APLIKASI DIAGONALISASI MATRIKS PADA RANTAI MARKOV

skripsi

disajikan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

Bidayatul Hidayah

4150408042

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2013

APLIKASI DIAGONALISASI MATRIKS PADA RANTAI MARKOV

skripsi

disajikan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

oleh

Bidayatul Hidayah

4150408042

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2013

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa dalam isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dirujuk dalam skripsi ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Semarang,

Bidayatul Hidayah
NIM. 4150408042

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Aplikasi Diagonalisasi pada Rantai Markov

disusun oleh

Bidayatul Hidayah

4150408042

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi Fakultas MIPA, Universitas Negeri Semarang pada:

Hari : Kamis

Tanggal : 25 Juli 2013

Panitia :

Ketua	Sekretaris
Prof. Dr. Wiyanto, M.Si NIP.196310121988031001	Drs. Arief Agoestanto, M.Si NIP. 196807221993031005

Ketua Penguji

Dr. Scolastika Mariani, M.Si.
NIP. 196502101991022001

Anggota Penguji/ Pembimbing Utama	Anggota Penguji/ Pembimbing Pendamping
Dra. Rahayu Budhiati V., M.Si. NIP. 196406131988032002	Putriaji Hendikawati, S.Si., M.Pd., M.Sc. NIP. 198208182006042001

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

- “Dan sekiranya penduduk suatu negeri itu benar-benar beriman dan bertakwa, pasti kami akan melimpahkan kepada mereka berkah dari langit dan bumi. Akan tetapi jika mereka mendustakan ayat kami, maka kami akan siksa mereka sesuai dengan apa yang mereka telah perbuat (Surat Al-A’raf : 96)”
- “Hanya kepada Engkaulah kami menyembah dan hanya kepada Engakaulah kami mohon pertolongan (Al – Fatihah : 5)”.
- “Dan janganlah kamu memalingkan wajah dari manusi (karena sombong) dan janganlah berjalan dibumi dengan angkuh. Sungguh, Allah tidak menyukai orang-orang yang sombong danmembanggakan diri (Luqman: 18).”
- “Sebaik-baiknya Manusia adalah yang paling bermanfaat bagi orang lain (HR. Bukhori dan Muslim)”.
- “Sesungguhnya urusan-Nya apabila Dia menghendaki sesuatu, Dia hanya berkata kepadanya, “jadilah!” maka jadilah sesuatu itu (Ya sin : 82)”.
- “Kita datang bukanlah untuk saling bersaing melainkan untuk saling melengkapi (Bill McCartney)”.a

- Dan hendaklah setiap diri memperhatikan apa yang telah diperbuatnya untuk hari esok.

Skripsi ini aku persembahkan untuk :

1. Orang tuaku tercinta
2. Keluarga tercinta
3. Sofyan Tri Widayat
4. Semua sahabatku
5. Teman-teman Matematika'08 UNNES
6. Semua pihak yang telah menginspirasi, memotivasi dan membantuku dalam karya ini
7. Almamaterku.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Aplikasi Diagonalisasi Matriks pada Rantai Markov”. Penulisan skripsi ini sebagai syarat mutlak yang harus dipenuhi oleh penulis untuk memperoleh gelar sarjana sains di Universitas Negeri Semarang.

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan karena adanya bimbingan, bantuan, dan dukungan dari berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. M. Fathur Rohman, M.Hum, Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Prof. Dr. Wiyanto, M.Si, Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si, Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
4. Dra. Rahayu Budhiati V., M.Si., Pembimbing Utama yang telah memberikan bimbingan, motivasi, dan pengarahan.
5. Putriaji Hendikawati, S.Si., M.Pd., M.Sc., Pembimbing Pendamping yang telah memberikan bimbingan, motivasi, dan pengarahan.
6. Dosen Penguji Utama yang telah memberikan inspirasi, kritik, saran, dan motivasi kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi.
7. Ibu dan keluarga tercinta yang senantiasa mendoakan serta memberikan dukungan baik secara moral maupun spiritual.
8. Sofyan Tri Widayat yang selama ini memberikan dukungan, semangat serta inspirasi untuk penulis.

9. Sahabat-sahabat penulis, Yumar Secha, Reni, Raras, Miftahul Arif, Alief, Feri, Joko, Ardian, Ega, dan Putri yang telah memberikan banyak motivasi, kritik, usulan yang menjadikan terselesaikannya penulisan skripsi ini.
10. Mahasiswa matematika angkatan 2008 yang telah memberikan dorongan dan motivasi.
11. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya penulisan skripsi ini.

Penulis sadar dengan apa yang telah disusun dan disampaikan masih banyak kekurangan dan belum sempurna. Untuk itu penulis menerima segala kritik dan saran yang sifatnya membangun untuk skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Semarang, 25 Juli 2013

Penulis

ABSTRAK

Hidayah, Bidayatul. 2013. *Aplikasi Diagonalisasi Matriks pada Rantai Markov*. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang. Pembimbing Utama Dra. Rahayu Budhiati Veronica, M.Si dan Pembimbing Pendamping Putriaji Hendikawati, S.Si., M.Pd., M.Sc.

Kata kunci: Matriks, Diagonalisasi Matriks, Rantai Markov.

Penelitian ini membahas aplikasi diagonalisasi matriks pada rantai markov. Permasalahan yang diangkat dalam penelitian ini adalah bagaimana membuktikan teorema-teorema aplikasi matriks pada rantai markov, bagaimana menentukan state menggunakan nilai eigen dari sebuah matriks, bagaimana menentukan vektor-vektor kondisi menggunakan diagonalisasi matriks. Metode yang digunakan untuk menganalisis masalah adalah dengan studi pustaka. Langkah-langkah yang dilakukan adalah menentukan masalah, merumuskan masalah, studi pustaka, analisis pemecahan masalah, dan penarikan simpulan. Sebagai hasil pembahasan diperoleh, bukti teorema-teorema aplikasi matriks pada rantai markov, State atau sifat jangka panjang dapat ditentukan cara menentukan matriks transisi dari suatu kasus ,menentukan akar persamaan yaitu $\det(\lambda I - A) = 0$ dengan I matriks identitas dan A matriks transisi. Vektor-vektor kondisi dapat ditentukan dengan menentukan vektor-vektor eigen. Vektor-vektor eigen kemudian digunakan untuk membentuk matriks pendiagonal A. Vektor-vektor kondisi dapat dihitung dengan $X^{(n)} = X^{(0)} Y D^{n} Y^{-1}$ dengan meningkatnya n maka X_n mendekati vektor tunak x.

DAFTAR ISI

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan, sejumlah fenomena dapat di pikirkan sebagai percobaan yang mencakup sederetan pengamatan yang berturut–turut dan bukan satu kali pengamatan. Umumnya, tiap pengamatan dalam suatu percobaan tergantung pada beberapa atau semua pengamatan masa lalu hasil tiap pengamatan, ditentukan dengan hukum–hukum peluang. Studi tentang percobaan dalam bentuk seperti ini dikenal dengan teori proses stokastik.

Rantai Markov merupakan sebuah proses stokastik, dimana kejadian pada masa mendatang hanya bergantung pada kejadian hari ini dan tidak bergantung pada keadaan masa lampau. Konsep dasar Rantai Markov diperkenalkan sekitar tahun 1907 oleh seorang Matematisi Rusia Andrei A. Markov (1856 –1922) yang membahas suatu rantai yang disebut Rantai Markov.

Rantai markov terdefinisi oleh matriks peluang transisinya. Matriks peluang transisi adalah suatu matriks yang memuat informasi yang mengatur perpindahan system dari suatu state ke state yang lainnya. Matriks peluang transisi sering disebut juga matriks stokastik karena peluang transisi p_{ij} adalah tetap dan tidak bergantung pada waktu t, dimana p_{ij} adalah peluang transisi satu langkah yang bergerak dari keadaan i ke keadaan j. Matriks peluang transisi juga merupakan matriks persegi. Melalui matriks peluang transisi maka dapat ditentukan state pada rantai Markov.

Masalah dasar dari pemodelan stokastik dengan proses markov adalah menentukan state yang sesuai, sehingga proses stokastik yang berpadanan akan benar-benar memiliki sifat markov, yaitu pengetahuan terhadap state saat ini adalah cukup untuk memprediksi perilaku stokastik dari proses di waktu yang akan datang.

Vektor eigen dari A adalah Jika A matriks $n \times n$, maka vektor taknol x di dalam R^n jika Ax adalah kelipatan dari x yakni $Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Nilai eigen dapat dimisalkan sebagai kasus proses markov sehingga memungkinkan untuk menentukan state menggunakan nilai eigen. Oleh karena itu penulis akan mencoba menentukan state menggunakan nilai eigen. Vektor-vektor eigen yang terbentuk digunakan untuk membentuk matriks pendiagonal Y untuk menghitung vektor-vektor kondisi untuk menentukan vektor tunak.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis merumuskan beberapa permasalahan sebagai berikut :

1. Membuktikan toerema-teorema aplikasi matriks pada rantai markov.
2. Menentukan state pada rantai Markov menggunakan nilai eigen dari sebuah matriks.
3. Menentukan vektor- vektor kondisi dengan diagonalisasi matriks.

1.3 Tujuan Penulisan

Berdasarkan permasalahan yang penulis angkat di atas, penulisan skripsi ini bertujuan untuk membuktikan toerema- teorema aplikasi matriks pada rantai markov, menentukan state pada rantai Markov menggunakan nilai eigen dari sebuah matriks, dan menentukan vektor-vektor kondisi dengan diagonalisasi matriks.

1.4 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari hasil penulisan ini adalah sebagai berikut.

1. Bagi Penulis

Merupakan sarana untuk memperdalam pengetahuan dan belajar mengkaji permasalahan matematika.

2. Bagi Mahasiswa Matematika dan Pembaca

Sebagai motivasi untuk mengembangkan dan menerapkan ilmu matematika ke berbagai bidang keilmuan lain.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulis skripsi disusun dalam tiga bagian utama, yaitu bagian awal, bagian inti, dan bagian akhir skripsi.

1.5.1 Bagian Awal

Dalam penulisan skripsi ini, bagian awal berisi halaman judul, pernyataan, pengesahan, motto dan persembahan, kata pengantar, abstrak, daftar isi, daftar gambar, daftar tabel, dan daftar lampiran.

1.5.2 Bagian Inti

Bagian inti dari penulisan skripsi ini adalah isi skripsi yang terdiri dari lima bab, yaitu:

BAB 1 : PENDAHULUAN

Berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, sistematika penulisan.

BAB 2 : TINJAUAN PUSTAKA

Berisi tentang peluang, matriks dan invers matriks, sistem persamaan linear homogen, ruang vektor, nilai eigen dan vektor eigen, diagonalisasi, rantai markov.

BAB 3 : METODE PENELITIAN

Berisi tentang prosedur atau langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi kajian pustaka, merumuskan masalah, pemecahan masalah, penarikan simpulan.

BAB 4 : PEMBAHASAN

Berisi tentang definisi-definisi, teorema-teorema tentang penggunaan matriks dalam rantai markov, contoh menentukan state dengan menggunakan nilai eigen, dan menentukan vektor kondisi menggunakan diagonalisasi matriks.

BAB 5 : PENUTUP

Berisi simpulan dan saran dari penulisan skripsi ini dan saran.

1.5.3 Bagian Akhir

Berisi daftar pustaka sebagai acuan penulisan yang memberikan informasi tentang buku dan literatur lain yang digunakan dalam skripsi ini serta lampiran yang mendukung kelengkapan skripsi.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Peluang

Definisi 2.1.1. Himpunan dari semua hasil yang mungkin muncul dari suatu percobaan disebut ruang sampel, sedangkan anggota-anggota dari ruang sampel disebut titik sampel.

Contoh 2.1.1

a. Pada percobaan melempar sekeping mata uang logam, ruang sampelnya adalah $\{A, G\}$, titik sampelnya adalah A,G.

b. Pada percobaan melempar sebuah dadu sekali, maka ruang sampelnya adalah S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dengan 1 menyatakan banyaknya titik dadu bagian atas ada satu, 2 menyatakan banyaknya titik dadu bagian atas ada dua, dan seterusnya.

Definisi 2.1.2. Kejadian atau Peristiwa adalah himpunan bagian dari ruang sampel.

Definisi 2.1.3. Variabel acak adalah Suatu fungsi yang bernilai riil dari domain ruang sampel dari suatu eksperimen random.

Definisi 2.1.4. Jika suatu percobaan menghasilkan N hasil yang tidak mungkin terjadi bersama-sama dan masing-masing mempunyai kesempatan yang sama untuk terjadi, maka peluang suatu kejadian A ditulis $P(A) = \frac{n(A)}{N}$, dimana n(A) adalah banyaknya hasil dalam kejadian A.

Contoh 2.1.3

a. Sebuah mata uang dilempar dua kali, tentukan peluang munculnya sisi gambar pada lemparan pertama dan sisi angka pada lemparan kedua.

   Penyelesaian:

   Ruang sampel dari percobaan di atas, S = {(A, A), (A, G), (G,A), (G, G)}. Misalkan D kejadian munculnya sisi gambar pada lemparan pertama dan sisi angka pada lemparan kedua, maka D = {(G, A)}. Karena semua titik sampel berkesempatan sama untuk terjadi, maka P(D) = $\frac{1}{4}$.

b. Dalam sebuah kantong berisi 3 kelereng merah, 4 kelereng putih, dan 2 kelereng biru. Secara acak diambil sebuah kelereng dalam kantong. Berapa peluang terambilnya kelereng merah?

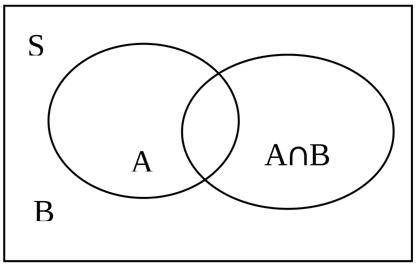
   Penyelesaian:

   Dalam sebuah kantong berisi 3 kelereng merah, 4 kelereng putih, dan 2 kelereng biru, jadi ada 9 kelereng. Jika diambil sebuah kelereng maka ada 9 kelereng yang mempunyai kesempatan yang sama untuk terambil, maka n = 9. Misalkan M kejadian terambil kelereng merah, maka M = {m1, m2, m3} dengan m1 kelereng merah pertama dan seterusnya sehingga n(M) = 3. Jadi P(M) = $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Teorema 2.1.1. Bila A dan B kejadian sembarang, maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Bukti:

Perhatikan diagram venn pada gambar 2.1, $P(A \cup B)$ adalah bobot titik sampel dalam $A \cup B$. $P(A) + P(B)$ menyatakan bahwa jumlah semua bobot dalam A dan semua bobot dalam B. Jadi bobot $A \cap B$ telah dijumlahkan dua kali. Karena bobot semua titik dalam $A \cap B$ adalah $P(A \cap B)$ maka peluang ini harus dikurangkan satu kali untuk mendapat jumlah bobot dalam $A \cup B$, yaitu $P(A \cup B)$.



Gambar 2.1. Diagram Venn

Contoh 2.1.4.

Sebuah mata uang dilempar dua kali, berapa peluang munculnya paling sedikit satu sisi angka atau dua sisi angka.

Penyelesaian:

Banyaknya hasil yang mungkin pada percobaan di atas ada 4 yaitu AA, AG, GA, GG sehingga n = 4. Misalkan B kejadian munculnya satu sisi angka maka

B = {AA, AG, GA}, misalkan C kejadian munculnya dua sisi angka maka C ={AA}, sehingga $B \cap C = \{AA\}$. Jadi $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Akibat 2.1.1. Bila A dan B kejadian yang saling lepas (terpisah), maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, karena bila A dan B saling lepas maka $A \cap B = \emptyset$ sehingga $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$.

Akibat 2.1.2. Bila A_1, A_2, A_3,…,A_n saling lepas, maka

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n)$.

Contoh 2.1.5.

Peluang seorang mahasiswa lulus matematika 2/3, dan peluangnya lulus biologi 4/9. Bila peluang lulus paling sedikit satu mata kuliah 4/5, berapakah peluangnya lulus dalam kedua mata kuliah?

penyelesaian:

Misalkan A menyatakan kejadian lulus matematika dan B kejadian lulus biologi maka

$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{4}{5} = \frac{14}{45}$.

Teorema 2.1.2. Bila A dan A’ kejadian yang saling berkomplemen, maka P(A’) = 1- P(A).

Bukti.

Karena $\mathrm{A} \cup \mathrm{A}' = \mathrm{S}$ dan $\mathrm{A} \cap \mathrm{A}' = \emptyset$ maka

$1 = \mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{A}') = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{A}'),$ sehingga $\mathrm{P}(\mathrm{A}') = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})$.

Definisi 2.1.5. Kejadian A dan B dikatakan saling bebas jika dan hanya jika $\mathrm{P}(\mathrm{A}).\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

Contoh 2.1.6.

a. Dua buah dadu berwarna merah dan biru dilempar bersama-sama. Jika A kejadian munculnya mata dadu 5 pada dadu merah dan B munculnya mata dadu 4 pada dadu biru, serta C munculnya kedua mata dadu berjumlah 8. Periksa apakah A dan B saling bebas, A dan C saling bebas.

   Penyelesaian:

   Ruang sampel dari percobaan diatas dapat ditulis S = {(1,1), (1,2), (1,3),…,(6,6)}. Kejadian A = {(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)}.

Kejadian B = {(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4)}. Kejadian C = {(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)}.

Jadi $P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6}, P(C) = \frac{5}{36}$

Maka $A \cap B = \{(5,4)\}; P(A \cap B) = \frac{1}{36}$, $A \cap C = \{(5,3)\}; P(A \cap C) = \frac{1}{36}$.

Ternyata $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ dan $P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$, sehingga kejadian A dan B saling bebas, sedangkan kejadian A dan C tidak saling bebas.

b. Jika A dan B dua kejadian yang saling bebas dengan P(A) = 0,2 dan P(B) = 0,3. Hitung $P(A \cap B)$.

Penyelesaian:

Karena A dan B saling bebas, maka $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}2.0{,}3 = 0{,}06$.

Definisi 2.1.5. Peluang bersyarat B dengan diketahui A ditentukan oleh $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ bila P(A) > 0.

Contoh 2.1.7

Diantara 10 orang laki-laki dan 10 orang wanita, ada 2 orang laki-laki dan 3 wanita yang buta warna. Tentukan peluang terpilih laki-laki yang buta warna.

Penyelesaian:

Misalkan A adalah kejadian terpilih laki-laki, B adalah kejadian terpilih wanita, dan C adalah kejadian terpilih buta warna. Maka

$$P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(S)} = \frac{2}{20}$$

$$\mathrm{P(C)} = \frac{\mathrm{n(C)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{5}{20}$$

Sehingga

$$\mathrm{P(A|C)} = \frac{\mathrm{P(A \cap C)}}{\mathrm{P(C)}} = \frac{\frac{2}{20}}{\frac{5}{20}} = \frac{2}{5}$$

Dari definisi peluang bersyarat $\mathrm{P(B|A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}}$, maka didapat akibat berikut.

Akibat 2.1.3. $\mathrm{P(A \cap B) = P(A)P(B|A)}$

Contoh 2.1.8

Dari seperangkat kartu bridge diambil satu kartu secara berturut-turut sebanyak dua kali. Tentukan peluang pengambilan pertama As dan pengambilan kedua King.

Penyelesaian:

Misalkan A adalah kejadian pertama yaitu terambil kartu As, dan B adalah kejadian kedua yaitu terambil kartu King. Maka $\mathrm{P(A)} = \frac{4}{52}$ dan $\mathrm{P(B|A)} = \frac{4}{51}$ (karena satu kartu telah terambil). Jadi $\mathrm{P(A \cap B) = P(A)P(B|A)} = \frac{4}{52}\frac{4}{51} = \frac{4}{663}$.

2.2 Matriks dan Invers Matriks

Definisi 2.2.1 Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Contoh 2.2.1

Susunan berikut adalah matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.2 Jika A adalah matriks kuadrat, dan Matriks B dapat dicari sehingga $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I}$, maka A dikatakan dapat dibalik *(invertible)* dan B dinamakan invers dari A.

Contoh 2.2.2

Matriks $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah invers dari $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

karena

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

dan

$$\mathrm{BA} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

Definisi 2.2.3 Sebuah matriks $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ dinamakan matriks elementer jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks identitas $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ yakni $\mathrm{I_n}$ dengan melakukan sebuah operasi baris elementer tunggal.

Contoh 2.2.3

Di bawah ini matriks elementer dan operasi-operasi yang menghasilkannya.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, dengan mengalkan baris kedua $\mathrm{I_2}$ dengan $-\frac{1}{3}$.

b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, dengan menukarkan baris kedua dan baris keempat.

2.3 Sistem Persamaan Linear Homogen

Sebuah sistem persamaan-persamaan linear dikatakan homogen jika semua suku konstan sama dengan nol, yakni sistem mempunyai bentuk

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{gathered}$$

Tiap-tiap sistem persamaan linear homogen adalah sistem yang konsisten, karena $\mathbf{x_1 = 0}, \mathbf{x_2 = 0}, \ldots, \mathbf{x_n = 0}$ selalu merupakan pemecahan. Pemecahan tersebut dinamakan pemecahan trivial. Jika ada pemecahan, maka pemecahan tersebut dinamakan pemecahan taktrivial **(**Anton, H. 1992. Aljabar Linier Elementer Edisi Kelima).

Untuk sistem persamaan-persamaan linear homogen, maka persis salah satu di antara persyaratan berikut benar

1. Sistem tersebut hanya mempunyai pemecahan trivial.
2. system tersebut mempunyai takterhingga benyaknya pemecahan taktrivial sebagai tambahan terhadap pemecahan trivial tersebut.

Contoh 2.3.1

Pecahkanlah sistem persamaan linear homogeny berikut

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$$

$$x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Penyelesaian:

Matriks yang di perbesar untuk sistem tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan mereduksi matriks menjadi bentuk eselon baris tereduksi, maka kita dapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang bersesuaian adalah

$$x_1 + x_2 + x_5 = 0$$

$$x_3 + x_5 = 0$$

$$x_4 = 0$$

Sehingga

$$x_1 = -x_2 - x_5$$

$$x_3 = -x_5$$

$$x_4 = 0$$

Misalkan $x_2 = s$, dan $x_5 = t$, maka $x_1 = -s - t$, $x_3 = -t$, dan $x_4 = 0$.

2.4 Ruang Vektor

Definisi 2.4.1 Misalkan V suatu himpunan, $V \neq \{\emptyset\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian vektor dengan skalar disebut ruang vektor jika mempunyai sifat $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ dan $k \in R$ berlaku

a. $\bar{u} + \bar{v} \in V$

b. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

c. $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

d. $\exists\bar{0} \in V \ni \bar{u} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{u} = \bar{0}$

e. $\forall\bar{u} \in V, \exists(-\bar{u}) \in V \ni \bar{u} + \overline{(-\bar{u})} = \overline{(-\bar{u})} + \bar{u} = 0$

f. $k\bar{u} \in V$

g. $k(l\bar{u}) = (kl)\bar{u}$

h. $k(\bar{u} + \bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$

i. $(k + l)\bar{u} = k\bar{u} + l\bar{u}$

j. $I. \bar{u} = \bar{u}$.

Definisi 2.4.2 Misalkan V ruang vektor,, $W \subset V, W \neq \emptyset$, W dengan operasi yang sama dengan V disebut ruang bagian atau sub ruang dari V jika W ruang vektor

Teorema 2.4.1 Misalkan V ruang vektor, $W \subset V, W \neq \emptyset$, w dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang sama pada V disebut ruang bagian jika dan hanya jika $\forall a, b \in w$ dan $k \in R$ berlaku

a. $a + b \in w$

b. $ka \in w$

Bukti.

w ruang bagian maka w ruang vektor berarti sifat a. dan b. dipenuhi. Diketahui sifat a. dan f. Tinggal membuktikan sifat d. dan e.

Ambil sebarang $a, b \in w$. Ambil $k = 0 \in R$. Maka menurut sifat b. ($ka \in w$), diperoleh $0. a = 0 \in w$.

Ambil $k = -1$ maka menurut sifat b. ($ka \in w$), diperoleh $(-1). a = (-a) \in w$.

Untuk $(-a) \in w$, diperoleh $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Jadi sifat d. dipenuhi.

Untuk $0, a \in w$, diperoleh $0 + a = a + 0 = a$, Jadi sifat e. dipenuhi.

Jadi w merupakan ruang vektor. Menurut definisi w adalah sub ruang dari V.

Contoh 2.4.1

Perlihatkan bahwa himpunan W dari semua matriks 2x2 yang mempunyai bilangan nol pada diagonal utamanya adalah subruang dari ruang vektor M_{22} dari semua matriks 2x2.

Penyelesaian:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}$ adalah sebarang 2 matriks pada W dan k adalah sebarang sekalar. Maka

$kA = \begin{bmatrix} 0 & ka_{12} \\ ka_{21} & 0 \end{bmatrix}$ dan $A + B = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{12} & 0 \end{bmatrix}$

oleh karena kA dan $A + B$ mempunyai bilangan nol pada diagonal utama, maka kA dan $A + B$ terletak pada W. Jadi W adalah subruang dari M_{22}.

Definisi 2.4.3 Misalkan V ruang vektor disebut kombinasi linear dari vektor-vektor $v_1, v_2, \dots, v_n$ jika ada skalar-skalar $k_1, k_2, \dots, k_n \in R$ sedemikian sehingga $w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n$

Contoh 2.4.2

Selidiki apakah $P = 2 + 2x + 3x^2$ merupakan kombinasi linear $P_1 = 2 + x + 4x^2$, $P_2 = 1 - x + 3x^2$, $P_3 = 3 + 2x + 6x^2$.

Penyelesaian:

$P = k_1 P_1 + k_2 P_2 + k_3 P_3$

Sehingga

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{R_{12}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right) \underset{R_{31}(-4)}{\overset{\sim}{R_{21}(-2)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \end{array}\right) \underset{R_{32}(-2)}{\overset{\sim}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{\sim}{R_{23}}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 3 & -1 & -2\end{array}\right) \begin{matrix}R_{12}(1)\\ \sim\\ R_{32}(-3)\end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{array}\right) \begin{matrix}\sim\\ \sim\\ R_3(0,5)\end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0,5\end{array}\right) \begin{matrix}R_{13}(-1)\\ R_{23}(1)\\ \sim\end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0,5\\ 0 & 1 & 0 & -0,5\\ 0 & 0 & 1 & 0,5\end{array}\right)$$

maka $k_1 = 0,5$, $k_2 = -0,5$, $k_3 = 0,5$, sehingga $= 0,5$, $P_2 = -0,5$, $P_3 = 0,5$. Jadi P kombinasi linear dari P_1, P_2, P_3.

Definisi 2.4.4 Misalkan V ruang vektor, $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$, S dikatakan membangun/ merentang V jika setiap vektor dari V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari S.

Contoh 2.4.3

Misalkan $S = \{P_1, P_2. P_3\}$ dengan $P_1 = 1 + x + x^2$, $P_2 = 1 + x + 2x^2$, $P_3 = 2 + x + 3x^2$. Selidiki apakah S membangun P_2.

penyelesaian:

Ambil $\bar{p} \in P_2$ sehingga $\bar{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

Maka $k_1(1 + x + x^2) + k_2(1 + x + 2x^2) + k_3(2 + x + 3x^2) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & a_0\\ 1 & 1 & 1 & a_1\\ 1 & 2 & 3 & a_2\end{bmatrix} \begin{matrix}\sim\\ R_{21}(-1)\\ R_{31}(-1\end{matrix} \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & a_0\\ 0 & 0 & -1 & a_1 - a_0\\ 0 & 1 & 1 & a_2 - a_0\end{bmatrix} \begin{matrix}\sim\\ R_{23}\\ \sim\end{matrix} \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & a_0\\ 0 & 1 & 1 & a_2 - a_0\\ 0 & 0 & -1 & a_1 - a_0\end{bmatrix} \begin{matrix}R_{12}(-1)\\ \sim\\ R_3(-1)\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2a_0 - a_2\\ 0 & 1 & 1 & a_2 - a_0\\ 0 & 0 & 1 & a_0 - a_1\end{bmatrix} \begin{matrix}R_{13}(-1)\\ R_{23}(-1)\\ \sim\end{matrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & a_0 + a_1 - a_2\\ 0 & 1 & 0 & a_2 + a_1 - 2a_0\\ 0 & 0 & 1 & a_0 - a_1\end{bmatrix}$$

Jadi $k_1 = a_0 + a_1 - a_2$, $k_2 = a_2 + a_1 - 2a_0$, dan $k_3 = a_0 - a_1$

Jadi S membangun P_2.

Definisi 2.4.5 Misalkan V ruang vektor, jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ himpunan vektor tak kosong maka persamaan $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n = 0$, mempunyai sekurang-kurangnya satu penyelesaian trivial yaitu $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$. Jika penyelesainmya merupakan satu-satunya penyelesaian maka S disebut himpunan yang bebas linear. Jika masih ada penyelesaian lain maka S disebut Himpunan yang tidak bebas linear atau bergantung linear.,

Contoh 2.4.4

Tentukan apakah vektor-vektor

$$v_1(1,-2,3) \quad v_2(5,6,-1) \quad v_3(3,2,1)$$

membentuk himpunan tak bebas linear atau himpunan bebas linear.

Penyelesaian:

Pada ruas komponen persamaan vektor $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n = 0$ menjadi $k_1(1,-2,3) + k_2(5,6,-1) + k_3(3,2,1) = (0,0,0)$ atau secara ekivalen menjadi

$$(k_1 + 5k_2 + k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) = (0,0,0)$$

dengan menyamakan komponen yang bersesuaian akan memberikan

$$k_1 + 5k_2 + k_3 = 0$$

$$-2k_1 + 6k_2 + 2k_3 = 0$$

$$3k_1 - k_2 + k_3 = 0$$

Sehingga

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ R_{21}(2) \\ R_{31}(-3) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 16 & 4 \\ 0 & -16 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ R_2\left(\frac{1}{16}\right) \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -16 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_{12}(-5) \\ \sim \\ R_{32}(16) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{R_3(0,5)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{R_{23}\left(-\frac{1}{4}\right)}{\overset{R_{13}\left(\frac{1}{4}\right)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$. Karena mempunyai satu penyelesaian trivial yaitu $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$, jadi vektor-vektor $v_1(1, -2,3)$ $v_2(5,6, -1)$ $v_3(3,2,1)$ membentuk himpunan yang bebas linear.

Definisi 2.4.6 Jika V sebarang ruang vektor, $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$, maka S disebut basis dari V jika S membangun atau merentang V dan S bebas linear.

Definisi 2.4.7 Suatu ruang vektor V disebut berdimensi hingga jika V memuat himpunan berhingga vektor-vektor $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sebagai basisnya. Jika tidak ada himpunan berhingga tersebut maka V disebut berdimensi tak hingga.

Definisi 2.4.8 Dimensi dari ruang vektor V berdimensi hingga adalah banyaknya vektor yang menjadi anggota basis untuk V dinotasi dim(V).

Contoh 2.4.5

Tentukanlah basis dan dimensi untuk ruang pemecahan dari sistem homogen

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$$

$$x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Penyelesaian:

sistem homogen

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$$

$$x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

dapat ditulis

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_{13} \\ \sim \\ \sim \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ R_{21}(1) \\ R_{31}(-2) \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ R_{24} \\ \sim \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_{12}(2) \\ \sim \\ R_{32}(-3) \\ R_4\left(-\frac{1}{3}\right) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ \sim \\ R_{34}(3) \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ \sim \\ R_{34} \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_{13}(-2) \\ R_{23}(-1) \\ \sim \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Diperoleh

$$x_1 + x_2 + x_5 = 0$$

$$x_3 + x_5 = 0$$

$$x_4 = 0$$

Misalkan $x_2 = s$ dan $x_5 = t$, maka

$x_1 + x_2 + x_5 = x_1 + s + t = 0$, $x_1 = -s - t$, $x_3 = -t$, dan $x_4 = 0$.

Vektor-vektor pemecahan dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

basisnya adalah $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, berdimensi 2.

2.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.5.1 Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor taknol x di dalam R^n dinamakan vektor eigen (*eigen vector*) dari A jika Ax adalah kelipatan dari x yakni

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ dinamakan nilai eigen (eigenvalue) dari A dan x dikatakan vector eigen yang bersesuaian dengan λ (Anton, H. 1992. Aljabar Linier Elementer Edisi Kelima).

Contoh 2.5.1

Misalkan sebuah vektor $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan sebuah matriks berordo 2×2, $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, Apabila matriks A dikalikan dengan X maka:

$$AX = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 \\ 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Dimana:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda x$$

Dengan konstanta $\lambda = 4$, dan $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Konstanta $\lambda = 4$ dikatakan nilai eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Contoh 2.5.2

Sebuah vektor $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Perkalian matriks A dan X adalah:

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0+0 \\ 2+2+0 \\ 0+0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda x, \text{dengan } \lambda = 2$$

Maka $\lambda = 2$ adalah nilai eigen dari $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka tulis kembali $Ax = \lambda x$ sebagai

$$Ax = \lambda Ix$$

atau secara ekivalen

$$(\lambda I - A)x = 0$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan. Pemecahan $(\lambda I - A)x = 0$ akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

dengan menyelesaikan persamaan tersebut maka dapat ditentukan nilai eigen dai sebuah matriks A. Bila diperluas, maka determinan $\det(\lambda I - A)$ adalah polinom λ yang dinamakan polinom karakteristik dari A. Jika A adalah matriks $n \times n$, maka polinom Karakteristik A harus memenuhi n dan koefisien λ^n adalah 1. Jadi polinom karakteristik dari matriks $n \times n$ mempunyai bentuk

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

Contoh 2.5.3

Carilah nilai-nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Karena

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

maka polinom karakteristik dari A adalah $\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} =$ $(\lambda - 3)\lambda - \big(1(-2)\big) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

dan persamaan karakteristik dari A adalah

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Pemecahan-pemecahan persamaannya adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$.

Jadi nilai eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$.

Contoh 2.5.4

Carilah nilai-nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Karena

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

maka polinom karakteristik dari A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \lambda - 4 & 0 \\ 2 & \lambda - 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda - 1) + 0 + 0 - 2(\lambda - 1)(-1) - 0 - 0$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

dan persamaan karakteristik dari A adalah

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

Pemecahan-pemecahan persamaannya adalah $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, dan $\lambda = 3$.

Jadi nilai eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, dan $\lambda = 3$.

Selanjutnya adlah mencari vektor eigen, vector eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vector tak nol x yang memenuhi $Ax = \lambda x$. Secara ekivalen, vector eigen yang bersesuaian dengan λ adalah vector tak nol dalam ruang pemecahan dari $(\lambda I - A) = 0$ dinamakan ruang eigen (eigenspace) dari A yang bersesuaian dengan λ.

Contoh 2.5.5

Carilah basis-basis untuk ruang eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Karena

$$\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A} = \lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda-3 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-5\end{bmatrix}$$

maka polinom karakteristik dari A adalah

$$\det(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A}) = \det\begin{bmatrix}\lambda-3 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\lambda-3 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-5\end{bmatrix}\begin{matrix}\lambda-3 & 2\\ 2 & \lambda-3\\ 0 & 0\end{matrix}$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-3)(\lambda-5) + 0 + 0 - 0 - 0 - (\lambda-5).2.2$$

$$= \lambda^3 - 11\lambda^2 + 35\lambda - 25$$

dan persamaan karakteristik dari A adalah

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 35\lambda - 25 = 0$$

Pemecahan-pemecahan persamaannya adalah $\lambda = 1$, dan $\lambda = 5$.

Jadi nilai eigen dari matriks $\mathrm{A} = \begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ adalah $\lambda = 1$, dan $\lambda = 5$.

Menurut definisi,

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix}\mathrm{x}_1\\ \mathrm{x}_2\\ \mathrm{x}_3\end{bmatrix}$$

adalah vector A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika x adalah pemecahan tak trivial dari $\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A} = 0$, yakni, dari

$$\begin{bmatrix}\lambda-3 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{x}_1\\ \mathrm{x}_2\\ \mathrm{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Jika $\lambda = 5$, maka

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan operasi baris elementer

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{R_1\left(\frac{1}{2}\right)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{\sim}{R_{21}(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

didapat $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, sehingga $x_1 + x_2 = 0$, sehingga $x_1 = -s$, $x_2 = s$, dan $x_3 = t$.

Jadi vektor-vektor eigen A yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$ adalah vektor-vektor tak nol yang berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor-vektor bebas linear, maka vector-vektor tersebut akan membentuk basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$.

Jika $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan operasi baris elementer

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{R_1\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \underset{R_3\left(-\frac{1}{4}\right)}{\overset{\sim}{R_{21}(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{\sim}{R_2(-1)}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

didapat $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, sehingga $x_1 - x_2 = 0$, sehingga $x_1 = s$, $x_2 = s$, dan $x_3 = 0$.

Jadi vektor-vektor eigen A yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah vektor-vektor tak nol yang berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$.

2.6 Diagonalisasi

Misal $A_{n\times n}$ matriks diagonal dengan $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ maka $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{bmatrix}$. Secara umum jika $D_{n\times n}$ matriks diagonal maka $D^m = \begin{bmatrix} {a_{11}}^m & 0 & 0 \\ 0 & {a_{22}}^m & 0 \\ 0 & 0 & {a_{33}}^m \end{bmatrix}$.

Jika A dapat dinyatakan sebagai perkalian $A = PDP^{-1}$ dengan P matriks non singular dan D matriks diagonal, maka diperoleh

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$$

$$A^3 = (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^3P^{-1}$$

$$A^m = PD^mP^{-1}$$

Jika ada matriks $P_{n\times n}$ matriks non singular sehingga $A = PDP^{-1}$ maka A dikatakan matriks yang dapat di diagonalkan dan P disebut matriks yang mendiagonalkan.

Troerema 2.6.1 Misal $A_{n\times n}$, A dapat di diagonalkan jika dan hanya jika ada $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\} \subset R^n$ basis untuk R^n yang merupakan vektor-vektor karakteristik dari A yang bersesuaian dengan nilai karakteristiknya.

Bukti.

$\Rightarrow$ Diketahui A dapat didiagonalkan.

Akan dibuktikan ada $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\} \subset R^n$ basis untuk R^n yang merupakan vektor-vektor karakteristik dari A.

Misal $A_{n\times n}$, D matriks diagonal dan P matriks non singular, A dapat didiagonalkan maka $A = PDP^{-1}$.

Misal $P_{n\times n} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$, dengan p_1, p_2, p_n adalah vektor-vektor kolom $n \times 1$ dari P karena P non singular maka $\text{rank}\,(P) = n$, maka $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ vektor-vektor yang bebas linear sehingga $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ basis untuk R^n.

Misal $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \lambda_n \in R$, A dapat di diagonalkan maka

$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD$.

$$A_{n\times n}(p_1, p_2, \cdots, p_n)_{n\times n} = (p_1, p_2, \cdots, p_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow (Ap_1, Ap_2, \cdots, Ap_n) = (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n)$

sehingga $Ap_1 = \lambda_1 p_1$, $Ap_2 = \lambda_2 p_2, Ap_n = \lambda_n p_n$.

$\Leftarrow$ Diketahui ada $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\} \subset R^n$.

Akan dibuktikan A dapat didiagonalkan.

Misal $P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$.

Karena $p_1, p_2, \cdots, p_n$ adalah vektor-vektor karakteristik dari A yang bersesuaian dengan nilai karakteristiknya $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ maka

$Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, Ap_n = \lambda_n p_n$.

$\Leftrightarrow AP = (Ap_1, Ap_2, \cdots, Ap_n) = (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n)$

$$\Leftrightarrow AP = (p_1, p_2, \cdots, p_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow AP = PD$

$\Leftrightarrow APP^{-1} = PDP^{-1}$

$\Leftrightarrow A = PDP^{-1}$

Karena vektor-vektor kolom dari P adalah basis untuk R^n maka

$\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ bebas linear. sehingga $P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ mempunyai $\text{rank}(P) = n$ jadi P non singular.

Jadi ditemukan $P_{n\times n}$ non singular dan D matriks diagonal dengan elemen diagonal utamanya nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \ni A = PDP^{-1}$.

Jadi A dapat di diagonalkan.

Contoh 2.6.1

Selidiki apakah $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ dapat didiagonalkan. Jika dapat cari P dan D sehingga $A = PDP^{-1}$.

Penyelesaian.

Karena $\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix}$

maka polinom karakteristik dari A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \lambda - 3 & 2 \\ 2 & \lambda - 3 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 3)(\lambda - 5) + 0 + 0 - 0 - 0 - (\lambda - 5).2.2$$

$$= \lambda^3 - 11\lambda^2 + 35\lambda - 25$$

dan persamaan karakteristik dari A adalah

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 35\lambda - 25 = 0$$

Pemecahan-pemecahan persamaannya adalah $\lambda = 1$, dan $\lambda = 5$.

Jadi nilai eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ adalah $\lambda = 1$, dan $\lambda = 5$.

Menurut definisi,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

adalah vektor A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika x adalah pemecahan tak trivial dari $\lambda I - A = 0$, yakni, dari

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\lambda = 5$, maka

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan operasi baris elementer

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{R_1\left(\frac{1}{2}\right)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{\sim}{R_{21}(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

didapat $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, sehingga $x_1 + x_2 = 0$, sehingga $x_1 = -s$, $x_2 = s$, dan $x_3 = t$.

Jadi vektor-vektor eigen A yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$ adalah vektor-vektor tak nol yang berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor-vektor bebas linear, maka vector-vektor tersebut akan membentuk basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$.

Jika $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan operasi baris elementer

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{R_1\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \underset{R_3\left(-\frac{1}{4}\right)}{\overset{\sim}{R_{21}(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{\sim}{R_2(-1)}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

didapat $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, sehingga $x_1 - x_2 = 0$, sehingga $x_1 = s$, $x_2 = s$, dan $x_3 = 0$.

Jadi vektor-vektor eigen A yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah vektor-vektor tak nol yang berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$.

Sehingga $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ basis untuk R^3, A dapat didiagonalkan dengan

$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

Sehingga

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.6.2

Selidiki apakah $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$ dapat didiagonalkan. Jika dapat cari P dan D sehingga $A = PDP^{-1}$.

Penyelesaian:

Karena

$$\lambda\mathrm{I}-\mathrm{A}=\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&0&1\\-1&3&0\\-4&13&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+1&0&-1\\1&\lambda-3&0\\4&-13&\lambda+1\end{bmatrix}$$

maka polinom karakteristik dari A adalah

$$\det(\lambda\mathrm{I}-\mathrm{A})=\det\begin{bmatrix}\lambda+1&0&-1\\1&\lambda-3&0\\4&-13&\lambda+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda+1&0&-1\\1&\lambda-3&0\\4&-13&\lambda+1\end{bmatrix}\begin{matrix}\lambda+1&0\\1&\lambda-3\\4&-13\end{matrix}$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda+1)+0+13-(4(\lambda-3)(-1)-0-0)$$

$$=\lambda^3-\lambda^2-\lambda-2$$

dan persamaan karakteristik dari A adalah

$$\lambda^3-\lambda^2-\lambda-2=0$$

Pemecahan-pemecahan persamaannya adalah $\lambda=2$, $\lambda=-\frac{3i}{2}$, dan $\lambda=\frac{3i}{2}$.

Jadi nilai eigen dari matriks $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\-1&3&0\\-4&13&-1\end{bmatrix}$ adalah $\lambda=2$, $\lambda=-\frac{3i}{2}$, dan $\lambda=\frac{3i}{2}$.

Menurut definisi,

$$\mathrm{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

adalah vector A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika x adalah pemecahan tak trivial dari $\lambda\mathrm{I}-\mathrm{A}=0$, yakni, dari

$$\begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-3 & 0 \\ 4 & -13 & \lambda+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\lambda = 2$, maka

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -13 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan operasi baris elementer

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -13 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{\sim}{R_{12}}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -13 & 3 \end{bmatrix} \overset{\sim}{\underset{R_{31}(-4)}{R_{21}(-3)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -9 & 3 \end{bmatrix} \overset{\sim}{\underset{R_{32}(3)}{R_2\left(\frac{1}{3}\right)}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{R_{12}(1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

didapat $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, sehingga $x_1 - \frac{1}{3}x_3 = 0$, $x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0$.

Misalkan $x_3 = s$ maka $x_1 = \frac{1}{3}s$, $x_2 = \frac{1}{3}s$.

Basis untuk $\lambda = 2$ adalah $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$, karena $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ bebas linear, maka bukan basis untuk

R^3 maka tidak ada P non singular sehingga A tidak dapat didiagonalkan.

BAB 3

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode penelitian kajian pustaka. Kajian pustaka merupakan metode penelitian yang mengupas berbagai teori yang berhubungan dengan permasalahan dalam penelitian. Dalam penulisan skripsi ini, metode penelitian yang digunakan yaitu kajian pustaka. Oleh karena itu, kajian pustaka digunakan sebagai dasar pemecahan masalah yang penulis angkat dalam penulisan skripsi ini. Langkah-langkah penulisan skripsi ini, sebagai berikut.

3.1 Kajian Pustaka

Dalam tahap ini dilakukan berbagai aktifitas seperti pengumpulan referensi, dan pengupasan teori yang dapat dijadikan sebagai suatu masalah.

3.2 Perumusan Masalah

Masalah yang dipilih harus *"researchable"* dalam arti masalah tersebut dapat diteliti, masalah perlu dirumuskan secara jelas, karena dengan perumusan yang jelas, penelitian diharapkan dapat mengetahui variabel-variabel apa yang akan diukur dan apakah alat-alat ukur yang sesuai untuk mencapai tujuan penelitian.

Dengan rumusan masalah yang jelas, akan dapat dijadikan penuntun bagi langkah-langkah selanjutnya. Salah satu karakteristik formulasi pertanyaan penelitian yang baik yaitu pertanyaan penelitian harus *clear*. Artinya pertanyaan penelitian yang diajukan hendaknya disusun dengan kalimat yang jelas, artinya tidak membingungkan (Fraenkel dan Wallen, 1990:23). Dengan pertanyaan yang jelas akan mudah mengidentifikasi variabel-variabel apa yang ada dalam pertanyaan penelitian. Dalam mengidentifikasi istilah tersebut dapat dengan:

1. *Constitutive Definition,* yakni dengan pendekatan kamus (*dictionary approach*).
2. *Operational Definition,* yakni mendefinisikan istilah atau variabel penelitian secara spesifik, rinci, dan operasional.

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah membuktikan toerema-teorema aplikasi matriks pada rantai markov, menentukan state pada rantai Markov menggunakan nilai eigen dari sebuah matriks, dan menentukan vektor-vektor kondisi dengan diagonalisasi matriks.

3.3 Pemecahan Masalah

Dalam proses memperoleh jawaban dari permasalahan yang diangkat dalam skripsi ini dilakukan langkah-langkah pemecahan masalah sebagai berikut.

1. Mengupas definisi-definisi yang berhubungan dengan permasalahan yang diangkat.
2. Melengkapi definisi dengan contoh-contoh.
3. Membuktikan teorema.

3.4 Penarikan Kesimpulan

Penarikan kesimpulan merupakan tahap akhir dari suatu penelitian. Setelah memecahkan masalah, maka berdasarkan hasil penelitian dan pembahasannya akan dibuat suatu kesimpulan sebagai jawaban dari permasalahan yang telah dirumuskan sebelumnya.

BAB 4

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan menyajikan pembuktian teorema-teorema. Sebelumnya akan disajikan definisi dan contoh tentang proses stokastik.

Definisi 4.1. Proses Stokastik adalah himpunan acak yang merupakan fungsi waktu (*time*) atau proses acak variabel acak.

Contoh 4.1

a. Misalkan variabel acak $X_n = \text{hasil lemparan dadu ke } n, n \geq 1.$ maka $\{X_n, n \geq 1\}$ merupakan himpunan variabel acak, untuk n yang berbeda akan didapat variabel acak yang berbeda X_n, ini membentuk proses stokastik.

b. Misalkan tersedia r kotak dan bola yang banyaknya tak terhingga. Bola dilempar (dimasukkan) ke dalam kotak secara acak. Jika $Y_n =$ banyaknya bola yang masuk pada kotak no 2 setelah lemparan ke n,
maka $Y_n = \{Y_n, n \geq 1\}$ merupakan proses stokastik.

Definisi 4.2. Himpunan harga-harga yang mungkin untuk suatu variabel acak dari suatu proses stokastik disebut Ruang state.

Contoh 4.2

a. Dari contoh 4.1.a, X_n mempunyai ruang state $\{1,2,3,4,5,6\}$ sama untuk setiap n.

b. Misalkan X_n = hasil lemparan dadu sebanyak 1 kali yang mucul angka genap, maka X_n mempunyai ruang state {2,4,6}.

c. Dari contoh 4.1.b, Y_n mempunyai ruang state $\{1,2,3,\ldots\}$.

Definisi 4.3. Jika proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ mempunyai sifat

$P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n)$ untuk setiap harga $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ sembarang n, dan $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in S$ (ruang state) maka proses itu disebut proses markov.

Contoh 4.3

a. Misalkan X_n = keadaan mesin pada hari ke n. Untuk setiap n, $X_n = 0$ atau 1, 0 jika mesin rusak dan 1 jika mesin baik maka, S = {0,1}. Mesin mulai pada suatu hari rusak atau baik. Seandainya pada hari ke-n diketahui rusak, maka probabilitas pada hari ke n+1 baik adalah $P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = \frac{1}{2}$. Seandainya pada hari ke-n diketahui rusak, maka probabilitas pada hari ke n+1 rusak adalah $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = \frac{1}{2}$. Sedangkan jika pada hari ke-n diketahui mesin baik, maka probabilitas pada hari ke n+1 rusak adalah $P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) = \frac{1}{2}$. Sedangkan jika pada hari ke-n diketahui mesin baik, maka probabilitas pada hari ke n+1 baik adalah $P(X_{n+1} = 1|X_n = 1=12$.

b. Misalkan Y_n = musim pada bulan ke n. Untuk setiap n, Y_n = 0, 1, atau 2, dengan 0 jika musim panas, 1 jika musim dingin, dan 2 jika musim semi, maka $S = \{0,1,2\}$. Seandainya pada bulan ke-n diketahui cuaca panas, maka probabilitasnya pada bulan n+1 cuaca dingin atau semi adalah $P(X_{n+1} = 1 \text{ atau } 2 | X_n = 0) = \frac{2}{3}$. Seandainya pada bulan ke-n diketahui cuaca dingin, probabilitas pada bulan n+1 adalah cuaca panas atau semi adalah $P(X_{n+1} = 0 \text{ atau } 2 | X_n = 1) = \frac{2}{3}$. Seandainya pada bulan ke-n diketahui cuaca semi, probabilitas pada bulan n+1 adalah cuaca panas atau dingin $P(X_{n+1} = 0 \text{ atau } 1 | X_n = 2) = \frac{2}{3}$, dan seterusnya.

Definisi 4.4 Jika sebuah rantai markov mempunyai k kemungkinan keadaan, di mana ditandai dengan 1, 2, …, k, maka probabilitas bahwa sistem berada dalam keadaan j pada suatu pengamatan setelah mengalami keadaan i pada pengamatan sebelumnya, dilambangkan dengan p_{ij} dan disebut probabilitas transisi (*transition probability)* dari keadaan i ke keadaan j. Matriks $P = [p_{ij}]$ disebut matriks transisi rantai markov (*matrix transition of the Markov Chain*).

Definisi 4.5. Misalkan diketahui ruang state S berhingga, $S = \{0,1,2, \dots, n\}$, P matriks berukuran nxn, disebut matriks transisi

$$P = \left[p_{ij}\right] = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n0} & p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

dengan $p_{ij} \geq 0$ dan $\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1 \ (i, j = 0,1,2, \dots n)$.

Contoh 4.4

a. Dengan meninjau buku catatan sumbangannya, suatu kantor alumni sebuah perguruan tinggi menemukan jika alumnus memberi sumbangan dana tahunan pada tahun ini, probabilitas akan menyumbang pada tahun berikutnya adalah 80%, dan jika alumnus tidak memberi sumbangan dana tahunan pada tahun ini, probabilitas akan menyumbang pada tahun berikutnya adalah 30%. Keadaan ini dapat dipandang sebagai rantai markov dengan dua keadaan. Keadaan 1 berhubungan dengan alumnus yang memberikan sumbangan pada tahun ini, dan keadaan 2 berhubungan dengan alumnus yang tidak memberikan sumbangan pada tahun tersebut. Jika 0 untuk alumnus yang memberikan sumbangan, dan 1 untuk alumnus yang tidak memberikan sumbangan maka probabilitas transisinya adalah

Tahun ini	Tahun berikutnya	
	0	1
0	0,8	0,2
1	0,3	0,7

dan matriks transisinya adalah

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}$$

b. Misalkan ada tiga perusahaan pengiriman barang di suatu kota yaitu A, B, dan C dengan penduduk 2000 orang. Setiap bulannya, penduduk di kota tersebut menggunakan salah satu dari ketiga perusahaan tersebut. Setelah diadakan survey, ternyata pelanggan tidak setia sepenuhnya pada perusahaan pengiriman manapun. Pelanggan akan berpindah perusahaan sebagai akibat adanya peningkatan kualitas pelayanan, periklanan, promosi, dan faktor lainnya. Hasil surveinya adalah sebagai berikut :

- Jika pelanggan melakukan transaksi dengan A bulan ini, ada probabilitas sebesar 50% bahwa pelanggan akan melakukan transaksi dengan A kembali dibulan berikutnya. Sedangkan bahwa pelanggan akan berpindah ke B dan C, terdapat probabilitas sebesar 30% dan 20%.
- Untuk pelanggan yang bulan ini mengadakan transaksi dengan B, terdapat probabilitas sebesar 55% bahwa pelanggan tersebut akan kembali pada mereka dibulan berikutnya. Sedangkan bahwa pelanggan akan berpindah ke A dan C, terdapat probabilitas sebesar 20% dan 25%.
- Untuk pelanggan yang bulan ini mengadakan transaksi dengan C, probabilitas bahwa pelanggan akan kembali pada mereka dibulan berikutnya adalah 60%. Sedangkan probabilitas pelanggan akan beralih ke A dan B adalah 20% dan 20%.

Probabilitas transisinya adalah

Bulan ini	Bulan berikutnya		
	A	B	C
A	0,5	0,3	0,2
B	0,2	0,55	0,25
C	0,2	0,2	0,6

dan matriks transisinya adalah

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,55 & 0,25 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Definisi 4.6. vektor keadaan (*state vector*) untuk sebuah pengamatan pada suatu rantai markov yang mempunyai k keadaan adalah sebuah vektor baris X dimana komponen ke-i, yakni x_i merupakan probabilitas bahwa sistem berada pada keadaan ke-i pada saat itu.

Contoh 4.5

Ada sebuah perusahaan penyewaan mobil di sebuah kota, dengan 4 jenis mobil yang disewakan yaitu mobil A, B, C, dan D. Misalkan mula-mula ada 50 Penyewa mobil A, 50 Penyewa mobil B, 40 Penyewa mobil C, dan 60 Penyewa mobil D. Maka vector keadaan pada saat itu adalah

$$X = \begin{pmatrix} \frac{50}{200} & \frac{50}{200} & \frac{40}{200} & \frac{60}{200} \end{pmatrix} = (0,25 \quad 0,25 \quad 0,2 \quad 0,3)$$

Teorema 4.1. Jika P merupakan matriks transisi rantai markov dan $x^{(n)}$ adalah vektor keadaan pada pengamatan ke-n, maka $x^{(n+1)} = x^{(n)}P$.

Bukti.

Diketahui P merupakan matriks transisi rantai markov sehingga $P = \Pr\left(X_{n+1} = S_k \middle| X_n = S_j\right)$.

Diketahui $x^{(n)}$ merupakan vektor keadaan pada pengamatan ke-n, Sehingga $x^{(n)} = \Pr(X_0 = S_a \wedge \cdots \wedge X_{n-1} = S_i \wedge X_n = S_j)$,

dan $x^{(n+1)}$ merupakan vektor vektor keadaan pada pengamatan ke-n + 1, sehingga $x^{(n+1)} = \Pr(X_0 = S_a \wedge \cdots \wedge X_{n-1} = S_i \wedge X_n = S_j \wedge X_{n+1} = S_k)$.

Maka $x^{(n+1)} = \Pr(X_0 = S_a \wedge \cdots \wedge X_{n-1} = S_i \wedge X_n = S_j \wedge X_{n+1} = S_k)$

$= \Pr(X_0 = S_a \wedge \cdots \wedge X_{n-1} = S_i \wedge X_n = S_j)\Pr(X_{n+1} = S_k | X_n = S_j) = x^{(n)}P$.

sehingga

$x^{(1)} = x^{(0)}P$

$x^{(2)} = x^{(1)}P = x^{(0)}P^2$

$x^{(3)} = x^{(2)}P = x^{(0)}P^3$

$x^{(n)} = x^{(n-1)}P = x^{(0)}P^n$

vektor keadaan awal $x^{(0)}$ dan matriks transisi P akan menentukan $x^{(n)}$ untuk

$n = 1, 2, \ldots \ldots$

Contoh 4.6

Diketahui suatu matriks transisi $P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$, vektor keadaan awal $x^{(0)} = [0 \quad 1]$ untuk pengamatan selanjutnya didapat

$$x^{(1)} = x^{(0)}P = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} = [0,3 \quad 0,7]$$

$$x^{(2)} = x^{(1)}P = [0,3 \quad 0,7]\begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} = [0,45 \quad 0,55]$$

$$x^{(3)} = x^{(2)}P = [0,45 \quad 0,55]\begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} = [0,525 \quad 0,475]$$

$$x^{(4)} = x^{(3)}P = [0,525 \quad 0,475]\begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} = [0,5625 \quad 0,4375]$$

$$x^{(5)} = x^{(4)}P = [0,5625 \quad 0,4375]\begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} = [0,581 \quad 0,419]$$

$$x^{(6)} = x^{(5)}P = [0,581 \quad 0,419]\begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} = [0,591 \quad 0,409]$$

$$x^{(7)} = x^{(6)}P = [0,591 \quad 0,409]\begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} = [0,595 \quad 0,405]$$

$$x^{(8)} = x^{(7)}P = [0,595 \quad 0,405]\begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} = [0,598 \quad 0,402]$$

$$x^{(9)} = x^{(8)}P = [0,598 \quad 0,402]\begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} = [0,599 \quad 0,401]$$

$$x^{(10)} = x^{(9)}P = [0,599 \quad 0,401]\begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} = [0,599 \quad 0,401]$$

Dengan kata lain, vektor-vektor keadaan akan konvergen menuju suatu vektor tetap seiring dengan meningkatnya jumlah pengamatan.

Definisi 4.7. Sebuah Matriks transisi bersifat reguler jika suatu pangkat bulat dari matriks tersebut mempunyai entri-entri positif.

Definisi 4.8. Misalkan $A, A_1, A_2, \cdots A_n$ dengan matiks $m \times m$, $A_1, A_2, \cdots$ konvergen menuju A jika $A_{ij} = \lim_{n\to\infty}(A_n)_{ij}$ untuk semua $i, j \in \{1,2, \dots, m\}$ ditulis $A = \lim_{n\to\infty} A_n$.

Contoh 4.7

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, misalkan $D_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^{-n} \end{bmatrix}$, maka $\lim_{n\to\infty} D_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Teorema 4.2. Jika P adalah sebuah matriks transisi, maka ketika $n \to \infty$, katakan

$$P^n \to \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{bmatrix}$$

dimana q_t dengan $t = 1,2, \dots, k$ sedemikian rupa sehingga $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$.

Bukti.

Akan ditunjukkan P^n matriks transisi reguler untuk matriks dengan semua komponen barisnya sama.

Misalkan kolom j dari P^n adalah $P^n y$ dimana y adalah vektor kolom dengan 1 di entri ke-j dan 0 di entri yang lainnya.

Entri ij dari P^n, $p_{ij}{}^n$ adalah probabilitas bahwa proses berada pada keadaan q_j setelah n langkah jika dimulai dari keadaan q_i.

Misalkan y suatu r komponen vektor kolom, dimana r adalah bilangan dari state dari rantai. diasumsikan $r > 1$ yaitu $y = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$.

Misalkan M_n dan m_n berturut-turut maksimum dan minimum komponen dari vektor $P^n y$.

Vektor $P^n y = P. P^{n-1} y$.

Karena setiap komponen dari $P^n y$ adalah rata-rata dari komponen dari $P^{n-1} y$, sehingga $M_0 \geq M_1 \geq M_2 \geq \cdots$ dan $m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \cdots$.

Setiap urutan adalah sama dan dibatasi $m_0 \leq m_n \leq M_n \leq M_0$.

Akibatnya setiap urutan mempunyai limit sampai n menuju tak hingga.

Misalkan $M = \lim_{n\to\infty} M_n$ dan $m = \lim_{n\to\infty} m_n$.

Diketahui bahwa $m \leq M$ sehingga $M_n - m_n$ menuju 0.

Misalkan d elemen terkecil dari P.

Karena semua entri dari P positif, maka $d > 0$.

Dari lemma $M_n - m_n \leq (1 - 2d)(M_{n-1} - m_{n-1})$ sehingga $M_n - m_n \leq (1 - 2d)^n (M_0 - m_0)$.

Karena $r \geq 2,\ d \leq \frac{1}{2}$, maka $0 \leq 1 - 2d < 1,$ maka selisih $M_n - m_n$ menuju 0 dengan n menuju tak hingga.

Karena setiap komponen dari $P^n y$ terletak diantara M_n dan m_n, setiap komponen harus mendekati bilangan yang sama $u = M = m$, ini menunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} P^n y = \mathbf{u}$, dimana $\mathbf{u}$ adalah semua vektor kolom dari komponen yang sama dengan u.

Misalkan y vektor dengan komponen j sama dengan 1 dan 0 untuk komponen yang lainnya.

Maka $P^n y$ adalah kolom j dari P^n. Lakukan ini untuk tiap j membuktikan bahwa kolom dari P^n mendekati vektor kolom konstan.

Ini berarti, baris dari P^n mendekati vektor baris w, atau $\lim_{n\to\infty} P^n = \mathbf{W}.$

Tinggal menunjukkan semua entri di W positif.

Sebelumnya, misalkan y vektor dengan komponen j sama dengan 1 dan komponen yang lainnya adalah 0.

Maka Py adalah kolom j dari P, dan kolom ini mempunyai semua entri positif. Komponen minimum dari vektor Py didefinisikan m_1, $m_1 > 0$.

Karena $m_1 < m$, maka $m > 0$.

Ini berarti nilai dari m hanya komponen j dari w, jadi semua komponen w adalah positif. Karen w dalah suatu probabilitas maka jumlah semua komponen w adalah 1.

Teorema 4.3. Jika P adalah sebuah matriks transisi reguler dan z adalah suatu vektor probabilitas, maka ketika n → ∞

$$zP^n \to [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_k] = q$$

dimana q adalah sebuah vektor probabilitas tetap, yang tidak tergantung pada n, dan semua entrinya adalah positif.

Bukti.

Dari teorema sebelumnya

Jika P adalah sebuah matriks transisi reguler, maka ketika n → ∞

$P^n \to \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{bmatrix}$ dimana q_k adalah bilangan-bilangan positif sedemikian rupa sehingga $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$.

Misal $q = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_k]$ adalah vektor probabalitas ketika n → ∞.

Ambil sebarang $z = [z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_k]$ vektor probabilitas.

Maka $zP^n = [z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_k] \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1q_1 + z_2q_1 + \cdots + z_kq_1 \\ z_1q_2 + z_2q_2 + \cdots + z_kq_2 \\ \vdots \\ z_1q_k + z_2q_k + \cdots + z_kq_k \end{bmatrix}$

$$= (z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_k)[q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_k] = (1)q = q$$

Teorema 4.4. Vektor keadaan tunak q dari sebuah matriks transisi reguler P merupakan vektor probabilitas yang unik, yang memenuhi persamaan qP=q.

Bukti.

$$\mathrm{qP} = z\mathrm{P}^{\mathrm{n}}\mathrm{P} = z\mathrm{P}^{\mathrm{n}}\mathrm{P} = [z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_k]\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} z_1q_1 + z_2q_1 + \cdots + z_kq_1 \\ z_1q_2 + z_2q_2 + \cdots + z_kq_2 \\ \vdots \\ z_1q_k + z_2q_k + \cdots + z_kq_k \end{bmatrix}$$

$$= (z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_k)[q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_k] = (1)\mathrm{q} = \mathrm{q}$$

Jadi $\mathrm{qP} = \mathrm{q}$

teorema di atas juga dapat dinyatakan dengan pernyataan bahwa suatu sistem linear homogen

$$\mathrm{q}(\mathrm{I} - \mathrm{P}) = 0$$

mempunyai sebuah vektor solusi q yang unik dengan entri-entri tak negatif yang memenuhi syarat $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$.

Contoh 4.7

Matriks transisi $\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}$

sehingga sistem linear $\mathrm{q}(\mathrm{I} - \mathrm{P}) = 0$ adalah $[q_1 \quad q_2]\begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}3 \end{bmatrix} = [0 \quad 0]$.

Sistem ini akan menghasilkan persamaan tunggal $0{,}2q_1 - 0{,}3q_2 = 0$

atau

$$q_1 = 1{,}5q_2$$

sehingga dengan menetapkan $q_2 = s$, setiap solusi dari $\begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ akan berbentuk

$$q = s\begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$$

dimana s adalah konstanta sebarang. Untuk membuat vektor q menjadi vektor probabilitas, kita menetapkan $s = \frac{1{,}5}{1{,}5+1{,}5} = 0{,}5$. sehingga

$$q = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

merupakan vektor keadaan tunak dari rantai markov reguler ini. Jika dikaitkan dengan kasus sebelumnya untuk jangka panjang, 50% alumnus akan memberikan sumbangan dalam setiap tahun, sementara 50% tidak.

Sifat jangka panjang suatu pengamatan, dapat ditentukan dengan nilai eigen dan vector eigen matriks transisi dari persamaan karakteristik

$$\lambda I - A = 0$$

dengan I matriks identitas dan A matriks transisi.

Dari Teorema 4.1, $x^{(n)} = x^{(n-1)}A = x^{(0)}A^n$ maka vektor-vektor kondisi dihitung dengan menetapkan jika matriks transisi A dapat didiagonalkan maka A mempunyai matriks pendiagonal sedemikian hingga $A = YDY^{-1}$, sehingga

$$X^{(n)} = X^{(0)}(YDY^{-1})^n = X^{(0)}YD^nY^{-1}$$

dengan meningkatnya n maka X^n mendekati vektor tunak x.

Pada suatu kota kecil terdapat tiga pasar swalayan K, L, dan M. Diasumsikan setiap pembeli di kota tersebut melakukan kunjungan belanja satu kali per minggu. Dalam sembarang minggu seorang pembeli hanya berbelanja di satu pasar swalayan saja, dan tidak di ketiganya. Kunjungan belanja disebut percobaan (trial) dari proses dan toko yang dipilih disebut keadaan dari proses. Suatu sampel pembeli diambil dalam periode 10 minggu. Dalam suatu minggu, pembeli yang berbelanja di toko K 60 persen tetap berbelanja di toko K pada minggu berikutnya, 20 persen berpindah belanja pada toko L, dan 20 persen berpindah belanja pada toko M. Pembeli yang berbelanja di toko L 60 persen tetap berbelanja di toko L pada minggu berikutnya, 20 persen berpindah belanja pada toko K, dan 20 persen berpindah belanja pada toko M. Pembeli yang berbelanja di toko M, 50 persen tetap berbelanja di toko M pada minggu berikutnya, dan 50 persen berpindah belanja pada toko L. Informasi tersebut disusun sebagai berikut

Pembeli pada minggu ini	Pembeli pada minggu berikutnya		
	K	L	M
K	60	20	20
L	20	60	20
M	0	50	50

Didefinisikan:

Keadaan 1 : Pembeli berbelanja di toko K

Keadaan 2 : Pembeli berbelanja di toko L

Keadaan 3 : Pembeli berbelanja di toko M

Dengan demikian matriks kemungkinan transisi adalah P.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{60}{100} & \frac{20}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{60}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{0}{100} & \frac{50}{100} & \frac{50}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa kemungkinan dari setiap baris berjumlah satu.

Misalkan mula-mula ada 100 pembeli di toko K, 50 pembeli di toko L, dan 50 pembeli di toko M. Jika di tetapkan

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \text{dan } x^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{100}{200} & \frac{50}{200} & \frac{50}{200} \end{pmatrix} = (0{,}5 \quad 0{,}25 \quad 0{,}25)$$

Untuk menentukan berapa banyak pembeli untuk 2 minggu yang akan datang dapat ditentukan dengan

$$x^{(n+1)} = x^{(n)}A, \text{untuk } n = 1{,}2, \ldots$$

maka untuk 2 minggu yang akan datang pembeli dapat di perkirakan

$$x^{(1)} = x^{(0)}A = (0{,}5 \quad 0{,}25 \quad 0{,}25) \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} = (0{,}35 \quad 0{,}375 \quad 0{,}275)$$

$$x^{(2)} = x^{(1)}A = (0{,}35 \quad 0{,}375 \quad 0{,}275) \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} = (0{,}29 \quad 0{,}43 \quad 0{,}28)$$

Jadi perkiraan pembeli untuk 2 minggu yang akan datang adalah $0,29 \times 200 = 58$ pembeli berbelanja di toko K, $0,43 \times 200 = 86$ pembeli berbelanja di toko L, dan $0,28 \times 200 = 56$ pembeli berbelanja di toko M.

Vektor x_i yang dihasilkan pada keadaan ini mengacu pada vektor kondisi state vektor dan urutan vektor kondisi ini disebut rantai markov. Matriks A dianggap sebagai mariks transisi.

Sifat proses jangka panjang, ditentukan oleh nilai eigen dan vektor eigen matriks transisi A.

$$\lambda I - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 0,6 & -0,2 & -0,2 \\ -0,2 & \lambda - 0,6 & -0,2 \\ 0 & -0,5 & \lambda - 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 0,6 & -0,2 & -0,2 \\ -0,2 & \lambda - 0,6 & -0,2 \\ 0 & -0,5 & \lambda - 0,5 \end{bmatrix}$$

$$= \big((\lambda - 0,6)(\lambda - 0,6)(\lambda - 0,5)\big) + 0$$

$$+ \big((-0,2)(-0,2)(-0,5)\big) - 0 - \big((-0,5)(-0,2)(\lambda - 0,6)\big)$$

$$- \big((\lambda - 0,5)(-0,2)(-0,2)\big)$$

$$= \big(\lambda^3 - 1,7\lambda^2 + 0,96\lambda - 0,18\big) + 0 + (-0,02) - 0 - (0,1\lambda - 0,06)$$

$$- (0,04\lambda - 0,02) = \lambda^3 - 1,7\lambda^2 + 0,82\lambda - 0,12$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 0,3)(\lambda - 0,4) = 0,$$

Sehingga $\lambda = 1 \vee \lambda = 0,3 \vee \lambda = 0,4$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$,

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\left(\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0,6 & 0,2 & 0,2\\ 0,2 & 0,6 & 0,2\\ 0 & 0,5 & 0,5\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda - 0,6 & -0,2 & -0,2\\ -0,2 & \lambda - 0,6 & -0,2\\ 0 & -0,5 & \lambda - 0,5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 - 0,6 & -0,2 & -0,2\\ -0,2 & 1 - 0,6 & -0,2\\ 0 & -0,5 & 1 - 0,5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0,4 & -0,2 & -0,2\\ -0,2 & 0,4 & -0,2\\ 0 & -0,5 & 0,5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0,4 & -0,2 & -0,2 & 0\\ -0,2 & 0,4 & -0,2 & 0\\ 0 & -0,5 & 0,5 & 0\end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{R_1\left(\frac{10}{4}\right)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -0,5 & -0,5 & 0\\ -0,2 & 0,4 & -0,2 & 0\\ 0 & -0,5 & 0,5 & 0\end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{\sim}{R_{21}(0,2)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -0,5 & -0,5 & 0\\ 0 & 0,3 & -0,3 & 0\\ 0 & -0,5 & 0,5 & 0\end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{\sim}{R_2\left(\frac{10}{3}\right)}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -0,5 & -0,5 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -0,5 & 0,5 & 0\end{array}\right) \begin{array}{c}R_{12}(0,5)\\ \sim\\ R_{32}(0,5)\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Di dapat $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, sehingga $x_1 - x_3 = 0$, $x_2 - x_3 = 0$. misalkan $x_3 = s$ maka $x_1 = s$, dan $x_2 = s$.

$$\varepsilon A(\lambda = 1) = \left\{\bar{x} \in R^3 | x = s\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, s \in R\right\}$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0{,}3$,

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\left(\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2\\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda - 0{,}6 & -0{,}2 & -0{,}2\\ -0{,}2 & \lambda - 0{,}6 & -0{,}2\\ 0 & -0{,}5 & \lambda - 0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0{,}3 - 0{,}6 & -0{,}2 & -0{,}2\\ -0{,}2 & 0{,}3 - 0{,}6 & -0{,}2\\ 0 & -0{,}5 & 0{,}3 - 0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-0{,}3 & -0{,}2 & -0{,}2\\ -0{,}2 & -0{,}3 & -0{,}2\\ 0 & -0{,}5 & -0{,}2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-0{,}3 & -0{,}2 & -0{,}2 & 0\\ -0{,}2 & -0{,}3 & -0{,}2 & 0\\ 0 & -0{,}5 & -0{,}2 & 0\end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{R_1\left(-\frac{10}{3}\right)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ -0{,}2 & -0{,}3 & -0{,}2 & 0\\ 0 & -0{,}5 & -0{,}2 & 0\end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{\sim}{R_{21}(0{,}2)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{15} & 0\\ 0 & -0{,}5 & -0{,}2 & 0\end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{\sim}{R_2(-6)}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & 0\\ 0 & -0{,}5 & -0{,}2 & 0\end{array}\right) \underset{R_{32}(0{,}5)}{\overset{R_{12}\left(-\frac{2}{3}\right)}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0{,}4 & 0\\ 0 & 1 & 0{,}4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Di dapat $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0{,}4\\ 0 & 1 & 0{,}4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, sehingga $x_1 + 0{,}4x_3 = 0$, dan

$x_2 + 0{,}4x_3 = 0$. misalkan $x_3 = s$ maka $x_2 = -0{,}4s$, dan $x_1 = -0{,}4s$

$$\varepsilon A(\lambda = 1) = \left\{ \bar{x} \in R^3 | x = s \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ -0{,}4 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in R \right\}$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0{,}4$,

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 0{,}6 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & \lambda - 0{,}6 & -0{,}2 \\ 0 & -0{,}5 & \lambda - 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}4 - 0{,}6 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}4 - 0{,}6 & -0{,}2 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}4 - 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}2 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & -0{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}2 & -0{,}2 & -0{,}2 & 0 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & -0{,}2 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & -0{,}1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1(-5) \\ \sim \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & -0{,}2 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & -0{,}1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ R_{21}(0{,}2) \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & -0{,}1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ R_{23} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & -0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ R_2(-2) \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_{12}(-1) \\ \sim \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Di dapat $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,8 \\ 0 & 1 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, sehingga $x_1 + 0,8x_3 = 0$, dan

$x_2 + 0,2x_3 = 0$. misalkan $x_3 = s$ maka $x_1 = -0,8s$ dan $x_2 = -0,2s$

$$\varepsilon A(\lambda = 1) = \left\{ \bar{x} \in R^3 | x = s\begin{pmatrix} -0,8 \\ -0,2 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in R \right\}$$

Jika vektor-vektor eigen digunakan untuk membentuk matriks pendiagonal Y, maka

$$A = YDY^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,4 & -0,8 \\ 1 & -0,4 & -0,2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{21} & \frac{10}{21} & \frac{2}{7} \\ \frac{10}{7} & -\frac{15}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Vektor-vektor kondisi dihitung dengan menetapkan

$$X^{(n)} = X^{(0)}YD^nY^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -0{,}4 & -0{,}8 \\ 1 & -0{,}4 & -0{,}2 \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} D^nY^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{21} & \frac{10}{21} & \frac{2}{7} \\ \frac{10}{7} & -\frac{15}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & \left(\left(-\frac{1}{20}\right)0{,}3^n\right) & \left(\left(-\frac{1}{5}\right)0{,}4^n\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{21} & \frac{10}{21} & \frac{2}{7} \\ \frac{10}{7} & -\frac{15}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{5}{21} \\ \frac{10}{7} \\ -\frac{5}{3}\end{pmatrix} + \left(\left(-\frac{1}{20}\right)0{,}3^n\right)\begin{pmatrix}\frac{10}{21} \\ -\frac{15}{7} \\ \frac{5}{3}\end{pmatrix} + \left(\left(-\frac{1}{5}\right)0{,}4^n\right)\begin{pmatrix}\frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 0\end{pmatrix}$$

Dengan meningkatnya n, maka x_n mendekati vektor tunak $x = \begin{pmatrix}0{,}5 \\ 0{,}25 \\ 0{,}25\end{pmatrix}$.

BAB 5

PENUTUP

5.1 Simpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut

1. Telah dibuktikan beberapa teorema berikut ini:
   a. Jika P merupakan matriks transisi rantai markov dan $x^{(n)}$ adalah vektor keadaan pada pengamatan ke-n, maka $x^{(n+1)} = x^{(n)}P$.
   b. Jika P adalah sebuah matriks transisi, maka ketika $n \to \infty$, katakan

$$P^n \to \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{bmatrix}$$

   dimana $q_k \ t = 1,2, \dots, k$ sedemikian rupa sehingga $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$.
   c. Jika P adalah sebuah matriks transisi reguler dan z adalah suatu vektor probabilitas, maka ketika $n \to \infty$

$$zP^n \to [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_k] = q$$

   dimana q adalah sebuah vektor probabilitas tetap, yang tidak tergantung pada n, dan semua entrinya adalah positif.

d. Vektor keadaan tunak q dari sebuah matriks transisi reguler P merupakan vektor probabilitas yang unik, yang memenuhi persamaan qP=q.

2. State dapat ditentukan dengan cara
   a. Menentukan matriks transisi dari suatu kasus
   b. Menentukan akar persamaan yaitu

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

   dengan I matriks identitas dan A matriks transisi.

   c. Maka state yaitu λ ditemukan,
3. Vektor-vektor kondisi dapat ditentukan dengan
   a. Menentukan vektor eigen dengan λ (state) yang sudah ditemukan pada (2)
   b. Menentukan matriks pendiagonal A yang vektor-vektor kolomnya adalah vektor-vektor eigen dari A.
   c. Vektor-vektor kondisi dapat dihitung dengan

$$X^{(n)} = X^{(0)} Y D^{n} Y^{-1}$$

   dengan Y adalah matriks pendiagonal A.

   d. Dengan meningkatnya n maka X_n mendekati vektor tunak x.

5.2 Saran

Dalam penulisan ini, penulis membahas aplikasi diagonalisasi matriks pada rantai markov. Dalam penulisan ini masih diperlukan beberapa contoh untuk memperjelas aplikasi diagonalisasi matriks. Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca untuk mengembangkan aplikasi diagonalisai matriks lebih luas lagi.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1991. Aljabar Linier Elementer Edisi Ketiga. Terjemahan Pantur Silaban dan I. Nyoman Susila. Penerbit Erlangga, Jakarta.

Anton, H. 1992. Aljabar Linier Elementer Edisi Kelima. Terjemahan Pantur Silaban dan I. Nyoman Susila. Penerbit Erlangga, Jakarta.

Hoel, G.H. Port, S.C. Stone, CJ. 1972. *Introduction to Stochastic Processes*. Houghton Mifflin Company. University of California, Los angeles.

J.Kenemy, J.Snell.1976. *Finite Markov Chains*.Springer-Verlag New York Inc.

J.Snell, C.Grinstead. 2006. *Introduction to Probability*.The Amecican Mathematical Society.

Langi, Yohanes. 2011. Penentuan Klasifikasi State pada Rantai Markov dengan Menggunakan Nilai Eigen dari Matriks Peluang Transisi. *Jurnal Ilmiah Sains*. Vol 11 No. 1:124-130

Panconesi, A. *The Stationary Distribution of a Markov Chain.* DI, La Sapienza of Rome, May 15, 2005.

Praptono. 1986. Pengantar Proses Stokastik 1. Penebit Karunika Jakarta.

Ross, SM. 1996. *Stochastic process second Edition.* John Wiley and Sons, Inc. New York.