MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN FLU BURUNG DARI UNGGAS KE MANUSIA

skripsi
disajikan sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika

oleh

Siswanto

4150408047

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
2013

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini saya buat sendiri, dan apabila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan.

Semarang, 30 Januari 2013

Siswanto
NIM. 4150408047

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Model Matematika Penyebaran Flu Burung dari Unggas ke Manusia

disusun oleh

Siswanto

4150408047

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi Fakultas MIPA, Universitas Negeri Semarang pada:

Hari : Rabu

Tanggal : 13 Februari 2013

Panitia :

Ketua	Sekretaris
Prof. Dr. Wiyanto, M.Si NIP. 196310121988031001	Drs. Arief Agoestanto, M.Si NIP. 196807221993031005

Ketua Penguji

Muhammad Kharis, S.Si., M.Sc.
NIP. 198210122005011001

Anggota Penguji/ Pembimbing Utama	Anggota Penguji/ Pembimbing Pendamping
Drs. Supriyono, M.Si	Drs. Wuryanto, M.Si
NIP. 195210291980031002	NIP. 195302051983031003

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

- “Allah memberikan yang terbaik pada kita meskipun kita tidak minta”.
- “Jadilah pemenang untuk setiap tantangan”.
- “Bersedekahlah sebelum engkau disedekahi ”
- “IPK bukan penentu kesuksesan seseorang”
- “Put attention to detail”.

PERSEMBAHAN

Untuk Allah SWT yang merahmatiku,

Untuk bapak dan ibu yang tercinta yang selalu mendoakan saya,

Untuk kakak perempuanku yang tersayang.

Untuk eko , kusmanto, mas adiv, noorhadi, mas irpan, hartono, dan semua teman yang selama ini memberikan dukungan, dan semangat kepada saya selama menempuh kuliah di UNNES.

Untuk semua mahasiswa matematika angkatan 2008 yang tercinta.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Model Matematika Penyebaran Flu Burung dari Unggas ke Manusia”. Penulisan skripsi ini sebagai syarat mutlak yang harus dipenuhi oleh penulis untuk memperoleh gelar sarjana sains di Universitas Negeri Semarang.

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan karena adanya bimbingan, bantuan, dan dukungan dari berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Sudijono Sastroatmodjo, M.Si, Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Prof. Dr. Wiyanto, M.Si, Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si, Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
4. Drs. Supriyono, M.Si, Pembimbing Utama yang telah memberikan bimbingan, semangat, dan pengarahan.
5. Drs.Wuryanto, M.Si, Pembimbing Pendamping yang telah memberikan masukan dan arahan.
6. Bapak dan ibu tercinta yang senantiasa mendoakan serta memberikan dukungan berupa materi.
7. Eko Nur Pujiyanto memberikan bantuan, dukungan, semangat kepada penulis selama masa kuliah.

8. Sahabat-sahabat saya yang telah memberikan banyak motivasi, kritik, usulan yang menjadikan terselesaikannya penulisan skripsi ini.
9. Mahasiswa matematika angkatan 2008 yang telah memberikan dorongan dan motivasi.
10. Semua pihak yang membantu kelancaran skripsi saya baik secara langsung maupun tak langsung.

Penulis menyadari bahwa skripsi yang disusun dan disampaikan masih memiliki banyak kekurangan dan jauh dari sempurna. Untuk itu penulis menerima segala kritik dan saran yang sifatnya membangun untuk skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Semarang, Februari 2013

Penulis

ABSTRAK

Siswanto. 2012. *Model Matematika Penyebaran Flu Burung dari Unggas ke Manusia*. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang. Pembimbing Utama Drs. Supriyono, M.Si, dan Pembimbing Pendamping Drs. Wuryanto, M.Si.

Kata kunci: Analisis Kestabilan, Flu Burung, dan Titik Ekuilibrium.

Penyebab flu burung adalah virus influenza tipe A yang termasuk dalam famili *Orthomyxoviridae* dan mempunyai diameter 90- 120 nanometer. Virus influenza B dan C dapat diisolasi dari manusia dan sifatnya kurang patogen dibanding dengan virus influenza A. Gejala utama penyakit ini demam mendadak lemas, sesak nafas, pendarahan pada saluran pernafasan. Dalam tulisan ini akan dikaji model matematika untuk penyebaran penyakit flu burung dari populasi unggas ke populasi manusia, kemudian dilakukan analisa terhadap model yang dihasilkan untuk menentukan titik ekuilibrium dan kestabilan titik ekulibrium dari model matematika tersebut. Kemudian dari analisa tersebut dapat diketahui perilaku penyakit flu burung di masa yang akan datang. Metode yang digunakan untuk menganalisis masalah adalah dengan studi pustaka. Langkah-langkah yang dilakukan adalah menentukan masalah, merumuskan, studi pustaka, analisis pemecahan masalah, dan penarikan kesimpulan. Dari pembahasan diperoleh model penyebaran penyakit flu burung dari unggas ke manusia. Kemudian dari model tersebut diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Analisis yang dilakukan menghasilkan angka rasio reproduksi dasar $R_0 = \frac{\beta_0}{\mu_0}$. Dengan β_0: Tingkat efektifitas kontak infektif antara unggas terinfeksi dengan unggas rentan, μ_0 : Tingkat kematian individu dalam populasi unggas tanpa pengaruh flu burung,

Berdasarkan angka $R_0 = \frac{\beta_0}{\mu_0}$, Jika semakin kecil tingkat penyebaran flu burung dari unggas sakit ke unggas rentan, dan semakin besar umur unggas, maka $R_0 < 1$ atau tidak terjadi epidemi. Sebaliknya, Jika semakin besar tingkat penyebaran flu burung dari unggas sakit ke unggas rentan, dan semakin kecil umur unggas, maka nilai $R_0 > 1$ atau terjadi epidemi penyakit. Ini berarti bahwa penyakit tidak akan hilang saat $R_0 > 1$.

Selanjutnya, untuk mengilustrasi model tersebut maka dilakukan simulasi model dengan menggunakan program *Maple*.

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i

PERNYATAAN ii

PENGESAHAN..... iii

MOTTO DAN PERSEMBAHAN iv

KATA PENGANTAR v

ABSTRAK vii

DAFTAR ISI viii

DAFTAR GAMBAR xi

DAFTAR TABEL xii

DAFTAR LAMPIRAN xiii

BAB 1 PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Rumusan Masalah 3

1.3 Batasan Masalah 4

1.4 Tujuan Penelitian 4

1.5 Manfaat Penelitian 4

1.6 Sistematika Penyusunan 5

BAB 2 Landasan Teori 8

2.1 Persamaan Diferensial 8

2.2 Solusi Persamaan Diferensial 8

2.3 Persamaan Diferensial Linear dan tak Linear..... 9

2.4 Persamaan Diferensial Linear homogen dan tak Homogen 10

2.5 Order Persamaan Diferensial 10

2.5.1 Persamaan Diferensial Order Satu 11

2.5.1.1 Persamaan Diferensial Eksak 12

2.5.1.2 Faktor Integrasi 15

2.5.2 Persamaan Diferensial Order Dua..... 22

2.5.2.1 Persamaan Diferensial Linear Order Dua Homogen dengan Koefisien konstanta 22

2.5.2.2 Persamaan Diferensial Chauchy 26

2.5.2.3 Persamaan Diferensial Linear Order Dua Tak Homogen dan Metode Koefisien Tak Tentu..... 30

2.5.2.4 Metode Variasi Parameter 38

2.5.3 Persamaan Diferensial Order Tinggi..... 41

2.5.3.1 Persamaan Diferensial Linear Order Tinggi..... 41

2.5.3.2 Persamaan Diferensial Linear Tak Homogen Order Tinggi..... 47

2.6 Sistem Persamaan Diferensial 48

2.7 Model Epidemi SIR Klasik 50

2.8 Penyakit Flu Burung 51

2.8.1 Etimologi 51

2.8.2 Gejala dan tanda..... 52

2.8.3 Pengobatan dan Pencegahan..... 53

2.9 Titik Kesetimbangan (Ekuilibrium) 54

2.10 Nilai Eigen dan Vektor eigen 55

2.11 Kriteria Routh- Hurwitz 55

2.12 Maple..... 57

BAB 3 METODE PENELITIAN 59

3.1 Menentukan Masalah 59

3.2 Merumuskan Masalah 59

3.3 Studi Pustaka 59

3.4 Analisis dan Pemecahan Masalah..... 60

3.5 Penarikan Kesimpulan 54

BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN 61

4.1 Model Matematika untuk Penyebaran Penyakit Flu Burung dari Unggas ke Manusia 61

4.1.1 Fakta-fakta flu burung..... 61

4.1.2 Asumsi-Asumsi..... 62

4.1.3 Pembentukan Model Matematika 64

4.2 Titik Kesetimbangan..... 71

4.3 Analisis Kestabilan 79

4.4 Simulasi Model..... 90

BAB 5 PENUTUP 98

5.1 Kesimpulan..... 98

5.2 Saran 101

DAFTAR PUSTAKA 102

LAMPIRAN 104

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1 Diagram Transfer Model SIR Klasik 50

Gambar 4.1 Diagram Transfer Model Penyebaran Flu Burung 66

Gambar 4.2 Grafik $s(t)$ dan $i(t)$ terhadap t untuk titik ekuilibrium bebas penyakit 92

Gambar 4.3 Grafik $r(t)$ dan $i_0(t)$ terhadap t untuk titik ekuilibrium bebas penyakit 93

Gambar 4.4 Grafik $s(t)$ dan $i(t)$ terhadap t untuk titik ekuilibrium endemik 96

Gambar 4.5 Grafik $r(t)$ dan $i_0(t)$ terhadap t untuk titik ekuilibrium endemik 97

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 4.1 Daftar Variabel-variabel 64

Tabel 4.2 Daftar Parameter-parameter..... 65

Tabel 4.3 Nilai Parameter untuk Simulasi Model Bebas Penyakit..... 91

Tabel 4.4 Nilai Parameter untuk Simulasi Model Endemik..... 95

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1. Print Out Maple 13 untuk kasus bebas penyakit 105

Lampiran 2. Print Out Maple 13 untuk kasus Endemik..... 107

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Merebaknya penyebaran flu burung di muka bumi ini membuat kita perlu waspada terhadap ancaman penyakit yang mematikan itu. *Avian influenza* (*avian flu, bird flu, bird influenza*) atau di Indonesia lebih dikenal dengan nama flu burung adalah penyakit yang menyerang unggas yang disebabkan oleh virus influenza. Pada awalnya virus *avian influenza* tidak dapat menular. Namun, sifat virus yang labil dan mudah bermutasi menyebabkan virus itu dapat menginfeksi spesies lain. Virus *avian influenza* merupakan salah satu virus influenza tipe A. Diketahui bahwa ada 3 tipe virus influenza yakni virus influenza tipe A, B, dan C, tapi hanya virus influenza tipe A sajalah yang dapat menyebabkan terjadinya wabah (Aditama, 2004). *Avian influenza* tidak dapat diobati, pemberian antibiotik dan antibakteri hanya untuk mengobati infeksi sekunder oleh bakteri atau *mycoplasma*. Pengobatan sportif dengan multivitamin perlu juga dilakukan untuk proses rehabilitasi jaringan yang rusak (Tabbu, 2000).

Tindakan pencegahan lain yang dapat dilakukan meliputi:

1. Mencegah kontak antara unggas dengan burung liar atau unggas liar.
2. Pemusnahan unggas di daerah yang tertular flu burung.

3. Pengendalian limbah peternakan unggas
4. Pengisian kandang kembali atau peremajaan unggas baru
5. Pembersihan kandang secara rutin dengan desinfektan
6. Penempatan satu umur dalam peternakan unggas.
7. Penyemprotan dengan desinfektan terhadap kandang sebelum pemasukan unggas baru.
8. Penerapan *stamping out* atau pemusnahan menyeluruh di daerah tertular baru dalam menangani wabah HPAI (*Human Pathogenic Avian Influenza*) untuk menghindari resiko terjadinya penularan kepada manusia, karena bersifat zoonosis,
9. Peningkatan kesadaran masyarakat, serta monitoring dan evaluasi. (Rahardjo, 2004)

Model matematika mengenai penyebaran penyakit (model epidemi) adalah metode yang tepat untuk mempresentasikan pola penyebaran penyakit flu burung dari unggas ke manusia. Macam dari model epidemi sangat banyak diantaranya: MSEIR, MSEIRS, SIR, SIRS, SEI, SEIS, SEIR, SI, SIS, dst. (Hethcote, 2000). Dari sekian banyak model matematika, yang dipakai oleh Derouich dan Boutayeb (2008) dalam kasus flu burung adalah model epidemi $SIRS_0I_0$ yang kemudian disederhanakan menjadi model $siri_0$. Dari model yang telah terbentuk itu perlu untuk dianalisis kestabilan modelnya. Sebelumnya kita harus mencari terlebih dahulu titik-titik kesetimbangan model $siri_0$ kemudian ditentukan bilangan reproduksi dasar R_0, membentuk matriks jacobian, membentuk polinomial karakteristik yang memuat nilai

eigen. Dari nilai-nilai eigen itulah bisa diketahui stabil tidaknya masing-masing titik kesetimbang.

Untuk mempermudah penulis dalam mensimulasikan model penyebaran penyakit flu burung, dibutuhkan alat berupa *software* atau perangkat lunak yang nantinya bisa mempresentasikan model dengan baik secara visual. Salah satu *software* terkenal yang sering dipakai dalam pemodelan adalah Maple. Kelebihan dari maple adalah bahasa yang digunakan relatif lebih mudah dibanding *software* lain. Itulah alasan mengapa penulis memilih Maple untuk simulasi model penyebaran penyakit flu burung dari unggas ke manusia.

Berdasarkan latar belakang di atas, penulis tertarik membuat skripsi dengan judul **"MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN FLU BURUNG DARI UNGGAS KE MANUSIA**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang dikemukan di atas, maka yang akan menjadi rumusan permasalahannya adalah:

(1) Bagaimana model matematika untuk penyebaran penyakit flu burung dari unggas ke manusia ?

(2) Bagaimana proses dari analisis kestabilan dari model matematika yang disusun?

(3) Bagaimana penggunaan progam maple untuk membantu menyelesaikan model matematika tersebut?

1.3 Batasan Masalah

Pada penulisan ini, permasalahan terbatas pada penyebaran penyakit flu burung yang menyerang pada kelompok individu manusia dan unggas. Penularan penyakit terjadi apabila terjadi kontak langsung antara unggas sehat dengan unngas sakit dan manusia sehat dengan unggas sakit. Penyakit tidak ditularkan melalui kontak antara manusia sehat dengan manusia sakit.

1.4 Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penulisan skripsi ini meliputi:

(1) Mengetahui model matematika untuk penyebaran penyakit flu burung.

(2) Mengetahui analisis kestabilan dari model matematika yang disusun.

(3) Mengetahui penggunaan progam maple untuk membantu menyelesaikan model matematika tersebut.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari hasil penulisan ini adalah sebagai berikut.

(1) Bagi Penulis

Sebagai sarana untuk memperdalam pengetahuan mengenai pemodelan matematika khususnya mengenai flu burung sekaligus sebagai sarana untuk memenuhi syarat kelulusan program studi Matematika, S1 FMIPA Unnes.

(2) Bagi Mahasiswa Matematika

Sebagai referensi untuk menambah wawasan mengenai pemodelan matematika khususnya model penyebaran penyakit flu burung.

(3) Bagi Pembaca

Sebagai wacana dan pengetahuan tentang model epidemi dalam kasus penyebaran penyakit flu burung dari unggas.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulis skripsi disusun dalam tiga bagian utama, yaitu bagian awal, bagian inti, dan bagian akhir skripsi.

1.6.1 Bagian Awal

Dalam penulisan skripsi ini, bagian awal berisi halaman judul, pernyataan, pengesahan, motto dan persembahan, kata pengantar, abstrak, daftar isi, daftar gambar, daftar tabel, dan daftar lampiran.

1.6.2 Bagian Inti

Bagian inti dari penulisan skripsi ini adalah isi skripsi yang terdiri dari lima bab, yaitu:

BAB 1 : PENDAHULUAN

Berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, sistematika penulisan.

BAB 2 : LANDASAN TEORI

Berisi tentang tinjauan pustaka yang meliputi persamaan differensial, sistem persamaan differensial, model epidemi SIR klasik, penyakit flu burung, titik kesetimbangan (ekuilibrium), nilai eigen dan vaktor eigen, kriteria routh-hurwitz, maple.

BAB 3 : METODE PENELITIAN

Memuat prosedur atau langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi menentukan masalah, merumuskan masalah, studi pustaka analisis dan pemecahan masalah, penarikan simpulan.

BAB 4 : HASIL DAN PEMBAHASAN

Berisi tentang konstruksi model matematika untuk penyebaran penyakit flu burung , titik kesetimbangan, analisis kestabilan, hasil simulasi model dengan *software* Maple.

BAB 5 : PENUTUP

Berisi kesimpulan dari penulisan skripsi ini dan saran.

1.6.3 Bagian Akhir

Berisi daftar pustaka yang digunakan oleh penulis sebagai acuan penulisan yang didalamnya terdapat informasi tentang buku dan literatur lain yang digunakan dalam skripsi ini serta lampiran yang mendukung

BAB 2

LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih yang berisi nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. Selain itu, persamaan diferensial juga didefinisikan sebagai persamaan yang memuat satu atau beberapa turunan fungsi yang tak diketahui (Waluya, 2006: 1). Klasifikasi persamaan diferensial berdasarkan variabel bebas dibagi menjadi 2 . Kasus pertama dimana fungsi tergantung pada satu variabel bebas disebut persamaan diferensial biasa sedangkan kasus kedua dengan fungsi yang tergantung pada beberapa variabel bebas disebut persamaan diferensial parsial. (Waluya, 2006).dengan kata lain persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan dari variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas. Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang mengandung turunan parsial dari variabel tak bebas terhadap dua variabel bebas atau lebih.

Contoh :

1. $\frac{dx}{dt} + 5x = e^t$
2. $\frac{d^2x}{dt} - \frac{dx}{dt} + 6x = 0$
3. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$
4. $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$

5. $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial t}$

Untuk contoh 1, 2, 3 termasuk persamaan diferensial biasa sedangkan contoh 4 dan 5 merupakan persamaan diferensial parsial.

2.2 Solusi Persamaan Diferensial

Definisi 2.1

Diberikan persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{2.1}$$

Dimana f adalah fungsi dalam dua variabel yang diberikan. Sebarang fungsi terturunkan $x = \phi(t)$ yang memenuhi persamaan ini untuk semua t dalam suatu interval disebut solusi.(Waluya, 2006)

2.3 Persamaan Diferensial Linear dan Tak Linear

Klasifikasi persamaan diferensial dilihat dari bentuk fungsi atau pangkatnya juga dibedakan menjadi dua yaitu persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial non linear

Definisi 2.2

Diberikan persamaan diferensial biasa

$F\left(t, y, \dot{y}, ..., y^{(n)}\right) = 0$, F dikatakan linear dalam variabel $y, \dot{y}, ..., y^{(n)}$. Definisi serupa juga berlaku untuk persamaan diferensial parsial. Jadi secara umum persamaan diferensial biasa order *n* diberikan dengan

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_n(t)y = g(t)$$

Persamaan yang tidak dalam bentuk tersebut merupakan persamaan tak linear. (Waluya, 2006).

2.4 Persamaan Diferensial Linear Homogen dan Tak Homogen

Definisi 2.3

Persamaan diferensial linear (PDL)

$$\dot{x} + a(t)x = g(t) \qquad (2.2)$$

Dengan $a(t)$ dan $g(t)$ adalah fungsi dari waktu *t*. Pada saat $a(t) = a$ dengan a adalah konstanta, maka $a(t)$ disebut koefisen dari PDL. Jika $g(t) = 0$ maka persamaan (2.4) disebut PDL Homogen dan jika $g(t) \neq 0$, disebut PDL tak homogen. (Farlow,1994)

2.5 Order Persamaan Diferensial

Definisi 2.4

Order dari persamaan diferensial adalah derajat atau pangkat tertinggi dari turunan yang muncul dalam persamaan. Secara umum persamaan diferensial berorder *n* dapat dituliskan sebagai

$$F\left[t, u'(t), ..., u^{(n)}(t)\right] = 0$$

Persamaan di atas menyatakan relasi antara variabel bebas t dan nilai-nilai dari fungsi $u'(t), ..., u^{(n)}(t)$. (Waluya, 2006:4).

Untuk lebih kita tulis y untuk $u(t)$, y' untuk $u'(t)$ dan seterusnya. Jadi persamaan dapat ditulis sebagai

$$F\left[t, y', ..., y^{(n)}\right] = 0$$

Contoh:

1. $2y^{(4)} - 3y^{(2)} + y = -1$ (persamaan diferensial order empat)
2. $y^{(3)} + 6y^{(2)} + 3y = 5$ (persamaan diferensial order tiga)
3. $y^{(2)} + 2y = 4$ (persamaan diferensial order dua)

2.5.1 Persamaan Diferensial Biasa Order Satu

Diberikan bentuk persamaan diferensial biasa

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Dimana f adalah fungsi dalam dua variabel, sembarang fungsi terturunkan $x = \phi(t)$ yang memenuhi persamaan itu untuk semua t disebut solusi persamaan diferensial biasa order satu.

Contoh:

Tentukan solusi umum dari persamaan diferensial berikut ini:

1. $\dot{x} = 3t^3 - 6t + 5$
2. $\dot{x} = t^4 - \frac{1}{5}t^2 + 4t$

Penyelesaian:

1. Jelas $\dot{x} = 3t^3 - 6t + 5$

   $\Leftrightarrow x = \int \left(3t^3 - 6t + 5\right) dt$

   $\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}t^4 - \frac{6}{2}t^2 + 5t + c$

   $\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}t^4 - 3t^2 + 5t + c$

   Jadi solusi umum untuk $\dot{x} = 3t^3 - 6t + 5$ adalah $x = \frac{3}{4}t^4 - 3t^2 + 5t + c$

2. Jelas $\dot{x} = t^4 - \frac{1}{5}t^2 + 4t$

   $\Leftrightarrow x = \int \left(t^4 - \frac{1}{5}t^2 + 4t\right) dt$

   $\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{15}t^3 + 2t^2 + c$

   Jadi solusi untuk $\dot{x} = t^4 - \frac{1}{5}t^2 + 4t$ adalah $x = \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{15}t^3 + 2t^2 + c$

2.5.1.1 Persamaan differensial eksak

Definisi 2.5

Persamaan diferensial order satu berbentuk

$$M\left(x,t\right)dt + N\left(x,t\right)dx = 0, \tag{2.3}$$

Persamaan (2.3) disebut persamaan eksak apabila $\exists f\left(x,t\right) = C$ sehingga

$$df\left(x,t\right) = M\left(x,t\right)dt + N\left(x,t\right)dx \tag{2.4}$$

Dari definisi dan hubungan (2.3) terlihat bahwa $df\left(x,t\right) = 0$.

Dengan mengintegralkan ini diperoleh solusi umum persamaan diferensial (PD) yaitu $f(x,t)=C$. Selanjutnya dari definisi total, terlihat bahwa

$$\frac{df}{dt}=M(x,t) \text{ dan } \frac{df}{dx}=N(x,t) \tag{2.5}$$

Jika M dan N memiliki turunan parsial yang kontinu dibidang tx maka

$$\frac{dM}{dx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \text{ dan } \frac{dN}{dx}=\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \tag{2.6}$$

Jika f memiliki turunan parsial kedua yang kontinu maka

$$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t} \tag{2.7}$$

Syarat (2.7) persamaan diferensial (2.3) dikatakan eksak. Juga syarat cukup , sehingga hubungan (2.3) dapat dipergunakan untuk menentukan $f(x,t)=C$ yang merupakan solusi umum untuk PD (2.3).(Supriyono, 2012: 14)

Contoh:

Tinjau PD $\left(t+\frac{2}{x}\right)dx+xdt=0$!

Penyelesaian:

Disini $\frac{\partial M}{\partial x}=1, \frac{\partial N}{\partial t}=1$ sehingga $\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t}$

Maka PD $\left(t+\frac{2}{x}\right)dx+xdt=0$ merupakan PD eksak.

Untuk menentukan solusi umum akan dicari $f(x,t)=C$ sehingga hubungan $\frac{df}{dt}=M(x,t)$ dan $\frac{df}{dx}=N(x,t)$ berlaku.

Solusi untuk $\left(t+\frac{2}{x}\right)dx+xdt=0$ adalah

$\frac{df}{dt}=M(x,t)=x$ sehingga

Jelas $f(x,t)=\int xdt+g'(x)$

$\Leftrightarrow f(x,t)=xt+g(x)$

Disisi lain $\frac{df}{dt}=M(x,t)=x$ sehingga

Jelas $\frac{df}{dx}=N(x,t)=t+\frac{2}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{df}{dx}=x+g'(x)$

Diperoleh $g'(x)=\frac{2}{x}$

Jelas $\int g'(x)dt=\int \frac{2}{x}dt$

$\Leftrightarrow g(x)=2\ln x+C$

Jadi solusi umum $f(x,t)=xt+2\ln x=C$.

2.5.1.2 Faktor Integrasi

Definisi 2.6

Misalkan PD : $M(x,t)dt + N(x,t)dx = 0$ tidak eksak.

Fungsi $\mu(x,t)$ sehingga $\mu(x,t)M(x,t)dt + \mu(x,t)N(x,t)dx = 0$ PD eksak, $\mu(x,t)$ disebut faktor integrasi.

Perhatikan langkah untuk menentukan faktor integrasi pada

$M(x,t)dt + N(x,t)dx = 0$ yang tidak eksak menjadi eksak yaitu

$\mu(x,t)M(x,t)dt + \mu(x,t)N(x,t)dx = 0$.

Karena $\mu(x,t)M(x,t)dt + \mu(x,t)N(x,t)dx = 0$ PD eksak diperoleh

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t} \text{ atau } \mu\frac{\partial M}{\partial x} + M\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\frac{\partial N}{\partial t} + N\frac{\partial \mu}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow N\frac{\partial \mu}{\partial t} - M\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial \mu}{\partial t} - M\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

diperoleh fakta,

$$\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial \mu}{\partial t} - M\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \qquad (*)$$

sekarang kita tinjau beberapa kasus.

a) Misalkan $\mu = \mu(t)$, maka $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$

Jika $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$, maka $\dfrac{1}{\mu}\left(N\dfrac{\partial \mu}{\partial t} - M\dfrac{\partial \mu}{\partial x} \right) = \dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial N}{\partial t}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial \mu}{\partial t} - 0 \right) = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu} N\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{N} \qquad (**)$$

Bila $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{N}$ suatu fungsi dari *t*, sehingga

$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{N} = g(t)$, maka (**) $\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial t} = g(t)$ atau $\dfrac{\partial \mu}{\mu} = g(t)\,dt$

Sehingga $\displaystyle\int \frac{\partial \mu}{\mu} = \int g(t)\,dt$

$$\Leftrightarrow \ln \mu = \int g(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \mu = e^{\int g(t)dt}$$

Diperoleh faktor integrasi $\mu = e^{\int g(t)dt}$

Contoh:

Perhatikan PD: $xdt + \left(xt^2 - t \right)dx = 0$ tidak eksak.

Dari PD di atas kita dapatkan $M(x,t) = x \Leftrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial x} = 1$

dan $N(x,t) = \left(xt^2 - t\right) \Leftrightarrow \dfrac{\partial N}{\partial t} = 2xt - 1$ sehingga

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{1-(2xt-1)}{xt^2 - t}$$

$$= \frac{2-2xt}{xt^2 - t}$$

$$= \frac{2-2xt}{t(xt-1)}$$

$$= \frac{-2(xt-1)}{t(xt-1)}$$

$$= \frac{-2}{t}$$

$$= g(t)$$

Jadi faktor integrasi pada PD di atas adalah $\mu = e^{\int g(t)dt} = e^{\int \frac{-2}{t}dt} = e^{-2\ln|t|} = e^{\ln|t|^{-2}}$

Sehingga $\mu = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$.

b) Misalkan $\mu = \mu(x)$, maka $\dfrac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ sehingga

$$\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial \mu}{\partial t} - M\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu}\left(0 - M\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-M\dfrac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{-M} \partial x$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{\partial \mu}{\mu} = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{-M} \partial x$$

Jika fungsi $\frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{-M} = g(x)$ suatu fungsi dari *x*, maka

Jelas $\int \frac{\partial \mu}{\mu} = \int g(x) \partial x$

$$\Leftrightarrow \ln \mu = \int g(x) \partial x$$

$$\Leftrightarrow \mu = e^{\int g(x) \partial x}$$

Jadi $\mu = e^{\int g(x) \partial x}$ adalah faktor integrasi untuk kasus $\mu = \mu(x)$.

Contoh:

Dipunyai PD $2xtdt + \left(x^2 - 3t^2\right)dx = 0$.

Tentukan faktor integrasinya!

Penyelesaian:

Jelas $M(x,t) = 2xt$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 2t$$

$$N(x,t) = \left(x^2 - 3t^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial N}{\partial t} = -6t$$

Sehingga $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial N}{\partial t}}{-M}=\dfrac{2t+6t}{-2xt}$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial N}{\partial t}}{-M}=\frac{8t}{-2xt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial N}{\partial t}}{-M}=-\frac{4}{x}=g\left(x\right)$$

Jadi faktor integrasi untuk PD di atas adalah $\mu=e^{\int -\frac{4}{x}dx}=e^{\ln x^{-4}}=\dfrac{1}{x^4}$

c) Misalkan $\mu=\mu\left(x,t\right)$

Dengan substitusi $y=xt$ diperoleh

$\dfrac{\partial\mu}{\partial t}=\dfrac{\partial\mu}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial t}=x\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\Leftrightarrow\dfrac{\partial\mu}{\partial t}=x\dfrac{\partial\mu}{\partial y}$ dan

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial x}=t\frac{\partial\mu}{\partial y}\Leftrightarrow\frac{\partial\mu}{\partial x}=t\frac{\partial\mu}{\partial y}$$

Sehingga $\dfrac{1}{\mu}\left(N\dfrac{\partial\mu}{\partial t}-M\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial N}{\partial t}$ diperoleh

$$\frac{1}{\mu}\left(xN\frac{\partial\mu}{\partial y}-tM\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(xN-tM\right)=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial N}{\partial t}}{xN-tM}$$

Disimpulkan jika $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial N}{\partial t}}{xN-tM}=h\left(y\right), y=xt,$ maka faktor integrasi adalah $\mu=e^{\ln h(y)dy}$.

Contoh:

Dipunyai PD $xdt+\left(t+3t^3x^4dx\right)=0$.

Tentukan faktor integrasinya!

Penyelesaian:

Jelas $M\left(x,t\right)=x$

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial x}=1$

$N\left(x,t\right)=\left(t+3t^3x^4\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial N}{\partial t}=1+9t^2x^4$

Sehingga $\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial N}{\partial t}=1-\left(1+9t^2x^4\right)$

$=9t^2x^4$

$xN-tM=xt+3t^3x^5-xt$

$=3t^3x^5$

Jadi $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial N}{\partial t}}{xN-tM}=\dfrac{9t^2x^4}{3t^3x^5}$

$=\dfrac{-3}{xt}$

$=\dfrac{-3}{y}=g\left(y\right)$

Jadi faktor integrasi PD di atas adalah

$$\mu = e^{\int g(y)dy} = e^{\int -\frac{3}{y}dy} = e^{-3\ln|y|} = e^{\ln y^{-3}} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$$

Jadi $\mu = \frac{1}{y^3} = \frac{1}{(xt)^3}$

Berikut ini contoh penerapan faktor integrasi untuk mencari solusi umum PD order satu.

Contoh:

Tentukan solusi dari persamaan diferensial biasa linear order satu dari

$$\frac{dx}{dt} - x = t$$

Penyelesaian:

Dari $\frac{dx}{dt} - x = t$ diperoleh $g(t) = -1$ dan $q(t) = t$

Diperoleh faktor integralnya $e^{\int p(t)dt} = e^{\int(-1)dt} = e^{-t}$

Selanjutnya kedua ruas kita kalikan dengan e^{-t}

diperoleh $e^{-t}\left(\frac{dx}{dt} - x\right) = e^{-t}t$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-t}\frac{dx}{dt} - e^{-t}x\right) = e^{-t}t$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\left[e^{-t}x\right]}{dt} = e^{-t}t$$

$$\Leftrightarrow e^{-t}x = \int e^{-t}tdt$$

$$\Leftrightarrow e^{-t}x = -e^{-t}t + \int e^{-t}dt$$

$$\Leftrightarrow e^{-t}x = -e^{-t}t - e^{-t} + c$$

$$\Leftrightarrow x = -t - 1 + \frac{c}{e^{-t}}$$

$$\Leftrightarrow x = -t - 1 + c_1$$

Jadi dari $\frac{dx}{dt} - x = t$ diperoleh solusi $x = -t - 1 + c_1$ dengan c_1 suatu kontanta.

2.5.2 Persamaan Diferensial Biasa Order Dua

2.5.2.1 Persamaan Diferensial Linear Order Dua Homogen dengan Koefisien Konstanta

Perhatikan PD linear order dua homogen dengan koefisien konstanta yang berbentuk $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ (2.8)

Dimana b dan c merupakan konstanta.

Dengan demikian persamaan diferensial order dua homogen bisa ditulis

Ambil $x = e^{\lambda t}$, dan λ agar $x = e^{\lambda t}$ solusi PD (2.8).

Dari $x = e^{\lambda t}$ diperoleh $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$ dan $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Disubstitusikan ke PD (2.8) menjadi

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + b\lambda + c\right) = 0$$

Karena $e^{\lambda t} \neq 0 \ \forall x$ dan λ maka

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \qquad (2.9)$$

Persamaan (2.9) disebut persamaan karakteristik dari (2.8) , dan akar-akar (2.9) disebut akar-akar karakteristik (2.8)

Ada 3 kemungkinan akar- akar dari $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

a) Akar real berbeda

Bila λ_1 dan λ_2 adalah dua akar real yang berbeda, maka $e^{\lambda_1 t}$ dan $e^{\lambda_2 t}$ adalah solusi yang bebas linear. Jadi, solusi umum PD (2.8) adalah $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$. Syarat akar real berbeda adalah $D > 0$ dengan kata lain $b^2 - 4c > 0$.

Contoh:

Tentukan solusi umum dari PD $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$!

Penyelesaian:

Dari dari PD $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$ diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - 3)(\lambda_2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 3 \text{ atau } \lambda_2 = 2$$

Jadi solusi umum PD di atas adalah $X(t) = Ae^{3t} + Be^{2t}$

b) Dua akar sama

Misalkan kedua akar dari persamaan karakteristik (2.9) bernilai sama yakni $\lambda_1 = \lambda_2 = k$ maka $X_1(t) = e^{kt}$ adalah salah satu solusi PD (2.8) . Bila $X_2 = w(t)\,X_1(t)$ adalah solusi lainnya, maka

$w(t)=\int \frac{1}{\left(e^{kt}\right)^2} e^{-\int p(t)dt} dt$ karena $\lambda_1=\lambda_2=k$ adalah akar-akar pesamaan $a\lambda^2+b\lambda+c(t)=0$ maka $\lambda_1+\lambda_2=2k=-p$. Diperoleh

Jelas $w(t)=\int \frac{1}{\left(e^{kt}\right)^2} e^{-\int p(t)dt} dt$

$$\Leftrightarrow w(t)=\int \frac{1}{\left(e^{kt}\right)^2} e^{-\int 2kdt} dt$$

$$\Leftrightarrow w(t)=\int \frac{e^{2kt}}{\left(e^{2kt}\right)} dt$$

$$\Leftrightarrow w(t)=\int 1.dt=t$$

Jadi $w(t)=t$ sehingga didapatkan $X_2=tX_1(t)=te^{kt}$.

Jadi solusi umum untuk (2.8) adalah $X=Ae^{kt}+Bte^{kt}$.

Syarat akar-akar real sama adalah $D=0$ dengan kata lain $b^2-4c=0$.

Contoh:

Tentukan solusi umum PD $\ddot{x}-4\dot{x}+4x=0$!

Penyelesaian:

Dari PD $\ddot{x}-4\dot{x}+4x=0$ diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2-4\lambda+4=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - 2)(\lambda_2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \vee \lambda_2 = 2$$

Jadi solusi umum PD $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$ adalah $X = Ae^{2t} + Bte^{2t}$

c) Akar kompleks

Misalkan salah satu akar (2.9) adalah $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ maka akar yang lainnya adalah $\lambda_2 = \alpha - \beta i$. Karena , maka $X_1 = e^{\lambda_1 t} = e^{(\alpha+\beta i)t}$ dan $X_2 = e^{\lambda_2 t} = e^{(\alpha-\beta i)t}$

Jadi solusi umum untuk PD (2.9) adalah $X = C_1 e^{(\alpha+\beta i)t} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)t}$.

$$\Leftrightarrow X = C_1 e^{\alpha t} e^{\beta t i} + C_2 e^{\alpha t} e^{\beta t i}$$
$$\Leftrightarrow X = C_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + C_2 e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$$

$$\Leftrightarrow X = C_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + C_1 e^{\alpha t} i\sin\beta t + C_2 e^{\alpha t}\cos\beta t - C_2 e^{\alpha t} i\sin\beta t$$

$$\Leftrightarrow X = C_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + C_2 e^{\alpha t}\cos\beta t + C_1 e^{\alpha t} i\sin\beta t - C_2 e^{\alpha t} i\sin\beta t$$

$$\Leftrightarrow X = (C_1 + C_2)e^{\alpha t}\cos\beta t + (C_1 i - C_2 i)e^{\alpha t}\sin\beta t$$

Ambil $A = C_1 + C_2$ dan $B = C_1 i - C_2 i$ sehingga didapatkan

$X = Ae^{\alpha t}\cos\beta t + Be^{\alpha t}\sin\beta t$.

Syarat akar-akar kompleks berbeda adalah $D < 0$ dengan kata lain $b^2 - 4c < 0$.

Contoh:

Tentukan solusi umum PD $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$!

Penyelesaian:

Didapatkan persamaan karakteristik dari PD di atas yaitu $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ dengan akar-akarnya $\lambda_1 = 1 - i$ dan $\lambda_2 = 1 + i$ sehingga $\alpha = 1$ dan $\beta = 1$.

Jadi solusi umum PD di atas adalah $X = Ae^t \cos t + Be^t \sin t$.

2.5.2.2 *Persamaan Diferensial Chauchy*

PD linear order dua homogen yang berbentuk

$$t^2\ddot{x} + mt\dot{x} + nx = 0 \qquad (2.10)$$

Dimana m dan n di konstanta-konstanta disebut PD Chauchy atau PD Euler order dua.misalkan $x = t^\lambda, t \neq 0$ dan kita akan mencari λ agar $x = t^\lambda$ solusi PD (2.10).

Dari $x = t^\lambda$ diperoleh $\dot{x} = \lambda t^{\lambda-1}$ dan $\ddot{x} = \lambda(\lambda - 1)t^{\lambda-2}$, kemudian disubstitusikan ke (2.10), diperoleh

Jelas $t^2\left(\lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2}\right) + mt\left(\lambda t^{\lambda-1}\right) + n\left(t^\lambda\right) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)t^\lambda + m\lambda t^\lambda + nt^\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \left(\lambda^2 - \lambda + m\lambda + n\right)t^\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \left(\lambda^2 + \lambda(m-1) + n\right)t^\lambda = 0$

Karena $t \neq 0$ diperoleh

$$\lambda^2 + \lambda(m-1) + n = 0 \qquad (2.11)$$

Disebut persamaan pembantu PD (2.10).

Ada 3 kemungkinan akar-akar persamaan $t^2\ddot{x} + mt\dot{x} + nx = 0$

a) Akar Real Berbeda

Bila λ_1 dan λ_2 adalah dua akar real yang berbeda, maka $x_2 = t^{\lambda_1}$ dan $x_2 = t^{\lambda_2}$ adalah solusi yang bebas linear. Jadi solusi umum PD adalah $x = At^{\lambda_1} + Bt^{\lambda_2}$

Contoh:

Tentukan solusi PD $t^2\ddot{x} + 4t\dot{x} - 4x = 0$!

Penyelesaian:

Dari $t^2\ddot{x} + 4t\dot{x} - 4x = 0$ diperoleh $m = 4$ dan $n = -4$, sehingga diperoleh persamaan pembantu $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = -4$ atau $\lambda_2 = 1$

Jadi, solusi PD $t^2\ddot{x} + 4t\dot{x} - 4x = 0$ adalah $x = At^{-4} + Bt = \dfrac{A}{t^4} + Bt$

b) Dua akar sama

Misalkan kedua akar dari persamaan karakteristik (2.10) bernilai sama yakni $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$

Jelas $x_1 = t^\alpha$ adalah salah satu solusi PD (2.10), solusi lainnya $x_2 = w(t)\,X_1(t)$ dapat ditentukan dengan mencari $w(t)$, yaitu

$$w(t) = \int \frac{1}{\left(t^\alpha\right)^2} e^{-\int \frac{mt}{t^2} dt}$$

$$= \int \frac{1}{\left(t^\alpha\right)^2} e^{-\int \frac{m}{t} dt}$$

$$= \int \frac{1}{t^{2\alpha}} e^{-m \ln|t|}$$

$$= \int \frac{1}{t^{2\alpha}} e^{\ln t^{-m}}$$

$$= \int \frac{1}{t^{2\alpha}} t^{-m}$$

$$= \int t^{-m-2\alpha} dt$$

Karena $\lambda_1 = \lambda_2$ maka $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha = -(m-1) = -m+1$.

Jadi, $-m - 2\alpha = -m - (-m+1) = -1$ dan $w(t) = \int t^{-1} dt = \ln|t|$.

Sehingga $x_2 = \ln|t|.t^\alpha = t^\alpha \ln|t|$.

Jadi solusi PD di atas adalah $x = At^\alpha + Bt^\alpha \ln|t|$ atau $x = t^\alpha\left(A + B\ln|t|\right), t \neq 0$.

Khusus untuk $t > 0 \Leftrightarrow |t| = t$, maka solusi umum adalah $x = t^\alpha\left(A + B\ln|t|\right), t > 0$.

Contoh:

Tentukan solusi umum PD $t^2\ddot{x} - t\dot{x} + x = 0, t > 0$!

Penyelesaian:

Dari PD di atas diperoleh $m = -1$ dan $n = 1$ sehingga diperoleh persamaan pembantu $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1$ atau $\lambda_2 = 1$

Jadi solusi umum PD di atas adalah $x = t\left(A + B\ln|t|\right), t > 0$.

a) Akar kompleks

Misalkan salah satu akar (2.9) adalah $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ maka akar yang lainnya adalah $\lambda_2 = \alpha - \beta i$. Karena , maka $x_1 = t^{\lambda_1 t} = t^{\alpha+\beta i}$ dan $x_2 = t^{\lambda_2} = t^{\alpha-\beta i}$

Jadi solusi umum untuk PD (2.9) adalah $x = C_1 t^{\alpha+\beta i} + C_2 t^{\alpha-\beta i}$.

Disisi lain $t^{\beta i} = e^{\ln t^{\beta i}} = e^{\beta i \ln t} = \cos(\beta \ln t) + i\sin(\beta \ln t)$ dan

$t^{-\beta i} = \cos(\beta \ln t) - i\sin(\beta \ln t)$.

Diperoleh $x = C_1 t^{\alpha+\beta i} + C_2 t^{\alpha-\beta i}$

$$= C_1 t^{\alpha}\left(\cos(\beta \ln t) + i\sin(\beta \ln t)\right) + C_2 t^{\alpha}\left(\cos(\beta \ln t) - i\sin(\beta \ln t)\right)$$

$$= t^{\alpha}\left[C_1\cos(\beta\ln t) + C_1 i\sin(\beta\ln t) + C_2\cos(\beta\ln t) - C_2 i\sin(\beta\ln t)\right]$$

$$= t^{\alpha}\left[(C_1 + C_2)\cos(\beta\ln t) + (C_1 i - C_2 i)\sin(\beta\ln t)\right]$$

Ambil $A = (C_1 + C_2)$ dan $B = (C_1 i - C_2 i)$.

Jadi $x = t^{\alpha}\left[A\cos(\beta\ln t) + B\sin(\beta\ln t)\right]$.

Contoh:

Tentukan solusi umum PD $t^2\ddot{x} - t\dot{x} + 2x = 0, t > 0$!

Penyelesaian;

Dari PD di atas diperoleh persamaan pembantu $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (\lambda - (1-i))(\lambda - (1+i)) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 1 - i \vee \lambda = 1 + i$$

Sehingga $\alpha \pm \beta i = 1 \pm i$

Jadi solusi umum PD di atas adalah $x = t\left[A\cos(\ln t) + B\sin(\ln t)\right]$

2.5.2.3 ***Persamaan Diferensial Linear Order Dua Tak Homogen dan Metode Koefisien Tak Tentu***

Tinjau persamaan diferensial linear order dua tak homogen

$$a(t)\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t) = g(t) \qquad (2.12)$$

Dimana $g(t) \neq 0$. Solusi umum untuk persamaan diferensial order dua tak homogen dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi sebagai berikut,

$\phi(t) = x_h(t) + x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + x(t)$, dimana $x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ adalah solusi yang berbasis pada persamaan diferensial order dua homogen sedangkan $x(t)$ merupakan penyelesaian khusus dari persamaan diferensial order dua tak homogen. (waluya, 2006). Untuk mencari $x(t)$ kita harus menebaknya sesuai dengan permasalahan. Berikut ini aturan tebakan yang bisa dipakai untuk mencari solusi khusus $x(t)$:

1. Jika $g(t) = e^{\alpha t}$, maka fungsi tebakannya $x_p(t) = Ae^{\alpha t}$.
2. Jika $g(t) = \sin(\alpha t)$ atau $g(t) = \cos(\alpha t)$ maka fungsi tebakan

   $x_p(t) = A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t)$
3. Jika $g(t) = a_n t^n + ... + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ maka $x_p(t) = A_n t^n + ... + A_2 t^2 + A_1 t + A_0$
4. Jika $g(t) = t^2 e^{\alpha t}$ maka $x_p(t) = \left(A_2 t^2 + A_1 t + A_0\right) e^{\alpha t}$
5. Jika $g(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ atau $g(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ maka fungsi tebakan

   $x_p(t) = e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)$
6. Jika $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, $x_1(t)$ tebakan untuk $g_1(t)$ dan $x_2(t)$ tebakan untuk $g_2(t)$, maka $x_p(t) = x_1(t) + x_2(t)$

(Waluya, 2006: 58)

Contoh:

Tentukan solusi persamaan diferensial order dua linear homogen dan tak homogen berikut ini:

1. $\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=t^2+4$

2. $\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}-3x=5e^t$

3. $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-6x=(t+3)e^t$

4. $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=2\sin 3x$

Penyelesaian :

1. PD homogen dari $\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=t^2+4$ adalah $\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=0$

   sehingga diperoleh persamaan karakteristik

   $\lambda^2+3\lambda+2=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda+2)=0$.

   Diperoleh akar-akar karakteristik $\lambda_1=-1$ dan $\lambda_2=-2$

   Jadi solusi homogennya $x_h(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}$. Solusi x_p diandaikan $x_p=A_0+A_1t+A_2t^2$ dan dengan menurunkan x_p diperoleh $\dot{x}_p=A_1+2A_2t$ dan $\ddot{x}_p=2A_2$. Kemudian disubstitusikan pada PD $\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=t^2+4$ diperoleh $2A_2+3(A_1+2A_2t)+2(A_0+A_1t+A_2t^2)=t^2+4$

$$\Leftrightarrow 2A_2 + 3A_1 + 6A_2t + 2A_0 + 2A_1t + 2A_2t^2 = t^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow \left(2A_0 + 3A_1 + 2A_2\right) + \left(6A_2 + 2A_1\right)t + 2A_2t^2 = t^2 + 4$$

Didapatkan $2A_0 + 3A_1 + 2A_2 = 4$, $6A_2 + 2A_1 = 0$ dan $2A_2 = 1$.

$$2A_2 = 1 \Leftrightarrow A_2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
&6A_2 + 2A_1 = 0 \\
&\Leftrightarrow 3 + 2A_1 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2A_1 = -3 \\
&\Leftrightarrow A_1 = \frac{-3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2A_0 + 3A_1 + 2A_2 = 4 \\
&\Leftrightarrow 2A_0 - \frac{9}{2} + 1 = 4 \\
&\Leftrightarrow 2A_0 = 4 - 1 + \frac{9}{2} \\
&\Leftrightarrow 2A_0 = \frac{15}{2} \\
&\Leftrightarrow A_0 = \frac{15}{4}
\end{aligned}$$

Jadi $x_p = \frac{15}{4} - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^2$.

Jadi solusi umum PD $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = t^2 + 4$ adalah

$$\phi(t) = x_h + x_p = Ae^{-t} + Be^{-2t} + \frac{15}{4} - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^2$$

2. Dari persamaan diferensial homogen $\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}-3x=0$ dapat diperoleh:

   Persamaan karakteristik $\lambda^2+2\lambda-3=0 \Leftrightarrow (\lambda+3)(\lambda-1)=0$

   Diperoleh akar-akarnya $\lambda_1=-3$ dan $\lambda_2=1$.

   Jadi solusi homogen untuk $\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}-3x=0$ adalah $x_h(t)=Ae^{-3t}+Be^{t}$.

   Selanjutnya tinggal kita cari solusi khusus dari $\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}-3x=5e^{3t}$.

   Misalkan $x_p(t)=Ae^{3t}$ sehingga diperoleh turunan pertama dan kedua yang masing-masing adalah $\dot{x}_p=3Ae^{3t}$ dan $\ddot{x}_p=9Ae^{3t}$.

   Kemudian kita substitusikan ke soal menjadi $\ddot{x}_p+2\dot{x}_p-3x_p=5e^{3t}$

   $\Leftrightarrow 9Ae^{3t}+2\left(3Ae^{3t}\right)-3\left(Ae^{3t}\right)=5e^{3t}$

   $\Leftrightarrow 9Ae^{3t}+6Ae^{3t}-3Ae^{3t}=5e^{3t}$

   $\Leftrightarrow 12Ae^{3t}=5e^{3t}$

   $\Leftrightarrow 12A=5$

   $\Leftrightarrow A=\frac{5}{12}$

   Sehingga diperoleh solusi khusus $x_p=\frac{5}{12}e^{3t}$

Jadi solusi umum untuk $\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}-3x=5e^t$ adalah

$$\phi(t)=x_h(t)+x(t)=Ae^{-3t}+Be^t+\frac{5}{12}e^{3t}.$$

3. PD homogen dari $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-6x=(t+3)e^t$ adalah $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-6x=0$

Diperoleh persamaan karakteristik $\lambda^2+\lambda-6=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+3)=0$, Diperoleh akar-akarnya $\lambda_1=2$ dan $\lambda_2=-3$. Jadi solusi homogen untuk $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-6x=0$ adalah $x_h(t)=Ae^{2t}+Be^{-3t}$. Untuk solusi khusus dari $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-6x=(t+3)e^t$, kita andaikan $x_p=(A_0+A_1t)e^t$.

Dengan menurunkan x_p diperoleh

$$\dot{x}_p=(A_0+A_1t)e^t+A_1e^t=(A_0+A_1+A_1t)e^t \text{ dan}$$

$$\ddot{x}_p=(A_0+A_1+A_1t)e^t+A_1e^t=(A_0+2A_1+A_1t)e^t$$

Kemudian substitusikan x_p, $\dot{x}_p$ dan $\ddot{x}_p$ pada PD $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-6x=(t+3)e^t$

Didapatkan $(A_0+2A_1+A_1t)e^t+(A_0+A_1+A_1t)e^t-6\left((A_0+A_1t)e^t\right)=(t+3)e^t$

$$\Leftrightarrow (-4A_0+3A_1-4A_1t)e^t=(t+3)e^t$$

Diperoleh $-4A_0 + 3A_1 = 3$ dan $-4A_1 = 1 \Leftrightarrow A_1 = -\frac{1}{4}$, sehingga

$$-4A_0 - 3\left(\frac{1}{4}\right) = 3$$

$$\Leftrightarrow -4A_0 = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\Leftrightarrow A_0 = -\frac{15}{16}$$

Jadi $x_p = \left(-\frac{15}{16} - \frac{1}{4}t\right)e^t$

Jadi solusi umum PD $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 6x = (t+3)e^t$ adalah

$$\phi(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t} + \left(-\frac{15}{16} - \frac{1}{4}t\right)e^t.$$

4. Pertama kita cari dulu bentuk homogen dari $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 2\sin 3t$ yaitu $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$. Dari $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$ diperoleh persamaan karakteristik $\lambda^2 + 4 = 0$. Dari perasamaan karakteristik $\lambda^2 + 4 = 0$ diperoleh $\lambda^2 = -4$.

   Sehingga diperoleh akar-akar karakteristik

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{(-1)} = \pm 2i$$

   Dengan demikian diperoleh solusi homogen yaitu $x_h = Ae^{2it} + Be^{-2it}$.

Disisi lain $Ae^{2it} = A(\cos 2t + i\sin 2t)$ sedangkan $Be^{-2it} = B(\cos 2t - i\sin 2t)$

Sehingga $x_h = A(\cos 2t + i\sin 2t) + B(\cos 2t - i\sin 2t)$

$\Leftrightarrow x_h = A\cos 2t + Ai\sin 2t + B\cos 2t - Bi\sin 2t$

$\Leftrightarrow x_h = A\cos 2t + B\cos 2t + Ai\sin 2t - Bi\sin 2t$

$\Leftrightarrow x_h = (A+B)\cos 2t + (Ai - Bi)\sin 2t$

Misalkan $c_1 = A + B$ dan $c_2 = Ai - Bi$ sehingga diperoleh solusi homogen $x_h(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$. Selanjutnya untuk mencari solusi khususnya kita tebak solusi khususnya dengan $x_p(t) = A\cos 3t + B\sin 3t$, sehingga didapatkan turunan kedua $\ddot{x}_p(t) = -9A\cos 3t - 9B\sin 3t$

Selanjutnya kita substitusikan menjadi $\ddot{x}_p + 4x_p = 2\sin 3t$

$\Leftrightarrow (-9A\cos 3t - 9B\sin 3t) + 4(A\cos 3t + B\sin 3t) = 2\sin 3t$

$\Leftrightarrow -9A\cos 3t + 4A\cos 3t - 9B\sin 3t + 4B\sin 3t = 2\sin 3t$

$\Leftrightarrow -5A\cos 3t - 5B\sin 3t = 2\sin 3t$

Diperoleh $-5A = 0 \Leftrightarrow A = 0$ dan $-5B = 2 \Leftrightarrow B = -\frac{2}{5}$

Jadi solusi khusus untuk $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 2\sin 3t$ adalah $X(t) = -\frac{2}{5}\sin 3t$.

Jadi solusi umum untuk $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 2\sin 3t$ adalah

$$\phi(t) = x_h(t) + x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - \frac{2}{5}\sin 3t .$$

2.5.2.4 Metode Variasi Parameter

Sebelumnya kita melihat bahwa solusi khusus PD linear order dua tak homogen dengan koefisien konstanta dapat ditentukan apabila $g(t)$ memiliki bentuk khusus yaitu $g(t) = p(t)$ atau $g(t) = p(t)e^{\alpha t}$ atau bentuk lain yaitu $g(t) = e^{\alpha t}\left(p(t)\cos\beta t + q(t)\sin\beta t\right)$ dimana $p(t)$ polinomial berderajat n dan maksimum dari derajat $p(t)$ dan $q(t)$ adalah n.

Sekarang sebagaimana menentukan solusi khusus dan solusi umum PD

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = g(t) \qquad (2.12)$$

Dimana $a(t), b(t)$ fungsi-fungsi dari *t* dan bentuk $g(t)$ sebarang.

Bila solusi komplementer dapat ditentukan, maka solusi khusus PD (2.12) Dapat dicari dengan menggunakan metode variasi parameter. Caranya seperti berikut:

Misalkan solusi umum PD(2.12) adalah

$$x_k = Ax_1 + Bx_2 \qquad (2.13)$$

Sekarang kita akan menentukan fungsi-fungsi $A(t)$, dan $B(t)$ sehingga

$$x_k = A(t)x_1 + B(t)x_2 \tag{2.14}$$

Solusi khusus PD (2.12) dari (2.14) diperoleh

$$\dot{x} = \dot{A}(t)x_1(t) + A(t)\dot{x}_1(t) + \dot{B}(t)x_2(t) + B(t)\dot{x}_2(t)$$

$$= \dot{A}(t)x_1(t) + \dot{B}(t)x_2(t) + A(t)\dot{x}_1(t) + B(t)\dot{x}_2(t)$$

Kita memiliki fungsi-fungsi $A(t)$, dan $B(t)$ sehingga

$$\dot{A}(t)x_1(t) + \dot{B}(t)x_2(t) = 0 \tag{2.15}$$

Maka

$$\dot{x} = A(t)\dot{x}_1(t) + B(t)\dot{x}_2(t) \tag{2.16}$$

Dari (2.16) diperoleh

$$\ddot{x} = \dot{A}(t)\dot{x}_1(t) + A(t)\ddot{x}_1(t) + \dot{B}(t)\dot{x}_2(t) + B(t)\ddot{x}_2(t) \tag{2.17}$$

Dengan substitusi (2.14), (2.16), dan (2.17) dalam (2.12) diperoleh

$$A(t)\left(\ddot{x}_1(t) + a(t)\dot{x}_1(t) + b(t)x_1\right) + B(t)\left(\ddot{x}_2(t) + a(t)\dot{x}_2(t) + b(t)x_2\right)$$

$$+\dot{A}(t)\dot{x}_1(t) + \dot{B}(t)\dot{x}_2(t) = g(t) \tag{2.18}$$

Karena x_1 dan x_2 solusi PD (2.12) adalah nol, sehingga (2.18) menjadi

$$\dot{A}(t)\dot{x}_1(t) + \dot{B}(t)\dot{x}_2(t) = g(t) \tag{2.19}$$

Dengan menggabungkan (2.15) dan (2.19) diperoleh dua persamaan dalam

$\dot{A}(t)\dot{B}(t)$

$$\begin{cases} \dot{A}(t)x_1(t)+\dot{B}(t)x_2(t)=0 \\ \dot{A}(t)\dot{x}_1(t)+\dot{B}(t)\dot{x}_2(t)=g(t) \end{cases}$$

Kedua persamaan ini memberikan solusi

$$\dot{A}(t)=\frac{-x_2(t)g(t)}{W(x_1,x_2)} \text{ dan } \dot{B}(t)=\frac{x_1(t)g(t)}{W(x_1,x_2)} \qquad (2.20)$$

Dimana $W(x_1,x_2)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}$ dengan $W(x_1,x_2)\neq 0$ karena x_1 dan x_2 bebas linear.

Dari (2.20) diperoleh

$$A(t)=\int\frac{-x_2(t)g(t)}{W(x_1,x_2)}\,dt \text{ dan } B(t)=\int\frac{x_1(t)g(t)}{W(x_1,x_2)}dt \qquad (2.21)$$

Jadi $x=-x_1(t)\int\frac{-x_2(t)g(t)}{W(x_1,x_2)}dt+x_2(t)\int\frac{-x_1(t)g(t)}{W(x_1,x_2)}dt$ (2.22)

adalah solusi khusus PD (2.12).

Contoh:

Tentukan suatu solusi khusus PD $\ddot{x}+x=\csc t$!

Penyelesaian:

Solusi komplementer untuk PD di atas yaitu $x=A\sin t+B\cos t$.

Jadi $x_1 = \sin t$, $x_2 = \cos t$ dan $W\left(x_1, x_2\right) = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -\sin^2 t - \cos^2 t = -1$

Dari rumus (2.21) diperoleh

$$A(t) = \int \frac{-x_2(t)\,g(t)}{W\left(x_1, x_2\right)} = -\int \frac{\cos t.\csc t}{-1}\,dt = \int \frac{\cos t}{\sin t}\,dt = \ln\left|\sin t\right| \text{ dan}$$

$$B(t) = \int \frac{x_1(t)\,g(t)}{W\left(x_1, x_2\right)}dt = \int \frac{\sin t.\csc t}{-1}dt = -\int dt = -t$$

Jadi $x = A\sin t + B\cos t = \sin t \ln\left|\sin t\right| - t\cos t$ adalah solusi khusus dari PD $\ddot{x} + x = \csc t$.

2.5.3 Persamaan Diferensial Order Tinggi

2.5.3.1 *Persamaan Diferensial Linear Order Tinggi*

Persamaan diferensial order satu dan dua telah dibahas dalam pembahasan sebelumnya , sekarang saatnya membahas PD order tinggi.

PD n dengan $n \geq 3$ biasa disebut PD order tinggi adalah PD. PD n yang berbentuk

$$f\left(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n)}\right) = g(t) \qquad (2.23)$$

disebut PD order *n*.

Bila f linear dalam $x, \dot{x}, ..., x^{(n)}$, maka PD (2.23) disebut PD linear order *n* dan apabila $g(t) = 0$ disebut PD linear order *n* homogen.

Jadi secara umum bentuk PD linear order *n* adalah

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + ... + a_n(t)x = g(t) \qquad (2.24)$$

Contoh:

Tentukan apakah PD order tinggi dibawah ini, linear atau tidak! Beri alasan!

1. $tx^{(3)} + (t^2+1)tx^{(3)} - x^2 = 3$
2. $tx^{(3)} + x^{(2)}\sin t - t^2 x = t^3 + 1$

Penyelesaian:

1. $tx^{(3)} + (t^2+1)tx^{(3)} - x^2 = 3$ merupakan PD order 3 tetapi tak linear karena munculnya x^2 pada PD tersebut.
2. $tx^{(3)} + x^{(2)}\sin t - t^2 x = t^3 + 1$ merupakan order 3 linear dengan $a_0(t) = t$, $a_1(t) = \sin t$, $a_2(t) = 0$ dan $a_3(t) = t^2$.

Contoh:

Tentukan apakah PD dibawah ini homogen atau tidak! Beri alasan!

1. $x^{(4)} + tx^{(3)} - x\sin t = t^2, t \neq 0$
2. $t^2 x^{(3)} + (t+1)x^{(3)} - xt = 0$

Penyelesaian:

1. $x^{(4)} + tx^{(3)} - x\sin t = t^2, t \neq 0$ adalah PD linear order 4 tak homogen karena $g(t) \neq 0$

2. $t^2x^{(3)}+(t+1)x^{(3)}-xt=0$ adalah PD order 3 homogen karena $g(t)=0$

PD (2.24) disebut PD linear order n dengan koefisien konstanta apabila $a_i(t), i=0,1,...,n$ adalah konstanta. PD (2.24) disebut PD linear order n homogen dengan koefisien konstanta apabila $a_i(t), i=0,1,...,n$ adalah konstanta dan $g(t)=0$, dan disebut PD linear order n tal homogen dengan koefisien konstanta apabila semua $a_i(t), i=0,1,...,n$ adalah konstanta dan $g(t)\neq 0$.

Contoh:

1. $x^{(5)}+3x^{(2)}-4x=0$ adalah PD linear homogen order 5 dengan koefisien konstanta.
2. $x^{(4)}-3x^{(3)}+8x=x^2-1, x\neq\pm 1$ adalah PD linear tak homogen order 4 dengan koefisien konstanta, karena $x^2-1\neq 0$
3. $t^2x^{(3)}-x^{(2)}+6x=x^2+4, x\neq\pm 2$ adalah bukan PD linear dengan konstanta karena t^2 bukan merupakan konstanta.

Tinjau PD linear order n homogen

$$a_0(t)x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+...+a_n(t)x=0 \qquad (2.25)$$

Didefinisikan operator L sebagai berikut:

$$L=a_0(t)\frac{d^n}{dx^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+...+a_n(t) \qquad (2.26)$$

Operator L adalah operator diferensial, oleh sebab itu PD (2.25) dapat ditulis sebagai $L(x)=0$.

Definisi 2.7

Fungsi $x = x(t)$ disebut solusi PD (2.25) pada selang I apabila $L(x) = 0$ pada selang I. Bila $x = x_1(t)$ dan $x = x_2(t)$ merupakan solusi PD (2.25) pada selang I maka dapat diperlihatkan $L(\alpha x_1 + \beta x_2) = 0, \forall \alpha, \beta \in R$.(Supriyono,2012:72)

Solusi umum untuk PD (2.25) adalah solusi yang memuat konstanta-konstanta sehingga setiap solusi dapat diperoleh dari solusi umum dengan mengambil konstanta-konstanta yang sesuai . Jika $x_1, x_2, ..., x_n$ adalah *n* solusi PD (2.25) yang bebas linear pada selang I, maka $x = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n$ adalah solusi umum PD (2.25) pada selang I, sehingga untuk mentukan solusi umum PD (2.25) cukup dicari *n* buah solusi yang bebas linear.

Contoh:

Tentukan solusi umum PD $x^{(3)} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2 = 0$!

Penyelesaian:

$x^{(3)} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2 = 0$ memiliki tiga solusi masing-masing $x_1 = e^t$, $x_2 = e^{-t}$,

$x_3 = e^{2t}$ yang bebas linear karena $W(x_1, x_2, x_3) = -6e^t \neq 0, \forall t$ sehingga diperoleh solusi $x = Ae^t + Be^{-t} + Ce^{2t}$. Jadi solusi untuk PD $x^{(3)} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2 = 0$ adalah $x = Ae^t + Be^{-t} + Ce^{2t}$.

Menentukan solusi PD linear dengan koefisien konstanta

Tinjau PD linear order *n*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_n x = 0 \qquad (2.27)$$

Dimana $a_1, ..., a_n$ merupakan konstanta.

Akan ditentukan λ sehingga $x = e^{\lambda t}$ solusi PD (2.27). Dengan substitusi $x = e^{\lambda t}$ dalam PD (2.27) diperoleh $\left(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n\right) e^{\lambda t} = 0$ karena $e^{\lambda t} \neq 0$ maka

$$\left(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n\right) = 0 \qquad (2.28)$$

Persamaan (2.28) disebut persamaan karakteristik PD (2.27).

Contoh:

Tentukan solusi umum PD $x^{(5)} + 3x^{(2)} - 4x = 0$!

Penyelesaian:

PD $x^{(5)} + 3x^{(2)} - 4x = 0$ mempunyai persamaan karakteristik

$\lambda^5 + 3\lambda^2 - 4 = \left(\lambda^2 - 1\right)\left(\lambda + 1\right)\left(\lambda^2 + 4\right) = 0$. Akar-akar karakteristiknya $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 2i$, $\lambda_5 = -2i$.

Bentuk umum solusi PD (2.27) tergantung dari macam-macam akar karakteristik dan dapat diperinci sebagai berikut.

a) Akar-akar real yang berlainan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ memberikan fungsi-fungsi $x_1 = e^{\lambda_1 t}, x_2 = e^{\lambda_2 t}, x_3 = e^{\lambda_3 t}, x_4 = e^{\lambda_4 t}$ sebagai solusi-solusi diantara solusi basis.

b) Akar real $\lambda = \alpha$ yang kelipatan k memberikan solusi $x_1 = e^{\alpha t}, x_2 = te^{\alpha t}, ...,$ $x_k = t^{k-1}e^{\alpha t}$ yang bebas linear sebagai anggota-anggota solusi basis.

c) Akar kompleks $\lambda = \alpha \pm \beta i$ yang berkelipatan k memberikan solusi-solusi

$x_{11} = e^{\alpha t}\cos\beta t$, $x_{12} = e^{\alpha t}\sin\beta t$, $x_{21} = te^{\alpha t}\cos\beta t, ..., x_{k1} = t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$

dan $x_{k2} = t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$.

Contoh:

1. PD $x^{(4)} - 3x^{(3)} + 3x - \dot{x} = 0$ mempunyai persamaan karakteristik $\lambda^4 - \lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = \lambda\left(\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda - 1\right) = 0$. Akar-akar karakteristiknya adalah $\lambda = 0, \lambda = 1$berkelipatan 3. Akar $\lambda = 0$ memberikan solusi $x_1 = e^{0t} = 1$dan akar $\lambda = 1$berkelipatan 3 memberikan solusi $x_2 = e^t, x_3 = te^t, x_4 = t^2e^t$. Jadi solusi umum PD tersebut adalah $x = C_1 + C_2e^t + C_3te^t + C_4t^2e^t$.

2. PD $x^{(3)} + 4\dot{x} = 0$ memiliki persamaan karakteristik $\lambda^3 + 4\lambda = \lambda\left(\lambda^2 + 4\right) = 0$dengan akar-akar karakteristik $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2i$ dan $\lambda_2 = -2i$. Akar $\lambda_1 = 0$ memberikan solusi $x_1 = e^{0t} = 1$dan akar-akar $\lambda_2 = 2i$ dan $\lambda_2 = -2i$ masing-masing memberikan solusi $x_2 = \cos 2t, x_3 = \sin 2t$. Jadi solusi umum PD tersebut adalah $x = C_1 + C_2\cos 2t + C_3\sin 2t$

2.5.3.*2 Persamaan Diferensial Linear Tak Homogen Order Tinggi*

Tinjau persamaan diferensial linear order n tak homogen

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + ... + a_n(t)x = g(t) \qquad (2.29)$$

Dan persamaan diferensial linear order n homogen

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + ... + a_n(t)x = 0 \qquad (2.30)$$

Kaitan antara solusi umum persamaan diferensial tak homogen (2.29)

dengan solusi umum PD homogen (2.30) pada order n serupa dengan PD order dua.

Contoh:

Tentukan solusi umum PD di bawah $x^{(4)} - x^{(3)} = t^2$!

Penyelesaian:

PD $x^{(4)} - x^{(3)} = t^2$ memiliki persamaan karakteristik homogen

$\lambda^4 - \lambda^3 = \lambda^2(\lambda - 1) = 0$. Akar-akar persamaan adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 0$ berkelipatan 3. Jadi solusi homogennya $x_h = C_1e^t + C_2 + C_3t + C_4t^2$. Karena $\lambda = 0$ berkelipatan 3 dan $g(t) = t^2$ polinom berderajat 2 maka solusi khusus diandaikan $x_p = A_0t^3 + A_1t^4 + A_2t^5$, sehingga turunannya diperoleh

$\dot{x}_p = 3A_0t^2 + 4A_1t^3 + 5A_2t^4$, $\ddot{x}_p = 6A_0t + 12A_1t^2 + 20A_2t^3$, $x_p^{(3)} = 6A_0 + 24A_1t + 60A_2t^2$

, $x_p^{(4)} = 24A_1 + 120A_2t$

Disubstikan turunannya dengan PD tersebut diperoleh

Jelas $x_p^{(4)} - x_p^{(3)} = 24A_1 + 120A_2t - \left(6A_0 + 24A_1t + 60A_2t^2\right) = t^2$

$\Leftrightarrow \left(24A_1 - 6A_0\right) + \left(120A_2 - 24A_1\right)t - 60A_2t^2 = t^2$

Didapatkan $-60A_2 = 1 \Leftrightarrow A_2 = -\frac{1}{60}$,

$120A_2 = 24A_1 \Leftrightarrow -2 = 24A_1 \Leftrightarrow A_1 = -\frac{1}{12}$,dan

$24A_1 - 6A_0 = 0 \Leftrightarrow -2 = 6A_0 \Leftrightarrow A_0 = -\frac{1}{3}$

Diperoleh solusi khusus $x_p = -\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{12} - \frac{t^5}{60}$ dan solusi umum $x = C_1e^t + C_2 + C_3t + C_4t^2 - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{12} - \frac{t^5}{60}$.

Jadi solusi umum PD di atas adalah $x = C_1e^t + C_2 + C_3t + C_4t^2 - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{12} - \frac{t^5}{60}$.

2.6 Sistem Persamaan Diferensial

Definisi 2.8

Misalkan suatu sistem diferensial biasa dinyatakan dalam bentuk sebagai

$$\dot{x} = Ax + b; x(0) = x_0, x \in R^n \qquad (2.31)$$

Dengan A adalah matriks koefisien konstan berukuran $n \times n$ dan b adalah vektor konstan, sistem persamaan (2.31) disebut sistem persamaan diferensial biasa linear order satu dengan kondisi awal $x(0) = x_0$. Jika $b = 0$ maka sistem dikatakan homogen sedangkan jika $b \neq 0$ maka sistem dikatakan tak homogen. (Tu, 1994)

Definisi 2.9

Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.32}$$

Dengan $x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ dan $f(t, x) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, ..., x_n) \\ f_2(t, x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, ..., x_n) \end{bmatrix}$ adalah fungsi tak linear dalam $x_1, ..., x_n$. Sistem persamaan (2.6) disebut sistem persamaaan diferensial tak linear. (Braun, 1983)

Definisi 2.10

Diberikan sistem persamaan diferensial (SPD)

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x) \qquad x \in R^n \tag{2.33}$$

Sistem (2.33) disebut Sistem Persamaan Diferensial Mandiri (SPDM)

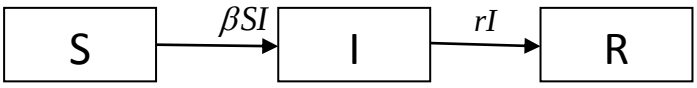
Dengan f fungsi kontinu bernilai real dari x dan mempunyai turunan parsial kontinu. SPD tersebut disebut SPD Mandiri (automous) jika tidak memuat waktu(t) secara eksplisit di dalamnya (Tu, 1994)

2.7Model Epidemi SIR Klasik

Model SIR klasik adalah model epidemik yang paling sederhana dimana model dijelaskan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927, model ini dibagi menjadi tiga kompartemen masing –masing meliputi *suspected* (S), *infected* (I), dan *recovered* (R).

Berikut ini adalah penjelasan mengenai masing –masing kompartemen.

Suspected (S) adalah kelompok individu yang rentan dan berpotensi tertular penyakit. *Infected* (I) adalah kelompok individu yang sudah tertular penyakit dan berpotensi menularkan penyakit ke suspectible. *Recovered* (R) adalah kelompok individu tidak mungkin lagi tertular bisa dikarenakan sudah sembuh dan memiliki kekebalan atau individu yang bersangkutan sudah hilang atau mati. Model SIR ini ditulis menggunakan persamaan diferensial biasa . Berikut ini bisa diamati diagram transfer dari model SIR klasik yang paling sederhana dan penjelasannya.



Gambar 2.1 Diagram Transfer Model SIR Klasik

Dari diagram transfer di atas diperoleh model matematika persamaan diferensial:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - rI$$

$$\frac{dR}{dt} = rI$$

$$S + I + R = N$$

Parameter model *SIR* di atas adalah sebagai berikut.

N = besarnya populasi total, N > 0,

β = laju kontak antara individu rentan dengan individu terinfeksi,

r = konstanta penyembuhan per kapita.

2.8 Penyakit Flu Burung

2.8.1 Etimologi

Penyebab flu burung adalah virus influenza tipe A yang termasuk dalam famili *Orthomyxoviridae* dan mempunyai diameter 90- 120 nanometer. Virus influenza B dan C dapat diisolasi dari manusia dan sifatnya kurang patogen dibanding dengan virus influenza A.(Asmara, 2007)

Virus flu burung dapat bertahan dalam air dengan suhu $22^{\circ}C$ selama 4 hari dan pada suhu $0^{\circ}C$ selama 30 hari. Pada daging ayam akan mati pada pemanasan $80^{\circ}C$ selama 1 menit, dan pemanasan $60^{\circ}C$ selama 30 menit. Virus Avian Influenza pada telur ayam akan mati pada pemanasan $64^{\circ}C$ selama 4,5 menit.Virus itu akan bertahan lama dalam feses ayam. Sifat virus yang tidak stabil mudah bermutasi dari tidak ganas menjadi ganau maupun sebaliknya.(Naipospos, 2009).

2.8.2 Gejala dan tanda

Virus avian influenza dapat menimbulkan gejala penyakit pernafasan pada unggas, dari patogen ringan (*low pathogenic*) sampai sampai yang bersifat patogen ganas atau fatal (*highly pathogenic*). Virus flu burung yang ganas ditandai dengan proses penyakit yang cepat dan disertai tingkat kematian tinggi. Gejala yang dapat terjadi pada unggas yang terserang virus flu burung yang ganas itu adalah:

1. Terjadi gangguan produksi telur yang sangat drastis, sehingga produksi telur berhenti sama sekali. Selain itu pada telur yang terlanjur keluar juga cendrung mengalami gagal tetas.
2. Mengalami gangguan pernafasan seperti batuk, bersin dan ngorok.
3. Jengger berwarna kebiruan.
4. Kaki berwarna kemerah-merahan seperti dikeroki dan jika dibuka terdapat pendarahan.
5. Lakriminasi atau pengeluaran leleran dari mata secara berlebihan.
6. Peradangan pada sinus atau lubang hidung.
7. Unggas mengalami kerontokan pada bulunya.
8. Pendarahan dibawah kulit, terutama didaerah kaki, pial, dan kepala.
9. Diare.
10. Gangguan syaraf, yang ditandai unggas yang membenturkan kepalanya
11. Gangguan keseimbangan,seperti berdiri dan berjalan sempoyongan
12. Tingkat kematian tinggi.

(Yuliarti, 2006)

Gejala flu burung pada manusia meliputi hal-hal berikut ini:

1. Demam (suhu badan di atas $38^{\circ}C$)
2. Lemas.
3. Pendarahan hidung dan gusi
4. Sesak nafas
5. Muntah dan nyeri perut disertai diare
6. Batuk dan nyeri tenggorokan.
7. Radang saluran pernafasan
8. Pneumonia
9. Infeksi mata
10. Nyeri otot

(Radji, 2006: 61)

2.8.3 Pengobatan dan Pencegahan

Dalam upaya pengobatan dan pencegahan penyebaran penyakit flu burung dari unggas ke manusia, terdapat 4 macam obat anti viral, yaitu amantadine, rimantadine, zanamivir, dan oseltamivir atau yang lebih dikenal dengan nama tamiflu. Mekanisme kerja amantadine dan rimantadine adalah menghambat replikasi virus. Namun kedua obat ini sudah tidak mempan lagi untuk membunuh virus H_5N_1 yang saat ini beredar luas. Sedangkan mekanisme kerja zanamivir dan asetamivir dapat menghentikan replikasi virus H_5N_1.(Radji, 2006: 61)

2.9 Titik Kesetimbangan (Ekuilibrium)

Definisi 2.11

Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f\left(x\right) \qquad x \in R^n$$

Titik $\bar{x}$ disebut titik kesetimbangan jika $f\left(\bar{x}\right) = 0$. (Tu, 1994)

Definisi 2.12

Diberikan fungsi $f = \left(f_1, f_2, ..., f_n\right)$ pada sistem $\dot{x} = f(x)$ dengan $f_i \in C^{'}\left(E, \mathbb{R}\right), i = 1, 2, ..., n$.

Matriks

$$Jf\left(\bar{x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(\bar{x}\right) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(\bar{x}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\left(\bar{x}\right) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(\bar{x}\right) \end{pmatrix}$$

Dinamakan matriks jacobian f di titik $\bar{x}$ (kocak & Hole, 1991)

Definisi 2.13

Sistem linear $\dot{x} = Jf(\bar{x})(x - \bar{x})$ disebut linearisasi sistem $\dot{x} = f(x)$ di sekitar titik $\bar{x}$ (Perko, 1991).

Teorema 2.14

Diberikan matriks Jacobian $Jf(\bar{x})$ dari sistem nonlinear $\dot{x} = f(x)$, dengan nilai eigen λ.

a) Jika semua bagian real nilai eigen dari matriks $Jf(\bar{x})$ bernilai negatif, maka titik ekuilibrium $\bar{x}$ dari Sistem nonlinear $\dot{x} = f(x)$ stabil asimtotik lokal.

b) Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks $Jf(\bar{x})$ yang bagian realnya positif, maka titik ekulibrium $\bar{x}$ dari sistem nonlinear $\dot{x} = f(x)$ tidak stabil (Olsder, 1994).

2.10 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan A adalah matriks *n x n*, maka suatu vektor tak nol *x* di dalam $\Re^n$ disebut vektor eigen dari A, jika untuk suatu skalar λ, yang disebut nilai eigen dari A, berlaku:

$$Ax = \lambda x. \qquad (2.34)$$

Vektor *x* disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Untuk mencari nilai eigen dari matriks A yang berukuran *n x n*, maka persamaan (2.34) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$(\lambda I - A)\, x = 0. \qquad (2.35)$$

Dengan *I* matriks identitas. Persamaan (2.34) mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika,

$$\det(\lambda I - A) = 0. \qquad (2.36)$$

Persamaan (2.36) disebut persamaan karakteristik (Anton, 1995: 277).

2.11 Kriteria Routh-Hurwitz

Misalkan $a_0, a_1, a_2, ...a_k$ bilangan-bilangan real, Semua nilai eigen dari persamaan karakteristik

$$p(\lambda) = a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + ... + a_{k-1}\lambda + a_k = 0$$

Mempunyai bagian real yang negatif jika dan hanya jika determinan dari matriks $M_{i\times i}$ untuk setiap $i = 0,1,2,...,k$

$$M_j = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2i-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2i-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2i-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_i \end{bmatrix}$$

bernilai positif , dimana $a_j = 0$ jika $j > k$.(Fisher, 1990)

Teorema 2.15

Dipunyai persamaan karakteristik

$$p(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

dimana A, B, C bilangan-bilangan real . Jika A, B, C positif dan $AB > C$ maka semua nilai eigen dari persamaan karakteristik $p(\lambda)$ bernilai real negatif.

Bukti:

Dari persamaan $p(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ maka diperoleh $a_0 = 1, a_1 = A, a_2 = B, a_3 = C$ dan $a_i = 0$ jika i selainnya. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwizt, maka bagian real dari setiap akar polinomial $p(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ adalah negatif jika dan hanya jika $|M_1|, |M_2|, |M_3|$, dimana

$$|M_1| = |a_1| = |A| > 0 \qquad (1)$$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ 1 & B \end{vmatrix} = AB - C > 0 \qquad (2)$$

$$|M_3| = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C & 0 \\ 1 & B & 0 \\ 0 & A & C \end{vmatrix} = ABC - C^2 > 0 \qquad (3)$$

i. Dari (1), diperoleh $A > 0$.

ii. Dari (2), diperoleh $AB - C > 0 \Leftrightarrow AB > C$.

iii. Dari (3) dapat ditulis $ABC - C^2 = C(AB - C) > 0$, dari (2) diperoleh $AB > C$ berakibat $C > 0$.

Dengan demikian diperoleh bahwa bagian real dari setiap akar polinomial

$p(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ adalah negatif jika dan hanya jika

$A > 0, C > 0$ dan $AB > C$.

2.12 Maple

Maple adalah salah satu *software* yang sering digunakan dalam simulasi dalam pemodelan matematika. Maple sendiri dikembangkan oleh Waterloo Inc. Kanada. Menu-menu yang terdapat pada tampilan program Maple ini terdiri dari menu *File, Edit, View, Insert, Format, Spreadsheet, Option, Window,* dan *Help.* Sebagian besar menu-menu di atas merupakan menu standar yang dikembangkan untuk program aplikasi pada system operasi *Windows*.

Maple memiliki banyak kelebihan salah satunya karena kemampuan untuk menyederhanakan persamaan, hingga suatu solusi persamaan diferensial dapat dipahami dengan baik. Selain itu maple juga memiliki kemampuan untuk

membuat animasi grafik dari suatu fenomena gerakan yang dimodelkan ke dalam persamaan diferensial yang memiliki nilai awal dan syarat batas (Kartono, 2001).

Dalam pemodelan matematika khususnya yang menggunakan sistem persamaan diferensial pernyataan yang sering digunakan dalam maple meliputi: *diff* digunakan untuk mendiferensialkan (menurunkan) suatu fungsi, *dsolve* digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, *evalf* memberikan nilai numeric dari suatu persamaan, dan *simplify* digunakan untuk menyederhanakan suatu persamaan. Namun tentu saja pernyataan-pernyataan awal seperti *restart* dan deklarasi variabel/konstanta yang diperlukan tidak boleh diabaikan. Untuk membuat grafik pada Maple digunakan *perintah plot, plot2d, plot3d,* tergantung dimensi dari pernyataan yang dimiliki. Untuk membuat gerakan animasi digunakan perintah *animate3d* (Kartono, 2001).

BAB 3

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi beberapa tahap sebagai berikut:

3.1 Menentukan Masalah

Pada tahap awal, penulis membaca dan menelaah beberapa sumber pustaka. Dari kajian tersebut, penulis menemukan permasalahan umum yaitu pemodelan matematika pada penyakit. Permasalahan ini masih terlalu luas, sehingga diperlukan rumusan masalah yang lebih spesifik.

3.2 Merumuskan Masalah

Tahap ini dimaksudkan untuk merumuskan permasalahan dengan jelas sehingga mempermudah pembahasan, permasalahan yang dibahas adalah:

(1) Bagaimanakah model matematika yang tepat untuk penyebaran penyakit flu burung dari unggas ke manusia?

(2) Bagaimanakah analisis kestabilan model penyebaran penyakit flu burung dari unggas ke manusia?

(3) Bagaimanakah simulasi model penyebaran penyakit flu burung menggunakan program Maple?

3.3 Studi Pustaka

Studi pustaka adalah menelaah sumber pustaka yang relevan digunakan untuk mengumpulkan informasi yang diperlukan dalam penelitian. Studi pustaka

diambil dengan mengumpulkan sumber pustaka yang dapat berupa buku, jurnal ilmiah, *ebook*, dsb. Setelah sumber pustaka terkumpul dilanjutkan dengan penelaahan dari sumber pustaka tersebut. Pada akhirnya sumber pustaka ini dijadikan landasan untuk menganalisis permasalahan.

3.4 Analisis dan Pemecahan Masalah

Dari berbagai sumber pustaka yang menjadi bahan kajian, diperoleh suatu pemecahan masalah di atas. Selanjutnya dilakukan langkah-langkah pemecahan masalah sebagai berikut:

(1) Menjelaskan bagaimana model matematika penyebaran penyakit flu burung dari unggas ke manusia.

(2) Menjelaskan bagaimana menentukan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan pada penyebaran flu burung dari unggas ke manusia.

(3) Menjelaskan bagaimana simulasi model dan interpretasi perilaku model pada penyebaran penyakit flu burung dari unggas ke manusia menggunakan program *Maple*.

Dalam proses pemecahan masalah tersebut, diterangkan berbagai cara menyelesaikan masalah dengan pendekatan yang ditetapkan sebelumnya berdasarkan landasan teori yang sudah ada.

3.5 Penarikan Kesimpulan

Hasil dari pembahasan kemudian diambil kesimpulan akhir yang merupakan akhir dari penulisan skripsi ini.

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Model Matematika untuk Penyebaran Penyakit Flu Burung dari Unggas ke Manusia

Model yang akan dibahas pada bab ini adalah model penyebaran penyakit flu burung dari unggas ke manusia menurut Derouich dan Boutayeb (2008), sebelum membahas lebih jauh mengenai model tersebut terlebih dahulu alangkah lebih baiknya kita meninjau fakta-fakta mengenai penyebaran flu burung dari populasi unggas ke populasi manusia, setelah mengetahui fakta kemudian dibentuk asumsi-asumsi dengan demikian selanjutnya bisa dibentuk model matematika.

4.1.1 Fakta-Fakta Flu Burung

Berikut ini adalah fakta- fakta terkait mengenai epidemi flu burung.

(1) Dalam (Rahardjo, 2004) spesies utama yang terserang oleh virus flu burung adalah unggas, unggas liar dapat bertindak sebagai pembawa virus meskipun tidak menunjukkan gejala-gejala klinis terinfeksi.

(2) Dalam (Radji, 2006) disebutkan kasus infeksi virus flu burung menyebabkan kematian pada manusia sehingga perlu menjadi kewaspadaan global mengingat banyaknya perpindahan burung liar yang tak terkendali yang memungkinkan membawa virus flu burung.

(3) Dalam (Asmara,2008) mengatakan bahwa di dalam perkembangan subtipe baru virus flu burung yang terbentuk akibat mutasi dapat menginfeksi sel-sel dalam tubuh manusia sehingga terjadi penyebaran flu burung dari unggas ke manusia.

(4) Dalam (Radji, 2006) menyebutkan ada 4 jenis obat antiviral untuk pengobatan ataupun pencegahan terhadap influenza, yaitu amantadine, rimantadine, zanamivir, dan tamiflu. Mekanisme kerja amantadine,dan rimantadine adalah menghambat replikasi virus namun untuk virus yang saat ini menyebar kedua obat ini sudah tidak mempan lagi. Sedangkan zanamivir, dan tamiflu bekerja untuk menghentikan replikasi dari virus flu burung.

(5) (Rahardjo, 2004) mengatakan bahwa strategi terbaik untuk mengurangi penyebaran virus secara global adalah dengan vaksinasi kepada sejumlah besar populasi unggas di negara-negara yang sudah terkena wabah.

(6) Menurut (Yuliarti, 2006) Kematian akibat flu burung ini mampu menyebabkan matinya seluruh populasi unggas di kawasan peternakan yang sudah terjangkit virus flu burung.

4.1.2 Asumsi-Asumsi

Dalam pembentukan model ini dibatasi oleh beberapa asumsi. Asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran flu burung dari unggas ke manusia sebagai berikut.

(1) *Rekuitment* masuk kelas S dengan laju konstan.

(2) Setiap manusia yang lahir sehat karena flu burung bukan penyakit turunan.

(3) Populasi manusia dianggap tidak konstan dan populasi unggas dianggap konstan.

(4) Populasi manusia (N) dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu kelompok manusia rentan flu burung masuk kelas manusia *suscepted* (S), kelompok manusia terinfeksi masuk kelompok *infected* (I), dan kelompok manusia yang sembuh masuk ke kelas *recovered* (R).

(5) Populasi unggas (N_0) dibagi menjadi dua kelompok, yaitu kelas unggas rentan flu burung(S_0) dan kelas unggas yang terinfeksi (I_0).

(6) Laju kematian murni pada manusia diasumsikan sama pada setiap kelas.

(7) Laju kematian dan kelahiran pada unggas diasumsikan sama disetiap kelas.

(8) Setiap unggas yang menetas masuk ke kelas S_0 .

(9) Virus flu burung menular melalui kontak langsung antara unggas rentan dengan unggas yang sakit flu burung dan kontak antara manusia sehat dengan unggas yang menderita flu burung.

(10) Virus tidak menular melalui kontak antara manusia rentan dengan manusia yang sakit.

(11) Manusia yang telah sembuh masih bisa terinfeksi kembali.

(12) Terjadi kematian karena infeksi virus pada populasi manusia *infected* (I).

(13) Tidak terjadi kematian karena infeksi pada populasi unggas *infected*.

(14) Unggas yang terinfeksi flu burung tidak akan pernah sembuh mengingat umurnya yang pendek.

4.1.3 Pembentukkan Model Matematika

Pembentukan model $sirs_0i_0$ didasari oleh adanya penyakit yang menular dari ungas ke unggas dan dari unggas ke manusia. Populasi yang diberikan dibagi ke dalam lima kelas yakni kelas populasi manusia rentan (*suspected*), kelas populasi manusia terinfeksi (*infectious*), kelas populasi manusia bebas penyakit (*recovered*), kelas populasi unggas rentan (*suspected*), dan kelas populasi unggas terinfeksi (*infectious*). Adapun variabel-variabel dan parameter-parameter yang digunakan dalam model ini disajikan dalam Tabel 4.1 dan Tabel 4.2

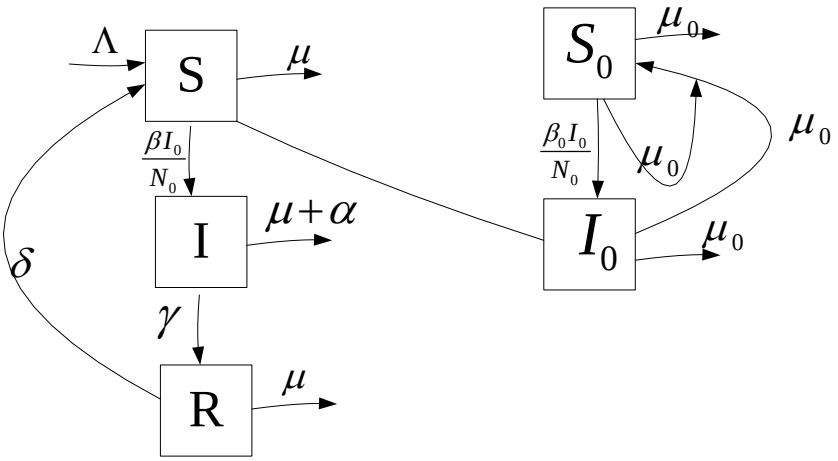
Tabel 4.1 Daftar Variabel-variabel

No	Variabel	Keterangan	Syarat
1.	N(t)	Jumlah populasi manusia pada waktu t	$N(t) > 0$
2.	S(t)	Jumlah manusia yang rentan terinfeksi penyakit pada waktu t	$S(t) \geq 0$
3	I(t)	Jumlah manusia yang terinfeksi penyakit pada waktu t	$I(t) \geq 0$
4.	R(t)	Jumlah manusia yang telah sembuh pada waktu t	$R(t) \geq 0$
5.	$N_0(t)$	Jumlah populasi unggas pada waktu t	$N_0(t) \geq 0$
6.	$S_0(t)$	Jumlah unggas yang rentan terinfeksi penyakit pada waktu t	$S_0(t) \geq 0$
7.	$I_0(t)$	Jumlah unggas yang terinfeksi penyakit pada waktu t	$I_0(t) \geq 0$

Tabel 4.2 Daftar Parameter-parameter

No	Parameter	Keterangan	Syarat
1.	Λ	Laju kostan kelahiran dan imigrasi.	$\Lambda > 0$
2.	β	Laju kontak antara burung sakit dengan manusia sehat	$\beta > 0$
3.	β_0	Laju kontak infektif antara unggas sehat dengan unggas sakit.	$\beta_0 > 0$
4.	μ_0	Tingkat kematian dan kelahiran individu dalam populasi unggas tanpa pengaruh flu burung	$\mu_0 > 0$
5.	μ	Tingkat kematian individu dalam populasi manusia tanpa pengaruh flu burung	$\mu > 0$
6.	δ	Laju konstan hilangnya kekebalan	$\delta > 0$
7.	α	Laju konstan kematian akibat penyakit flu burung	$\alpha > 0$
8.	γ	Laju konstan proses penyembuhan.	$\gamma > 0$

Secara skematis proses penyebaran penyakit flu burung dari unggas ke manusia menurut Derouich dan Boutayeb (2008) digambarkan dalam diagram transfer berikut,



Gambar 4.1 Diagram Transfer Model Penyebaran Flu Burung

Dari diagram transfer didapatkan sistem berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \left(\mu + \frac{\beta I_0}{N_0}\right) S + \delta R$$

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{\beta I_0}{N_0}\right) S - \left(\mu + \gamma + \alpha\right) I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \left(\mu + \delta\right) R$$

$$N = S + I + R \qquad (4.1)$$

$$\frac{dS_0}{dt} = \mu_0 N_0 - \left(\mu_0 + \frac{\beta_0 I_0}{N_0}\right) S_0$$

$$\frac{dI_0}{dt} = \left(\frac{\beta_0 I_0}{N_0}\right) S_0 - \mu_0 I_0$$

$$N_0 = S_0 + I_0$$

Dari Sistem (4.1) di atas dapat diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt}$$
$$= \left(\Lambda - \left(\mu + \frac{\beta I_0}{N_0}\right)S + \delta R\right) + \left(\left(\frac{\beta I_0}{N_0}\right)S - (\mu + \gamma + \alpha)I\right) + \left(\gamma I - (\mu + \delta)R\right)$$
$$= \Lambda - \mu S - \left(\frac{\beta I_0}{N_0}\right)S + \delta R + \left(\frac{\beta I_0}{N_0}\right)S - \mu I - \gamma I - \alpha I + \gamma I - \mu R - \delta R$$
$$= \Lambda - \mu S - \mu I - \alpha I - \mu R$$
$$= \Lambda - \mu S - \mu I - \mu R - \alpha I$$
$$= \Lambda - \mu(S + I + R) - \alpha I$$
$$= \Lambda - \mu N - \alpha I$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N - \alpha I = 0$$

$$\Leftrightarrow -\mu N = -\Lambda + \alpha I$$
$$\Leftrightarrow N = \frac{-\Lambda + \alpha I}{-\mu}$$
$$\Leftrightarrow N = \frac{\Lambda - \alpha I}{\mu}$$

Karena $0 \le I$ dan $N = \frac{\Lambda - \alpha I}{\mu}$ diperoleh $N \le \frac{\Lambda}{\mu}$

Sistem (4.1) dapat diskala dengan mengambil total populasi $N = \frac{\Lambda}{\mu}$, sehingga masing-masing subpopulasi manusia pada Sistem (4.1) dapat dinyatakan,

$$s = \frac{S}{N} = \frac{S}{\Lambda / \mu} \ , \ i = \frac{I}{N} = \frac{I}{\Lambda / \mu} \ , \ r = \frac{R}{N} = \frac{R}{\Lambda / \mu}$$

Sehingga diperoleh $s = \dfrac{S}{\Lambda / \mu}, i = \dfrac{I}{\Lambda / \mu}, r = \dfrac{R}{\Lambda / \mu}$.

Selanjutnya untuk kasus total populasi unggas diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dN_0}{dt} &= \frac{dS_0}{dt} + \frac{dI_0}{dt} \\
&= \left(\mu_0 N_0 - \left(\mu_0 + \frac{\beta_0 I_0}{N_0} \right) S_0 \right) + \left(\left(\frac{\beta_0 I_0}{N_0} \right) S_0 - \mu_0 I_0 \right) \\
&= \mu_0 N_0 - \mu_0 S - \left(\frac{\beta_0 I_0}{N_0} \right) S_0 + \left(\frac{\beta_0 I_0}{N_0} \right) S_0 - \mu_0 I_0 \\
&= \mu_0 \left(S_0 + I_0 \right) - \mu_0 S - \left(\frac{\beta_0 I_0}{N_0} \right) S_0 + \left(\frac{\beta_0 I_0}{N_0} \right) S_0 - \mu_0 I_0 \\
&= \mu_0 \left(S_0 + I_0 \right) - \mu_0 S - \mu_0 I_0 - \left(\frac{\beta_0 I_0}{N_0} \right) S_0 + \left(\frac{\beta_0 I_0}{N_0} \right) S_0 \\
&= \mu_0 \left(S_0 + I_0 \right) - \mu_0 \left(S_0 + I_0 \right) - \left(\frac{\beta_0 I_0}{N_0} \right) S_0 + \left(\frac{\beta_0 I_0}{N_0} \right) S_0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Jadi $\dfrac{dN_0}{dt} = 0$, artinya $N_0 = k$ untuk suatu k bilangan real sehingga bagian populasi unggas pada Sistem (4.1) dapat di skala dengan mengambil total populasi N_0, sehingga proporsi masing-masing populasi unggas pada pada Sistem (4.1) dapat dinyatakan sebagai,

$$s_0 = \frac{S_0}{N_0} \text{ dan } i_0 = \frac{I_0}{N_0}.$$

Jadi untuk menyederhanakan dan memudahkan proses analisis, Sistem (4.1) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$s=\frac{S}{\Lambda/\mu}, i=\frac{I}{\Lambda/\mu}, r=\frac{R}{\Lambda/\mu}, n=\frac{N}{\Lambda/\mu}, s_0=\frac{S_0}{N_0}, i_0=\frac{I_0}{N_0}. \qquad (4.2)$$

Dari Persamaan (4.2), diperoleh

$$s+i+r=\frac{S}{\Lambda/\mu}+\frac{I}{\Lambda/\mu}+\frac{R}{\Lambda/\mu}=\frac{S+I+R}{\Lambda/\mu}=\frac{N}{\Lambda/\mu}=n \Leftrightarrow s+i+r=n$$

dan $s_0+i_0=\frac{S_0}{N_0}+\frac{I_0}{N_0}=\frac{S_0+I_0}{N_0}=\frac{N_0}{N_0}=1$

$$\Leftrightarrow s_0+i_0=1$$
$$\Leftrightarrow s_0=1-i_0$$

Oleh karena itu, dengan Persamaan (4.2), Sistem (4.1) dapat disajikan sebagai

jelas $\frac{ds}{dt}=\frac{d\left[\frac{S}{\Lambda/\mu}\right]}{dt}=\left(\frac{1}{\Lambda/\mu}\right)\frac{dS}{dt}$

$$\Leftrightarrow \frac{ds}{dt}=\left(\frac{1}{\Lambda/\mu}\right)\left(\Lambda-\left(\mu+\frac{\beta I_0}{N_0}\right)S+\delta R\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{ds}{dt}=\left(\frac{1}{\Lambda/\mu}\right)\left(\Lambda-\left(\mu+\frac{\beta I_0}{N_0}\right)s\left(\Lambda/\mu\right)+\delta r\left(\Lambda/\mu\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{ds}{dt}=\mu-\left(\mu+\frac{\beta I_0}{N_0}\right)s+\delta r$$
$$\Leftrightarrow \frac{ds}{dt}=\mu-\left(\mu+\beta i_0\right)s+\delta r$$

Jelas $\frac{di}{dt}=\frac{d\left[\frac{I}{\Lambda/\mu}\right]}{dt}=\left(\frac{1}{\Lambda/\mu}\right)\frac{dI}{dt}$

$$\Leftrightarrow \frac{di}{dt} = \left(\frac{1}{\Lambda/\mu}\right)\left(\frac{\beta I_0}{N_0}S - (\mu+\gamma+\alpha)I\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{di}{dt} = \left(\frac{1}{\Lambda/\mu}\right)\left(\frac{\beta i_0 N_0 s(\Lambda/\mu)}{N_0} - (\mu+\gamma+\alpha)i(\Lambda/\mu)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{di}{dt} = \beta i_0 s - (\mu+\gamma+\alpha)i$$

Jelas $\frac{dr}{dt} = \frac{d\left[\frac{R}{\Lambda/\mu}\right]}{dt} = \left(\frac{1}{\Lambda/\mu}\right)\left(\frac{dR}{dt}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = \left(\frac{1}{\Lambda/\mu}\right)\gamma I - (\mu+\delta)R$$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = \left(\frac{1}{\Lambda/\mu}\right)\gamma i(\Lambda/\mu) - (\mu+\delta)r(\Lambda/\mu)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = \gamma i - (\mu+\delta)r$$

Jelas $\frac{di_0}{dt} = \frac{d\left[\frac{I_0}{N_0}\right]}{dx} = \frac{1}{N_0}\left(\frac{dI_0}{dt}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{di_0}{dt} = \frac{1}{N_0}\left(\left(\frac{\beta_0 I_0}{N_0}\right)S_0 - \mu_0 I_0\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{di_0}{dt} = \frac{1}{N_0}\left(\left(\frac{\beta_0 i_0 N_0}{N_0}\right)s_0 N_0 - \mu_0 i_0 N_0\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{di_0}{dt} = \frac{1}{N_0}(\beta_0 i_0 s_0 N_0 - \mu_0 i_0 N_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{di_0}{dt} = \beta_0 i_0 s_0 - \mu_0 i_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{di_0}{dt} = \beta_0 i_0 (1 - i_0) - \mu_0 i_0$$

Dengan kata lain diperoleh sistem persamaan diferensial nonlinear baru yang lebih sederhana yaitu:

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \mu - (\mu + \beta i_0)s + \delta r \\
\frac{di}{dt} &= \beta i_0 s - (\mu + \gamma + \alpha)i \\
\frac{dr}{dt} &= \gamma i - (\mu + \delta)r \\
\frac{di_0}{dt} &= \beta_0 i_0 (1 - i_0) - \mu_0 i_0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Sistem (4.3) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear yang lebih sederhana dari Sistem (4.1) yang mempresentasikan model penyebaran flu burung dari unggas ke manusia.

4.2 Titik Kesetimbangan

Dari sistem (4.3) dapat dicari titik kesetimbangannya, sebagai berikut:

Mencari titik ekuilibrium dari persamaan-persamaan diferensial di atas diperoleh

$$\frac{ds}{dt} = \mu - (\mu + \beta i_0)s + \delta r = 0 \tag{4.4}$$

$$\frac{di}{dt} = \beta i_0 s - (\mu + \gamma + \alpha)i = 0 \tag{4.5}$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i - (\mu + \delta)r = 0 \tag{4.6}$$

$$\frac{di_0}{dt} = \beta_0 i_0 (1 - i_0) - \mu_0 i_0 = 0 \tag{4.7}$$

Dari persamaan (4.7) :

Jelas $\beta_0 i_0 (1 - i_0) - \mu_0 i_0 = 0$

$\Leftrightarrow i_0 (\beta_0 - \beta_0 i_0 - \mu_0) = 0$

$\Leftrightarrow i_0 = 0$ atau $\left(\beta_0 - \beta_0 i_0 - \mu_0\right) = 0$

$\Leftrightarrow i_0 = 0$ atau $\beta_0 i_0 = \beta_0 - \mu_0$

$\Leftrightarrow i_0 = 0$ atau $i_0 = \dfrac{\beta_0 - \mu_0}{\beta_0}$

$\Leftrightarrow i_0 = 0$ atau $i_0 = 1 - \dfrac{\mu_0}{\beta_0}$

Didefinisikan $R_0 = \dfrac{\beta_0}{\mu_0}$ (4.9)

Untuk kasus $i_0 = 0$,

Dari (4.5) diperoleh $\beta i_0 s - \left(\mu + \gamma + \alpha\right) i = \beta.0.s - \left(\mu + \gamma + \alpha\right) i = 0$

Berakibat $-\left(\mu + \gamma + \alpha\right) i = 0$, karena $\mu > 0, \gamma > 0, \alpha > 0$ diperoleh $i = 0$.

Dari (4.6) diperoleh $\gamma i - \left(\mu + \delta\right) r = \gamma.0 - \left(\mu + \delta\right) r = -\left(\mu + \delta\right) r = 0$ menghasilkan $r = 0$.

Dari (4.4) diperoleh:

$\mu - \left(\mu + \beta i_0\right) s + \delta r = \mu - \left(\mu + \beta.0\right) s + \delta.0 = \mu - \mu s = \mu\left(1 - s\right) = 0$

Oleh sebab $\mu > 0$ mengakibatkan $1 - s = 0 \Leftrightarrow s = 1$

Dari sini didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit $E_1\left(s, i, r, i_0\right) = \left(1, 0, 0, 0\right)$.

Untuk kasus $i_0 = 1 - \dfrac{\mu_0}{\beta_0}$

Jelas $i_0 = 1 - \dfrac{\mu_0}{\beta_0} \Leftrightarrow i_0 = \dfrac{\mu_0}{\beta_0}\left(\dfrac{\beta_0}{\mu_0} - 1\right) = \dfrac{\mu_0}{\beta_0}\left(R_0 - 1\right)$

Dari persamaan (4.6) kita dipunyai

$\gamma i - \left(\mu + \delta\right) r = 0 \Leftrightarrow \left(\mu + \delta\right) r = \gamma i \Leftrightarrow r = \dfrac{\gamma i}{\left(\mu + \delta\right)}$

Dengan demikian dari persamaan (4.4) diperoleh

$$\mu - \mu s - \beta i_0 s + \delta r = 0 \Leftrightarrow \mu - \mu s - \beta i_0 s + \delta \frac{\gamma i}{(\mu + \delta)} = 0$$

Di sisi lain dari persamaan (4.5) diperoleh

$$\beta i_0 s - (\mu + \gamma + \alpha) i = 0 \Leftrightarrow \beta i_0 s = (\mu + \gamma + \alpha) i$$

Maka $\mu - \mu s - \beta i_0 s + \delta \frac{\gamma i}{(\mu + \delta)} = 0 \Leftrightarrow \mu - \mu s - (\mu + \gamma + \alpha) i + \delta \frac{\gamma i}{(\mu + \delta)} = 0$

$$\Leftrightarrow \mu s = \mu - (\mu + \gamma + \alpha) i + \delta \frac{\gamma i}{(\mu + \delta)}$$

$$\Leftrightarrow s = 1 - \frac{1}{\mu}(\mu + \gamma + \alpha) i + \frac{1}{\mu} \delta \frac{\gamma i}{(\mu + \delta)}$$

$$\Leftrightarrow s = 1 - \frac{1}{\mu}\left((\mu + \gamma + \alpha) i - \delta \frac{\gamma i}{(\mu + \delta)} \right)$$

$$\Leftrightarrow s = 1 - \frac{1}{\mu}\left((\mu + \gamma + \alpha) - \delta \frac{\gamma}{(\mu + \delta)} \right) i$$

Dari persamaan (4.5) dipunyai $\beta i_0 s - (\mu + \gamma + \alpha) i = 0$ sehingga diperoleh

$$\beta \left(\frac{\mu_0}{\beta_0}(R_0 - 1) \right) \left(1 - \frac{1}{\mu}\left((\mu + \gamma + \alpha) - \delta \frac{\gamma}{(\mu + \delta)} \right) i \right) - (\mu + \gamma + \alpha) i = 0$$

Didefinisikan $M = \mu + \gamma + \alpha$ (4.8)

$$\beta \left(\frac{\mu_0}{\beta_0}(R_0 - 1) \right) \left(1 - \frac{1}{\mu}\left(M - \delta \frac{\gamma}{(\mu + \delta)} \right) i \right) - Mi = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta \left(\frac{\mu_0}{\beta_0}(R_0 - 1) \right) \left(1 - \frac{1}{\mu}\left(\frac{M(\mu + \delta) - \delta\gamma}{(\mu + \delta)} \right) i \right) - Mi = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta\left(\mu_0\left(R_0-1\right)\right)\left(1-\frac{1}{\mu\left(\mu+\delta\right)}\left(M\left(\mu+\delta\right)-\delta\gamma\right)i\right)-M\beta_0 i=0$$

$$\Leftrightarrow \beta\left(\mu_0\left(R_0-1\right)\right)\left(1-\frac{1}{\mu\left(\mu+\delta\right)}\left(M\mu+M\delta-\delta\gamma\right)i\right)-M\beta_0 i=0$$

$$\Leftrightarrow \beta\left(\mu_0\left(R_0-1\right)\right)\left(1-\frac{1}{\mu\left(\mu+\delta\right)}\left(M\mu+\left(\mu+\gamma+\alpha\right)\delta-\delta\gamma\right)i\right)-M\beta_0 i=0$$

$$\Leftrightarrow \beta\left(\mu_0\left(R_0-1\right)\right)\left(1-\frac{1}{\mu\left(\mu+\delta\right)}\left(M\mu+\delta\mu+\delta\gamma+\delta\alpha-\delta\gamma\right)i\right)-M\beta_0 i=0$$

$$\Leftrightarrow \beta\left(\mu_0\left(R_0-1\right)\right)\left(1-\frac{1}{\mu\left(\mu+\delta\right)}\left(M\mu+\delta\mu+\delta\alpha\right)i\right)-M\beta_0 i=0$$

$$\Leftrightarrow \beta\left(\mu_0\left(R_0-1\right)\right)\left(1-\frac{1}{\mu\left(\mu+\delta\right)}\left(M\mu+\delta\left(\mu+\alpha\right)\right)i\right)-M\beta_0 i=0$$

$$\Leftrightarrow \beta\left(\mu_0\left(R_0-1\right)\right)-\frac{\beta\left(\mu_0\left(R_0-1\right)\right)\left(M+\frac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)i}{\left(\mu+\delta\right)}-M\beta_0 i=0$$

$$\Leftrightarrow \beta\left(\mu_0\left(R_0-1\right)\right)-\left(\frac{\beta\left(\mu_0\left(R_0-1\right)\right)\left(M+\frac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)}{\left(\mu+\delta\right)}+M\beta_0\right)i=0$$

$$\Leftrightarrow \beta\left(\left(\mu+\delta\right)\mu_0\left(R_0-1\right)\right)-\left(\beta\left(\mu_0\left(R_0-1\right)\right)\left(M+\frac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+M\beta_0\left(\mu+\delta\right)\right)i=0$$

Oleh sebab $R_0=\frac{\beta_0}{\mu_0}\Leftrightarrow \beta_0=R_0\mu_0$ diperoleh

$$\beta\left(\left(\mu+\delta\right)\mu_0\left(R_0-1\right)\right)-\left(\beta\left(\mu_0\left(R_0-1\right)\right)\left(M+\frac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\mu_0\left(\mu+\delta\right)\right)i=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\beta\left(\mu_0\left(R_0-1\right)\right)\left(M+\frac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\mu_0\left(\mu+\delta\right)\right)i=\beta\left(\left(\mu+\delta\right)\mu_0\left(R_0-1\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow i=\frac{\beta\left(\left(\mu+\delta\right)\left(R_0-1\right)\right)}{\left(\beta\left(R_0-1\right)\left(M+\frac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)}$$

Di sisi lain dipunyai

$$s=1-\frac{1}{\mu}\left(\left(\mu+\gamma+\alpha\right)-\delta\frac{\gamma}{\left(\mu+\delta\right)}\right)i$$

$$\Leftrightarrow s=1-\frac{1}{\mu}\left(M-\delta\frac{\gamma}{\left(\mu+\delta\right)}\right)i$$

$$\Leftrightarrow s=1-\frac{1}{\mu}\left(\frac{M\left(\mu+\delta\right)-\delta\gamma}{\mu+\delta}\right)i$$

$$\Leftrightarrow s=1-\frac{1}{\mu}\left(\frac{M\mu+M\delta-\delta\gamma}{\mu+\delta}\right)i$$

$$\Leftrightarrow s=1-\frac{1}{\mu+\delta}\left(\frac{M\mu+M\delta-\delta\gamma}{\mu}\right)i$$

$$\Leftrightarrow s=1-\frac{1}{\mu+\delta}\left(\frac{M\mu+\left(\mu+\gamma+\alpha\right)\delta-\delta\gamma}{\mu}\right)i$$

$$\Leftrightarrow s=1-\frac{1}{\mu+\delta}\left(\frac{M\mu+\left(\mu+\gamma+\alpha-\gamma\right)\delta}{\mu}\right)i$$

$$\Leftrightarrow s=1-\frac{1}{\mu+\delta}\left(\frac{M\mu+\left(\mu+\alpha\right)\delta}{\mu}\right)i$$

$$\Leftrightarrow s=1-\frac{1}{\mu+\delta}\left(M+\frac{\left(\mu+\alpha\right)\delta}{\mu}\right)i$$

$$\Leftrightarrow s=1-\frac{1}{\mu+\delta}\left(M+\frac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)i$$

Karena diketahui $i = \dfrac{\beta\left(\left(\mu+\delta\right)\left(R_0-1\right)\right)}{\left(\beta\left(R_0-1\right)\left(M+\dfrac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)}$ maka

$$s = 1 - \frac{1}{\mu+\delta}\left(M+\frac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)i$$

$$\Leftrightarrow\ s = 1 - \frac{1}{\mu+\delta}\left(M+\frac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)\frac{\beta\left(\left(\mu+\delta\right)\left(R_0-1\right)\right)}{\left(\beta\left(R_0-1\right)\left(M+\dfrac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow\ s = 1 - \frac{\left(M+\dfrac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)\beta\left(\left(R_0-1\right)\right)}{\left(\beta\left(R_0-1\right)\left(M+\dfrac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{\left(\beta\left(R_0-1\right)\left(M+\dfrac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)-\left(M+\dfrac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)\beta\left(\left(R_0-1\right)\right)}{\left(\beta\left(R_0-1\right)\left(M+\dfrac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{\left(\beta\left(R_0-1\right)\left(M+\dfrac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)-\beta\left(\left(R_0-1\right)\right)\left(M+\dfrac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)}{\left(\beta\left(R_0-1\right)\left(M+\dfrac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{\left(MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)}{\left(\beta\left(R_0-1\right)\left(M+\dfrac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)}$$

Jadi diperoleh titik kesetimbangan endemi yaitu $E_2 = \left(\bar{s}, \bar{i}, \bar{r}, \bar{i}_0\right)$ dengan

$$\bar{s} = \frac{\left(MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)}{\left(\beta\left(R_0-1\right)\left(M+\dfrac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)}$$

$$\bar{i} = \frac{\beta(\mu+\delta)(R_0-1)}{\left(\beta(R_0-1)\left(M+\frac{\delta}{\mu}(\mu+\alpha)\right)+MR_0(\mu+\delta)\right)}$$

$$\bar{r} = \frac{\beta\gamma(R_0-1)}{\left(\beta(R_0-1)\left(M+\frac{\delta}{\mu}(\mu+\alpha)\right)+MR_0(\mu+\delta)\right)} \text{ dan}$$

$$\bar{i}_0 = \frac{\mu_0}{\beta_0}(R_0-1)$$

dimana $M = \mu+\gamma+\alpha$ dan $R_0 = \frac{\beta_0}{\mu_0}$.

Dengan demikian bisa diperoleh Teorema 4.1.

Teorema 4.1

Dipunyai $R_0 = \frac{\beta_0}{\mu_0}$

Dari sistem persamaan (4.3) di atas, dan berdasarkan nilai R_0 diperoleh

(1) Jika $R_0 \le 1$ maka sistem persamaan (4.3) hanya mempunyai 1 titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas benyakit $E_1(s,i,r,i_0) = (1,0,0,0)$

(2) Jika $R_0 > 1$ maka sistem persamaan (4.3) mempunyai 2 titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $E_1(s,i,r,i_0) = (1,0,0,0)$ dan titik ekuilibrium endemik $E_2 = (\bar{s},\bar{i},\bar{r},\bar{i}_0)$ dengan

$$\bar{s} = \frac{\left(MR_0(\mu+\delta)\right)}{\left(\beta(R_0-1)\left(M+\frac{\delta}{\mu}(\mu+\alpha)\right)+MR_0(\mu+\delta)\right)}$$

$$\bar{i} = \frac{\beta(\mu+\delta)(R_0-1)}{\left(\beta(R_0-1)\left(M+\frac{\delta}{\mu}(\mu+\alpha)\right)+MR_0(\mu+\delta)\right)},$$

$$\bar{r} = \frac{\beta\gamma(R_0-1)}{\left(\beta(R_0-1)\left(M+\frac{\delta}{\mu}(\mu+\alpha)\right)+MR_0(\mu+\delta)\right)}, \text{ dan}$$

$$\bar{i}_0 = \frac{\mu_0}{\beta_0}(R_0-1), \text{ dimana } M = \mu+\gamma+\alpha.$$

4.3 Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian yang diperoleh melalui metode linearisasi. Matriks Jacobian dari sistem (4.3) sebagai berikut.

$$J^*(E) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\left(\frac{ds}{dt}\right)}{\partial s} & \frac{\partial\left(\frac{ds}{dt}\right)}{\partial i} & \frac{\partial\left(\frac{ds}{dt}\right)}{\partial r} & \frac{\partial\left(\frac{ds}{dt}\right)}{\partial i_0} \\ \frac{\partial\left(\frac{di}{dt}\right)}{\partial s} & \frac{\partial\left(\frac{di}{dt}\right)}{\partial i} & \frac{\partial\left(\frac{di}{dt}\right)}{\partial r} & \frac{\partial\left(\frac{di}{dt}\right)}{\partial i_0} \\ \frac{\partial\left(\frac{dr}{dt}\right)}{\partial s} & \frac{\partial\left(\frac{dr}{dt}\right)}{\partial i} & \frac{\partial\left(\frac{dr}{dt}\right)}{\partial r} & \frac{\partial\left(\frac{dr}{dt}\right)}{\partial i_0} \\ \frac{\partial\left(\frac{di_0}{dt}\right)}{\partial s} & \frac{\partial\left(\frac{di_0}{dt}\right)}{\partial i} & \frac{\partial\left(\frac{di_0}{dt}\right)}{\partial r} & \frac{\partial\left(\frac{di_0}{dt}\right)}{\partial i_0} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow J^*(E) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\left[\mu-(\mu+\beta i_0)s+\delta r\right]}{\partial s} & \frac{\partial\left[\beta i_0 s-(\mu+\gamma+\alpha)i\right]}{\partial s} & \frac{\partial\left[\gamma i-(\mu+\delta)r\right]}{\partial s} & \frac{\partial\left[\beta_0 i_0(1-i_0)-\mu_0 i_0\right]}{\partial s} \\ \frac{\partial\left[\mu-(\mu+\beta_0)s+\delta r\right]}{\partial i} & \frac{\partial\left[\beta i_0 s-(\mu+\gamma+\alpha)i\right]}{\partial i} & \frac{\partial\left[\gamma i-(\mu+\delta)r\right]}{\partial i} & \frac{\partial\left[\beta_0 i_0(1-i_0)-\mu_0 i_0\right]}{\partial i} \\ \frac{\partial\left[\mu-(\mu+\beta i_0)s+\delta r\right]}{\partial r} & \frac{\partial\left[\beta i_0 s-(\mu+\gamma+\alpha)i\right]}{\partial r} & \frac{\partial\left[\gamma i-(\mu+\delta)r\right]}{\partial r} & \frac{\partial\left[\beta_0 i_0(1-i_0)-\mu_0 i_0\right]}{\partial r} \\ \frac{\partial\left[\mu-(\mu+\beta i_0)s+\delta r\right]}{\partial i_0} & \frac{\partial\left[\beta i_0 s-(\mu+\gamma+\alpha)i\right]}{\partial i_0} & \frac{\partial\left[\gamma i-(\mu+\delta)r\right]}{\partial i_0} & \frac{\partial\left[\beta_0 i_0-\beta_0 i_0^2-\mu_0 i_0\right]}{\partial i_0} \end{pmatrix}$$

4.3.1 Analisis Kestabilan di sekitar Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Untuk titik kesetimbangan bebas penyakit $E_1 = (1,0,0,0)$

diperoleh elemen-elemen matriks jacobian sebagai berikut:

$$\frac{\partial\left(\frac{ds}{dt}\right)}{\partial s} = \frac{\partial\left[\mu - (\mu + \beta i_0)s + \delta r\right]}{\partial s} = -\mu - \beta i_0 = -\mu - \beta.0 = -\mu$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di}{dt}\right)}{\partial s} = \frac{\partial\left[\beta i_0 s - (\mu + \gamma + \alpha)i\right]}{\partial s} = \beta_0.i_0 = \beta_0.0 = 0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{dr}{dt}\right)}{\partial s} = \frac{\partial\left[\gamma i - (\mu + \delta)r\right]}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di_0}{dt}\right)}{\partial s} = \frac{\partial\left[\beta_0 i_0 (1 - i_0) - \mu_0 i_0\right]}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{ds}{dt}\right)}{\partial i} = \frac{\partial\left[\mu - (\mu + \beta_0)s + \delta r\right]}{\partial i} = 0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di}{dt}\right)}{\partial i} = \frac{\partial\left[\beta i_0 s - (\mu + \gamma + \alpha)i\right]}{\partial i} = -(\mu + \gamma + \alpha) = -M$$

$$\frac{\partial\left(\frac{dr}{dt}\right)}{\partial i} = \frac{\partial\left[\gamma i - (\mu + \delta)r\right]}{\partial i} = \gamma$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di_0}{dt}\right)}{\partial i}=\frac{\partial\left[\beta_0 i_0\left(1-i_0\right)-\mu_0 i_0\right]}{\partial i}=0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{ds}{dt}\right)}{\partial r}=\frac{\partial\left[\mu-\left(\mu+\beta i_0\right)s+\delta r\right]}{\partial r}=\delta$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di}{dt}\right)}{\partial r}=\frac{\partial\left[\beta i_0 s-\left(\mu+\gamma+\alpha\right)i\right]}{\partial r}=0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{dr}{dt}\right)}{\partial r}=\frac{\partial\left[\gamma i-\left(\mu+\delta\right)r\right]}{\partial r}=-\mu-\delta$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di_0}{dt}\right)}{\partial r}=\frac{\partial\left[\beta_0 i_0\left(1-i_0\right)-\mu_0 i_0\right]}{\partial r}=0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{ds}{dt}\right)}{\partial i_0}=\frac{\partial\left[\mu-\left(\mu+\beta i_0\right)s+\delta r\right]}{\partial i_0}=-\beta s=-\beta.1=-\beta$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di}{dt}\right)}{\partial i_0}=\frac{\partial\left[\beta i_0 s-\left(\mu+\gamma+\alpha\right)i\right]}{\partial i_0}=\beta s=\beta.1=\beta$$

$$\frac{\partial\left(\frac{dr}{dt}\right)}{\partial i_0}=\frac{\partial\left[\gamma i-\left(\mu+\delta\right)r\right]}{\partial i_0}=0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di_0}{dt}\right)}{\partial i_0}=\frac{\partial\left[\beta_0 i_0\left(1-i_0\right)-\mu_0 i_0\right]}{\partial i_0}=\frac{\partial\left[\beta_0 i_0-\beta_0 i_0^{\,2}-\mu_0 i_0\right]}{\partial i_0}$$

$$= \beta_0 - 2\beta_0 i_0 - \mu_0$$
$$= \beta_0 - 2\beta_0 .0 - \mu_0$$
$$= \beta_0 - \mu_0$$

Dari turunan-turunan di atas untuk E_1 diperoleh matriks jacobian

$$J\left(E_1\right) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\delta & -\beta \\ 0 & -M & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & -\left(\mu+\delta\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_0 - \mu_0 \end{pmatrix}$$

Untuk mencari nilai eigen dari matriks tersebut dibentuk polinomial karakteristik dari determinan berikut.

$$p\left(\lambda\right) = \det(\lambda I - J\left(E_1\right)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\delta & -\beta \\ 0 & -M & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & -\left(\mu+\delta\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_0 - \mu_0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{pmatrix} \lambda+\mu & 0 & \delta & \beta \\ 0 & \lambda+M & 0 & -\beta \\ 0 & -\gamma & \lambda+\left(\mu+\delta\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-\left(\beta_0-\mu_0\right) \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda+\mu \begin{vmatrix} \lambda+M & 0 & -\beta \\ -\gamma & \lambda+\left(\mu+\delta\right) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\left(\beta_0-\mu_0\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda+\mu\right)\left(\lambda+M\right)\left(\lambda+\left(\mu+\delta\right)\right)\left(\lambda-\left(\beta_0-\mu_0\right)\right) = 0$$

Jadi diperoleh polinomial berikut,

$$p(\lambda)=(\lambda+\mu)(\lambda+M)(\lambda+(\mu+\delta))(\lambda-(\beta_0-\mu_0))=0$$

Oleh sebab $R_0=\dfrac{\beta_0}{\mu_0}\Leftrightarrow\beta_0=R_0\mu_0$ berakibat

$$p(\lambda)=(\lambda+\mu)(\lambda+M)(\lambda+(\mu+\delta))(\lambda-(R_0\mu_0-\mu_0))=0$$

Dari polinomial karakteristik di atas diperoleh nilai-nilai eigen sebagai berikut.

$$\lambda_1=-\mu$$

$$\lambda_2=-M$$

$$\lambda_3=-(\mu+\delta)$$

$$\lambda_4=(R_0\mu_0-\mu_0)$$

Jelas untuk λ_1,λ_2 dan λ_3 bernilai negatif sedangkan oleh sebab $\mu_0>0$ dan apabila $R_0<1$ berakibat $\lambda_4=(R_0\mu_0-\mu_0)=\mu_0(R_0-1)<0\Leftrightarrow\lambda_4<0$ Dengan kata lain semua nilai eigen dari persamaan polinomial $p(\lambda)=(\lambda+\mu)(\lambda+M)(\lambda+(\mu+\delta))(\lambda-(R_0\mu_0-\mu_0))=0$

adalah $\lambda_1<0,\lambda_2<0,$ dan $\lambda_3<0$ untuk setiap kondisi R_0, dan $\lambda_4<0$ apabila $R_0<1$ dan $\lambda_4>0$ apabila $R_0>1$. Jadi titik keseimbangan E_1 stabil asimtotik lokal saat $R_0<1$ dan E_1 tidak stabil saat $R_0>1$.

4.3.2 Analisis Kestabilan di sekitar Titik Kesetimbangan Endemik

Untuk titik kesetimbangan endemik $E_2\left(\bar{s},\bar{i},\bar{r},\bar{i}_0\right)$ dengan

$$\frac{\partial\left(\frac{ds}{dt}\right)}{\partial s}=\frac{\partial\left[\mu-\left(\mu+\beta i_0\right)s+\delta\right]}{\partial s}=-\mu-\beta i_0=-\mu-\beta\bar{i}_0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di}{dt}\right)}{\partial s}=\frac{\partial\left[\beta i_0 s-\left(\mu+\gamma+\alpha\right)i\right]}{\partial s}=\beta_0 i_0=\beta_0\bar{i}_0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{dr}{dt}\right)}{\partial s}=\frac{\partial\left[\gamma i-\left(\mu+\delta\right)r\right]}{\partial s}=0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di_0}{dt}\right)}{\partial s}=\frac{\partial\left[\beta_0 i_0\left(1-i_0\right)-\mu_0 i_0\right]}{\partial s}=0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{ds}{dt}\right)}{\partial i}=\frac{\partial\left[\mu-\left(\mu+\beta_0\right)s+\delta\right]}{\partial i}=0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di}{dt}\right)}{\partial i}=\frac{\partial\left[\beta i_0 s-\left(\mu+\gamma+\alpha\right)i\right]}{\partial i}=-\left(\mu+\gamma+\alpha\right)=-M$$

$$\frac{\partial\left(\frac{dr}{dt}\right)}{\partial i}=\frac{\partial\left[\gamma i-\left(\mu+\delta\right)r\right]}{\partial i}=\gamma$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di_0}{dt}\right)}{\partial i}=\frac{\partial\left[\beta_0 i_0\left(1-i_0\right)-\mu_0 i_0\right]}{\partial i}=0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{ds}{dt}\right)}{\partial r}=\frac{\partial\left[\mu-\left(\mu+\beta i_0\right)s+\delta\right]}{\partial r}=0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di}{dt}\right)}{\partial r}=\frac{\partial\left[\beta i_0 s-\left(\mu+\gamma+\alpha\right)i\right]}{\partial r}=0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{dr}{dt}\right)}{\partial r}=\frac{\partial\left[\gamma i-(\mu+\delta)r\right]}{\partial r}=-\mu-\delta=-(\mu+\delta)$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di_0}{dt}\right)}{\partial r}=\frac{\partial\left[\beta_0 i_0(1-i_0)-\mu_0 i_0\right]}{\partial r}=0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{ds}{dt}\right)}{\partial i_0}=\frac{\partial\left[\mu-(\mu+\beta i_0)s+\delta\right]}{\partial i_0}=-\beta\bar{s}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di}{dt}\right)}{\partial i_0}=\frac{\partial\left[\beta i_0 s-(\mu+\gamma+\alpha)i\right]}{\partial i_0}=\beta s=\beta\bar{s}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{dr}{dt}\right)}{\partial i_0}=\frac{\partial\left[\gamma i-(\mu+\delta)r\right]}{\partial i_0}=0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di_0}{dt}\right)}{\partial i_0}=\frac{\partial\left[\beta_0 i_0(1-i_0)-\mu_0 i_0\right]}{\partial i_0}=\frac{\partial\left[\beta_0 i_0-\beta_0 i_0^{\,2}-\mu_0 i_0\right]}{\partial i_0}=\beta_0-2\beta_0 i_0-\mu_0$$

$$\Leftrightarrow \beta_0-2\beta_0\left(\frac{\mu_0}{\beta_0}(R_0-1)\right)-\mu_0=(\mu_0 R_0)-2\mu_0 R_0+2\mu_0-\mu_0$$

$$\Leftrightarrow -\mu_0 R_0+\mu_0=-\mu_0(R_0-1)$$

Jadi untuk E_2 diperoleh matriks jacobian

$$J(E_2)=\begin{pmatrix}-\mu-\beta i_0 & 0 & \delta & -\beta s\\ \beta i_0 & -M & 0 & \beta s\\ 0 & \gamma & -(\mu+\delta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\mu_0(R_0-1)\end{pmatrix}$$

Untuk mencari nilai-nilai eigen dari matrik jacobian dibentuk polinomial karakteristik berikut.

$$p(\lambda)=\det\left(\lambda I-J(E_2)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\mu-\beta i_0 & 0 & \delta & -\beta s\\ \beta i_0 & -M & 0 & \beta s\\ 0 & \gamma & -(\mu+\delta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\mu_0(R_0-1)\end{pmatrix}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{pmatrix}\lambda+\mu+\beta\bar{i}_0 & 0 & -\delta & \beta\bar{s}\\ -\beta\bar{i}_0 & \lambda+M & 0 & -\beta\bar{s}\\ 0 & -\gamma & \lambda+(\mu+\delta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda+\mu_0(R-1)\end{pmatrix}\right)=0$$

Dari determinan di atas diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut,

$$q(\lambda)=(\lambda+\mu+\beta\bar{i}_0)\begin{vmatrix}\lambda+M & 0 & -\beta\bar{s}\\ -\gamma & \lambda+(\mu+\delta) & 0\\ 0 & 0 & \lambda+\mu_0(R_0-1)\end{vmatrix}-\delta\begin{vmatrix}-\beta\bar{i}_0 & \lambda+M & -\beta\bar{s}\\ 0 & -\gamma & 0\\ 0 & 0 & \lambda+\mu_0(R_0-1)\end{vmatrix}$$

$$-\beta\bar{s}\begin{vmatrix}\beta\bar{s} & \lambda+M & 0\\ 0 & -\gamma & \lambda+(\mu+\delta)\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow q(\lambda)=(\lambda+\mu+\beta\bar{i}_0)\begin{vmatrix}\lambda+M & 0 & -\beta\bar{s}\\ -\gamma & \lambda+(\mu+\delta) & 0\\ 0 & 0 & \lambda+\mu_0(R_0-1)\end{vmatrix}$$

$$-\delta\begin{vmatrix}-\beta\bar{i}_0 & \lambda+M & -\beta\bar{s}\\ 0 & -\gamma & 0\\ 0 & 0 & \lambda+\mu_0(R_0-1)\end{vmatrix}+0$$

$$\Leftrightarrow q(\lambda)=(\lambda+\mu+\beta\bar{i}_0)(\lambda+M)(\lambda+(\mu+\delta))(\lambda+\mu_0(R_0-1))-\delta(-\beta\bar{i}_0)(-\gamma)(\lambda+\mu_0(R_0-1))$$

$$\Leftrightarrow q(\lambda)=(\lambda+\mu_0(R_0-1))\left[(\lambda+\mu+\beta\bar{i}_0)(\lambda+M)(\lambda+(\mu+\delta))-\beta\bar{i}_0\gamma\delta\right]$$

$$=(\lambda+\mu_0(R_0-1))\left[(\lambda+\mu+\beta\bar{i}_0)(\lambda+M)(\lambda+(\mu+\delta))-\beta\bar{i}_0\gamma\delta\right]$$

$$= \left(\lambda + \mu_0 \left(R_0 - 1\right)\right)\left[\left(\lambda^2 + \lambda M + \mu\lambda + \mu M + \beta\bar{i}_0\lambda + \beta\bar{i}_0 M\right)\left(\lambda + \left(\mu + \delta\right)\right) - \beta\bar{i}_0\gamma\delta\right]$$
$$= \left(\lambda + \mu_0 \left(R_0 - 1\right)\right)\left[\left(\lambda^2 + \lambda\left(M + \mu + \beta\bar{i}_0\right) + \mu M + \beta\bar{i}_0 M\right)\left(\lambda + \left(\mu + \delta\right)\right) - \beta\bar{i}_0\gamma\delta\right]$$
$$= \left(\lambda + \mu_0 \left(R_0 - 1\right)\right)\left[\left(\lambda^2 + \lambda\left(M + \mu + \beta\bar{i}_0\right) + M\left(\mu + \beta\bar{i}_0\right)\right)\left(\lambda + \left(\mu + \delta\right)\right) - \beta\bar{i}_0\gamma\delta\right]$$
$$= \left(\lambda + \mu_0 \left(R_0 - 1\right)\right) r\left(\lambda\right)$$

$$r\left(\lambda\right) = \left(\lambda^3 + \lambda^2\left(M + \mu + \beta\bar{i}_0\right) + \lambda M\left(\mu + \beta\bar{i}_0\right)\right) + \left(\mu + \delta\right)\lambda^2$$
$$+\lambda\left(M + \mu + \beta\bar{i}_0\right)\left(\mu + \delta\right) + M\left(\mu + \beta\bar{i}_0\right)\left(\mu + \delta\right) - \beta\bar{i}_0\gamma\delta$$

$$r\left(\lambda\right) = \lambda^3 + \lambda^2\left(M + \mu + \beta\bar{i}_0 + \mu + \delta\right) + \lambda\left(M\mu + M\beta\bar{i}_0\right) + \lambda\left(M + \mu + \beta\bar{i}_0\right)\left(\mu + \delta\right)$$
$$+M\left(\mu + \beta\bar{i}_0\right)\left(\mu + \delta\right) - \beta\bar{i}_0\gamma\delta$$

$$r\left(\lambda\right) = \lambda^3 + \left(M + \mu + \beta\bar{i}_0 + \mu + \delta\right)\lambda^2 + \left(M\mu + M\beta\bar{i}_0 + \left(M + \mu + \beta\bar{i}_0\right)\left(\mu + \delta\right)\right)\lambda$$
$$+M\left(\mu + \beta\bar{i}_0\right)\left(\mu + \delta\right) - \beta\bar{i}_0\gamma\delta$$

$$r\left(\lambda\right) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C$$

Dari persamaan karakteristik $q\left(\lambda\right)$ ditemukan salah satu nilai eigennya yaitu $\lambda_1 = -\mu_0\left(R_0 - 1\right)$. λ_1 akan bernilai negatif jika $R_0 > 1$, sedangkan nilai-nilai eigen yang lain termuat dalam polinomial $r\left(\lambda\right) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$. Nilai-nilai eigen lainnya akan bernilai negatif apabila $AB > C$, $A > 0, B > 0$ dan $C > 0$ sesuai kriteria Routh-Hurwitz.

Diperoleh

$$A = \left(M + \mu + \beta\bar{i}_0 + \mu + \delta\right) = \left(M + 2\mu + \beta\bar{i}_0 + \delta\right)$$

$$B = \left(M\mu + M\beta\bar{i}_0 + \left(M + \mu + \beta\bar{i}_0\right)\left(\mu + \delta\right)\right)$$

$$= M\mu + M\beta\bar{i}_0 + M\mu + \mu^2 + \beta\bar{i}_0\mu + \delta M + \delta\mu + \delta\beta\bar{i}_0$$
$$= \left(M\mu + \delta M\right) + \left(M\beta\bar{i}_0 + \beta\bar{i}_0\mu + \delta\beta\bar{i}_0\right) + \left(M\mu + \mu^2 + \delta\mu\right)$$
$$= M\left(\mu + \delta\right) + \beta\bar{i}_0\left(M + \mu + \delta\right) + \mu\left(M + \mu + \delta\right)$$
$$= M\left(\mu + \delta\right) + \left(\beta\bar{i}_0 + \mu\right)\left(M + \mu + \delta\right)$$

$$C = M\left(\mu + \beta\bar{i}_0\right)\left(\mu + \delta\right) - \beta\bar{i}_0\gamma\delta$$

$$= M\left(\mu + \delta\right)\left(\mu + \beta\bar{i}_0\right) - \beta\bar{i}_0\gamma\delta$$
$$= \left(M\mu + M\delta\right)\left(\mu + \beta\bar{i}_0\right) - \beta\bar{i}_0\gamma\delta$$
$$= M\mu\left(\mu + \beta\bar{i}_0\right) + M\delta\left(\mu + \beta\bar{i}_0\right) - \beta\bar{i}_0\gamma\delta$$
$$= M\mu\left(\mu + \beta\bar{i}_0\right) + M\delta\mu + M\delta\beta\bar{i}_0 - \beta\bar{i}_0\gamma\delta$$
$$= M\mu\left(\mu + \beta\bar{i}_0\right) + M\delta\mu + \left(M\delta\beta\bar{i}_0 - \gamma\delta\beta\bar{i}_0\right)$$
$$= M\mu\left(\mu + \beta\bar{i}_0\right) + M\delta\mu + \left(M - \gamma\right)\left(\delta\beta\bar{i}_0\right)$$
$$= M\mu\left(\mu + \beta\bar{i}_0\right) + M\delta\mu + \left(M - \gamma\right)\delta\beta\bar{i}_0$$
$$= M\mu\left(\mu + \beta\bar{i}_0\right) + \left(M - \gamma\right)\delta\beta\bar{i}_0 + M\delta\mu$$

Oleh sebab $M = \mu + \gamma + \alpha$, $\mu > 0, \gamma > 0, \alpha > 0, \delta > 0$ dan $\bar{i}_0 \geq 0$ sehingga $M - \gamma = \mu + \alpha$ mengakibatkan $C = M\mu\left(\mu + \beta\bar{i}_0\right) + \left(M - \gamma\right)\delta\beta\bar{i}_0 + M\delta\mu > 0$.

Jadi $C > 0$.

Kemudian akan ditunjukkan $AB > C$ untuk setiap $A, B, C > 0$, diperoleh

$$AB = \left(M + 2\mu + \beta\bar{i}_0 + \delta\right)\left(M\left(\mu + \delta\right) + \left(\beta\bar{i}_0 + \mu\right)\left(M + \mu + \delta\right)\right)$$

$$= M^2\left(\mu + \delta\right) + M\left(\beta\bar{i}_0 + \mu\right)\left(M + \mu + \delta\right) + 2\mu M\left(\mu + \delta\right) + 2\mu\left(\beta\bar{i}_0 + \mu\right)\left(M + \mu + \delta\right)$$

$$+\beta\bar{i}_0 M\left(\mu + \delta\right) + \beta\bar{i}_0\left(\beta\bar{i}_0 + \mu\right)\left(M + \mu + \delta\right) + \delta M\left(\mu + \delta\right) + \delta\left(\beta\bar{i}_0 + \mu\right)\left(M + \mu + \delta\right)$$

$$= M^2\mu + M^2\delta + \left(M\beta\bar{i}_0 + M\mu\right)\left(M + \mu + \delta\right) + 2\mu^2 M + 2\mu M\delta + \left(2\mu\beta\bar{i}_0 + 2\mu^2\right)\left(M + \mu + \delta\right)$$

$$+\beta\bar{i}_0 M\mu + \beta\bar{i}_0 M\delta + \left(\beta^2\bar{i}_0^2 + \beta\bar{i}_0\mu\right)\left(M + \mu + \delta\right) + \delta M\mu + \delta^2 M + \left(\delta\beta\bar{i}_0 + \delta\mu\right)\left(M + \mu + \delta\right)$$

$$= M^2\mu + M^2\delta + M^2\beta\bar{i}_0 + M\beta\bar{i}_0\mu + M\beta\bar{i}_0\delta + M^2\mu + M\mu^2 + M\mu\delta + 2\mu^2 M + 2\mu M\delta + \left(2\mu\beta\bar{i}_0 + 2\mu^2\right)\left(M + \mu + \delta\right)$$

$$+\beta\bar{i}_0 M\mu + \beta\bar{i}_0 M\delta + \left(\beta^2\bar{i}_0^2 + \beta\bar{i}_0\mu\right)\left(M + \mu + \delta\right) + \delta M\mu + \delta^2 M + \left(\delta\beta\bar{i}_0 + \delta\mu\right)\left(M + \mu + \delta\right)$$

$$= \left(M^2\mu + M^2\mu\right) + \left(M\mu^2 + 2\mu^2 M\right) + \left(M^2\delta +\right) + M^2\beta\bar{i}_0 + \left(M\beta\bar{i}_0\mu + \beta\bar{i}_0 M\mu\right)$$

$$+\left(M\beta\bar{i}_0\delta+\beta\bar{i}_0M\delta\right)+\left(M\mu\delta+2\mu M\delta+\delta M\mu\right)+\left(2\mu\beta\bar{i}_0+2\mu^2\right)\left(M+\mu+\delta\right)+\left(\beta^2\bar{i}_0^2+\beta\bar{i}_0\mu\right)\left(M+\mu+\delta\right)$$

$$+\delta^2M+\left(\delta\beta\bar{i}_0+\delta\mu\right)\left(M+\mu+\delta\right)$$

$$=\left(M^2\mu+M^2\mu\right)+\left(M\mu^2+2M\mu^2\right)+M^2\delta+M^2\beta\bar{i}_0+\left(M\beta\bar{i}_0\mu+M\beta\bar{i}_0\mu\right)$$

$$+\left(M\beta\bar{i}_0\delta+M\beta\bar{i}_0\delta\right)+\left(M\mu\delta+2M\mu\delta+M\mu\delta\right)+\left(2\mu\beta\bar{i}_0+2\mu^2\right)\left(M+\mu+\delta\right)+\left(\beta^2\bar{i}_0^2+\beta\bar{i}_0\mu\right)\left(M+\mu+\delta\right)$$

$$+\delta^2M+\left(\delta\beta\bar{i}_0+\delta\mu\right)\left(M+\mu+\delta\right)$$

$$=2M^2\mu+\left(M\mu^2+2M\mu^2\right)+M^2\delta+M^2\beta\bar{i}_0+\left(M\beta\bar{i}_0\mu+M\beta\bar{i}_0\mu\right)$$

$$+\left(M\beta\bar{i}_0\delta+M\beta\bar{i}_0\delta\right)+\left(M\mu\delta+2M\mu\delta+M\mu\delta\right)+\left(2\mu\beta\bar{i}_0+2\mu^2\right)\left(M+\mu+\delta\right)+\left(\beta^2\bar{i}_0^2+\beta\bar{i}_0\mu\right)\left(M+\mu+\delta\right)$$

$$+\delta^2M+\left(\delta\beta\bar{i}_0+\delta\mu\right)\left(M+\mu+\delta\right)$$

$$=2M^2\mu+3M\mu^2+M^2\delta+M^2\beta\bar{i}_0+2M\beta\bar{i}_0\mu+2M\beta\bar{i}_0\delta+4M\mu\delta+\left(2\mu\beta\bar{i}_0+2\mu^2\right)\left(M+\mu+\delta\right)+\left(\beta^2\bar{i}_0^2+\beta\bar{i}_0\mu\right)\left(M+\mu+\delta\right)$$

$$+\delta^2M+\left(\delta\beta\bar{i}_0+\delta\mu\right)\left(M+\mu+\delta\right)$$

$$=2M^2\mu+\left(3M\mu^2+2\mu^2M\right)+M^2\delta+M^2\beta\bar{i}_0+2M\beta\bar{i}_0\mu+\left(2M\beta\bar{i}_0\delta+\delta\beta\bar{i}_0M\right)+\left(2\mu\beta\bar{i}_0M+\beta\bar{i}_0\mu M\right)+\left(4M\mu\delta+\delta\mu M\right)+\delta^2M$$

$$+2\mu^2\beta\bar{i}_0+2\mu\beta\bar{i}_0\delta+2\mu^3+2\mu^2\delta+\beta^2\bar{i}_0^2M+\beta^2\bar{i}_0^2\mu+\beta^2\bar{i}_0^2\delta+\beta\bar{i}_0\mu^2+\beta\bar{i}_0\mu\delta+\delta\beta\bar{i}_0\mu+\beta\bar{i}_0\delta^2+\delta\mu^2+\delta^2\mu$$

$$AB=2M^2\mu+4M\mu^2+M^2\delta+M^2\beta\bar{i}_0+2M\beta\bar{i}_0\mu+3M\beta\bar{i}_0\delta+3\beta\bar{i}_0\mu M+5M\mu\delta+\delta^2M$$

$$+2\mu^2\beta\bar{i}_0+2\mu\beta\bar{i}_0\delta+2\mu^3+2\mu^2\delta+\beta^2\bar{i}_0^2M+\beta^2\bar{i}_0^2\mu+\beta^2\bar{i}_0^2\delta+\beta\bar{i}_0\mu^2+\beta\bar{i}_0\mu\delta+\delta\beta\bar{i}_0\mu+\beta\bar{i}_0\delta^2+\delta\mu^2+\delta^2\mu$$

Disisi lain $C=M\mu\left(\mu+\beta\bar{i}_0\right)+\left(M-\gamma\right)\delta\beta\bar{i}_0+M\delta\mu$

$$= M\mu^2 + M\mu\beta\bar{i}_0 + M\delta\beta\bar{i} - \gamma\delta\beta\bar{i}_0 + M\delta\mu$$

Sehingga diperoleh *AB*-*C* sebagai berikut

$$AB - C = 2M^2\mu + 4M\mu^2 + M^2\delta + M^2\beta\bar{i}_0 + 2M\beta\bar{i}_0\mu + 3M\beta\bar{i}_0\delta + 3\beta\bar{i}_0\mu M + 5M\mu\delta + \delta^2 M$$

$$+2\mu^2\beta\bar{i}_0 + 2\mu\beta\bar{i}_0\delta + 2\mu^3 + 2\mu^2\delta + \beta^2\bar{i}_0^2 M + \beta^2\bar{i}_0^2\mu + \beta^2\bar{i}_0^2\delta + \beta\bar{i}_0\mu^2 + \beta\bar{i}_0\mu\delta$$

$$+\delta\beta\bar{i}_0\mu + \beta\bar{i}_0\delta^2 + \delta\mu^2 + \delta^2\mu - \left(M\mu^2 + M\mu\beta\bar{i}_0 + M\delta\beta\bar{i} - \gamma\delta\beta\bar{i}_0 + M\delta\mu\right)$$

$$AB - C = 2M^2\mu + 3M\mu^2 + M^2\delta + M^2\beta\bar{i}_0 + 2M\beta\bar{i}_0\mu + 2M\beta\bar{i}_0\delta + 2\beta\bar{i}_0\mu M + 4M\mu\delta + \delta^2 M$$

$$+2\mu^2\beta\bar{i}_0 + 2\mu\beta\bar{i}_0\delta + 2\mu^3 + 2\mu^2\delta + \beta^2\bar{i}_0^2 M + \beta^2\bar{i}_0^2\mu + \beta^2\bar{i}_0^2\delta + \beta\bar{i}_0\mu^2 + \beta\bar{i}_0\mu\delta$$

$$+\delta\beta\bar{i}_0\mu + \beta\bar{i}_0\delta^2 + \delta\mu^2 + \delta^2\mu + \gamma\delta\beta\bar{i}$$

Oleh sebab $M = \mu + \gamma + \alpha$, $\mu > 0, \gamma > 0, \alpha > 0, \delta > 0$ dan $\bar{i}_0 \geq 0$ sehingga *AB*-*C* positif dan karena *C* positif mengakibatkan $AB > C$.

Jadi terbukti $AB > C$ untuk setiap $A, B, C > 0$.

Dengan demikian λ_2, λ_3 dan λ_4 bernilai negatif artinya jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan E_2 stabil asimtotik lokal.

Dari bukti kestabilan di atas diperoleh teorema sebagai berikut.

Teorema 4.2

Dipunyai $R_0 = \dfrac{\beta_0}{\mu_0}$, dan E_1, E_2 adalah titik ekuilibrium sistem (4.3) seperti pada teorema (4.1).

1. Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium E_1 stabil asimtotik lokal

2. Jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium E_1 tidak stabil dan titik ekuilibrium endemik E_2 stabil asimtotik lokal.

4.4 Simulasi Model

Simulasi model dilakukan dengan menggunakan *Software Maple 13*. Pada bagian ini dilakukan simulasi pada titik ekuilibrium bebas peyakit dan titik ekuilibrium endemik.

4.4.1 Simulasi di titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Berdasarkan penjelasan makna nilai-nilai parameter, nilai μ menyatakan Tingkat kematian manusia tanpa pengaruh flu burung , μ_0 menyatakan tingkat kematian unggas tanpa pengaruh flu burung, β menyatakan rata-rata proporsi tingkat efektifitas kontak infektif antara manusia yang rentan dengan unggas yang terinfeksi, β_0 menyatakan rata-rata proporsi tingkat efektifitas kontak infektif antara unggas yang retan dengan unggas yang terinfeksi, δ menyatakan laju hilangnya kekebalan, γ menyatakan laju menyembuhan, α menyatakan laju kematian manusia akibat flu burung.

Jika diasumsikan nilai $\mu = 0{,}00004$ artinya rata-rata ada 4 individu manusia yang mati tanpa pengaruh flu burung setelah 100000 hari, nilai $\mu_0 = 0{,}04$ artinya rata-rata ada 4 individu unggas yang mati setelah 100 hari, nilai $\beta = 0{,}075$ artinya rata-rata ada 75 manusia rentan yang menjadi terifeksi apabila ada 1000 manusia rentan yang kontak langsung dengan unggas terinfeksi, nilai $\beta_0 = 0{,}035$ artinya rata-rata ada 35 unggas rentan yang menjadi terifeksi apabila ada 1000

unggas rentan yang kontak langsung dengan manusia yang terinfeksi, $\delta = 0{,}1$ artinya 1 orang kehilangan kekebalan setelah 10 hari, $\gamma = 0{,}25$ artinya 25 orang sembuh setelah 100 hari. $\alpha = 0{,}002$ artinya 2 orang mati karena flu burung setelah 1000 hari.

Nilai-nilai parameter yang digunakan untuk simulasi di titik ekuilibrium bebas penyakit $E_1 = (1,0,0,0)$ disajikan pada tabel 4.3.

Tabel 4.3 Nilai Parameter untuk Simulasi Model Bebas Penyakit

Parameter	Nilai
μ	0,00004
β	0,075
μ_0	0,04
β_0	0,035
δ	0,1
γ	0,25
α	0,002

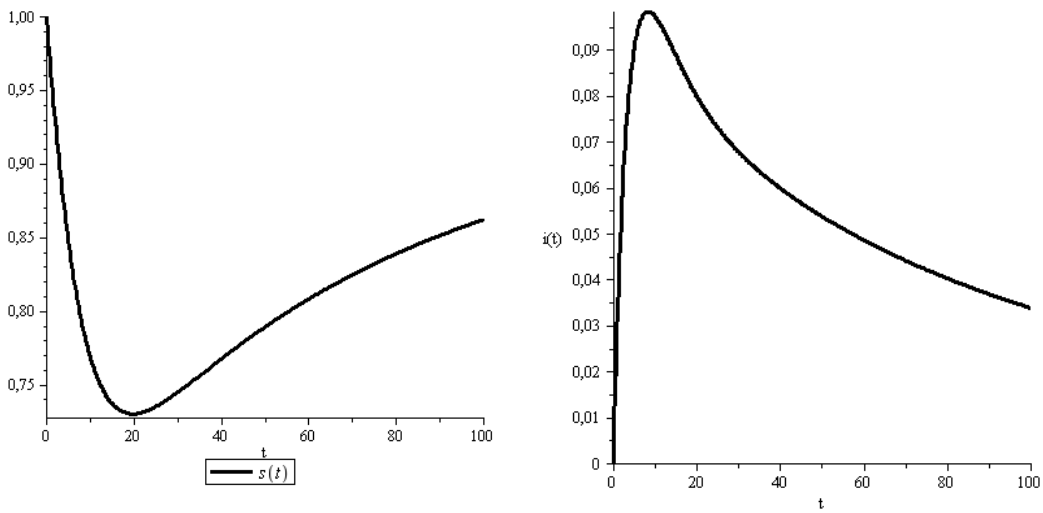
Dari nilai-nilai parameter yang diberikan, diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta_0}{\mu_0} = 0{,}875 < 1$$

Dari Sistem (4.3) dan Tabel 4.3 diperoleh

$$\frac{ds}{dt} = 0,00004 - \left(0,00004 + 0,075i_0\right)s + 0,1r$$
$$\frac{di}{dt} = 0,075i_0 s - \left(0,00004 + 0,25 + 0,025\right)i$$
$$\frac{dr}{dt} = 0,25i - \left(0,00004 + 0,1\right)r$$
$$\frac{di_0}{dt} = 0,035i_0\left(1 - i_0\right) - 0,04i_0$$

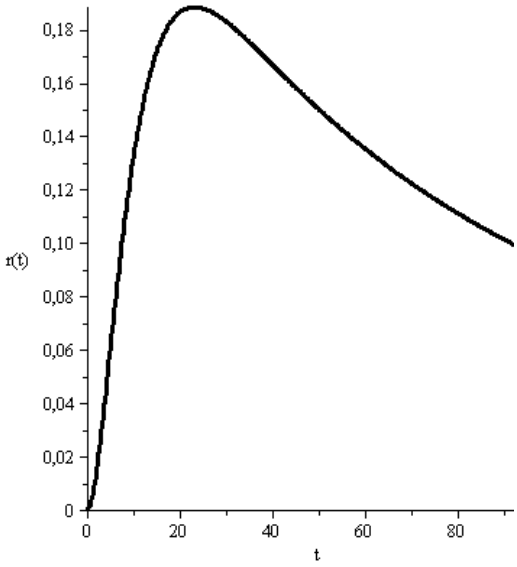
Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 4.2 dan Gambar 4.3.



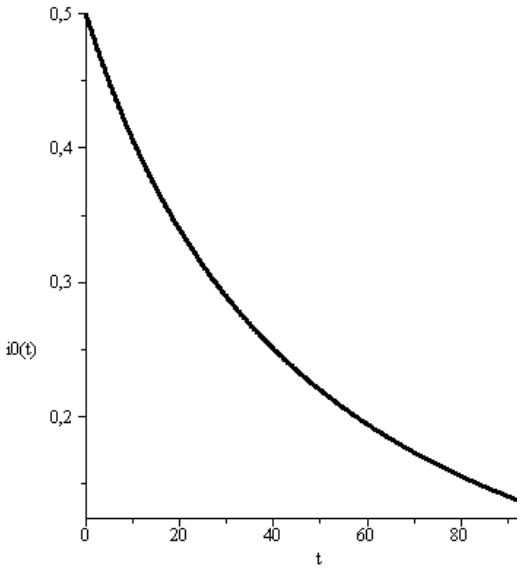
a. Grafik $s(t)$ terhadap t

b. Grafik $i(t)$ terhadap t

Gambar 4.2. Grafik $s(t)$ dan $i(t)$ terhadap t untuk titik ekuilibrium bebas penyakit $E_1(1,0,0,0)$.



c. Grafik r(t) terhadap t



d. Grafik $i_0(t)$ terhadap t

Gambar 4.3. Grafik $r(t)$ dan $i_0(t)$ terhadap t untuk titik ekuilibrium bebas penyakit $E_1(1,0,0,0)$.

Berdasarkan hasil simulasi pada Gambar 4.2 sampai Gambar 4.3 untuk $R_0 = 0,875 < 1$. Proporsi kelompok manusia *suspected* mengalami penurunan sampai t ke-20 setelah itu kembali mengalami kenaikan ini disebabkan karena adanya kematian pada proporsi manusia *susceptible* setelah itu naik karena adanya penambahan individu dari kelompok manusia *recovered* setelah t lebih dari 20. Proporsi kelompok manusia *infected* mengalami kenaikan sampai t ke-9 karena manusia *suspected* kehilangan kekebalan dan menjadi manusia *infected,* untuk waktu t ke-10 dan seterusnya manusia *infected* mengalami penurunan karena manusia *infected* berangsur-angsur sembuh menjadi kelompok manusia *recovered* . Lama kelamaan apabila tidak ada lagi manusia yeng terinfeksi maka manusia *recovered* akan konstan pada titik nol.

Kelompok unggas *infected* mengalami penurunan hingga dan mencapai nilai 0 pada t ke-100, penurunan tersebut terjadi unggas *infected* mati, kemudian konstan di angka nol karena tidak ada penambahan dari unggas *suspected* yang terinfeksi. Ini berarti untuk jangka waktu tertentu infeksi karena virus akan menghilang dalam populasi. Hal ini berarti tidak terjadi epidemi pada populasi.

4.4.2 Simulasi di Titik Ekuilibrium Endemik

Jika diasumsikan nilai $\mu = 0{,}00004$ artinya rata-rata ada 4 individu manusia mati tanpa pengaruh flu burung setelah 100000 hari , nilai $\mu_0 = 0{,}0004$ artinya rata-rata ada 4 ekor unggas mati tanpa pengaruh flu burung setelah 10000 hari, nilai $\beta = 0{,}075$ artinya rata-rata ada 75 manusia rentan yang menjadi terifeksi apabila ada 1000 manusia rentan yang kontak langsung dengan unggas terinfeksi, nilai $\beta_0 = 0{,}035$ artinya rata-rata ada 35 unggas rentan yang menjadi terifeksi apabila ada 1000 unggas rentan yang kontak langsung dengan manusia yang terinfeksi, $\delta = 0{,}1$ artinya 1 orang kehilangan kekebalan setelah 10 hari, $\gamma = 0{,}25$ artinya rata-rata ada 25 orang sembuh setelah 100 hari. $\alpha = 0{,}002$ artinya 2 orang mati karena flu burung setelah 1000 hari.

Nilai-nilai parameter yang digunakan untuk simulasi di titik ekuilibrium endemik E_2 disajikan pada tabel 4.4.

Tabel 4.4 Nilai Parameter untuk Simulasi Model Endemik

Parameter	Nilai
μ	0,00004
β	0,075
μ_0	0,0004
β_0	0,035
δ	0,1
γ	0,25
α	0,002

Dari nilai-nilai parameter dan Sistem (4.3) diperoleh

$$\frac{ds}{dt} = 0,00004 - \left(0,00004 + 0,075i_0\right)s + 0,1r$$
$$\frac{di}{dt} = 0,075i_0 s - \left(0,00004 + 0,25 + 0,025\right)i$$
$$\frac{dr}{dt} = 0,25i - \left(0,00004 + 0,1\right)r$$
$$\frac{di_0}{dt} = 0,035i_0\left(1 - i_0\right) - 0,0004i_0$$

$$\bar{s} = \frac{\left(MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)}{\left(\beta\left(R_0-1\right)\left(M+\frac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)} = 0.08$$

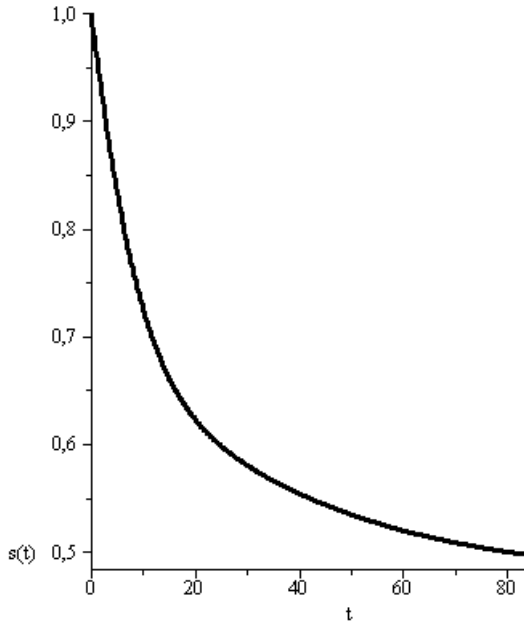
$$\bar{i} = \frac{\beta\left(\mu+\delta\right)\left(R_0-1\right)}{\left(\beta\left(R_0-1\right)\left(M+\frac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)} = 0.017$$

$$\bar{r} = \frac{\beta\gamma\left(R_0-1\right)}{\left(\beta\left(R_0-1\right)\left(M+\frac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)} = 0.042$$

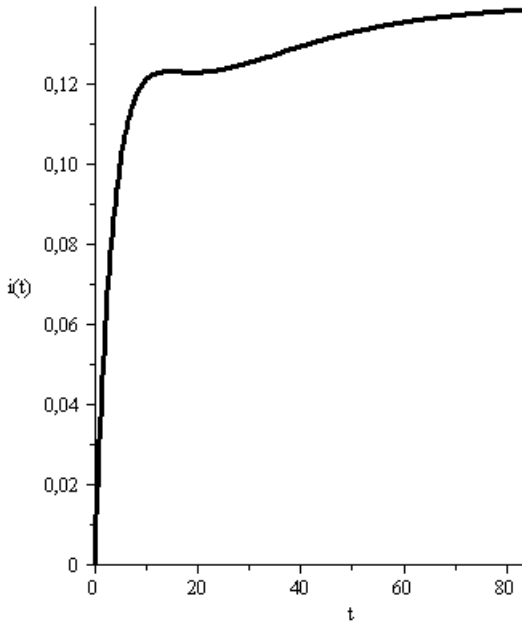
$$\bar{i}_0 = \frac{\mu_0}{\beta_0}\left(R_0-1\right) = 0.988$$

Jadi diperoleh titik ekuilibrium endemik yaitu $E_2 = \left(0.08;0.017;0.042;0.988\right)$.

Kemudian dari nilai-nilai parameter, diperoleh $R_0 = \frac{\beta_0}{\mu_0} = 87{,}5>1$.Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 4.4 sampai dengan Gambar 4.5 berikut ini.

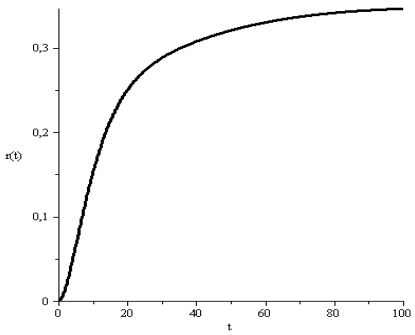


a. Grafik $s(t)$ terhadap t

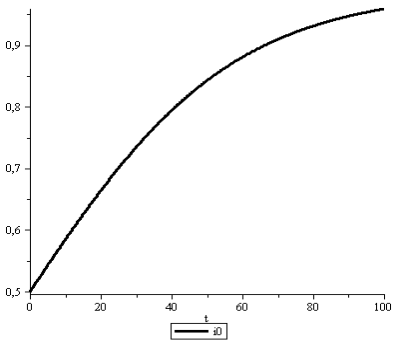


b. Grafik $i(t)$ terhadap t

Gambar 4.4. Grafik $s(t)$ dan $i(t)$ terhadap t untuk titik ekuilibrium endemik $E_2 = (0.08; 0.017; 0.042; 0.988)$.



c. Grafik r(t) terhadap t



d. Grafik $i0(t)$ terhadap t

Gambar 4.5. Grafik $r(t)$ dan $i_0(t)$ terhadap t untuk titik ekuilibrium endemik $E_2 = (0.08; 0.017; 0.042; 0.988)$.

Berdasarkan hasil simulasi pada Gambar 4.5 sampai Gambar 4.7, untuk $R_0 = 87{,}5 > 1$. Proporsi kelompok manusia *suspected* mengalami penurunan, ini disebabkaan karena kelompok manusia *suspected* terinfeksi dan menjadi kelompok manusia *infected*. Proporsi kelompok manusia *infected* mengalami kenaikan, ini disebabkan karena kelompok manusia *suspected* terinfeksi dan menjadi kelompok manusia *infected*. Proporsi kelompok manusia *recovered* mengalami kenaikan, ini disebabkan kelompok manusia *infected* sembuh dan menjadi kelompok manusia *recovered*.

Proposi unggas *infected* mengalami kenaikan disebabkan karena kelompok *suspected* terinfeksi dan menjadi kelompok unggas *infected*. Dapat dilihat bahwa penyakit tidak akan hilang saat $R_0 > 1$, sehingga perlu adanya tindakan yang dapat menghilangkan wabah atau epidemi tersebut.

BAB 5

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, diperoleh kesimpulan berikut.

1. Model penyebaran penyakit flu burung dari unggas ke manusia pada penulisan ini adalah

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \left(\mu + \frac{\beta I_0}{N_0}\right) S + \delta R$$
$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{\beta I_0}{N_0}\right) S - \left(\mu + \gamma + \alpha\right) I$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \left(\mu + \delta\right) R$$
$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N - \alpha I$$
$$\frac{dS_0}{dt} = \mu_0 N_0 - \left(\mu_0 + \frac{\beta_0 I_0}{N_0}\right) S_0$$
$$\frac{dI_0}{dt} = \left(\frac{\beta_0 I_0}{N_0}\right) S_0 - \mu_0 I_0$$

Sistem tersebut ekuivalen dengan (5.2) di bawah ini.

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \mu - \left(\mu + \beta i_0\right) s + \delta r \\ \frac{di}{dt} &= \beta i_0 s - \left(\mu + \gamma + \alpha\right) i \\ \frac{dr}{dt} &= \gamma i - \left(\mu + \delta\right) r \\ \frac{di_0}{dt} &= \beta_0 i_0 \left(1 - i_0\right) - \mu_0 i_0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

dengan

μ : Tingkat kematian individu dalam populasi manusia tanpa pengaruh flu burung,

μ_0 : Tingkat kematian individu dalam populasi unggas tanpa pengaruh flu burung,

β_0 : Tingkat efektifitas kontak infektif antara unggas terinfeksi dengan unggas rentan,

β : Tingkat efektifitas kontak infektif antara manusia yang retan dengan unggas yang terinfeksi,

δ : Laju hilangnya kekebalan,

γ : Laju menyembuhan penyakit flu burung,

α : Laju kematian manusia akibat flu burung..

2. Dari model penyebaran flu burung dari unggas ke manusia pada populasi konstan, diperoleh angka rasio reproduksi dasar $R_0 = \frac{\beta_0}{\mu_0}$. Pada saat $R_0 \leq 1$ model tersebut hanya mempunyai satu titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $E_1(s, i, r, i_0) = (1, 0, 0, 0)$ yang bersifat stabil asimtotik lokal. Kemudian pada saat $R_0 > 1$ maka model tersebut mempunyai 2 titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit yang bersifat tidak stabil dan titik ekuilibrium endemik $E_2 = (\bar{s}, \bar{i}, \bar{r}, \bar{i}_0)$ dengan

$$\bar{s} = \frac{\left(MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)}{\left(\beta\left(R_0-1\right)\left(M+\frac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)}$$

$$\bar{i} = \frac{\beta\left(\mu+\delta\right)\left(R_0-1\right)}{\left(\beta\left(R_0-1\right)\left(M+\frac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)}$$

$$\bar{r} = \frac{\beta\gamma\left(R_0-1\right)}{\left(\beta\left(R_0-1\right)\left(M+\frac{\delta}{\mu}\left(\mu+\alpha\right)\right)+MR_0\left(\mu+\delta\right)\right)} \text{ dan } \bar{i}_0 = \frac{\mu_0}{\beta_0}\left(R_0-1\right)$$

dimana $M = \mu+\gamma+\alpha$ dan $R_0 = \frac{\beta_0}{\mu_0}$.

Dimana pada saat $R_0 > 1$ titik ekuilibrium endemik $E_2 = \left(\bar{s}, \bar{i}, \bar{r}, \bar{i}_0\right)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

3. Berdasarkan angka $R_0 = \frac{\beta_0}{\mu_0}$, Jika semakin kecil tingkat penyebaran flu burung dari unggas sakit ke unggas rentan, dan semakin besar tingkat kematian individu dalam populasi unggas tanpa pengaruh flu burung, maka $R_0 < 1$ atau tidak terjadi epidemi. Sebaliknya, Jika semakin besar tingkat penyebaran flu burung dari unggas sakit ke unggas rentan, dan semakin kecil tingkat kematian individu dalam populasi unggas tanpa pengaruh flu burung, maka nilai $R_0 > 1$ atau terjadi epidemi penyakit. Ini berarti bahwa penyakit flu burung tidak akan hilang saat $R_0 > 1$.

5.2 Saran

Dalam penulisan ini, penulis membahas model penyebaran penyakit flu burung dari unggas ke manusia. Dalam penelitian ini diasumsikan tidak adanya vaksinasi. Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada masalah ini untuk mengembangkan penyakit flu burung dari unggas ke manusia namun disertai dengan vaksinasi.

DAFTAR PUSTAKA

Aditama, 2004. *Flu Burung di Manusia, Perhimpunan Dokter Paru Indonesia*.Penerbit Universitas Indonesia.Jakarta.

Anton, H. 1995. *Aljabar Linier Elementer. Edisi kelima*. (diterjemahan oleh: Silaban, P. dan Susila, I. N.). Jakarta: Erlangga.

Asmara, W. 2008. *Peran Biologi Molekuler dalam Pengendalian Avian Influenza dan Flu Burung*. Fakultas Kedokteran Hewan Universitas Gadjah Mada.

Braun, M. 1983. *Differential Equation Models*. Spinger- Verlag. New York.

Derouich & Boutayeb. 2008. *An Avian Influenza Mathematical Model*. Jurnal Applied Mathematic Sciences, Vol. 2, 2008,no. 36, 1749-1760.

Farlow, SJ. 1994. *An Introduction to Differential Equation and Their Application*. Mc Graw-Hill. New York.

Fisher, S. D. 1990. *Complex Variables Second Edition*. Wadsworth & software. Pacific Grove.California.

Hethcote H W. 2000. The Mathematic of Infectious Diseases. *SIAM Review*, 42. No.4 5599-653.

Kartono. 2001. *Maple untuk Persamaan Diferensial. Y*ogyakarta: J&J Learning.

Kocak, H. & Hole, J. K. 1991. *Dynamic and Bifurcation*. New York: Springer-Verlag.

Naipospos, T.S.P. 2006. *Perangi Flu Burung dengan Vaksinasi Unggas*. Sinar Tani. Edisi 19-25 April.

Nurheti, Yuliarti. 2006. *Menyingkap Rahasia Penyakit Flu Burung*. Penerbit ANDI.Yogyakarta.

Olsder, G.J. 1994. *Mathematics System Theory*. The Netherlands: Delftse Uitgevers Maatscappij b.v.

Perko, L. 1991. *Differential Equations and Dynamical System*. New York: Spinger-Verlag Berlin Heidelberg.

Radji, M. 2006. *Avian Influenza A(H5N1) : Patogenesis, Pencegahan, dan Penyebaran pada Manusia*. Majalah Ilmu Kefarmasian Vol III:55-65.

Rahardjo, Y, 2004. *Avian Influenza , Pencegahan, Pengendalian, dan Pemberantasannya*. PT Gita Gallus Utama.Jakarta.

Supriyono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa*. Universitas Negeri Semarang. Semarang.

Tabbu, C.R. 2000. Penyakit Ayam dan Penanggulangannya : Penyakit Bakterial, Mikal dan Viral Volume I. Kanisius. Yogyakarta.

Tu, P. N. V. 1994. *Dynamical System, An Introduction with Applications in Economics and Biology*. Spinger-Verlag. Hiedelberg, Germany.

Waluya, S.B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

LAMPIRAN

Lampiran 1

Print Out Maple 13 untuk kasus bebas penyakit

> $with(DEtools):$
> $with(plots):$
> $with(LinearAlgebra):$
> $unprotect(\text{gamma}):$
> $\text{mu} := 0.00004;\ mu0 := 0.04;\ \text{gamma} := 0.25;\ \text{delta} := 0.1;\ \text{alpha} := 0.002;\ beta0 := 0.035;\ \text{beta} := 0.075;\ R0 := \frac{\beta 0}{\mu 0}$

$$\mu := 0.00004$$

$$\mu 0 := 0.04$$

$$\gamma := 0.25$$

$$\delta := 0.1$$

$$\alpha := 0.002$$

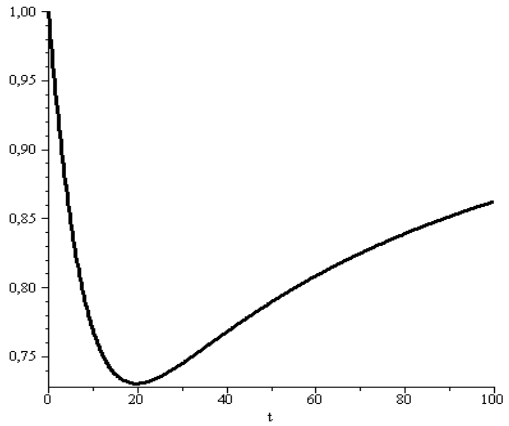
$$\beta 0 := 0.035$$

$$\beta := 0.075$$

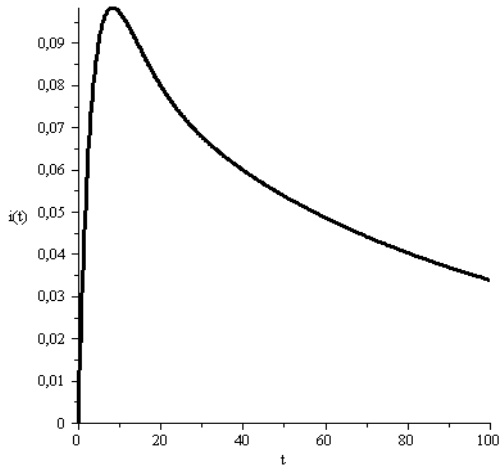
$$R0 := 0.8750000000$$

> $sys2 := \left(D(s)(t) = \mu - (\mu + \beta * i0(t)) * s(t) + \delta * r(t),\ D(i)(t) = \beta * i0(t) * s(t) - (\mu + \gamma + \alpha) * i(t),\ D(r)(t) = \gamma * i(t) - (\mu + \delta) * r(t),\ D(i0)(t) = \beta 0 * i0(t) * (1 - i0(t)) - \mu 0 * i0(t)\right):$

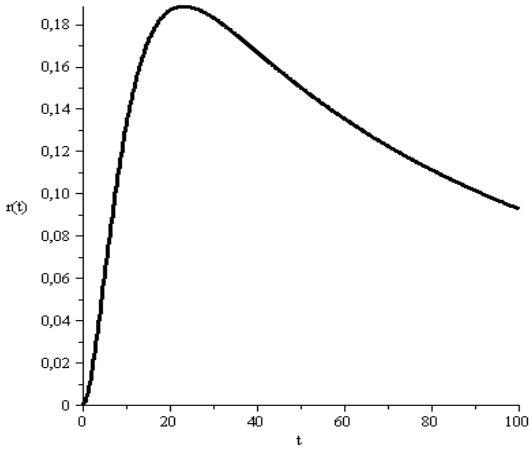
> $DEplot([sys2], [s(t), i(t), r(t), i0(t)], t = 0..100, [[s(0) = 1, i(0) = 0, r(0) = 0, i0(0) = 0.5]], stepsize = 0.2, scene = [t, s(t)], linecolour = black);$



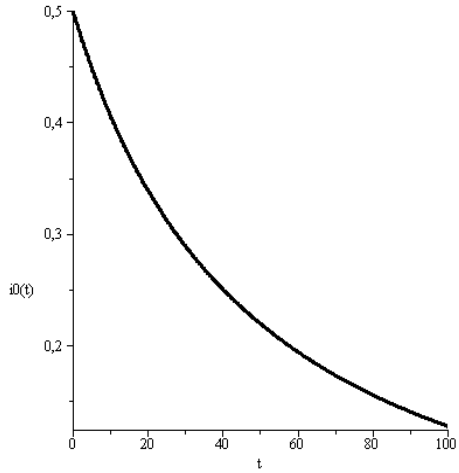
> $DEplot([sys2], [s(t), i(t), r(t), i0(t)], t = 0..100, [[s(0) = 1, i(0) = 0, r(0) = 0, i0(0) = 0.5]], stepsize = 0.2, scene = [t, i(t)], linecolour = black);$



> $DEplot([sys2], [s(t), i(t), r(t), i0(t)], t = 0..100, [[s(0) = 1, i(0) = 0, r(0) = 0, i0(0) = 0.5]], stepsize = 0.2, scene = [t, r(t)], linecolour = black);$



> $DEplot([sys2], [s(t), i(t), r(t), i0(t)], t = 0..100, [[s(0) = 1, i(0) = 0, r(0) = 0, i0(0) = 0.5]], stepsize = 0.2, scene = [t, i0(t)], linecolour = black);$



>

Lampiran 2

Print Out Maple 13 untuk kasus Endemik

> $with(DEtools)$:

> $with(plots)$:

> $with(LinearAlgebra)$:

> $unprotect(\text{gamma})$:

> $\text{mu} := 0.00004;\ mu0 := 0.0004\ ;\ \text{gamma} := 0.25;$
$\text{delta} := 0.1;\ \text{alpha} := 0.002;\ beta0 := 0.035\ ;$
$\text{beta} := 0.075;\ R0 := \dfrac{\beta 0}{\mu 0}$

$$\mu := 0.00004$$

$$\mu 0 := 0.0004$$

$$\gamma := 0.25$$

$$\delta := 0.1$$

$$\alpha := 0.002$$

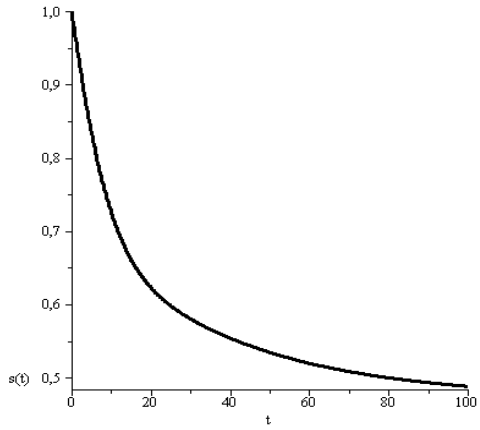
$$\beta 0 := 0.035$$

$$\beta := 0.075$$

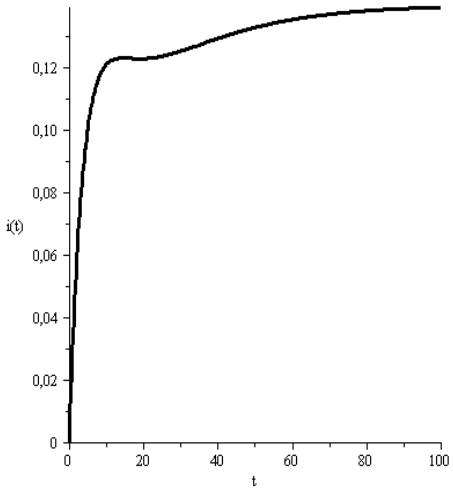
$$R0 := 87.50000000$$

> $sys2 := \left(D(s)(t) = \mu - (\mu + \beta * i0(t)) * s(t) + \delta * r(t),\ D(i)(t) = \beta * i0(t) * s(t) - (\mu + \gamma + \alpha) * i(t),\ D(r)(t) = \gamma * i(t) - (\mu + \delta) * r(t),\ D(i0)(t) = \beta 0 * i0(t) * (1 - i0(t)) - \mu 0 * i0(t)\right)$:

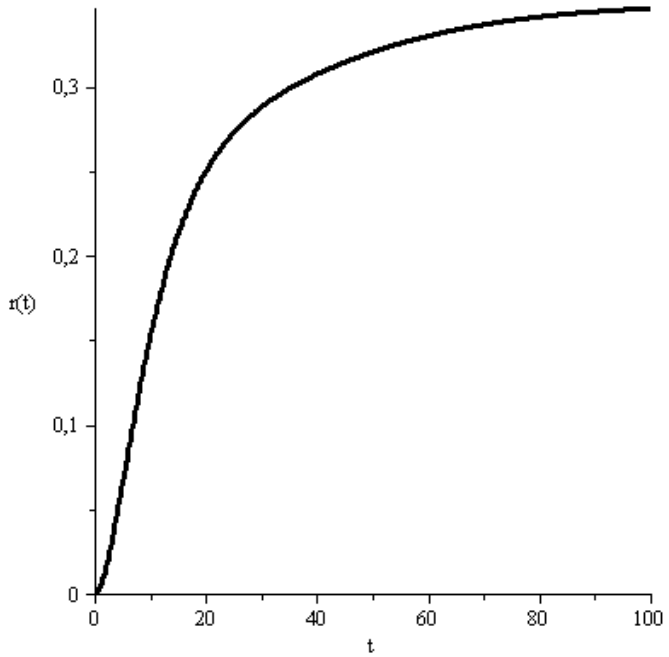
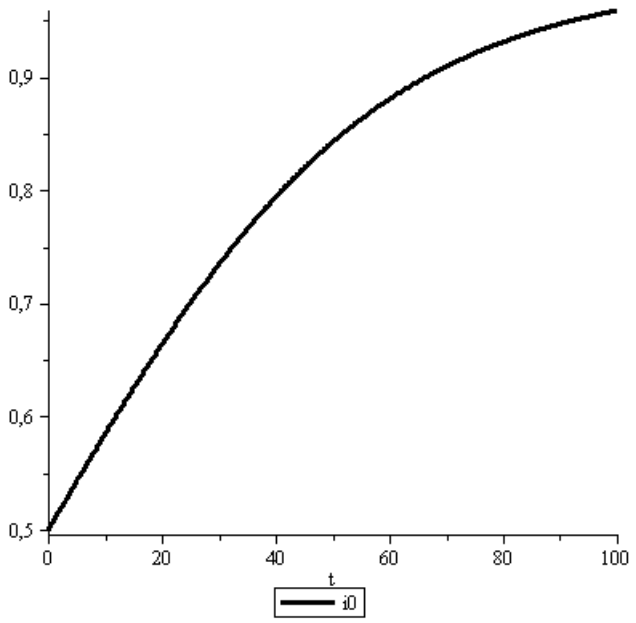
> $DEplot([sys2], [s(t), i(t), r(t), i0(t)], t = 0..100, [[s(0) = 1, i(0) = 0, r(0) = 0, i0(0) = 0.5]], stepsize = 0.2, scene = [t, s(t)], linecolour = black);$



> $DEplot([sys2], [s(t), i(t), r(t), i0(t)], t = 0..100, [[s(0) = 1, i(0) = 0, r(0) = 0, i0(0) = 0.5]], stepsize = 0.2, scene = [t, i(t)], linecolour = black);$



> $DEplot([sys2], [s(t), i(t), r(t), i0(t)], t = 0..100, [[s(0) = 1, i(0) = 0, r(0) = 0, i0(0) = 0.5]], stepsize = 0.2, scene = [t, r(t)], linecolour = black);$



> $DEplot([sys2], [s(t), i(t), r(t), i0(t)], t = 0..100, [[s(0) = 1, i(0) = 0, r(0) = 0, i0(0) = 0.5]], stepsize = 0.2, scene = [t, i0(t)], linecolour = black);$