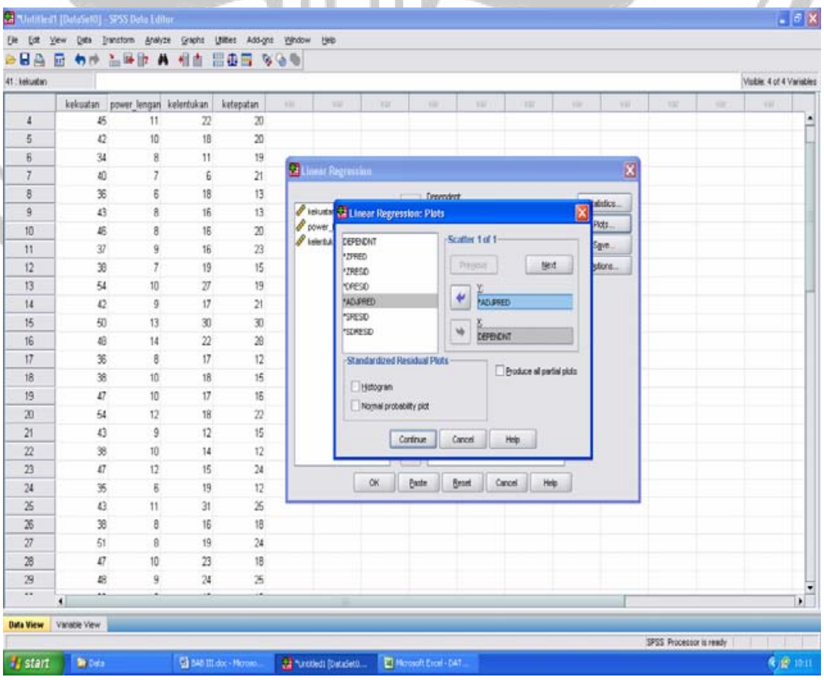

c. Isikan variabel yang akan dianalisis, masukkan variabel ketepatan pada kotak dependent dan variabel kekuatan genggaman, power lengan, kelentukan punggung pada kotak independent.



d. Klik statistic kemudian pilih Collinierity, Durbin Watson lalu klik Continue.




e. Klik plot, masukkan variabel dependen pada X, pilih salah satu residual pada Y, pilih normal probability plot tekan Continue.




f. Abaikan yang lainnya dan yang terakhir klik *OK*.

# BAB 4

# PEMBAHASAN

Pada pembahasan ini dibahas mengenai BLUE pada model linier. Pembahasan tentang BLUE dilakukun untuk parameter yang berbentuk vektor dari suatu model linier.

## 4.1 Model Linier

Penentuan BLUE dilakukan pada model linier untuk dua kasus, yaitu model linier pada kasus homoskedastik dan kasus heteroskedastik. Pengertian tentang model linier dijelaskan pada landasan teori.

### 4.1.1 Model Linier Pada Kasus Homoskedastik

Model linier dikatakan mempunyai sifat homoskedastik jika homogenitas variansi kesalahan random dipenuhi. Model linier pada kasus homoskedastik dinyatakan dengan

(4.1) $$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\,\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Dengan $\mathbf{Y}$ merupakan vektor observasi berukuran n x 1

$\mathbf{X}$ merupakan matriks konstan yang berukuran n x p, dengan rank penuh

$\boldsymbol{\theta}$ merupakan vektor parameter yang akan diestimasi berukuran p x 1

$\boldsymbol{\varepsilon}$ merupakan vektor kesalahan random berukuran n x 1

Asumsi model linier pada kasus homoskedastik :

1. $\mathbf{E(Y) = X\,\boldsymbol{\theta}}$

2. **ε** independen dan terdistribusi identik dengan **E(ε) = 0** dan **Cov(ε) = σ² I**

 **I** merupakan matriks identitas berukuran n x n

### 4.1.2 Model Linier Pada Kasus Heteroskedastik

Model linier dikatakan mempunyai sifat heteroskedastik jika homogenitas variansi kesalahan random tidak dipenuhi. Model liner pada kasus heteroskedastik sama seperti persamaan (4. 1) tetapi asumsi-asumsi pada model berbeda.

Asumsi model linier pada kasus heteroskedastik :

1. **E(Y) = X θ**
2. **ε** independen dan terdistribusi identik dengan **E(ε) = 0** dan **Cov(ε) = σ² C**

 **C** merupakan matriks definit positif yang diketahui berukuran n x n

## 4.2 Estimator Linier

Menurut Kay (1992 : 163), estimator dikatakan linier jika estimator tersebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $Y_1, \cdots, Y_i, \cdots, Y_n$ .

Misalkan a = $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ merupakan vektor berukuran n x 1. jika $\hat{\theta}$ merupakan parameter yang berbentuk skalar, maka $\hat{\theta}$ dapat dinyatakan dengan

$$\hat{\theta} = \sum_{j=1}^{n} a_j Y_j$$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$= a^T Y$$

Dengan Y = $\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$ merupakan vektor berukuran n x 1.

Jika parameter yang akan diestimasi sebanyak p, yaitu parameter yang berbentuk vektor berukuran p x 1, maka untuk setiap estimator linier dapat dituliskan dengan

(4.2) $$\hat{\theta}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Y_j$$ dengan i = 1, 2, ..., p

$$= \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$= a_I^T Y$$

Dengan $a_i$ = $\begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}$ merupakan vektor berukuran n x 1

Estimator $\hat{\theta}_i$ untuk i = 1, 2, ..., p dapat dinyatakan dalam bentuk vektor dengan

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Y_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} Y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{pj} Y_j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + \cdots + a_{1n}Y_n \\ a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + \cdots + a_{2n}Y_n \\ \vdots \\ a_{p1}Y_1 + a_{p2}Y_2 \cdots + a_{pn}Y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta} = \mathbf{L}\,\mathbf{Y}$$

Dengan $\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_p \end{bmatrix}$ merupakan vektor parameter berukuran p x 1.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}$$ merupakan matriks berukuran p x n.

Pada kasus homoskedastik dan kasus heteroskedastik mempunyai bentuk estimator linier sama.

## 4.3 Estimator Tak Bias

Salah satu syarat BLUE adalah estimator harus tak bias. Estimator tak bias artinya harga harapan estimator dari suatu parameter sama dengan parameter yang diestimasi, sehingga dapat dinyatakan ke dalam persamaan berikut :

(4.3) $$\mathrm{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right) = 0$$

Pada pembahasan sebelumnya telah dijelaskan tentang estimator linier. Jika syarat tak bias dikenakan pada estimator dalam bentuk vektor, maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

(4.4) $$\mathrm{E}\,(\hat{\theta}) = \mathrm{E}\,(\mathbf{L\,Y}) = \mathbf{L}\,\mathrm{E}\,(\mathbf{Y}) = \theta$$

Salah satu asumsi dari model linier pada kasus homoskedastik dan kasus heteroskedastik adalah E (**Y**) = **X θ**, sehingga dari persamaan (4.4) diperoleh

(4.5) $$\mathrm{E}\,(\hat{\theta}) = \mathbf{L\,X\,\theta} = \boldsymbol{\theta}$$

Persamaan (4.5) memberikan suatu syarat cukup dan perlu untuk ***L*** agar $\hat{\theta}$ tak bias.

**Lemma 4.1**

Kesalahan random $\boldsymbol{\varepsilon}$ dalam model linier diasumsikan mempunyai mean nol atau E[ε]=0. Estimator linier $\hat{\theta}$ dikatakan tak bias jika $\boldsymbol{L}\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$, dengan $\boldsymbol{I}$ merupakan matriks identitas. (Kay, 1993)

Bukti :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\hat{\theta}-\theta\right) &= \mathrm{E}\left[\, \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\theta} \,\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\, \boldsymbol{L}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\theta} \,\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\, \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\theta} \,\right] \\
&= \mathrm{E}\left[(\, \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{X} - \boldsymbol{I}\,)\,\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{\varepsilon} \,\right] \\
&= \mathrm{E}\left[(\, \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{X} - \boldsymbol{I}\,)\,\boldsymbol{\theta} \,\right] + \mathrm{E}\left[\, \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{\varepsilon} \,\right]
\end{aligned}
$$

Diasumsikan bahwa $\mathrm{E}[\,\boldsymbol{\varepsilon}\,] = \boldsymbol{0}$, maka $\mathrm{E}[\,\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,] = \boldsymbol{L}\,\mathrm{E}[\,\boldsymbol{\varepsilon}\,] = \boldsymbol{0}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\hat{\theta}-\theta\right) &= \mathrm{E}\left[(\, \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{X} - \boldsymbol{I}\,)\,\boldsymbol{\theta} \,\right] \\
&= (\, \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{X} - \boldsymbol{I}\,)\,\boldsymbol{\theta}
\end{aligned}
$$

Jika dipenuhi $\boldsymbol{LX} - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$, maka $\mathrm{E}\left(\hat{\theta}-\theta\right) = 0$. jadi $\hat{\theta}$ tak bias.

## 4.4 Estimator Terbaik

Setelah dicari estimator yang linier dan tak bias, maka untuk memenuhi syarat BLUE, diberikan suatu definisi tentang estimator terbaik. Estimator terbaik artinya estimator yang bersifat tak bias dan mempunyai variansi minimum. Untuk mencari estimator dengan variansi minimum akan digunakan dua metode, yaitu metode kuadrat terkecil dan metode pengali Lagrange.

### 4.4.1 Metode Kuadrat Terkecil

Prinsip utama metode kuadrat terkecil adalah meminimumkan jumlah kuadrat kesalahan randomnya. Estimator dicari dengan metode kuadrat terkecil, pertama dilakukan untuk kasus homoskedastik, kemudian kasus heteroskedastik.

**4.4.1.1 Kasus Homoskedastik**

Menurut Seber (1977: 63) untuk menentukan suatu estimator dari model linier $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dengan asumsi E($\boldsymbol{\varepsilon}$) = $\boldsymbol{0}$ dan Cov($\boldsymbol{\varepsilon}$) = $\boldsymbol{\sigma^2}\,\boldsymbol{I}$ dapat diperoleh dengan metode kuadrat terkecil.

Langkah pertama adalah menghitung jumlah kuadrat vektor kesalahan random ε, yaitu

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^T \varepsilon &= (Y - X\theta)^T (Y - X\theta) \\
&= (Y^T - \theta^T X^T)(Y - X\theta) \\
&= Y^T Y - \theta^T X^T Y - Y^T X\theta + \theta^T X^T X\theta \\
&= Y^T Y - 2\theta^T X^T Y + \theta^T X^T X\theta
\end{aligned}
$$

Jumlah kuadrat vektor kesalahan random ε akan minimum jika derivatif parsial pertama terhadap parameter yang diestimasi sama dengan nol.

$$\frac{\partial \varepsilon^T \varepsilon}{\partial \theta} = -2X^T Y + 2X^T X\theta = 0 \qquad (4.6)$$

Persamaan (4.6) dapat dicari persamaan normalnya, yaitu

$$X^T X\theta = X^T Y$$

Setelah diperoleh persamaan normal, maka dapat diperoleh estimator $\hat{\theta}$. Pada kasus homoskedastik estimator $\hat{\theta}$ dituliskan dengan $\hat{\theta}\,'$ , yaitu

$$\hat{\theta}' = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$$

Langkah selanjutnya dibuktikan apakah estimator yang diperoleh bersifat tak bias. Misalkan untuk model linier pada kasus homoskedastik $L = L'$. Lemma 4.1 memberikan syarat perlu dan cukup untuk L agar $\hat{\theta}$ tak bias, maka misalkan $L' = (X^T X)^{-1} X^T$, dihasilkan $L'X = (X^T X)^{-1} X^T X = I$, terlihat syarat ketakbiasan dipenuhi oleh estimator di atas.

**4.4.1.2 Kasus Heteroskedastik**

Model linier pada kasus heteroskedastik mengasumsikan bahwa ***ε*** independen dan terdistribusi identik dengan ***E(ε) = 0*** dan ***Cov(ε) = σ² C***. Model linier pada kasus heteroskedastik harus ditransformasi terlebih dahulu agar homogenitas variansi pada kesalahan random ***ε*** terpenuhi.

Pada awal pembahasan telah disebutkan bahwa ***C*** merupakan matriks definit positif. Menurut Seber (1997: 63), jika matriks ***C*** definit positif, maka akan terdapat matriks nonsingular ***K*** berukuran n x n, sehingga dapat dibentuk $C = KK^T$. Jika persamaan (4.1) dikenakan transformasi $Z = K^{-1}Y$, $B = K^{-1}X$ dan $\eta = K^T \varepsilon$, maka model linier tergeneralisasi dinyatakan dengan

$$Z = B\theta + \eta$$

Asumsi pada persamaan (4.1) menjadi

1. E(***Z***) = ***B θ***
2. ***η*** independen dan terdistribusi identik dengan

$$E(\eta) = E(K^{-1}\varepsilon) = K^{-1}E(\varepsilon) = 0$$

$$Cov(\eta) = Cov(K^{-1}\varepsilon) = K^{-1}Cov(\varepsilon)(K^{-1})^T = K^{-1}\sigma^2 C(K^{-1})^T$$

$$= \sigma^2 K^{-1} K K^T (K^{-1})^T = \sigma^2 I$$

Estimator $\hat{\theta}$ dicari dengan menggunakan metode kuadrat terkecil generalisasi. Pada kasus heteroskedastik estimator $\hat{\theta}$ dinyatakan dengan $\hat{\theta}''$. Ada dua cara untuk mencari estimator $\hat{\theta}''$ pada metode kuadrat terkecil generalisasi, yaitu

1. Dengan menggunakan estimator yang telah diperoleh pada metode kuadrat terkecil untuk model linier dengan kasus homoskedastik, yaitu

   $$\hat{\theta}' = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

   Jika hasil tersebut diterapkan pada model linier generalisasi, maka diperoleh estimator sebagai berikut :

   $$\hat{\theta}'' = (B^T B)^{-1} B^T Z$$

   $$= [(K^{-1}X)^T K^{-1}X]^{-1}(K^{-1}X)^T K^{-1}Y$$

   $$= [X^T (K^T)^{-1} K^{-1} X]^{-1} X^T (K^T)^{-1} K^{-1} Y$$

   $$= (X^T C^{-1} X)^{-1} X^T C^{-1} Y$$

2. Dengan meminimumkan bentuk kuadrat dari kesalahan random pada model linier generalisasi.

   $$\eta^T \eta = (K^{-1}\varepsilon)^T (K^{-1}\varepsilon)$$

   $$= \varepsilon^T (K^{-1})^T K^{-1}\varepsilon$$

   $$= \varepsilon^T (K^T)^{-1} K^{-1}\varepsilon$$

$$= \varepsilon^T (KK^T)^{-1} \varepsilon$$

$$= \varepsilon^T C^{-1} \varepsilon$$

$$= (Y - X\theta)^T C^{-1} (Y - X\theta)$$

$$= Y^T C^{-1} Y - \theta^T X^T C^{-1} Y - Y^T C^{-1} X\theta + \theta^T X^T C^{-1} X\theta$$

(4.7) $$= Y^T C^{-1} Y - 2 X^T C^{-1} Y\theta + \theta^T X^T C^{-1} X\theta$$

Persamaan (4.7) diminimumkan dengan cara menurunkan persamaan tersebut terhadap θ diperoleh hasil sebagai berikut :

(4.8) $$\frac{\partial \eta^T \eta}{\partial \theta} = -2 X^T C^{-1} Y + 2 X^T C^{-1} X\theta$$

Hasil diatas disamakan dengan nol menjadi

(4.9) $$X^T C^{-1} X\theta = X^T C^{-1} Y$$

Berdasarkan persamaan (4.9), maka diperoleh estimator parameter pada model linier untuk kasus heteroskedastik adalah

$$\hat{\theta}'' = (X^T C^{-1} X)^{-1} X^T C^{-1} Y$$

Dari dua cara yang digunakan untuk mengestimasi $\theta$ ternyata diperoleh hasil yang sama. Langkah selanjutnya dilakukan seperti pada kasus homoskedastik, dilihat apakah estimator yang diperoleh bersifat tak bias. Misalkan untuk model linier pada kasus heteroskedastik $L = L'' = (X^T C^{-1} X)^{-1} X^T C^{-1}$, maka syarat ketakbiasan juga dipenuhi oleh estimator $\hat{\theta}''$.

### 4.4.2 Metode pengali Lagrange

Metode pengali Lagrange digunakan untuk optimasi, dalam kasus ini mencari ***L*** yang dapat meminimumkan variansi $\hat{\theta}$. Meminimumkan variansi $\hat{\theta}$ berarti meminimumkan variansi $\hat{\theta}_i$ untuk i = 1, 2, ..., p. Syarat tak bias menjadi kendala dalam meminimumkan variansi $\hat{\theta}_i$. Jadi ada proses minimisasi sebanyak p dan masing-masing proses minimisasi mempunyai p kendala.

#### 4.4.2.1 Kasus Homoskedastik

Meminimumkan $Var\ (\hat{\theta}_i) = \sigma^2 a_i^T I a_j$ ,

dengan kendala $a_i^T X_k = \delta_{ik}$ i, k = 1, 2, ...,p.

Untuk $X_k = \begin{bmatrix} X_{1(k-1)} \\ X_{2(k-1)} \\ \vdots \\ X_{n(k-1)} \end{bmatrix}$ merupakan vektor konstanta berukuran n x 1.

$\delta_{ik}$ didefinisikan sebagai $\delta_{ik} = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k \end{cases}$

Fungsi Lagrange dari proses minimisasi tersebut dapat dituliskan

$$J_i = \sigma^2 a^T a_i + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(i)} (a_i^T X_k - \delta_{ik})$$

Dengan $\lambda_k^{(i)}$ adalah pengali tak tentu Lagrange.

Hasil turunan pertama dari $J_i$ terhadap $a_i$ adalah

(4.10) $$\frac{\partial J_i}{\partial a_i} = 2\sigma^2 a_i + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^{(i)} X_k$$

Misalkan $\lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_1^{(i)} \\ \lambda_2^{(i)} \\ \vdots \\ \lambda_p^{(i)} \end{bmatrix}$ merupakan vektor Lagrange berukuran p x 1 dan

$X = \lfloor X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_p \rfloor$ merupakan matriks berukuran n x p, maka persamaan (4.10) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{\partial J_i}{\partial a_i} = 2\sigma^2 a_i + X\lambda_i$$

Syarat perlu untuk meminimumkan Var ($\hat{\theta}_i$) adalah

(4.11) 1. $\frac{\partial J_i}{\partial a_i} = 0$, sehingga $a_i = -\frac{1}{2\sigma^2} X\lambda_i$

(4.12) 2. $\frac{\partial J_i}{\partial \lambda_k^{(i)}} = a_i^T X_k - \delta_{ik} = 0$, sehingga $a_i^T X_k = \delta_{ik}$

Persamaan (4.12) dapat dituliskan dalam bentuk kombinasi sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_{i-1}^T \\ x_j^T \\ x_{j+1}^T \\ \vdots \\ x_p^T \end{bmatrix} a_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4.13) $$X^T a_i = e_i$$

Dengan $X^T = \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_p^T \end{bmatrix}$ merupakan matriks berukuran p x n,

$a_i = \begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{bmatrix}$ merupakan vektor berukuran n x 1,

$e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ merupakan vektor berukuran p x 1dengan elemen ke- i = 1.

Hasil substitusi persamaan (4.11) ke persamaan (4.13) adalah

(4.14) $$-\frac{1}{2\sigma^2} X^T X \lambda_i = e_i$$

Berdasarkan persamaan (4.14), maka diperoleh vektor pengali tak tentu Lagrange yaitu

(4.15) $$-\frac{1}{2\sigma^2} \lambda_i = (X^T X)^{-1} e_i$$

Hasil substitusi persamaan (4.14) ke persamaan (4.11) adalah

(4.16) $$a_i = X(X^T X)^{-1} e_i$$

Misalkan matriks L = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}$ dinyatakan sebagai $L' = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_p^T \end{bmatrix}$ dan estimator $\hat{\theta}$ untuk kasus homoskedastik dituliskan dengan $\hat{\theta}'$, sehingga vektor $\hat{\theta}'$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$\hat{\theta}' = \begin{bmatrix} a_1^T Y \\ a_2^T Y \\ \vdots \\ a_p^T Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T (X^T X)^{-1} X^T Y \\ e_2^T (X^T X)^{-1} X^T Y \\ \vdots \\ e_p^T (X^T X)^{-1} X^T Y \end{bmatrix}$$

(4.17) $$= \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_p^T \end{bmatrix} (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Matriks $\boldsymbol{I}$ = $\begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_p^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ merupakan matriks identitas berukuran p x p, maka persamaan (4.17) menjadi

$$\hat{\theta}' = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

**4.4.2.2 Kasus Heteroskedastik**

Kasus heteroskedastik mengasumsikan bahwa Cov(ε) = σ² C, sehingga metode pengali Lagrange untuk kasus heteroskedastik akan meminimumkan $Var\ (\hat{\theta}_i) = \sigma^2 a_i^T C a_i$ .

Konsep yang sama pada proses pencarian estimator $\hat{\theta}$ untuk kasus homoskedastik diterapkan pada kasus heteroskedastik, jika estimator $\hat{\theta}$ untuk kasus heteroskedastik dituliskan dengan $\hat{\theta}''$ , maka diperoleh estimator $\hat{\theta}''$ adalah $\hat{\theta}'' = (X^T C^{-1} X)^{-1} X^T C^{-1} Y$ .

**4.4.3 Estimator Dengan Variansi Minimum**

Metode kuadrat terkecil dan metode pengali Lagrange menghasilkan eestimator parameter yang sama untuk masing-masing model linier pada kasus homoskedastik dan kasus heteroskedastik. Langkah selanjutnya dengan membuktikan bahwa estimator yang telah diperoleh mempunyai variansi minimum.

**4.4.3.1 Kasus Homoskedastik**

Sebelum membuktikan estimator $\hat{\theta}'$ merupakan estimator yang mempunyai variansi minimum, terlebih dahulu dicari variansi dari estimator yang telah diperoleh.

Salah satu asumsi dari model linier pada kasus homoskedastik adalah Cov(ε) = σ² ***I***. Variansi dari $\hat{\theta}'$ merupakan vektor yang terdiri dari elemen diagonal matriks kovariansi dari $\hat{\theta}'$ . Kovariansi dari $\hat{\theta}'$ adalah

$$Cov\ (\hat{\theta}') = E\left[(\hat{\theta}'.E(\hat{\theta}'))(\hat{\theta}'.E(\hat{\theta}'))^T\right]$$

$$= E\left[(L'Y.E(L'Y))(L'Y.E(L'Y))^T\right]$$

$$= E\left[L'(Y - E(Y))(Y - E(Y))^T (L')^T\right]$$

$$= L'Cov\ (Y)L'^T = \sigma^2 L'L'^T$$

Jika matriks $L' = (X^T X)^{-1} X^T$, maka persamaan diatas menjadi

$$Cov\ (\hat{\theta}') = \sigma^2 (X^T X)^{-1} X^T \left((X^T X)^{-1} X^T\right)^T$$

$$= \sigma^2 (X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1}$$

(4.18) $$= \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

Dengan menggunakan hasil diatas, maka estimator $\hat{\theta}^*$ dibuktikan mempunyai variansi minimum. Misalkan $\hat{\theta}^* = L^*Y$ merupakan sebarang estimator linier tak bias lain dan $L^* = L' + A = (X^T X)^{-1} X^T + A$, dengan elemen matriks ***A*** merupakan sebarang konstanta. Estimator $\hat{\theta}^* = L^*Y$ merupakan estimator tak bias, sehingga

(4.19) $$L^* X = (L' + A)X = L'X + AX = I\ .$$

Lemma 4.1 diterapkan pada persamaan (4.19) diperoleh

(4.20) $$AX = 0 = X^T A^T$$

Variansi dari estimator $\hat{\theta}^* = L^*Y$ merupakan vektor yang terdiri dari elemen diagonal dari $Cov\ (\hat{\theta}^*)$

$$Cov\ (\hat{\theta}^{*}) = Cov\ (L^{*}Y) = \sigma^{2} L^{*} L^{*^{T}}$$

$$= \sigma^{2} \left\lfloor (L^{'} + A)(L^{'} + A)^{T} \right\rfloor$$

$L^{'} = (X^{T}X)^{-1}X^{T}$ dan persamaan (4.20) disubstitusikan ke $Cov(\hat{\theta}^{*})$, maka diperoleh

(4.21) $$Cov\ (\hat{\theta}^{*}) = \sigma^{2}\left[(X^{T}X)^{-1} + AA^{T}\right]$$

Jadi $Var\ (\hat{\theta}^{*})$ adalah vektor dari elemen diagonal matriks $\sigma^{2}\left[(X^{T}X)^{-1} + AA^{T}\right]$.

Berdasarkan persamaan (4.18) dan (4.21), maka dapat dihitung bahwa perbedaan $Var\ (\hat{\theta}^{*})$ dan $Var\ (\hat{\theta}^{'})$ adalah vektor yang terdiri dari elemen diagonal matriks $\sigma^{2}AA^{T}$. Jadi $Var\ (\hat{\theta}^{*}) \geq Var\ (\hat{\theta}^{'})$, sehingga $\hat{\theta}^{'}$ mempunyai variansi minimum diantara estimator linier tak bias yang lain. Hal ini dapat dikatakan $\hat{\theta}^{'}$ merupakan BLUE.

**4.4.3.2 Kasus Heteroskedastik**

Seperti pada kasus homoskedastik, sebelum membuktikan estimator $\hat{\theta}^{''}$ merupakan estimator yang mempunyai variansi minimum, akan dicari terlebih dahulu variansi dari estomator yang telah diperoleh.

Salah satu asumsi dari model linier pada kasus heteroskedastik adalah $Cov\ (\varepsilon) = \sigma^{2}C$ . Variansi dari $\hat{\theta}^{''}$ merupakan vektor yang berisi elemen diagonal dari matriks kovariansi $\hat{\theta}^{''}$. Kovariansi dari $\hat{\theta}^{''}$ adalah

$$Cov\ (\hat{\theta}^{''}) = \sigma^{2} L^{''} C L^{''^{T}}.$$

Matriks $L'' = (X^T C^{-1} X)^{-1} X^T C^{-1}$, sehingga persamaan di atas menjadi

$$Cov(\hat{\theta}'') = \sigma^2 (X^T C^{-1} X)^{-1} X^T C^{-1} C \left((X^T C^{-1} X)^{-1} X^T C^{-1}\right)^T$$

$$= \sigma^2 (X^T C^{-1} X)^{-1} X^T C^{-1} C C^{-1} X (X^T C^{-1} X)^{-1}$$

(4.22) $$= \sigma^2 (X^T C^{-1} X)^{-1}$$

Pembuktian estimator $\hat{\theta}''$ merupakan estimator linier tak bias yang mempunyai variansi minimum dilakukan sama seperti pembuktian pada kasus homoskedastik. Misalkan $\hat{\theta}_1^* = L_1^* Y$ merupakan sebarang estimator linier tak bias lain dan $L_1^* = L'' + D = (X^T C^{-1} X)^{-1} X^T C^{-1} + D$, dengan elemen matriks D merupakan sebarang konstanta. Estimator $\hat{\theta}_1^* = L_1^* Y$ merupakan estimator tak bias, sehingga

(4.23) $$L_1^* X = (L'' + D) X = L'' X + DX = I$$

Lemma 4.1 diterapkan pada persamaan (4.23) diperoleh

(4.24) $$DX = 0 = X^T D^T$$

Variansi dari estimator $\hat{\theta}_1^*$ merupakan vektor yang terdiri dari elemen diagonal dari $Cov(\hat{\theta}_1^*)$.

$$Cov(\hat{\theta}_1^*) = Cov(L_1^* Y) = \sigma^2 L_1^* C L_1^{*T}$$

$$= \sigma^2 \left[(L'' + D) C (L'' + D)^T\right]$$

$L'' = (X^T C^{-1} X)^{-1} X^T C^{-1}$ dan persamaan (4.24) disubstitusikan ke $Cov(\hat{\theta}_1^*)$, diperoleh

(4.25) $$Cov(\hat{\theta}_1^*) = \sigma^2 \left[ (X^T C^{-1} X)^{-1} + DCD^T \right]$$

Jadi $Var(\hat{\theta}_1^*)$ adalah vektor dari elemen diagonal $\sigma^2 \left[ (X^T C^{-1} X)^{-1} + DCD^T \right]$.

Berdasarkan persamaan (4.22) dan (4.25), maka dapat dihitung perbedaan $Var(\hat{\theta}_1^*)$ dan $Var(\hat{\theta}'')$ adalah vektor yang terdiri dari elemen diagonal matriks $\sigma^2 DCD^T$. Jadi $Var(\hat{\theta}_1^*) \geq Var(\hat{\theta}'')$, maka estimator $\hat{\theta}''$ mempunyai variansi minimum diantara estimator linier tak bias yang lain. Hal ini dapat dikatakan $\hat{\theta}''$ merupakan BLUE.

## 4.5 Contoh Aplikasi

Dari pembahasan yang telah diuraikan, diterapkan pada salah satu bentuk model linier yaitu model regresi linier. Menurut Neter (1990: 160) bentuk model regresi linier dengan 2 variabel independent disajikan sebagai berikut,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i .$$

Dengan mengambil n observasi independen, $Y_1, \cdots, Y_i, \cdots, Y_n$ dan nilai-nilai $X_1, X_2$ ang bersesuaian, sehingga model lengkap dapat dinyatakan :

(4.26) $$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + \varepsilon_1 \\ &\vdots \\ Y_i &= \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i \\ &\vdots \\ Y_n &= \beta_0 + \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + \varepsilon_n \end{aligned}$$

Dengan notasi matriks, persamaan (4.26) dapat dinyatakan dengan

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_i \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{i1} & X_{i2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

(4.27) $$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Masing-masing kasus baik homoskedastik dan heteroskedastik akan diterapkan pada model regresi linier. Kesalahan random diasumsikan independen dan identik berdistribusi tidak diketahui.

Metode CRLB dan konsep statistik cukup dapat digunakan untuk mencari estimator tak bias dan mempunyai variansi minimum jika fungsi kepadatan probabilitas (fkp) diketahui. Namun karena kesalahan random diasumsikan distribusinya tidak diketahui, maka fkp tidak diketahui. Oleh karena itu, kedua metode tersebut tidak dapat digunakan, maka digunakan BLUE untuk mencari estimator yang tak bias dan mempunyai variansi minimum.

### 4.5.1 Kasus Homoskedastik

Berdasarkan persamaan (4.27) asumsi kesalahan random pada model regresi linier untuk kasus homoskedastik adalah :

1. $E(\varepsilon) = 0$
2. $Cov(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon^T) = \sigma^2 I$

Dari pembahasan diperoleh estimator $\hat{\beta}$ untuk model linier pada kasus homoskedastik adalah

(4.28) $$\hat{\beta}' = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Berdasarkan pada persamaan (4.28), maka dapat dihitung matriks sebagai berikut

$$
X^T X = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ X_{11} & \cdots & X_{i1} & \cdots & X_{n1} \\ X_{12} & \cdots & X_{i2} & \cdots & X_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{i1} & X_{i2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2}^{2} & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} X_{i2} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i2} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} X_{i1} & \sum_{1=1}^{n} X_{i2}^{2} \end{bmatrix}
$$

$$
(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2}^{2} & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} X_{i2} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i2} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} X_{i1} & \sum_{1=1}^{n} X_{i2}^{2} \end{bmatrix}^{-1}
$$



$$
X^T Y = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ X_{11} & \cdots & X_{i1} & \cdots & X_{n1} \\ X_{12} & \cdots & X_{i2} & \cdots & X_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_i \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i1} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i2} Y_i \end{bmatrix}
$$

Persamaan (4.28) dibuktikan apakah mempunyai sifat BLUE. Estimator tersebut diuji apakah memenuhi kriteria yang telah diberikan.

**1. Estimator Linier**

Estimator $\hat{\beta}' = (X^T X)^{-1} X^T Y$ merupakan estimator yang linier terhadap observasi Y. Dengan menghasilkan bahwa $L' = (X^T X)^{-1} X^T$, maka syarat linier untuk persamaan (4. 26) terpenuhi.

**2. Tak Bias**

Menurut lemma 4.1 syarat tak bias adalah ***L X = I***, sehingga $(X^T X)^{-1} X^T X = I$ atau

$E(\hat{\beta}') = ((X^T X)^{-1} X^T Y) = (X^T X)^{-1} X^T X \beta = \beta$ .

Jadi $\hat{\beta}'$ merupakan estimator tak bias dari $\boldsymbol{\beta}$.

**3. Terbaik**

Syarat terbaik yaitu estimator bersifat tak bias dan mempunyai variansi minimum. Sebelumnya akan dihitung variansi dari $\hat{\beta}'$. Variansi dari $\hat{\beta}'$ merupakan vektor diagonal dari matriks kovariansi $\hat{\beta}'$. Persamaan (4.18) memberikan kovariansi $\hat{\beta}'$, yaitu $\sigma^2 (X^T X)^{-1}$ .

$Cov(\hat{\beta}')$ dibuktikan mempunyai variansi minimum dari semua estimator linier tak bias yang lain. Misalkan $\hat{\beta}'$ estimator linier tak bias lain dari $\boldsymbol{\beta}$. Oleh karena estimator linier, maka dapat dimisalkan bentuknya sebagai

$$\hat{\beta}' = \left[(X^T X)^{-1} X^T + U\right] Y$$

Dengan ***U*** suatu matriks konstanta sebarang. Langkah selanjutnya mencari kovariansi dari $\hat{\beta}'$.

$$Cov(\hat{\beta}') = \left[(X^T X)^{-1} X^T + U\right] Cov(Y) \left[(X^T X)^{-1} X^T + U\right]^T$$
$$= \left[(X^T X)^{-1} X^T + U\right] \sigma^2 I \left[U^T + X(X^T X)^{-1}\right]$$

Karena syarat tak bias, maka $UX = 0 = X^T U^T$. Persamaan di atas menjadi

$$Cov(\hat{\beta}^*) = \sigma^2 \left[(X^T X)^{-1} + UU^T\right] = Cov(\hat{\beta}') + \sigma^2 UU^T$$

Matriks $UU^T$ adalah definit positif, karena semua diagonalnya berbentuk kuadrat. Jadi terbukti bahwa variansi dari setiap unsur dari vektor $\hat{\beta}^*$ selalu lebih besar atau paling kecil sama dengan variansi unsur $\hat{\beta}'$ yang sesuai.

Berdasarkan bukti di atas, ketiga kriteria telah dipenuhi, maka $\hat{\beta}' = (X^T X)^{-1} X^T Y$ dengan formulasi matriks yang diberikan merupakan estimator linier tak bias terbaik (BLUE).

### 4.5.2 Kasus Heteroskedastik

Berdasarkan persamaan (4.27) asumsi kesalahan random pada model regresi linier untuk kasus heteroskedastik adalah :

1. E (ε) = 0
2. $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 X_{i1}$ sehingga $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 C$ dengan

$$C = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_{21} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_{n1} \end{bmatrix}$$

Dari pembahasan diperoleh estimator $\hat{\beta}$ untuk model linier pada kasus heteroskedastik adalah

(4. 29) $$\hat{\beta}'' = (X^T C^{-1} X)^{-1} X^T C^{-1} Y$$

Berdasarkan pada persamaan (4.29), maka dapat dihitung matriks sebagai berikut

$$X^T C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ X_{11} & \cdots & X_{i1} & \cdots & X_{n1} \\ X_{12} & \cdots & X_{i2} & \cdots & X_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{X_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{X_{21}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{X_{n1}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{X_{11}} & \frac{1}{X_{21}} & \cdots & \frac{1}{X_{n1}} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{X_{12}}{X_{11}} & \frac{X_{22}}{X_{21}} & \cdots & \frac{X_{n2}}{X_{n1}} \end{bmatrix}$$

$$X^T C^{-1} X = \begin{bmatrix} \frac{1}{X_{11}} & \frac{1}{X_{21}} & \cdots & \frac{1}{X_{n1}} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{X_{12}}{X_{11}} & \frac{X_{22}}{X_{21}} & \cdots & \frac{X_{n2}}{X_{n1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{i1} & X_{i2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i1}} & n & \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i2}}{X_{i1}} \\ n & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{1=1}^{n} X_{i2} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i2}}{X_{i1}} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} & \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i2}^{2}}{X_{i1}} \end{bmatrix}$$

$$X^{T}C^{-1}Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{X_{11}} & \frac{1}{X_{21}} & \cdots & \frac{1}{X_{n1}} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{X_{12}}{X_{11}} & \frac{X_{22}}{X_{21}} & \cdots & \frac{X_{n2}}{X_{n1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_i \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{X_{i2}} \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i2}Y_i}{X_{i1}} \end{bmatrix}$$

Persamaan (4.27) akan diteliti apakah estimator tersebut mempunyai sifat BLUE. Langkah selanjutnya dilakukan pengujian apakah estimator tersebut memenuhi kriteria yang telah diberikan.

**1. Estimator Linier**

Estimator $\hat{\beta}'' = (X^{T}C^{-1}X)^{-1}X^{T}C^{-1}Y$ merupakan estimator yang linier terhadap observasi ***Y***. Misalkan bahwa $L'' = (X^{T}C^{-1}X)^{-1}X^{T}C^{-1}$, maka syarat linier untuk persamaan (4.27) terpenuhi.

**2. Tak Bias**

Menurut lemma (4.1) syarat tak bias adalah $\boldsymbol{L}\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$, sehingga $(X^{T}C^{-1}X)^{-1}X^{T}C^{-1}X = I$ atau

$$E(\hat{\beta}'') = E\left[(X^{T}C^{-1}X)^{-1}X^{T}C^{-1}Y\right] = (X^{T}X)^{-1}X^{T}E(Y)$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T X\beta = \beta$$

Jadi $\hat{\beta}''$ merupakan estimator tak bias dari $\beta$ .

**3. Terbaik**

Syarat terbaik yaitu estimator harus bersifat tak bias dan mempunyai variansi minimum. Pada pembahasan diperoleh bahwa variansi dari $\hat{\beta}''$ merupakan vektor diagonal dari matriks kovariansi $\hat{\beta}''$ . Persamaan (4.22) memberikan kovariansi $\hat{\beta}''$, yaitu $\sigma^2 (X^T C^{-1} X)^{-1}$ .

$Cov(\hat{\beta}'')$ dibuktikan mempunyai variansi minimum dari semua estimator linier tak bias yang lain. Misalkan $\hat{\beta}_1^*$ estimator linier tak bias lain dari $\beta$ . $\hat{\beta}_1^*$ merupakan estimator linier, maka dapat dimisalkan bentuknya sebagai $\hat{\beta}'' = [(X^T C^{-1} X)^{-1} X^T C^{-1} + V] Y$ dengan $V$ suatu matriks sebarang konstanta. Langkah selanjutnya mencari kivariansi dari $\hat{\beta}^*$ .

$$Cov(\hat{\beta}_1^*) = \left[(X^T C^{-1} X)^{-1} X^T C^{-1} + V\right] Cov(Y) \left[(X^T C^{-1} X)^{-1} X^T C^{-1} + V\right]^T$$

$$= [(X^T C^{-1} X)^{-1} X^T C^{-1} + V] \sigma^2 C \left[V^T + XC^{-1}(X^T C^{-1} X)^{-1}\right]$$

karena syarat tak bias, maka $VX = 0 = X^T V^T$ . Persamaan di atas menjadi

$$Cov(\hat{\beta}_1^*) = \sigma^2 \left[(X^T C^{-1} X)^{-1} + VCV^T\right] = Cov(\hat{\beta}'') + \sigma^2 VCV^T$$

Matriks $VCV^{T}$ adalah definit positif, karena semua diagonalnya berbentuk kuadrat. Jadi terbukti bahwa variansi dari setiap unsur dari vektor $\hat{\beta}_1^{*}$ selalu lebih besar dengan variansi unsur $\hat{\beta}''$ yang sesuai.

Berdasarkan bukti di atas, ketiga kriteria telah dipenuhi, maka $\hat{\beta}'' = (X^{T}C^{-1}X)^{-1}X^{T}C^{-1}Y$ dengan formulasi matriks yang diberikan merupakan estimator linier tak bias terbaik (BLUE).

## 4.6 Aplikasi Dengan Program SPSS

### 4.6.1 Kasus Homoskedastik

Tabel 1. Data Hubungan Antara Kekuatan Lengan, Daya Ledak Tungkai, dan Kelincahan Dengan Kecepatan Memanjat Tebing Pada Mahasiswa Pecinta Alam Perguruan Tinggi Se-Kota Semarang

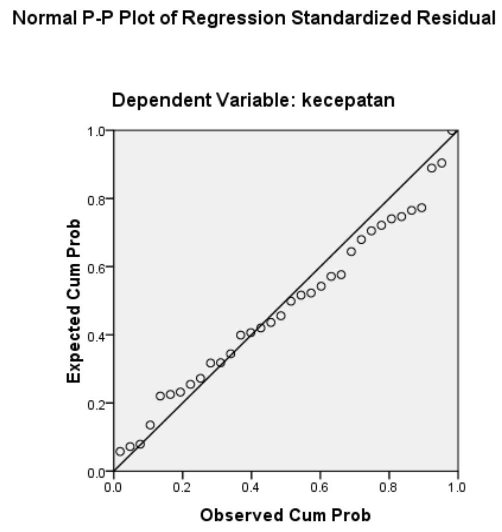
| Kekuatan Lengan X1 | Daya Ledak Tungkai X2 | Kelincahan X3 | Kecepatan Y |
|---|---|---|---|
| 30.00 | 57.00 | 25.32 | 21.15 |
| 29.00 | 54.00 | 23.40 | 20.19 |
| 28.50 | 50.00 | 24.23 | 25.75 |
| 30.50 | 69.00 | 25.31 | 24.36 |
| 36.00 | 53.00 | 24.61 | 19.72 |
| 20.50 | 37.00 | 26.69 | 51.61 |
| 30.00 | 57.00 | 25.98 | 18.98 |
| 27.00 | 41.00 | 24.28 | 30.56 |
| 28.00 | 59.00 | 23.51 | 24.68 |
| 27.50 | 49.00 | 25.30 | 25.75 |
| 23.00 | 43.00 | 26.63 | 27.81 |
| 26.50 | 49.50 | 24.50 | 26.32 |
| 25.00 | 37.00 | 24.40 | 36.44 |
| 24.50 | 35.00 | 30.24 | 41.27 |
| 29.00 | 50.00 | 23.31 | 22.19 |
| 28.00 | 42.00 | 26.22 | 27.22 |
| 21.00 | 37.00 | 26.32 | 29.45 |
| 31.00 | 50.00 | 25.49 | 27.76 |
| 25.00 | 49.00 | 26.29 | 29.63 |
| 27.50 | 41.00 | 24.46 | 31.25 |

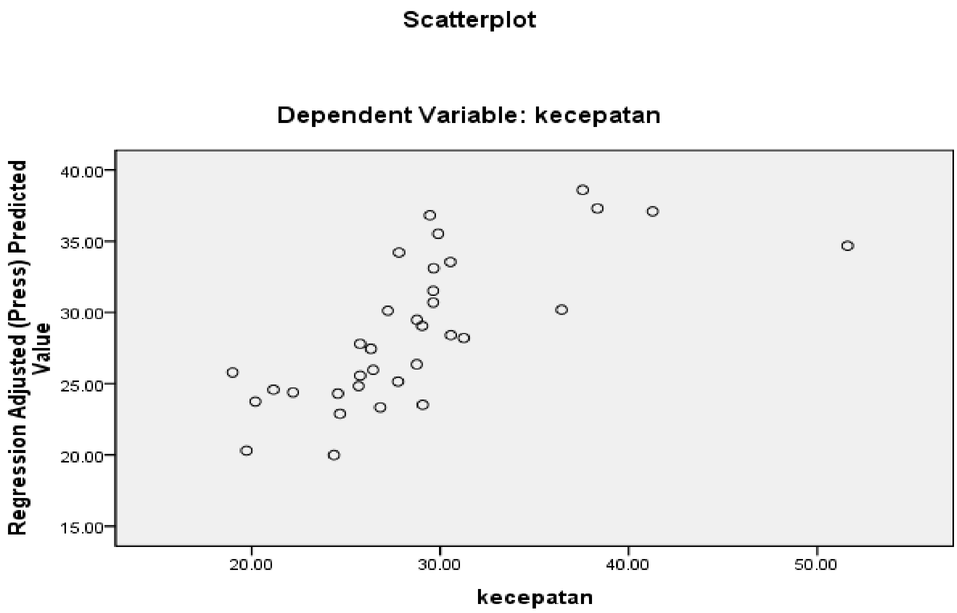
| | | | |
|---|---|---|---|
| 29.50 | 49.00 | 23.57 | 24.57 |
| 32.50 | 49.00 | 24.81 | 26.82 |
| 22.00 | 36.00 | 28.78 | 37.56 |
| 18.00 | 37.50 | 25.94 | 38.34 |
| 20.00 | 39.00 | 24.78 | 29.89 |
| 27.50 | 33.00 | 26.91 | 30.54 |
| 28.50 | 54.00 | 25.33 | 26.44 |
| 31.50 | 54.00 | 26.19 | 25.67 |
| 27.00 | 51.00 | 24.32 | 28.75 |
| 26.50 | 34.00 | 26.19 | 29.65 |
| 31.50 | 55.00 | 25.57 | 29.07 |
| 28.00 | 36.00 | 26.25 | 29.63 |
| 29.00 | 42.00 | 26.35 | 28.76 |
| 27.50 | 48.00 | 26.25 | 29.04 |

Sumber : Skripsi Akhmad Bahtiar, Jurusan: Ilmu Keolahragaan, 2006

Penyelesaian :

Dilakukan analisis regresi terhadap data pada Tabel 1 dengan kekuatan lengan, daya ledak tungkai,dan kelincahan memanjat tebing sebagai variabel bebas X dan kecepatan memanjat tebing sebagai variabel tak bebas Y.






Gambar 1.

Dari gambar 1 terlihat bahwa variabel dependen dan residual diperoleh diagram nilai error cukup menyebar disekitar nol, jadi terjadi homoskedastisitas.

### 4.6.2 Kasus Heteroskedastik

Tabel 2. Data Hasil Tes Kekuatan Genggaman, Power Lengan, Kelentukan Punggung, dan Ketepatan Servis

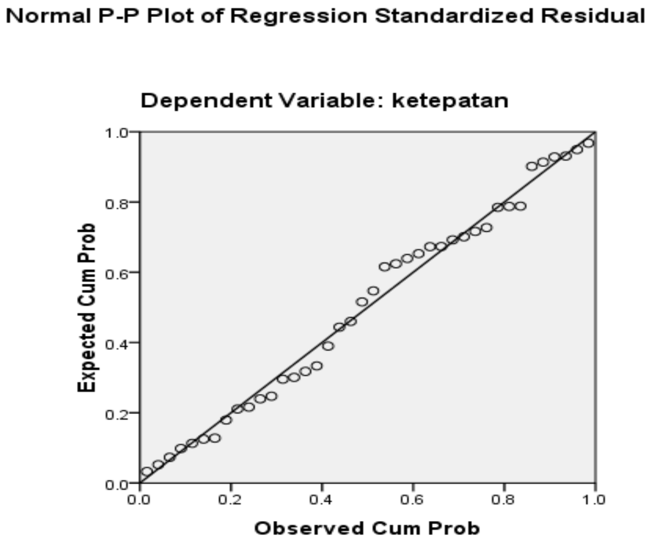
| Kekuatan Genggaman X1 | Power Lengan X2 | Kelentukan Punggung X3 | Ketepatan Servis Y |
|---|---|---|---|
| 40 | 7.92 | 17 | 23 |
| 50 | 11.10 | 21 | 22 |
| 45 | 10.85 | 28 | 29 |
| 45 | 10.85 | 22 | 20 |
| 42 | 10.20 | 18 | 20 |
| 34 | 7.55 | 11 | 19 |
| 40 | 6.77 | 6 | 21 |
| 36 | 6.30 | 18 | 13 |
| 43 | 8.30 | 16 | 13 |
| 46 | 7.65 | 16 | 20 |
| 37 | 9.15 | 16 | 23 |
| 38 | 6.90 | 19 | 15 |

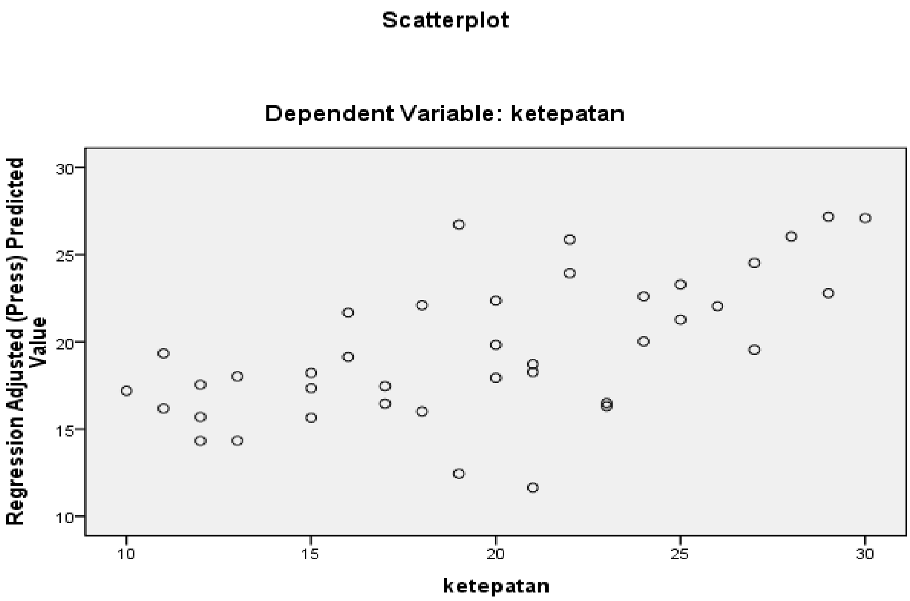
| | | | |
|---|---|---|---|
| 54 | 9.85 | 27 | 19 |
| 42 | 9.35 | 17 | 21 |
| 50 | 12.95 | 30 | 30 |
| 48 | 14.08 | 22 | 28 |
| 36 | 7.75 | 17 | 12 |
| 38 | 9.55 | 18 | 15 |
| 47 | 10.50 | 17 | 16 |
| 54 | 12.05 | 18 | 22 |
| 43 | 8.54 | 12 | 15 |
| 38 | 9.54 | 14 | 12 |
| 47 | 12.30 | 15 | 24 |
| 35 | 6.20 | 19 | 12 |
| 43 | 10.90 | 31 | 25 |
| 38 | 8.10 | 16 | 18 |
| 51 | 8.05 | 19 | 24 |
| 47 | 9.60 | 23 | 18 |
| 48 | 8.85 | 24 | 25 |
| 39 | 8.07 | 18 | 10 |
| 41 | 10.30 | 14 | 11 |
| 38 | 8.65 | 12 | 11 |
| 47 | 8.12 | 16 | 16 |
| 46 | 12.70 | 14 | 26 |
| 46 | 8.35 | 22 | 27 |
| 49 | 14.50 | 24 | 29 |
| 46 | 8.45 | 14 | 21 |
| 44 | 7.30 | 13 | 17 |
| 51 | 13.00 | 16 | 27 |
| 45 | 8.15 | 12 | 17 |

Sumber : Skripsi Umar Hasan, Jurusan: Ilmu Keolahragaan, 2006

Penyelesaian :

Dilakukan analisis regresi terhadap data pada Tabel 2 dengan kekuatan genggaman, power lengan, dan kelentukan punggung sebagai variabel bebas X dan ketepatan servis sebagai variabel tak bebas Y.




Gambar 2.

Dari gambar 2 terlihat bahwa variabel dependen dan residual diperoleh diagram nilai error tidak menyebar disekitar nol, jadi terjadi heteroskedastisitas.

# BAB 5

# PENUTUP

## 5. 1 Kesimpulan

Berdasarkan pada uraian yang telah diberikan, maka dapat diambil kesimpulan bahwa estimator linier dalam bentuk umum untuk model linier pada kasus homoskedastik dan heteroskedastik dapat dinyatakan sebagai vektor yang merupakan hasil kali dari matriks konstan dan vektor observasi atau $\hat{\theta} = LY$ . Dari metode kuadrat terkecil dan metode pengali Lagrange yang digunakan untuk mengestimasi parameter diperoleh suatu estimator dengan sifat tak bias dan mempunyai variansi minimum. BLUE untuk model linier pada kasus homoskedastik adalah $\hat{\theta}' = (X^T X)^{-1} X^T Y$ , sedangkan pada kasus heteroskedastik adalah $\hat{\theta}'' = (X^T C^{-1} X)^{-1} X^T C^{-1} Y$ .

## 5. 2 Saran

Jika pembaca tertarik lebih lanjut tentang BLUE, maka dapat dibahas tentang BLUE fusion.

# DAFTAR PUSTAKA

Anton, H and Rorres, C. 1994. *Elementary Linear Algebra*. Canada.

Bain, L and Engelhardt, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. California: Duxbury Press.

Djauhari, Maman. 1990. *Statistika Matematik*. Bandung: Penerbit Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

Johnson, A and Wichern, D. 1988. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. New Jersey: Prentice Hall.

Hasan, Umar. 2006. Hubungan Kekuatan Genggaman Power Lengan dan Kelentukan Punggung dengan Hasil Ketepatan Servis Tenis Lapangan Pada Mahasiswa Putra PKLO Semester V FIK UNNES Tahun 2004/2005.

Bahtiar, Ahmad. 2006. Hubungan antara Kekuatan Lengan, Daya Ledak Tungkai, dan Kelincahan dengan Kecepatan Memanjat Tebing pada Mahasiswa Pecinta Alam Pergguruan Tinggi Se-kota Semarang.

Myers, R. 1986. *Classical and Modern Regression With Applications*. Boston: Duxbury Press.

Myers, S. Dan S. Majluf. 1984. Corporate Financing and Invest. Journal of Financial Economics. June. 187-221.

Kay, S. 1993. *Fundamental of Statistical Signal Processing*. New Jersey: Prentice Hall.

Neter, J and Kutner, M. 1990. *Applied Linear Statistical Models*. Illnois: Richard D. Irwin.

Prihantoro. 2009. Estimasi Pengaruh Deviden Payout Ratio pada Perusahaan Publik di Indonesia. Fakultas Ekonomi Universitas Gunadarma. repository. gunadarma. ac. id : 8000/prihantoro 7-14.

Searle, S. 1971. *Linear Models*. New York: John Willey and Sons.

Seber, G. 1971. *Linear Regression Analysis*. Canada: John Willey and Sons.

Sembiring, R.K. 1995. *Analisis Regresi*. Bandung: Penerbit ITB.

Soemartojo, N. 1987. *Kalkulus Lanjutan*. Jakarta: Universitas Indonesia Press.

Wahyuningsih, S. 2007. Bias of Parameters Estimate of Binomial Expansion of Arps Equation. Jurnal Matematika dan Sains. www. Math. Itb.ac.id.

Lampiran 1.

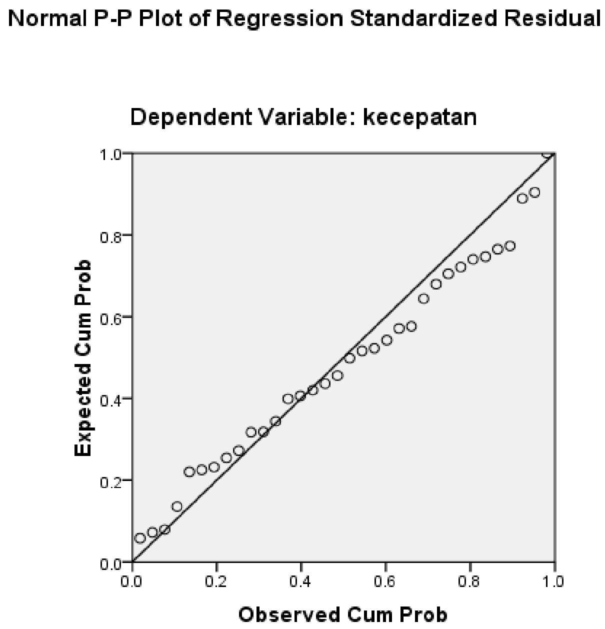
Data Hubungan Antara Kekuatan Lengan, Daya Ledak Tungkai, dan Kelincahan Dengan Kecepatan Memanjat Tebing Pada Mahasiswa Pecinta Alam Perguruan Tinggi Se-Kota Semarang

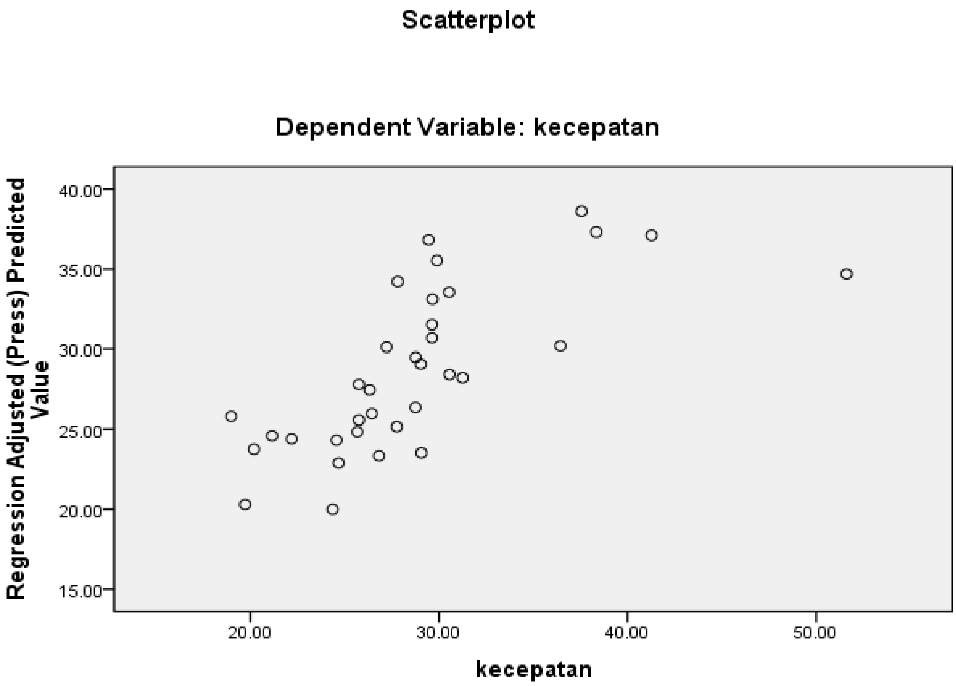
| Kekuatan Lengan X1 | Daya Ledak Tungkai X2 | Kelincahan X3 | Kecepatan Y |
|---|---|---|---|
| 30.00 | 57.00 | 25.32 | 21.15 |
| 29.00 | 54.00 | 23.40 | 20.19 |
| 28.50 | 50.00 | 24.23 | 25.75 |
| 30.50 | 69.00 | 25.31 | 24.36 |
| 36.00 | 53.00 | 24.61 | 19.72 |
| 20.50 | 37.00 | 26.69 | 51.61 |
| 30.00 | 57.00 | 25.98 | 18.98 |
| 27.00 | 41.00 | 24.28 | 30.56 |
| 28.00 | 59.00 | 23.51 | 24.68 |
| 27.50 | 49.00 | 25.30 | 25.75 |
| 23.00 | 43.00 | 26.63 | 27.81 |
| 26.50 | 49.50 | 24.50 | 26.32 |
| 25.00 | 37.00 | 24.40 | 36.44 |
| 24.50 | 35.00 | 30.24 | 41.27 |
| 29.00 | 50.00 | 23.31 | 22.19 |
| 28.00 | 42.00 | 26.22 | 27.22 |
| 21.00 | 37.00 | 26.32 | 29.45 |
| 31.00 | 50.00 | 25.49 | 27.76 |
| 25.00 | 49.00 | 26.29 | 29.63 |
| 27.50 | 41.00 | 24.46 | 31.25 |
| 29.50 | 49.00 | 23.57 | 24.57 |
| 32.50 | 49.00 | 24.81 | 26.82 |
| 22.00 | 36.00 | 28.78 | 37.56 |
| 18.00 | 37.50 | 25.94 | 38.34 |
| 20.00 | 39.00 | 24.78 | 29.89 |
| 27.50 | 33.00 | 26.91 | 30.54 |
| 28.50 | 54.00 | 25.33 | 26.44 |
| 31.50 | 54.00 | 26.19 | 25.67 |
| 27.00 | 51.00 | 24.32 | 28.75 |
| 26.50 | 34.00 | 26.19 | 29.65 |
| 31.50 | 55.00 | 25.57 | 29.07 |
| 28.00 | 36.00 | 26.25 | 29.63 |
| 29.00 | 42.00 | 26.35 | 28.76 |
| 27.50 | 48.00 | 26.25 | 29.04 |

Lampiran 2. Data Hasil Tes Kekuatan Genggaman, Power Lengan, Kelentukan Punggung, dan Ketepatan Servis

| Kekuatan Genggaman X1 | Power Lengan X2 | Kelentukan Punggung X3 | Ketepatan Servis Y |
|---|---|---|---|
| 40 | 7.92 | 17 | 23 |
| 50 | 11.10 | 21 | 22 |
| 45 | 10.85 | 28 | 29 |
| 45 | 10.85 | 22 | 20 |
| 42 | 10.20 | 18 | 20 |
| 34 | 7.55 | 11 | 19 |
| 40 | 6.77 | 6 | 21 |
| 36 | 6.30 | 18 | 13 |
| 43 | 8.30 | 16 | 13 |
| 46 | 7.65 | 16 | 20 |
| 37 | 9.15 | 16 | 23 |
| 38 | 6.90 | 19 | 15 |
| 54 | 9.85 | 27 | 19 |
| 42 | 9.35 | 17 | 21 |
| 50 | 12.95 | 30 | 30 |
| 48 | 14.08 | 22 | 28 |
| 36 | 7.75 | 17 | 12 |
| 38 | 9.55 | 18 | 15 |
| 47 | 10.50 | 17 | 16 |
| 54 | 12.05 | 18 | 22 |
| 43 | 8.54 | 12 | 15 |
| 38 | 9.54 | 14 | 12 |
| 47 | 12.30 | 15 | 24 |
| 35 | 6.20 | 19 | 12 |
| 43 | 10.90 | 31 | 25 |
| 38 | 8.10 | 16 | 18 |
| 51 | 8.05 | 19 | 24 |
| 47 | 9.60 | 23 | 18 |
| 48 | 8.85 | 24 | 25 |
| 39 | 8.07 | 18 | 10 |
| 41 | 10.30 | 14 | 11 |
| 38 | 8.65 | 12 | 11 |
| 47 | 8.12 | 16 | 16 |
| 46 | 12.70 | 14 | 26 |
| 46 | 8.35 | 22 | 27 |
| 49 | 14.50 | 24 | 29 |
| 46 | 8.45 | 14 | 21 |
| 44 | 7.30 | 13 | 17 |
| 51 | 13.00 | 16 | 27 |
| 45 | 8.15 | 12 | 17 |

Lampiran 3. Scatterplot untuk Kasus Homoskedastik

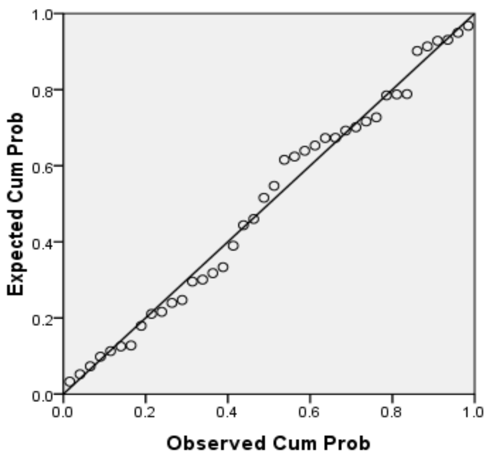


Lampiran 4. Scatterplot untuk Kasus Heteroskedastik

**Normal P-P Plot of Regression Standardized Residual**

**Dependent Variable: ketepatan**




**Scatterplot**

**Dependent Variable: ketepatan**