PELABELAN $L(3,2,1)$ DAN PEMBENTUKAN GRAF MIDDLE PADA BEBERAPA GRAF KHUSUS

skripsi
disajikan sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika

oleh

Meliana Deta Anggraeni
4111409019

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2013

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Pelabelan $L(3,2,1)$ dan Pembentukan Graf Middle pada Beberapa Graf Khusus

disusun oleh :

Meliana Deta Anggraeni
NIM. 4111409019

Telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA UNNES pada tanggal 02 Agustus 2013.

Panitia :

Ketua	Sekretaris
Prof. Dr.Wiyanto, M.Si. NIP. 196310121988031001	Drs Arief Agoestanto, M.Si. NIP. 196807221993031005

Penguji

Dr. Rochmad, M.Si
NIP. 195711161987011001

Anggota Penguji / Pembimbing Utama	Anggota Penguji / Pembimbing Pendamping
Dr. Mulyono, M.Si NIP. 19700902 199702 1 001	Drs. Amin Suyitno, M.Pd NIP. 19520604 197612 1 001

PERNYATAAN

Saya menyatakan bahwa skripsi ini bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan peraturan perundang-undangan.

Semarang,   Agustus 2013

Meliana Deta Anggraeni
NIM. 4111409019

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

- Mengetahui kekurangan diri adalah tangga untuk menggapai cita-cita, berusaha terus untuk mengisi kekurangan adalah keberanian luar biasa.
- Awali segala sesuatu dengan 'BASMALLAH'.
- Hanya dengan sabar, berusaha, dan berdoa, keberhasilan akan terwujud.

PERSEMBAHAN

Persembahan ini saya tujukan untuk :

1. Bapak dan Ibu, yang tak hentinya melantunkan bait-bait doanya untukku dan selalu menantikan keberhasilanku.
2. Adik dan kekasih tersayang.
3. Almamaterku.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul **“PELABELAN $\boldsymbol{L(3,2,1)}$ DAN PEMBENTUKAN GRAF MIDDLE PADA BEBERAPA GRAF KHUSUS”** sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan jenjang studi sarjana pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.

Penulis menyadari bahwa terselesainya penulisan skripsi ini berkat bimbingan, pengarahan, dan bantuan dari berbagai pihak baik berupa moral maupun materiil. Oleh karena itu pada kesempatan ini, penulis akan menyampaikan rasa hormat, serta terima kasih kepada :

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman, M.Hum., Rektor Universitas Negeri Semarang,
2. Prof. Dr. Wiyanto, M.Si., Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si., Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang,
4. Dr. Mulyono, M.Si., dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, masukan, motivasi, semangat dalam pembuatan skripsi ini,
5. Drs. Amin Suyitno, M.Pd., dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, masukan, motivasi, semangat dalam pembuatan skripsi ini,
6. Seluruh Dosen Matematika yang telah membimbing dan memberikan ilmunya kepada penulis,

7. Bapak, Ibu, dan adik tercinta yang telah memberikan dorongan, dukungan dan doa kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini,
8. Teman-teman Matematika 2009, terima kasih atas kebersamaanya,
9. Semua pihak yang mendukung dan membantu proses terselesaikannya skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Semoga Allah SWT memberi rahmat serta hidayah-Nya pada kita semua baik di dunia maupun di akhirat. Penulis sadar bahwa kesempurnaan hanya milik Allah Yang Maha Kuasa, meskipun begitu penulis berharap skripsi ini dapat memberi manfaat bagi Almamater pada khususnya serta pembaca pada umumnya.

Semarang, Agustus 2013

Penulis

ABSTRAK

Anggraeni, M. D. 2013. *Pelabelan $L(3,2,1)$ dan Pembentukan Graf Middle pada Beberapa Graf Khusus*. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang. Pembimbing I: Dr. Mulyono, M.Si dan Pembimbing II: Drs. Amin Suyitno, M.Pd.

Kata Kunci: Graf khusus; graf *middle*; pelabelan $L(3,2,1)$.

Pelabelan dari suatu graf adalah suatu pemetaan yang membawa setiap elemen graf yaitu himpunan sisi (*edge*) atau himpunan titik (*vertex*) ke bilangan-bilangan bulat positif, yang disebut label. Pelabelan $L(3,2,1)$ adalah pelabelan di mana dalam suatu graf jika terdapat dua titik dengan jarak satu maka harus memiliki label dengan selisih minimal 3, jika terdapat dua titik dengan jarak dua maka harus memiliki label dengan selisih minimal 2, dan jika terdapat dua titik dengan jarak tiga maka harus memiliki label dengan selisih minimal 1.

Permasalahan dalam skripsi ini adalah bagaimana menentukan pelabelan $L(3,2,1)$ dan menentukan graf *middle* pada graf path P_n, graf sikel C_n, graf bintang S_n.

Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka dengan langkah sebagai berikut, yaitu (1) mempelajari dan mengkaji tentang pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n. (2) Mempelajari dan mengkaji tentang pembentukan graf *middle* pada graf path P_n, graf sikel C_n, graf bintang S_n dan pelabelan $L(3,2,1)$nya.

Untuk menentukan hasil pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n, terlebih dahulu membuktikan teorema-teorema yang ada. Penelitian ini memberikan hasil dan kesimpulan bahwa

$$k(P_n) = \begin{cases} 1\text{, jika } n = 1; \\ 4\text{, jika } n = 2; \\ 6\text{, jika } n = 3,4; \\ 7\text{, jika } n = 5,6,7; \\ 8\text{, jika } n \geq 8. \end{cases} \quad k(C_n) = \begin{cases} 7\text{, jika } n = 3; \\ 8\text{, jika } n \text{ genap}; \\ 9\text{, jika } n \text{ ganjil dan } n \neq 3,7; \\ 10, n = 7 \end{cases} \quad k(S_n) = 2n + 2.$$

$$K(M(P_n)) = \begin{cases} 6\text{, jika } n = 2; \\ 10\text{, jika } n = 3; \\ 12\text{, jika } n = 4; \\ 13\text{, jika } n = 5 \text{ dan } 6 \end{cases} \quad K(M(C_n)) = \begin{cases} 16\text{, jika } n = 3 \\ 14\text{, jika } n = 4 \\ 15\text{, jika } n = 5 \end{cases} \quad K(M(S_n)) = 13\text{, jika } n = 4.$$

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR SIMBOL

G : suatu graf
$G(V, E)$: graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E
$V(G)$: himpunan titik dari graf G
$E(G)$: himpunan sisi dari graf G
$|V(G)|$: jumlah titik dari graf G
$|E(G)|$: jumlah sisi dari graf G
v_i : titik ke i
e_i : sisi ke i
$d(v_i)$: derajat dari titik v_i
$\delta(G)$: derajat minimum
$\Delta(G)$: derajat maksimum
ϵ : anggota dari
$=$: sama dengan
$\neq$: tidak sama dengan
$\geq$: lebih besar sama dengan
$\leq$: lebih kecil sama dengan
$>$: lebih besar dari
$<$: lebih kecil dari
$\equiv$: kongruen
$\subseteq$: himpunan bagian *(subset)*
$k(G)$: label tertinggi dari suatu titik pada graf G
K_n : graf lengkap dengan n titik
$K_{m,n}$: graf bipartit lengkap dengan m dan n banyaknya titik di kedua partisi tersebut
S_n : graf bintang dengan n titik
P_n : graf path dengan n titik
C_n : graf sikel dengan n titik
f : fungsi atau pemetaan
$M(G)$: graf *middle* pada graf G
$V(M(G))$: himpunan titik graf middle pada graf G
$M(P_n)$: graf *middle* dari graf path dengan n titik
$M(C_n)$: graf *middle* dari graf sikel dengan n titik
$M(S_n)$: graf *middle* dari graf bintang dengan n titik

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Banyaknya permasalahan dalam kehidupan sehari–hari mendorong manusia untuk mencari solusi yang secara tidak langsung permasalahan tersebut mendorong berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi. Matematika merupakan salah satu yang banyak memberikan alternatif dalam menyelesaikan permasalahan di segala bidang. Salah satu cabang matematika yang dapat menyelesaikan suatu permasalahan adalah teori graf (Clipperton dkk., 2008:1).

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konigsberg, Rusia dalam sekali waktu. Pembuktian Euler tersebut ditulis dalam karya tulisnya yang berjudul *Solution problematis ad geometrian situs pertinensi*. Masalah jembatan Konigsberg tersebut dapat dinyatakan dengan istilah graf dalam menentukan keempat daerah itu sebagai titik (*vertex*) dan ketujuh jembatan sebagai sisi (*edge*) yang menghubungkan pasangan titik yang sesuai (Sutarno dkk., 2003: 58).

Pelabelan dari suatu graf adalah suatu pemetaan yang membawa setiap elemen graf yaitu himpunan sisi (*edge*) atau himpunan titik (*vertex*) ke bilangan-bilangan bulat positif, yang disebut label (Chang, 2000). Jika suatu pelabelan hanya menggunakan domain berupa titik maka disebut pelabelan titik, dan apabila domainnya berupa himpunan sisi maka disebut pelabelan sisi. Jika domainnya berupa himpunan titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling*).

Pelabelan $L(3, 2, 1)$ adalah pelabelan di mana dalam suatu graf jika terdapat dua titik dengan jarak satu maka harus memiliki label dengan selisih minimal 3, jika terdapat dua titik dengan jarak dua maka harus memiliki label dengan selisih minimal 2, dan jika terdapat dua titik dengan jarak tiga maka harus memiliki label dengan selisih minimal 1 (Lingsheit, 2009). Adapun graf khusus yang dibahas di sini antara lain yaitu graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n (Griggs, 1992: 586).

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraikan di atas, maka permasalahan yang dapat dirumuskan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana menentukan pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n?
2. Bagaimana cara menentukan graf *middle* dari graf path P_n, graf sikel C_n, graf bintang S_n, dan pelabelan $L(3, 2, 1)$nya?

1.3 Pembatasan Masalah

1. Pelabelan $L(3, 2, 1)$.
2. Graf khusus yang dibahas dalam penelitian ini meliputi graf path P_n, graf sikel C_n, graf bintang S_n, dan graf *middle*.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n.
2. Mengetahui cara menentukan graf *middle* dari graf path P_n, graf sikel C_n, graf bintang S_n, dan pelabelan $L(3, 2, 1)$nya .

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat penelitian ini diantaranya adalah sebagai berikut.

a. Bagi Penulis

   Memberikan pengalaman dan pengetahuan mengenai pelabelan $L(3, 2, 1)$ dan pembentukan graf *middle* pada beberapa graf khusus.

b. Bagi Pembaca

   Dapat dijadikan sumbang saran bagi pembaca yang akan melakukan penelitian pelabelan $L(3, 2, 1)$.

c. Bagi Perpustakaan Jurusan Matematika

   Dapat dijadikan sebagai tambahan referensi, sehingga dapat menambah wawasan bagi mahasiswa.

1.6 Sistematika Penyusunan Skripsi

Sistematika penulisan skripsi ini secara garis besar terbagi menjadi tiga bagian yaitu bagian awal, bagian isi, dan bagian akhir skripsi.

(1) Bagian awal skripsi meliputi halaman sampul, halaman judul, pernyataan keaslian tulisan, motto dan persembahan, kata pengantar, abstrak, daftar isi, daftar gambar, daftar tabel dan daftar lampiran.

(2) Bagian isi skripsi secara garis besar terdiri dari lima bab, adalah sebagai berikut.

BAB I : PENDAHULUAN

Dikemukakan latar belakang, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penyusunan skripsi.

BAB 2 : LANDASAN TEORI

Dikemukakan konsep-konsep yang dijadikan landasan teori sebagai berikut: graf dan pelabelan graf.

BAB 3 : METODE PENELITIAN

Dikemukakan metode penelitian yang berisi langkah-langkah yang ditempuh untuk memecahkan masalah yaitu: menentukan masalah, perumusan masalah, metode pengambilan data, analisis dan pemecahan masalah, serta penarikan kesimpulan.

BAB 4 : HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Dikemukakan hasil penelitian dan pembahasan yang berisi pembahasan dari permasalahan yang berkaitan dengan pelabelan $L(3,2,1)$ dan pembentukan graf middle pada graf khusus.

BAB 5 : PENUTUP

Bagian penutup meliputi simpulan dan saran. Simpulan merupakan hasil pembahasan bab-bab sebelumnya yang mencerminkan hasil penlitian. Saran berupa anjuran atau rekomendasi.

(3) Bagian akhir skripsi meliputi daftar pustaka dan lampiran-lampiran dari pembahasan yang telah dilakukan serta yang mendukung penulisan skripsi.

BAB II

LANDASAN TEORI

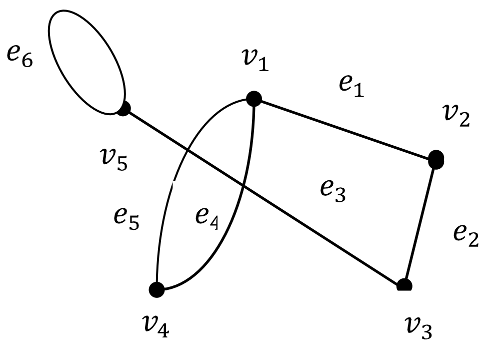
2.1 Graf

2.1.1 Definisi

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$, di mana $V(G)$ adalah himpunan berhingga titik-titik (*vertices*) yang tak kosong dan $E(G)$ adalah himpunan sisi (mungkin kosong), sedemikian sehingga setiap sisi (*edge*) di $E(G)$ adalah pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$. Himpunan titik dari G dinotasikan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$ (Budayasa, 2007: 1).

Jumlah titik dari graf G disebut *order* graf G yang dinotasikan dengan $|V(G)|$ sedangkan jumlah sisi dari graf G disebut *size* graf G yang dinotasikan dengan $|E(G)|$. Gambar di bawah ini contoh graf dengan 5 titik dan 6 sisi.

Contoh :



Gambar 2.1 Graf dengan 5 titik dan 6 sisi

Dalam sebuah graf, seperti terlihat pada Gambar 2.1, dimungkinkan adanya suatu sisi yang dikaitkan dengan pasangan (v_5, v_5). Sisi yang dua titik ujungnya sama disebut *loop*/gelang. Pada Gambar 2.1, sisi e_6 merupakan sebuah *loop*. Dalam sebuah graf dimungkinkan adanya lebih dari satu sisi yang dikaitkan dengan sepasang titik. Pada Gambar 2.1, sisi e_4 dan sisi e_5 dikaitkan dengan pasangan titik (v_1, v_4). Menurut Sutarno dkk. (2003: 60), pasangan sisi semacam ini disebut sisi-sisi pararel/sejajar atau sisi rangkap**.** Sebuah graf yang tidak memiliki *loop* dan tidak memiliki sisi rangkap disebut graf sederhana**.**

2.1.2 Definisi

Jika sebuah titik v_i merupakan titik ujung dari suatu sisi e_j, maka v_i dan e_j disebut saling berinsidensi atau titik v_i terkait (*incident*) dengan sisi e_j (Sutarno dkk., 2003: 60).

Contoh :

Pada Gambar 2.1 di atas, sisi e_1, e_4, dan e_5 adalah sisi-sisi yang terkait dengan titik v_1.

2.1.3 Definisi

Dua sisi yang tidak pararel disebut bertetangga (*adjacent*), bila kedua sisi tersebut terkait dengan titik yang sama. Selain itu, dua buah titik disebut bertetangga jika kedua titik tersebut merupakan titik-titik ujung dari sisi yang sama (Sutarno dkk., 2003: 60).

Contoh :

e_1 dan e_2 dalam Gambar 2.1, merupakan dua sisi yang bertetangga. Dalam Gambar 2.1, v_3 dan v_5 adalah dua titik yang saling bertetangga, sedangkan titik v_2 dan v_4 merupakan dua titik yang tidak saling bertetangga.

2.1.4 Definisi

Jumlah atau banyaknya sisi yang terkait dengan suatu titik v_i (*loop* dihitung dua kali), disebut derajat (*degree*) dari titik tersebut dinotasikan $d(v_i)$. Derajat suatu titik sering juga disebut valensi dari titik tersebut. Derajat minimum dari graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$ dan derajat maksimumnya dinotasikan dengan $\Delta(G)$ (Siang, 2002: 205).

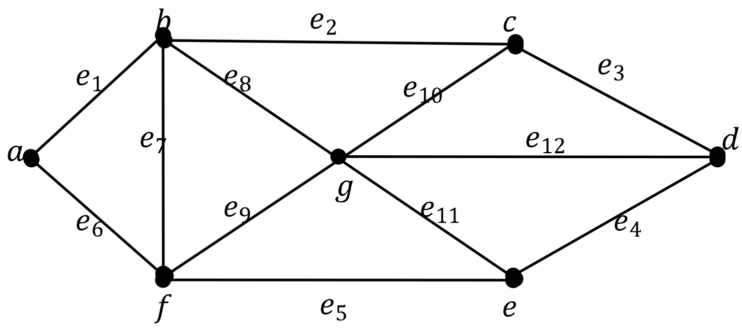
Contoh :

Pada Gambar 2.1, terlihat bahwa untuk setiap titik v di G derajat titiknya adalah $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 2$, $d(v_4) = 2$, $d(v_5) = 3$. Sehingga $\delta(G) = 2$ dan $\Delta(G) = 3$.

2.1.5 Definisi

Misalkan G adalah sebuah graf. Sebuah jalan (*walk*) di G adalah barisan berhingga (tak kosong) $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian sehingga v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir sisi e_i, untuk $1 \leq i \leq k$. Titik v_0 dan v_k berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir W. Sedangkan titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ disebut titik-titik internal dari W. Panjang dari jalan W adalah banyaknya sisi dalam W. Jika semua sisi $e_1, e_2, e_3 \dots, e_k$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut jejak (*trail*). Jika semua titik $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ dalam jalan W juga berbeda, maka W disebut sebuah lintasan (*path*). Sebuah jalan W disebut tertutup, jika titik awal dan titik akhir dari W sama. Jejak tertutup disebut sirkuit**.** Sirkuit yang titik awal dan titik internalnya berlainan disebut siklus (*cycle*). Siklus dengan n titik dinotasikan dengan C_n (Sutarno dkk., 2003: 65).

Contoh :



Gambar 2.2 Jalan, Jejak, Lintasan, dan Siklus dalam suatu Graf

Jalan : $a\ e_6\ f\ e_7\ b\ e_2\ c\ e_3\ d\ e_3\ c$.

Jalan tertutup : $a\ e_1\ b\ e_2\ c\ e_{10}\ g\ e_{12}\ d\ e_{12}\ g\ e_9\ f\ e_6\ a$.

Jejak : $a\ e_1\ b\ e_2\ c\ e_{10}\ g\ e_{11}\ e\ e_4\ d\ e_3\ c$.

Jejak tertutup : $a\ e_6\ f\ e_5\ e\ e_4\ d\ e_{12}\ g\ e_8\ b\ e_1\ a$.

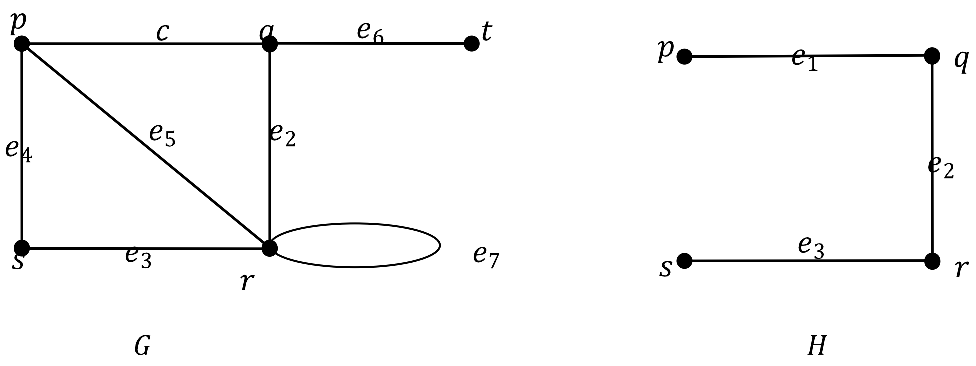
Lintasan : $a\ e_1\ b\ e_2\ c\ e_{10}\ g\ e_9\ f\ e_5\ e\ e_4\ d$.

Siklus : $a\ e_6\ f\ e_5\ e\ e_4\ d\ e_{12}\ g\ e_8\ b\ e_1\ a$.

2.1.6 Definisi

Sebuah graf H disebut graf bagian dari graf G, ditulis $H \subseteq G$, jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika $H \subseteq G$ dan $V(H) = V(G)$, maka H disebut graf bagian rentang (*spanning subgraf*) dari G (Budayasa, 2007: 5).

Contoh :



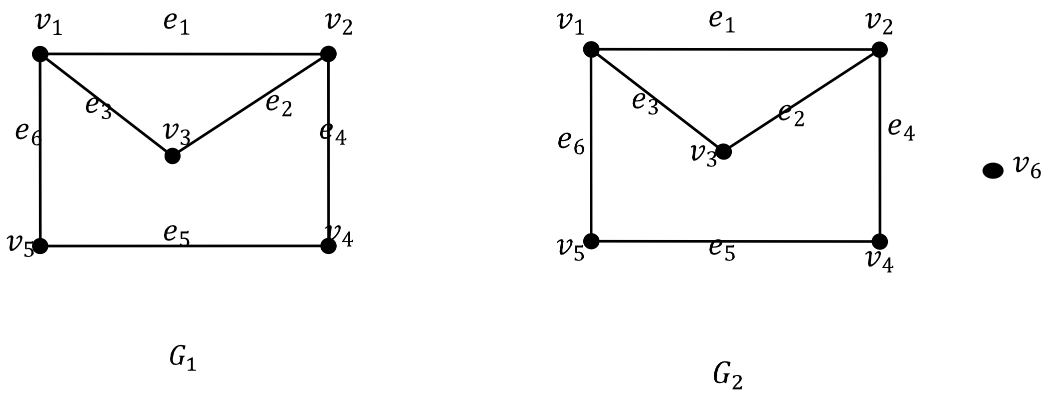
Gambar 2.3 H Graf Bagian dari G yang dibangun oleh $A = \{p, q, r, s\}$.

Graf bagian dari G yang dibangun oleh A adalah sebuah graf bagian dari G yang himpunan titiknya adalah A dan himpunan sisinya beranggotakan semua sisi G yang mempunyai titik-titik akhir di A Pada Gambar 2.3, graf H adalah graf bagian dari graf G yang dibangun oleh $A = \{p, q, r, s\}$, sedangkan graf bagian dari G yang dibangun oleh B adalah sebuah graf bagian dari G yang himpunan sisinya adalah B dan himpunan titiknya beranggotakan semua titik G yang terkait dengan sisi B Pada Gambar 2.3, graf H adalah graf bagian dari graf G yang dibangun oleh $B = \{e_1, e_2, e_3\}$.

2.1.7 Definisi

Sebuah graf G dikatakan terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap dua titik G yang berbeda terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sebaliknya graf G disebut tidak terhubung (*disconnected graph*) (Rosen, 2003: 570).

Contoh :

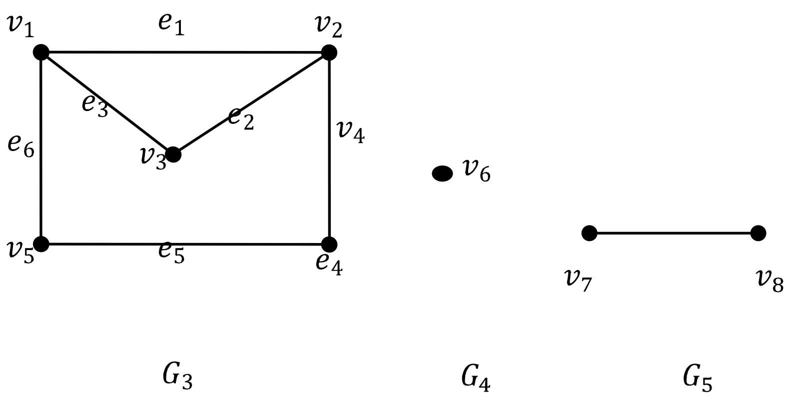


Gambar 2.4 Graf terhubung G_1 dan Graf tidak terhubung G_2

2.1.8 Definisi

Sebuah komponen graf G adalah sebuah graf bagian terhubung maksimal (titik dan sisi) dari G. Graf H dikatakan graf bagian terhubung maksimal dari graf G, jika tidak ada graf bagian lain dari G yang terhubung dan memuat H. Jadi setiap graf terhubung memiliki tepat satu komponen sedangkan graf tak terhubung memiliki paling sedikit dua komponen (Budayasa, 2007: 8).

Contoh :



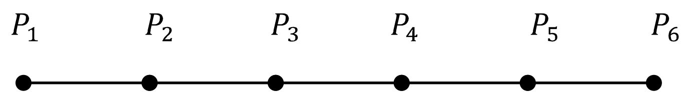
Gambar 2.5 Graf tidak terhubung dengan 3 komponen, yaitu G_3, G_4, G_5

2.2 Jenis-jenis Graf

2.2.1 Definisi

Graf path adalah graf sederhana yang terdiri dari lintasan tunggal. Graf path dengan n titik dinotasikan dengan P_n. P_n memiliki $n-1$ sisi (Budayasa, 2007: 6).

Contoh :

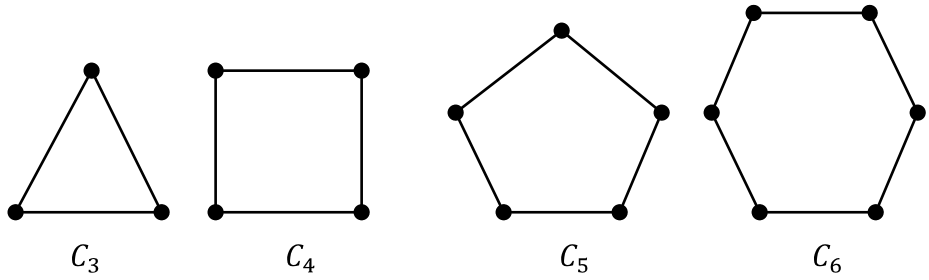


Gambar 2.6 Graf Path P_n

2.2.2 Definisi

Graf sikel adalah graf sederhana yang terdiri dari sebuah sikel tunggal dan setiap titiknya berderajat dua. Graf sikel dengan n titik dinotasikan dengan C_n, $n \geq 3$. Jika titik-titik pada C_n adalah $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ maka sisi-sisinya adalah $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$. Dengan kata lain, ada sisi dari titik terakhir, v_n, ke titik pertama, v_1 (Rosen, 2003: 548).

Contoh :

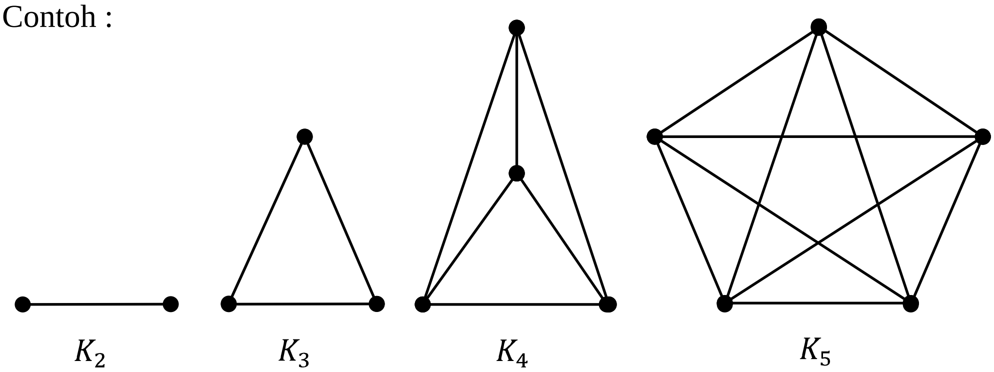


Gambar 2.7 Graf Sikel C_n

2.2.3 Definisi

Misalkan $G = \left(V(G), E(G)\right)$ adalah sebuah graf sederhana. Jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j di G terdapat sebuah sisi yang menghubungkannya, maka G disebut graf lengkap. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n (Sutarno dkk, 2003: 82).

Contoh :



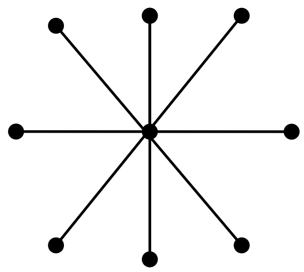
Gambar 2.8 Graf Lengkap K_n

2.2.4 Definisi

Graf Bintang S_n adalah graf bipartit lengkap yang berbentuk $K_{1,n}$. Graf bintang memiliki $n+1$ titik (Huda, 2012: 32). Sebuah graf G disebut graf bipartit jika $V(G)$ (himpunan titik dari graf G) dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian X dan Y sedemikian sehingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di X dan sebuah titik di Y. Dinotasikan (X, Y) bipartit dari G (Sutarno dkk, 2003: 84).

Apabila G sederhana dan bipartit dengan partisi (X, Y) sedemikian sehingga setiap titik di X *adjacent* dengan setiap titik di Y, maka G disebut graf bipartit lengkap, dinotasikan dengan $K_{m,n}$ dengan m dan n adalah banyaknya titik di kedua partisi tersebut.

Contoh :



Gambar 2.9 Graf Bintang S_n

2.3 Fungsi (Pemetaan)

2.3.1 Definisi

Misalkan A dan B merupakan himpunan tidak kosong, maka *cross product* dari dua buah himpunan A dan B yang dinotasikan dengan $A \times B$ adalah himpunan semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$ yaitu $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Contoh :

Diberikan $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{a, b\}$, maka $A \times B = \{(1, a), (2, a)$ $(3, a), (4, a), (1, b), (2, b), (3, b), (4, b)\}$ dan $B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2)$ $(a, 3), (b, 3), (a, 4), (b, 4)\}$. Dari hasil $A \times B$ dan $B \times A$ didapat bahwa $A \times B \neq B \times A$.

2.3.2 Definisi

Misalkan A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu cara atau aturan yang memasangkan setiap elemen dari himpunan A dengan tepat satu elemen di himpunan B disebut pemetaan dari himpunan A ke himpunan B. Pemetaan dari himpunan A ke himpunan B diberi notasi f, yaitu $f: A \to B$. Secara umum pemetaan digolongkan menjadi tiga golongan.

2.3.3 Definisi

Pemetaan $f: A \to B$ adalah pemetaan surjektif jika *range* dari f adalah semua elemen di B, dengan kata lain jika untuk setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$ sehingga $f(x) = y$ (Bartle & Sherbert, 1994:13).

2.3.4 Definisi

Menurut Bartle & Sherbert (1994:13) sebuah pemetaan $f: A \to B$ dikatakan injektif (*one-one*) jika dan hanya jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$, untuk semua $x_1, x_2 \in A$.

2.3.5 Definisi :

Jika f merupakan pemetaan yang surjektif dan sekaligus injektif maka f disebut pemetaan bijektif (Bartle & Sherbert, 1994:13).

2.4 Pelabelan Graf

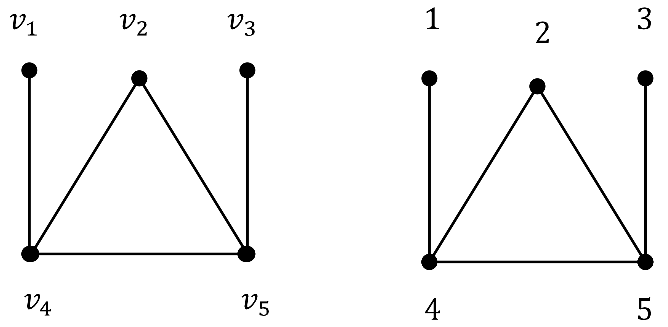
2.4.1 Definisi

Hasil penelitian Budiasti (2010) mengatakan bahwa pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat positif). Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*).

Contoh :

Diberikan graf G sebagai berikut.

Didefinisikan $f(v_1) = 1, f(v_2) = 2, f(v_3) = 3, f(v_4) = 4, f(v_5) = 5$

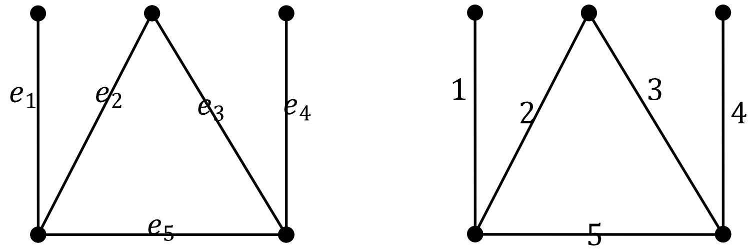


Gambar 2.10 Pelabelan Titik pada Graf G

Contoh :

Diberikan graf G sebagai berikut.

Didefinisikan $f(e_1) = 1, f(e_2) = 2, f(e_3) = 3, f(e_4) = 4, f(e_5) = 5$.



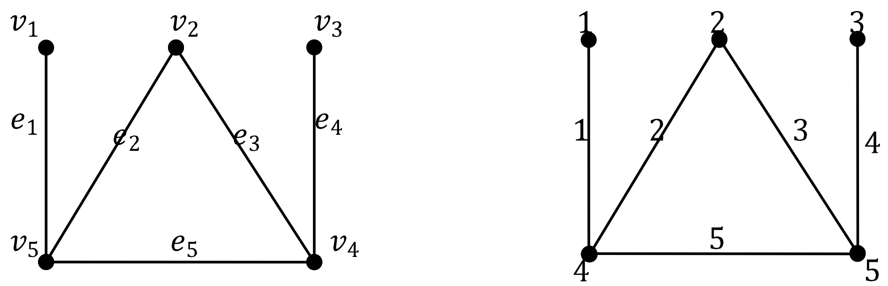
Gambar 2.11 Pelabelan Sisi pada Graf G

Contoh :

Diberikan graf G sebagai berikut.

Didefinisikan $f(v_1) = 1, f(v_2) = 2, f(v_3) = 3, f(v_4) = 4, f(v_5) = 5$

$f(e_1) = 1, f(e_2) = 2, f(e_3) = 3, f(e_4) = 4, f(e_5) = 5$



Gambar 2.12 Pelabelan Total pada Graf G

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini metode atau langkah-langkah yang digunakan adalah sebagai berikut.

3.1 Menemukan Masalah

Dalam tahap ini dicari sumber pustaka dan dipilih bagian dari sumber pustaka sebagai suatu masalah. Penulis mencari berbagai macam sumber pustaka yang berhubungan dengan pelabelan $L(3,2,1)$, graf *middle*, dan graf khusus yang meliputi graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n. Kemudian menyeleksi untuk ditetapkan sebagai suatu masalah yang harus diselesaikan.

3.2 Merumuskan Masalah

Masalah yang ditemukan kemudian dirumuskan kedalam pertanyaan yang harus diselesaikan yaitu:

(1) Bagaimana menentukan pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n.

(2) Bagaimana menentukan graf *middle* dari graf path P_n, graf sikel C_n, graf bintang S_n, dan pelabelan $L(3,2,1)$nya.

3.3 Metode Pengambilan Data

Pada penelitian ini metode atau langkah-langkah yang digunakan adalah sebagai berikut.

1) Studi Pustaka

   Dalam langkah ini dilakukan kajian sumber-sumber pustaka tentang pelabelan $L(3,2,1)$, graf *middle*, dan graf khusus yang meliputi graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n dengan cara mencari referensi dari buku-buku dan jurnal yang berkaitan dengan pelabelan $L(3,2,1)$, graf *middle*, dan graf khusus yang meliputi graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n sehingga didapatkan suatu ide mengenai bahan dasar pemecahan masalah.

2) Dokumentasi

   Metode pengumpulan data dengan cara dokumentasi dilakukan penulis dengan mengambil atau melihat langsung data-data dari internet yang ter-update. Misalnya dengan cara mencarinya di situs *www.google.com* dengan menggunakan kata kunci pelabelan $L(3,2,1)$, graf *middle*, dan graf khusus yang meliputi graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n.

3.4 Analisis dan Pemecahan Masalah

Dari berbagai sumber pustaka yang sudah menjadi bahan kajian, diperoleh suatu pemecahan masalah di atas. Selanjutnya dilakukan langkah-langkah pemecahan masalah sebagai berikut.

1. Memahami definisi pelabelan $L(3, 2, 1)$.
2. Membuktikan Lemma dan Teorema yang ada pada graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n.
3. Memberikan pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n.
4. Memahami definisi graf *middle*.
5. Membentuk graf *middle* dari graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n.
6. Memberikan pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf *middle* yang dibentuk dari graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n.

3.5 **Penarikan Kesimpulan**

Tahap ini merupakan tahap terakhir dalam metode penelitian. Penarikan kesimpulan dari permasalahan diperoleh dari hasil langkah pemecahan masalah yang dirumuskan berdasarkan studi pustaka dan pembahasannya.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Pelabelan $\boldsymbol{L(3, 2, 1)}$

4.1.1 Definisi

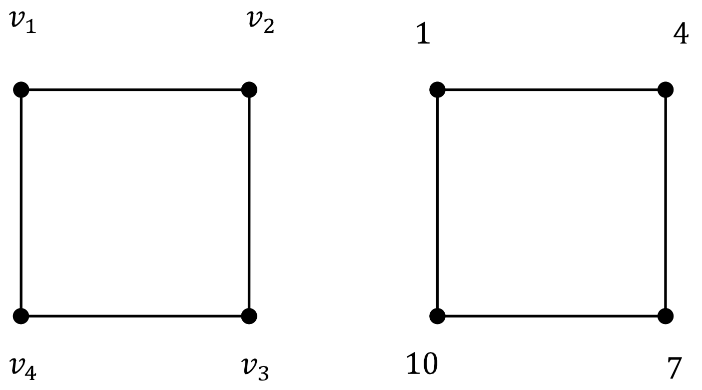
Berdasarkan hasil penelitian Clipperton dkk., (2005:1) dan Chia, (2011: 2439) jika diketahui graf $G = \big(V(G), E(G)\big)$. Maka pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf G adalah fungsi $f: V(G) \to N$, dengan $\{x, y\} \in V(G)$ berlaku

$$|f(x) - f(y)| \geq \begin{cases} 3, & \text{jika } d(x, y) = 1 \\ 2, & \text{jika } d(x, y) = 2 \\ 1, & \text{jika } d(x, y) = 3 \end{cases}$$

4.1.2 Definisi

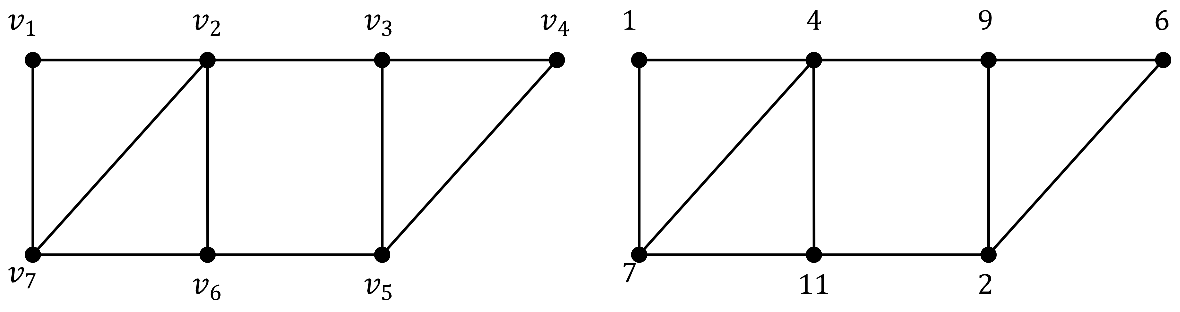
Jika terdapat titik v_i dan v_j di dalam graf G, maka jarak antara titik v_i dan v_j adalah banyaknya sisi yang dilewati dari titik v_i menuju titik v_j. Bilangan pelabelan $L(3, 2, 1)$, disimbolkan $k(G)$, dari graf G adalah bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga G memiliki pelabelan $L(3, 2, 1)$ dengan k sebagai label maksimum. Sebuah pelabelan $L(3, 2, 1)$ dari graf G disebut pelabelan $L(3, 2, 1)$ minimal dari G jika label tertinggi dari sembarang titik dalam pelabelan itu adalah $k(G)$ (Yeh, 2006: 1218).

Jika 1 tidak digunakan sebagai label titik dalam suatu pelabelan $L(3, 2, 1)$ dari sebuah graf, maka setiap label titik dapat diturunkan 1 untuk memperoleh pelabelan $L(3, 2, 1)$ dari sebuah graf. Jadi dalam pelabelan $L(3, 2, 1)$ minimal, 1 harus digunakan sebagai label titik.



Gambar 4.1 Graf G_6

Pada gambar 4.1 dijelaskan tentang pelabelan $L(3,2,1)$ pada suatu graf G_6. Pertama, beri label 1 pada suatu titik misalkan titik v_1. Karena titik v_1 dan v_2 berjarak satu maka harus diberikan label dengan selisih minimal tiga, misalkan titik v_2 diberi label 4. Sedangkan pada titik v_1 dan v_3 berjarak dua maka harus diberikan label dengan selisih minimal dua, misalkan titik v_3 diberi label 7, karena pada titik v_1 dan v_4 berjarak tiga maka harus diberikan label dengan selisih minimal satu, maka titik v_4 diberi label 10. Sehingga diperoleh label terkecil pada graf G_6 adalah 1 dan $k(G_6) = 10$.



Gambar 4.2 Graf G_7

Pada Gambar 4.2 dijelaskan tentang pelabelan $L(3,2,1)$ pada suatu graf G_7. Pertama, beri label 1 pada suatu titik misalkan titik v_1. Karena titik v_1 dan v_2 berjarak satu maka harus diberikan label dengan selisih minimal tiga, misalkan titik v_2 diberi label 4. Karena titik v_2 dan v_7 berjarak satu maka titik v_7 diberi label 7. Sedangkan titik $v_7$dan v_3 berjarak dua maka harus diberikan label dengan selisih minimal dua, misalkan titik v_3 diberi label 9. Karena titik v_3 dan v_6 berjarak dua maka titik v_6 diberi label 11. Sedangkan titik v_1 dan v_5 berjarak tiga maka harus diberikan label dengan selisih minimal satu, misalkan titik v_5 diberi label 2 dan karena titik v_3 dan v_4 berjarak satu maka titik v_4 diberi label 6. Sehingga diperoleh label terkecil pada graf G_7 adalah 1 dan $k(G_7) = 11$.

4.2 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf Khusus

4.2.1 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf Path P_n

Berikut ini akan dibahas Lemma 4.2.1.1 untuk membuktikan teorema 4.2.1.2.

Lemma 4.2.1.1

Untuk setiap graf path pada n titik yang dinotasikan dengan P_n, dengan $n \geq 8$, maka $k(P_n) \geq 8$.

Bukti :

Misalkan f adalah pelabelan $L(3,2,1)$ minimal untuk graf path pada n titik yang dinotasikan dengan P_n dan andaikan $k(P_n) < 8$ untuk $n \geq 8$. Misalkan v_1 merupakan titik dengan label 1. Di sana dimasukan subpath paling sedikit 8 titik dengan v_1 sebagai titik pertama. Misalkan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ merupakan graf path. Selanjutnya akan dihitung kemungkinan untuk $f(v_2)$.

Kasus I : $f(v_2) = 4$:

Jika dimisalkan $f(v_3) = 7,\ f(v_4) = 2,\ f(v_5) = 5,$ dan $f(v_6) \geq 8$, maka kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $k(P_n) < 8$.

Kasus II : $f(v_2) = 5$:

Jika dimisalkan $f(v_3) = 8$, maka kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $k(P_n) < 8$.

Kasus III : $f(v_2) = 6$:

Jika dimisalkan $f(v_3) = 3, f(v_4) \geq 8$, maka kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $k(P_n) < 8$.

Kasus IV : $f(v_2) = 7$:

Jika dimisalkan $f(v_3) = 3$ atau 4. Keduanya mungkin untuk $f(v_2)$ dengan memberi $f(v_4) \geq 9$, yang mana kontradiksi dengan $k(P_n) < 8$. Hal ini dapat dilihat bahwa jika diambil $f(v_3) = 3,\ f(v_4) \geq 9, f(v_5) = 5,$ dan $f(v_6) = 2$, maka kontradiksi. Jika diambil $f(v_3) = 4, f(v_4) \geq 9, f(v_5) = 6,$ dan $f(v_6) = 3$, maka kontradiksi juga.

Oleh karena itu, dapat diambil kesimpulan bahwa $k(P_n) \geq 8$, jika $n \geq 8$.

Teorema 4.2.1.2

Untuk setiap graf path, yang dinotasikan dengan P_n, maka

$$k(P_n) = \begin{cases} 1\ , \text{jika } n = 1; \\ 4, \text{jika } n = 2; \\ 6, \text{jika } n = 3, 4; \\ 7, \text{jika } n = 5, 6, 7; \\ 8, \text{jika } n \geq 8. \end{cases}$$

Bukti :

Misalkan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ merupakan himpunan dari titik pada P_n sedemikian sehingga v_i berdekatan dengan v_{i+1} untuk $1 \leq i < n$. Didefinisikan f sedemikian sehingga $f(\{v_1, v_2, \dots, v_8\}) = \{1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6\}$ dan $f(v_i) = f(v_j)$ jika $i \equiv j$ (mod8). Menurut definisi dari f dan berdasarkan Lemma 4.2.1.1 maka $k(P_n) = 8$ untuk $n \geq 8$.

Untuk setiap P_n dengan $n < 8$, maka akan diproses beberapa kasus dengan menggunakan pola pelabelan yang didefinisikan oleh f dan dapat dilihat bahwa setiap $P_1, P_2, \dots, P_7$ merupakan subpath yang tereduksi dari P_n dengan $n \geq 8$.

Kasus I : $n = 1$.

Ini adalah kasus trivial.

Kasus II : $n = 2$.

Pola pelabelan $\{1, 4\}$ menunjukkan bahwa $k(P_2) = 4$, karena tidak ada penyelesaian yang lebih baik dari pada itu.

Kasus III : $n = 3, 4$.

Akan ditunjukan bahwa pola pelabelan dari $k(P_n) \leq 6$ untuk $n = 3, 4$ adalah $\{3, 6, 1, 4\}$. Andaikan $k(P_n) < 6$. Terdapat titik $v_i \in V$ sedemikian sehingga $f(v_1) = 1$. Jika v_i memiliki derajat 2, maka titik v_{i-1} dan v_{i+1} ada sedemikian sehingga $f(v_{i-1}) \geq 4$ dan $f(v_{i+1}) \geq 6$, sehingga kontradiksi. Jika v_i memiliki derajat 1 , misalkan $v_i = v_1$, maka kemungkinan untuk $f(v_2)$ adalah 4 dan 5. Dalam salah satu kasus, diketahui $f(v_3) > 6$, maka kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $k(P_n) < 6$.

Kasus IV : $n = 5$,6, 7.

Akan ditunjukkan bahwa pola pelabelan dari $k(P_n) \leq 7$ untuk $n = 5, 6, 7$ adalah $\{3, 6, 1, 4, 7, 2, 5\}$. Andakain $k(P_n) < 7$. Terdapat titik $v_i \in V$ sedemikian sehingga $f(v_i) = 1$ dan titik v_{i+1} dan v_{i+2} ada atau v_{i-1} dan v_{i-2} ada. Tanpa menghilangkan sifat umum, andaikan v_{i+1} dan v_{i+2} ada. Kemungkinan untuk $f(v_{i+1})$ adalah $4, 5$, dan 6. Jika$f(v_{i+1}) = 4, 5$, maka $f(v_{i+2}) \geq 7$, sehingga kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $k(P_n) < 7$. Jika $f(v_{i+1}) = 6$ maka $f(v_{i+2}) = 3$. Selanjutnya, jika v_{i+2} memiliki derajat 2, maka v_{i+3} ada dan $f(v_{i+3}) > 7$. Jika v_{i+2} memiliki derajat 1 maka titik v_{i-1} dan v_{i-2} ada. Satu-satunya kemungkinan untuk $f(v_{i-1})$ adalah 4. Tetapi dengan memasukkan $f(v_{i-1}) \geq 7$, maka kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $k(P_n) < 7$.

Pada gambar berikut ini akan diberikan contoh pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf path yang berdasarkan pada Lemma 4.2.1.1 dan Teorema 4.2.1.2.

Contoh :

Misalkan, suatu graf path dengan titik $n = 1$ yang dinotasikan dengan P_1, maka $k(P_1) = 1$.

Gambar 4.3 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Path dengan $n = 1$

Contoh :

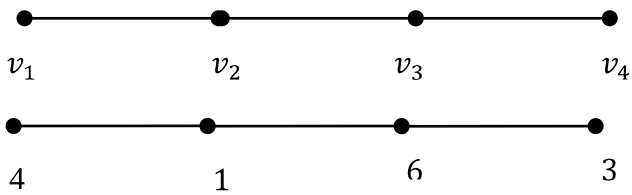
Misalkan, suatu graf path dengan titik $n = 2$ yang dinotasikan dengan P_2, maka $k(P_2) = 4$.

Gambar 4.4 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Path dengan $n = 2$

Contoh :

Misalkan, suatu graf path dengan titik $n = 3$ atau 4 yang dinotasikan dengan P_3 dan P_4, maka $k(P_3) = 6$ dan $k(P_4) = 6$.

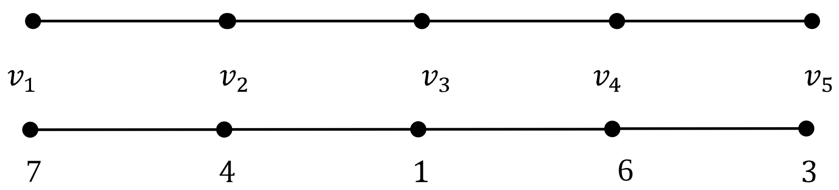
Gambar 4.5 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Path dengan $n = 3$



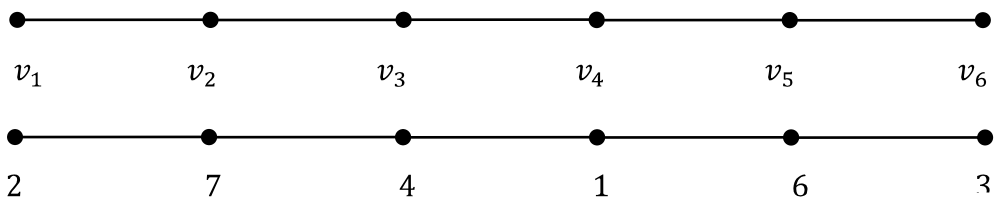
Gambar 4.6 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Path dengan $n = 4$

Contoh :

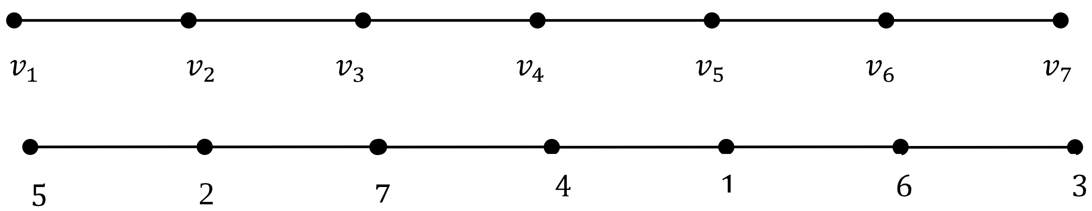
Misalkan, suatu graf path dengan titik $n = 5, 6$ atau 7 yang dinotasikan dengan P_5, P_6 dan P_7, maka $k(P_5) = 7, k(P_6) = 7$ dan $k(P_7) = 7$.



Gambar 4.7 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Path dengan $n = 5$



Gambar 4.8 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pad Graf Path dengan $n = 6$

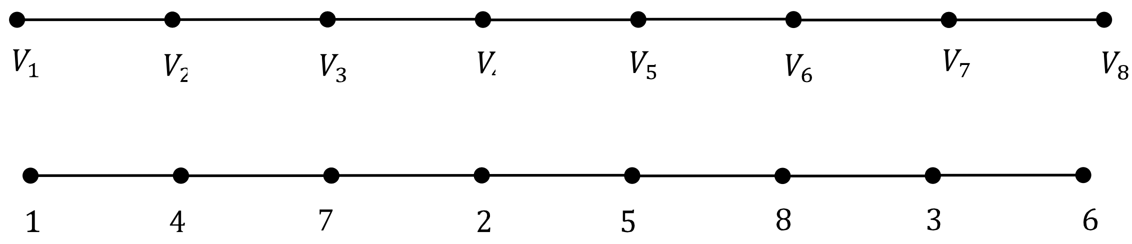


Gambar 4.9 Pelabelan $L(3, 2,1)$ pada Graf Path dengan $n = 7$

Contoh :

Misalkan terdapat graf path dengan titik $n \geq 8$, yang dinotasikan dengan P_8 maka $k(P_8) = 8$. Selanjutnya pada Gambar 4.10 dijelaskan tentang pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf path P_8. Pertama, beri label 1 pada suatu titik misalkan titik v_1. Karena titik v_1 dan v_2 berjarak satu maka harus diberikan label dengan selisih minimal tiga, misalkan titik v_2 diberi label 4. Karena titik v_2 dan v_3 berjarak satu maka titik $v_3$diberi label 7. Sedangkan pada titik v_2 dan v_4 berjarak dua maka harus diberikan label dengan selisih minimal dua, misalkan titik v_4 diberi label 2. Karena titik v_4 dan v_5 berjarak satu maka titik v_5 diberi label 5. Karena titik v_5 dan v_6 berjarak satu maka titik v_6 diberi label 8. Sedangkan pada titik v_5 dan v_7 berjarak dua maka titik v_7 diberi label 3. Kemudian untuk titik v_8 diberi label 6 karena pada titik v_7 dan v_8 berjarak satu.

.



Gambar 4.10 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf Path P_8

4.2.2 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf Sikel C_n

Lemma 4.2.2.1

Misalkan n adalah bilangan bulat ganjil, jika $n > 3$ maka $k(C_n) \neq 8$.

Bukti :

Misalkan f adalah pelabelan $L(3,2,1)$ minimal dari C_n di mana n adalah bilangan ganjil dan $n > 3$. Andaikan $k(C_n) = 8$. Maka hanya pelabelan yang mungkin dengan 8 sebagai bilangan bulat maksimum adalah sebagai berikut: $f_1(V) = \{8,5,2,7,4,1,6,3\}$, $f_2(V) = \{8,5,2,7,4,1,X\}$, $f_3(V) = \{8,5,1,7,3,X,X\}$, $f_4(V) = \{8,4,1,7,3,X,X\}$, $f_5(V) = \{8,5,2,7,4,1\}$, $f_6(V) = \{8,4,1,6,X\}$, $f_7(V) = \{8,2,5,X,X\}$, $f_8(V) = \{8,2,6,X,X\}$, $f_9(V) = \{8,1,5,X,X\}$, dan $f_{10}(V) = \{8,3,6,1\}$.

Dapat dilihat bahwa f_1, f_5, dan f_{10} adalah pelabelan untuk sikel genap. Dari pelabelan sisa f_2, f_3, f_4, f_6, f_7, f_8 dan f_9 semua gagal sebagai pelabelan pada sikel karena label X yang hilang harus lebih besar daripada yang diasumsikan $k(C_n) = 8$. Oleh karena itu, tidak ada pelabelan $L(3,2,1)$ minimal yang berada pada C_n dengan n ganjil dan $n > 3$ sedemikian sehingga $k(C_n) \neq 8$.

Lemma 4.2.2.2

Untuk setiap graf sikel dengan $n = 4$ maka $k(C_4) = 8$.

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa pola pelabelan dari $k(C_4) \leq 8$ adalah $\{1, 6, 3, 8\}$. Kemudian, misalkan f adalah pelabelan $L(3, 2, 1)$ minimal dari C_4 dan andaikan $k(C_4) < 8$. Diberikan $f(v_1) = 1$, sedangkan v_2 dan v_4 adalah dua titik yang berdekatan dengan v_1. Maka kemungkinan untuk $\{f(v_2), f(v_4)\}$ adalah $\{4, 6\}, \{4, 7\}, \{5, 7\}$.

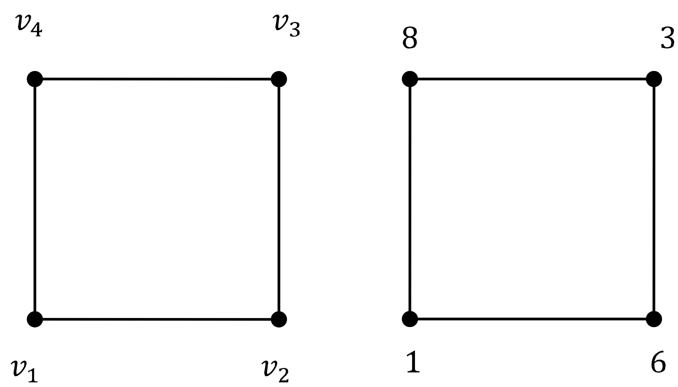
Kasus I : $\{f(v_2), f(v_4)\} = \{4, 6\}$:

Jika misalkan $f(v_3) = 9$, maka kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $k(C_4) < 8$. Jika diambil $f(v_3) = 3$, maka tidak memenuhi definisi 4.1.1 karena selisih label pada titik v_2 dan v_3 hanya 1.

Kasus II : $\{f(v_2), f(v_4)\} = \{4,7\}$ atau $\{5, 7\}$:

Jika dimisalkan $f(v_3) = 10$, maka kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $k(C_4) < 8$. Jika diambil $f(v_3) = 8$, maka tidak memenuhi definisi 4.1.1 karena selisih label pada titik v_3 dan v_4 hanya 1. Oleh karena itu $k(C_4) = 8$.

Contoh :



Gambar 4.11 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Sikel dengan $k(C_4) = 8$

Lemma 4.2.2.3

Untuk setiap graf sikel dengan $n = 5$ maka $k(C_5) = 9$.

Bukti :

Dari teorema 4.2.1.2 dapat diketahui bahwa $k(C_5) \geq 7$ karena $k(P_5) = 7$. Misalkan f adalah pelabelan $L(3, 2, 1)$ minimal dari C_5 dan andaikan $k(C_5) = 7$. Diberikan $f(v_1) = 1$, dan misalkan $v_2$dan v_5 adalah dua titik yang berdekatan dengan v_1. Maka kemungkinan untuk $\{f(v_2), f(v_5)\}$ adalah $\{4, 6\}, \{4, 7\},$ dan $\{5, 7\}$.

Kasus I : $\{f(v_2), f(v_5)\} = \{4, 6\}$:

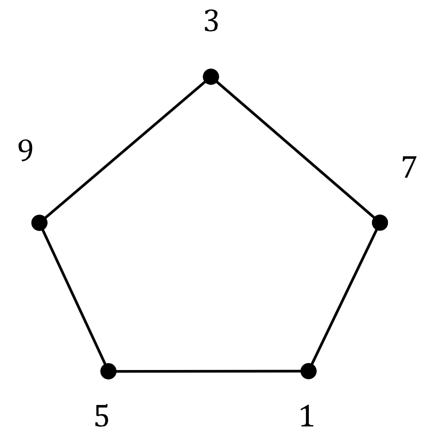
Jika dimisalkan $f(v_3) = 8$, maka kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $k(C_5) = 7$.

Kasus II : $\{f(v_2), f(v_5)\} = \{4, 7\}$ atau $\{5, 7\}$:

Jika dimisalkan $f(v_3) = 9$, maka kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $k(C_5) = 7$.

Karena $k(C_5) = 7$ tidak mungkin terjadi, maka didapatkan $k(C_5) \geq 7$. Menurut Lemma 4.2.2.1 untuk sikel ganjil, dapat dilihat bahwa $k(C_5) \neq 8$. Maka diperoleh $k(C_5) \geq 9$. Sehingga, pola pelabelan $\{5, 1, 7, 3, 9\}$ menunjukkan bahwa $k(C_5) \leq 9$. Oleh karena itu $k(C_5) = 9$.

Contoh :



Gambar 4.12 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf Sikel dengan $k(C_5) = 9$

Lemma 4.2.2.4

Untuk graf sikel dengan $n = 6$ maka $k(C_6) = 8$.

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa pola pelabelan dari $k(C_6) \leq 8$ adalah $\{1,4,7,2,5,8\}$. Misalkan f adalah pelabelan $L(3,2,1)$ minimal dari C_6 dan andaikan $k(C_6) < 8$. Diberikan $f(v_1) = 1$, dan misalkan v_2 dan v_6 adalah dua titik yang berdekatan dengan v_1. Maka kemungkinan untuk $\{f(v_2), f(v_6)\}$ adalah $\{4,6\}, \{4,7\}$, dan $\{5,7\}$.

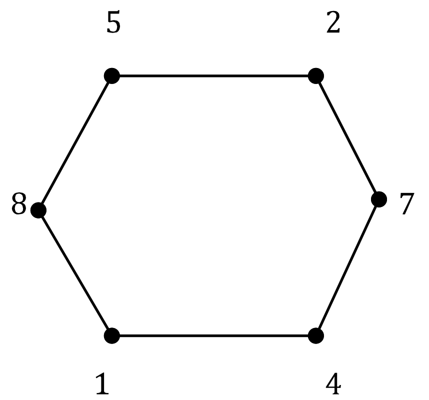
Kasus I : $\{f(v_2), f(v_6)\} = \{4,6\}$:

Jika dimisalkan $f(v_3) = 7$ dan $f(v_4) = 2$. Untuk v_5, diketahui $f(v_5) = 9$, maka kontradiksi dengan $k(C_6) < 8$.

Kasus II : $\{f(v_2), f(v_6)\} = \{4,7\}$ atau $\{5,7\}$:

Jika dimisalkan $f(v_3) = 8$, maka kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $k(C_6) < 8$. Oleh karena itu $k(C_6) = 8$.

Contoh :



Gambar 4.13 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf Sikel dengan $k(C_6) = 8$

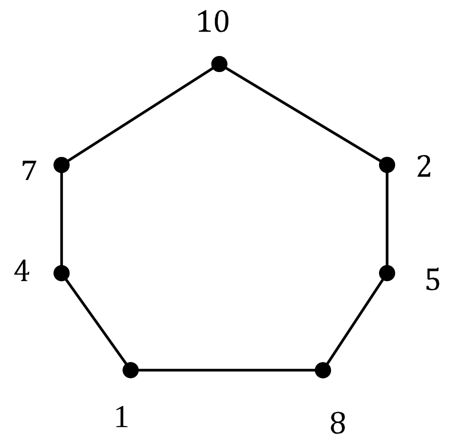
Lemma 4.2.2.5

Untuk graf sikel dengan $n = 7$ maka $k(C_7) = 10$.

Bukti :

Misalkan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$ adalah himpunan titik dari C_7. Andaikan $k(C_7) < 10$ dan misalakan f adalah pelabelan $L(3,2,1)$ minimal dari C_7, maka kemungkinan nilai pada $f(V)$ berada di dalam $S = \{1, 2, \dots, 9\}$. Karena jarak terbesar antara dua titik yang berada di dalam V adalah 3, tidak ada kemungkinan nilai untuk $f(V)$ dapat diulangi. Serta, hanya sampai dua label berurutan yang mungkin dipergunakan. Jika mempergunakan tiga label berurutan itu tidak mungkin karena terdapat pembatas jarak pada pelabelan V. Maka paling banyak ada 6 label yang dapat digunakan dari S, seharusnya titik yang tak berlabel menjadi berlabel dengan nilai yang ≥ 10, sehigga kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $k(C_7) < 10$. Dengan demikian $k(C_7) \geq 10$. Sehingga, pola pelabelan $\{1, 8, 5, 2, 10, 7, 4\}$ menunjukkan bahwa $k(C_7) = 10$. Oleh karena itu, $k(C_7) = 10$.

Contoh :



Gambar 4.14 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf Sikel dengan $k(C_7) = 10$

Selanjutnya, untuk membuktikan Teorema 4.2.2.9 bahwa setiap graf sikel C_n dengan $n \geq 3$, jika n genap maka $k(C_n) = 8$ atau jika n ganjil maka $k(C_n) = 9$, maka diperlukan Lemma 4.2.2.6 dan Lemma 4.2.2.7.

Lemma 4.2.2.6

Misalkan n adalah bilangan bulat genap. Jika $n \geq 4$, maka terdapat bilangan bulat non negatif a dan d sedemikian sehingga $n = 4a + 6d$.

Bukti :

Misalkan $S = \{4a + 6d | a, d \in Z; a, d \geq 0\}$ dan n adalah bilangan bulat genap. Maka $n \equiv 0$ (mod 4) atau $n \equiv 2$ (mod 4). Andaikan bahwa $n \geq 4$.

Kasus I : $n \equiv 0$ (mod 4) :

Jika terdapat bilangan bulat q sedemikian sehingga $n = 4$. Karena $n \geq 4, q \geq 1$. Ini meliputi $n = 4a + 6d$ di mana $a = q$ dan $d = 0$. Maka, $n \in S$.

Kasus II : $n \equiv 2 \pmod 4$:

Jika terdapat bilangan bulat q sedemikian sehingga $n = 4q + 2$. Ini meliputi $n = 4(q - 1) + 6$. Karena $n \geq 4$ dan $n \equiv 2 \pmod 4$, didapatkan $n \geq 6$. Maka $(q - 1) \geq 0$. Dari ini, terdapat bahwa $n = 4a + 6d$ di mana $a = (q - 1)$ dan $d = 1$. Maka, $n \in S$.

Oleh karena itu, jika n adalah bilangan bulat genap dan $n \geq 4$ maka terdapat bilangan bulat non negatif a dan d sedemikian sehingga $n = 4a + 6d$.

Contoh :

Misalkan $S = \{4a + 6d | a, d \in Z; a, d \geq 0\}$ dan n adalah bilangan bulat genap. Jika $n \geq 4$, maka terdapat bilangan bulat non negatif a dan d sedemikian sehingga $n = 4a + 6d$.

$n = 4a + 6d$

$4 = 4.1 + 6.0$

$6 = 4.0 + 6.1$

$8 = 4.2 + 6.0$

$10 = 4.1 + 6.1$

Sehingga diperoleh $S = \{4, 6, 8, 10\}$.

Lemma 4.2.2.7

Misalkan n adalah bilangan bulat ganjil. Jika $n \geq 9$ dan $n \neq 11$, maka terdapat bilangan bulat non negatif a dan d sedemikian sehingga $n = 4a + 5d$.

Bukti :

Misalkan $S = \{4a + 5d | a, d \in Z; a, d \geq 0\}$ dan n adalah bilangan bulat ganjil. Maka $n \equiv 1$ (mod 4) atau $n \equiv 3$ (mod 4). Andaikan $n \geq 9$ dan $n \neq 11$.

Kasus I : $n \equiv 1$ (mod 4) :

Jika terdapat bilangan bulat q sedemikian sehingga $n = 4q + 1$. Ini meliputi bahwa $n = 4(q - 1) + 5$. Karena $n \geq 9$, didapatkan $(q - 1) \geq 1$. Ini mengimplikasikan bahwa $n = 4a + 5d$ di mana $a = (q - 1)$ dan $d = 1$. Maka, $n \in S$.

Kasus II : $n \equiv 3$ (mod 4) :

Jika terdapat bilangan bulat q sedemikian sehingga $n = 4q + 3$. Ini mengimplikasikan bahwa $n = 4(q - 3) + 5(3)$. Karena $n \geq 9$, $n \neq 11$, dan $n \equiv 3$ (mod 4), didapatkan $n \geq 15$. Maka $(q - 3) \geq 0$. Karena $n = 4a + 5d$ di mana $a = (q - 3)$ dan $d = 3$, maka $n \in S$.

Oleh karena itu, jika n adalah bilangan bulat ganjil sedemikian sehingga $n \geq 9$ dan $n \neq 11$, maka $n = 4a + 5d$ di mana a dan d bilangan bulat non negatif.

Contoh :

Misalkan $S = \{4a + 5d | a, d \in Z; a, d \geq 0\}$ dan n adalah bilangan bulat ganjil. Jika $n \geq 9$ dan $n \neq 11$, maka terdapat bilangan bulat non negatif a dan d sedemikian sehingga $n = 4a + 5$.

$n = 4a + 5d$

$9 = 4.1 + 5.1$

$13 = 4.2 + 5.1$

$15 = 4.0 + 5.3$

$17 = 4.3 + 5.1$

$19 = 4.1 + 5.3$

Sehingga diperoleh $S = \{9, 13, 15, 17, 19\}$.

Sebelum membahas teorema 4.2.2.9 kita akan bahas terlebih dahulu teorema yang mendukung teorema 4.2.2.9.

Teorema 4.2.2.8

Untuk setiap graf lengkap pada n titik, maka $k(K_n) = 3n - 2$.

Bukti :

Misalkan $G = \big(V(G), E(G)\big)$ adalah suatu graf lengkap dengan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan f adalah pelabelan $L(3, 2, 1)$ minimal dari G dengan $f(v_i) < f(v_j)$ untuk semua $i < j$. Kemudian, untuk setiap $v_i, v_j \in V(G)$ dan $i \neq j, (v_i, v_j) \in E(G)$, sedemikian sehingga $d(v_i, v_j) = 1$. Dengan demikian, $|f(v_i) - f(v_j)| \geq 3$ untuk setiap $v_i, v_j \in V(G)$ dan $i \neq j$. Karena terdapat v_i di dalam V sedemikian sehingga $f(v_i) = 1$, maka $f(v_1) = 1$. Begitu juga, karena f adalah pelabelan $L(3, 2, 1)$ minimal dari G, sedemikian sehingga untuk setiap v_i dengan $1 < i \leq n,\ f(v_i) \geq f(v_{i-1}) + 3$. Secara rekursif, maka akan diperoleh :

$$\begin{aligned} f(v_n) &\geq f(v_{n-1}) + 3 \\ &\geq f(v_{n-2}) + 3(2) \\ &\geq f(v_{n-3}) + 3(3) \\ &\;\vdots \\ &\geq f(v_{n-i}) + 3(n-i) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\geq f(v_1) + 3(n-1) = 1 + 3(n-1) = 3n - 2.$$

Oleh karena itu, $k(K_n) = 3n - 2$.

Teorema 4.2.2.9

Untuk setiap graf sikel, C_n dengan $n \geq 3$, maka

$$k(C_n) = \begin{cases} 7, \text{jika } n = 3; \\ 8, \text{jika } n \text{ genap}; \\ 9, \text{jika } n \text{ ganjil dan } n \neq 3, 7; \\ 10, \text{jika } n = 7 \end{cases}$$

Bukti :

Misalkan $n \geq 3$ dan $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah titik dari C_n sedemikian sehingga untuk $1 \leq i < n, (v_i, v_{i+1})$ dan (v_1, v_n) adalah sisi dalam C_n. Kasus berikut ini menggambarkan semua kemungkinan pada $k(C_n)$.

Kasus I : $n = 3$:

Dapat dilihat bahwa C_3 adalah graf lengkap. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 4.2.2.8 untuk graf lengkap, maka $k(C_3) = 7$.

Kasus II : n genap :

Diketahui $k(C_4) = 8$ menurut Lemma 4.2.2.2 dan $k(C_6) = 8$ menurut Lemma 4.2.2.4. Berdasarkan Teorema 4.2.1.2 pada graf path menunjukkan bahwa $k(P_n) \geq 8$ untuk $n \geq 8$. Maka untuk setiap graf sikel yang genap, $k(C_n) \geq 8$. Mengingat pelabelan yang digunakan untuk C_4 dan C_6 pada Lemma 4.2.2.2 dan Lemma 4.2.2.4, secara berturut-turut yaitu: untuk C_4 digunakan $f(V) = \{1, 6, 3, 8\}$ dan untuk C_6 digunakan $f(V) = \{1, 4, 7, 2, 5, 8\}$. Dapat dilihat bahwa pelabelan yang digunakan untuk C_4 dapat diulang secara tak terbatas untuk setiap C_n dengan n perkalian dari 4. Demikian juga, pelabelan yang digunakan untuk C_6 dapat diulang secara tak terbatas untuk setiap C_n dengan n perkalian dari 6. Selain itu, pelabelan dari C_4 dan C_6 dapat digabung bersama menjadi label C_{10} seperti berikut : $f(V) = \{1, 6, 3, 8, 1, 4, 7, 2, 5, 8\}$. Berdasarkan Lemma 4.2.2.6, dapat diketahui bahwa setiap bilangan bulat genap yang lebih besar dari atau sama dengan 4 dapat dinyatakan sebagai kombinasi dari perkalian non negatif dari 4 dan 6. Dari hal ini, jelas bahwa pelabelan dari setiap C_n yang genap tersusun dari kombinasi yang berasal dari perkalian non negatif pada pola pelabelan C_4 dan C_6. Oleh karena itu, $k(C_n) = 8$ untuk setiap n genap.

Kasus III : ganjil dan $n \neq 3$ atau 7 :

Berdasarkan Lemma 4.2.2.3 diketahui bahwa $k(C_5) = 9$, kemudian bardasarkan Teorema 4.2.1.2 untuk graf path diketahui bahwa $k(C_n) \geq 8$ untuk $n \geq 8$ karena $k(P_n) = 8$, dan bardasarkan Lemma 4.2.2.1 diketahui bahwa $k(C_n) \neq 8$ untuk graf sikel ganjil. Ini mengimplikasikan bahwa untuk setiap graf sikel ganji $k(C_n) \geq 9$. Dalam Lemma 4.2.2.3, C_5 dilabeli dengan $\{5, 1, 7, 3, 9\}$. Dapat dilihat bahwa pelabelan dari C_5 dapat diulang secara tak terbatas untuk setiap C_n dengan n perkalian dari 5. Serta dapat dikombinasikan pelabelan untuk C_5 dengan pelabelan untuk C_4 yang digunakan dalam Lemma 4.2.2.2 menjadi label C_9 seperti berikut : $\{5, 1, 7, 3, 9, 1, 6, 3, 8\}$. Berdasarkan Lemma 4.2.2.7 dapat diketahui bahwa setiap bilangan bulat ganjil yang lebih besar dari atau sama dengan 9, dengan pengecualian 11, dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi dari perkalian non negatif dari 4 dan 5. Ini mengimplikasikan bahwa setiap C_n, dengan

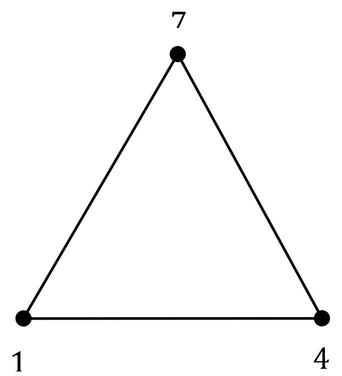
$n \geq 9$ dan $n \neq 11$, terdiri dari kombinasi yang berasal dari perkalian non negatif pada C_4 dan C_5. Oleh sebab itu, karena $k(C_5) = 9$, diperoleh $k(C_n) = 9$ untuk setiap C_n, dimana $n \geq 9$ dan $n \neq 11$. Untuk C_{11} dapat diketahui bahwa $k(C_{11}) \geq 9$ (berasal dari Lemma 4.2.2.2 dan Lemma 4.2.2.5). Didefinisikan f untuk C_{11} sedemikian sehingga $f(V) = \{1, 6, 3, 8, 5, 1, 9, 6, 2, 8, \}$. Karena max $\left(f(V)\right) = 9, k(C_{11}) = 9$.

Kasus IV : $n = 7$:

Berdasarkan Lemma 4.2.2.5, maka diperroleh $k(C_7) = 10$.

Contoh :

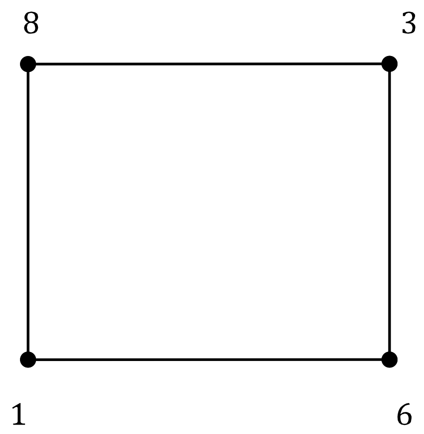
Untuk setiap graf sikel yang dinotasikan dengan C_n, dengan $n \geq 3$, jika $n = 3$ maka $k(C_3) = 7$.



Gambar 4.15 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Sikel dengan $n \geq 3$, jika $n = 3$ maka $k(C_3) = 7$

Contoh :

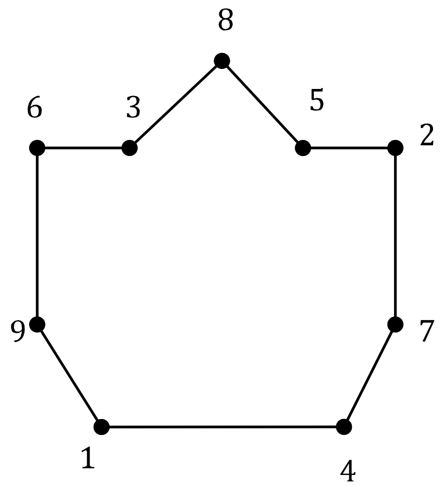
Untuk setiap graf sikel yang dinotasikan dengan C_n, dengan $n \geq 3$, jika n genap maka $k(C_n) = 8$. Misalkan $n = 4$ maka $k(C_4) = 8$.



Gambar 4.16 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Sikel dengan $n \geq 3$, jika $n = 4$ maka $k(C_4) = 8$

Contoh :

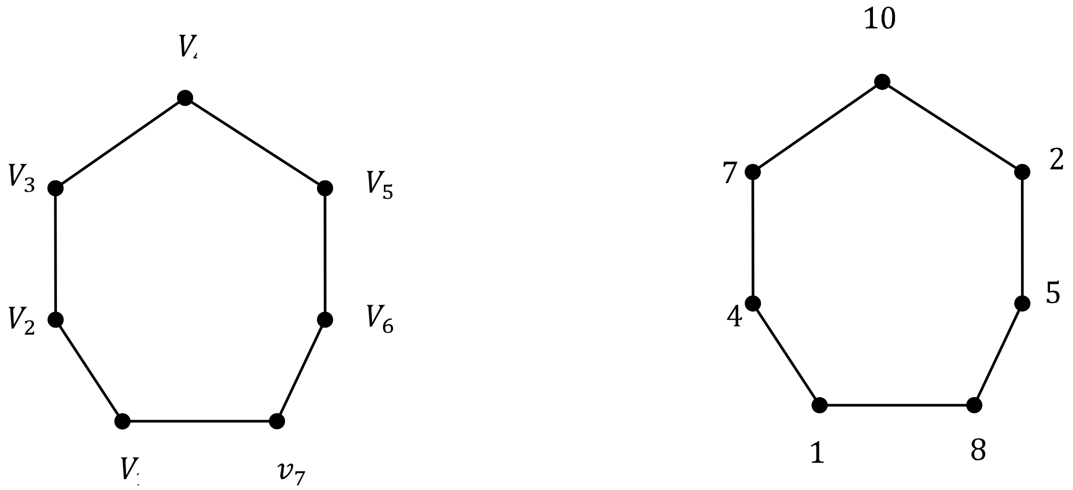
Untuk setiap graf sikel yang dinotasikan dengan C_n, dengan $n \geq 3$, jika n ganjil dan $n \neq 3$ atau 7 maka $k(C_n) = 9$ maka $k(C_9) = 9$.



Gambar 4.17 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Sikel dengan $n \geq 3$, jika $n = 9$ maka $k(C_9) = 9$

Contoh :

Misalkan untuk setiap graf sikel yang dinotasikan dengan C_n, dengan $n \geq 3$, jika $n = 7$ maka $k(C_n) = 10$. Selanjutnya pada Gambar 4.18 pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf sikel C_7. Pertama, beri label 1 pada suatu titik misalkan titik v_1. Karena titik v_1 dan v_2 berjarak satu maka harus diberi label dengan selisih tiga, misalkan titik v_2 diberi label 4. Karena titik v_2 dan v_3 berjarak satu maka titik v_3 diberi label 7. Karena titik v_3 dan v_4 berjarak satu maka titik v_4 diberi label 10. Sedangkan pada titik v_1 dan v_5 berjarak tiga maka harus diberi label dengan selisih minimal satu, misalkan titik v_5 diberi label 2. Karena titik v_2 dan v_6 berjarak tiga maka titik v_6 diberi label 5. Kemudian untuk titik v_7 diberi label 8 karena pada titik v_3 dan v_7 berjarak tiga.



Gambar 4.18 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf Sikel dengan $n \geq 3$, jika $n = 7$, maka $k(C_7) = 10$

4.2.3 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf Bintang S_n

Teorema 4.2.3.1

Untuk setiap graf bipartit lengkap $K_{m,n}$, maka $k(K_{m,n}) = 2(m+n)$.

Bukti :

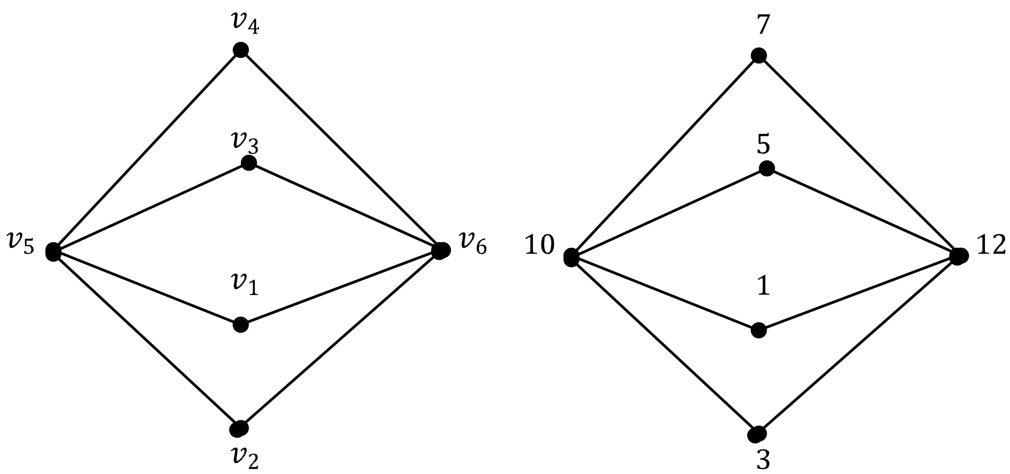
Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf bipartit lengkap, yang dinotasikan dengan $K_{m,n}$. Graf ini memiliki $m+n$ titik dan $m.n$ sisi. Misalkan $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.

Akan dibuktikan bahwa titik label pada himpunan A dan B memenuhi Teorema 4.2.3.1. Misalkan f adalah pelabelan $L(3,2,1)$ minimal dari G dengan $f(a_1) \leq f(a_2) \leq \cdots \leq f(a_m)$ dan $f(b_1) \leq f(b_2) \leq \cdots \leq f(b_n)$. Jika $d(a_i, a_j) = 2$ untuk setiap $a_i, a_j \in A$ dengan $i \neq j$, maka sama halnya untuk pasangan dari titik di dalam B yaitu $d(b_i, b_j) = 2$ untuk setiap $b_i, b_j \in B$ dengan $i \neq j$. Misalkan $f(a_1) = 1$, maka tiap $f(a_i)$ dengan $i \neq 1$ menjadi ganjil karena f adalah minimal. Dengan demikian, $f(A) = \{1,3,5, \dots 1 + 2(m-1)\}$.

Karena setiap $a_i \in A$ berdekatan dengan setiap $b_i \in B$, maka $|f(a_i) - f(b_i)| \geq 3$. Sehingga diperlukan $f(b_1) \geq f(a_m) + 3$. Kemudian, karena $f(a_m) = 2m - 1$, maka $f(b_1) \geq 3 + (2m-1)$. Oleh karena itu, f adalah minimal sehingga diperoleh $f(b_1) = 3 + (2m-1) = 2m+2$. Pelabelan pada titik B berikut sama dengan pelabelan pada titik A yaitu : karena $f(b_1) = 2m+2$ maka diperlukan $f(b_i)$ untuk menjadi genap. Dengan demikian, $f(B) = \{2m+2, 2m+4, \dots, 2m+2+2(n-1)\}$. Sehingga diperoleh $f(b_n) = 2m + 2 + 2(n-1) = 2(m+n)$. Oleh karena itu $k(K_{m,n}) = 2(m+n)$.

Contoh :

Pada Gambar 4.19 berikut ini akan diberikan contoh pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf bipartit lengkap. Misalkan terdapat graf bipartit lengkap dengan titik $m = 2$ dan $n = 4$ yang dinotasikan dengan $K_{2,4}$, maka $k(K_{2,4}) = 2(m+n) = 12$. Selanjutnya akan dijelaskan tentang pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf bipartit lengkap $K_{2,4}$. Pertama, beri label 1 pada suatu titik misalkan titik v_1. Karena titik v_1 dan v_2 berjarak dua maka harus diberikan label dengan selisih minimal dua, misalkan titik v_2 diberi label 3. Karena titik v_2 dan v_3 berjarak dua maka titik v_3 diberi label 5. Karena titik v_3 dan v_4 berjark dua maka titik v_4 diberi label 7. Sedangkan pada titik v_4 dan v_5 berjarak satu maka harus diberikan label dengan selisih minimal tiga, misalkan titik v_5 diberi label 10. Kemudian untuk titik v_6 diberi label 12 karena pada titik $v_5$dan v_6 berjarak dua.



Gambar 4.19 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Bipartit Lengkap $K_{2,4}$

Akibat 4.2.3.2

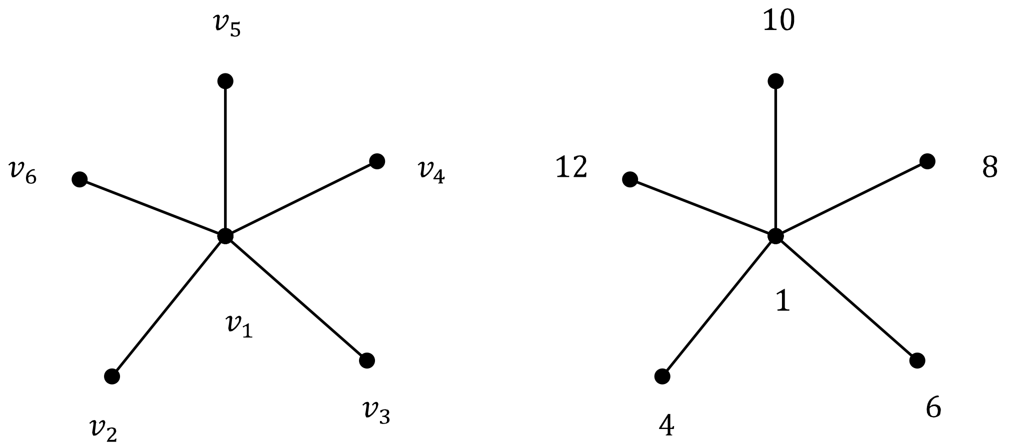
Untuk graf bintang atau S_n, maka $k(S_n) = 2n + 2$.

Bukti :

Menurut definisi, graf bintang atau S_n adalah graf bipartit lengkap yang berbentuk $K_{1,n}$. Oleh karena itu, $k(S_n) = 2n + 2$.

Contoh :

Pada gambar 4.20 berikut ini akan diberikan contoh pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf bintang. Misalkan terdapat graf bintang dengan titik $n = 5$ yang dinotasikan dengan S_5 atau $K_{1,5}$, maka $k(S_5) = 2n + 2 = 12$. Selanjutnya akan dijelaskan tentang pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf bintang S_5. Pertama, beri label 1 pada suatu titik misalkan titik v_1. Karena titik v_1 dan v_2 berjarak satu maka harus diberikan label dengan selisih minimal tiga, misalkan titik v_2 diberi label 4. Sedangkan pada titik v_2 dan v_3 berjarak dua maka harus diberikan label dengan selisih minimal dua, misalkan titik v_3 diberi label 6. Karena titik v_3 dan v_4 berjarak dua maka titik v_4 diberi label 8. Karena titik v_4 dan v_5 berjarak dua maka titik v_5 diberi label 10. Kemudian untuk titik v_6 diberi label 12 karena pada titik v_5 dan v_6 berjarak dua.



Gambar 4.20 Graf Bintang S_5 dan pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Bintang S_5

4.3 Graf *Middle*

Definisi 4.3.1

Graf *middle* pada graf G yang dinotasikan $M(G)$ adalah graf yang himpunan titiknya adalah $V(M(G)) = V(G) \cup E(G) = \{v_1, \dots, v_n, e_1, \dots, e_n\}$. Dua titik *adjacent* jika dan hanya jika:

(i) $e_a \in V\big(M(G)\big)$ *adjacent* dengan $e_b \in V\big(M(G)\big)$ karena sisi $e_a = v_i v_j \in E(G)$ dan sisi $e_b = v_j v_l \in E(G)$ *incident* pada titik yang sama di graf G.

(ii) $v_i \in V\big(M(G)\big)$ *adjacent* dengan $e_a \in V\big(M(G)\big)$ karena sisi $e_a = v_i v_j \in E(G)$ *incident* dengan titik $v_i \in V(G)$ (Vaidya & Bantva, 2010:104).

4.4 Pembentukan Graf *Middle* pada Graf Khusus

4.4.1 Graf *Middle* dari Graf Path P_n

Berikut akan diberikan contoh pembentukan graf *middle* dari graf path P_6.

Contoh :

Graf path P_6 mempunyai himpunan titik $V(P_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E(P_6) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Graf *middle* dari graf P_6 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(P_6) \cup E(P_6)$, jadi himpunan titik $M(P_6)$ adalah $V(M(P_6))$ =$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Dua titik adalah *adjacent* di $M(P_6)$ jika:

(i) $e_1 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_2 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(P_6)$ dan sisi $e_2 = v_2v_3 \in E(P_6)$ *incident* di titik $v_2 \in V(P_6)$.

$e_2 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_3 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_2 = v_2v_3 \in E(P_6)$ dan sisi $e_3 = v_3v_4 \in E(P_6)$ *incident* di titik $v_3 \in V(P_6)$.

$e_3 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_4 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_3 = v_3v_4 \in E(P_6)$ dan sisi $e_4 = v_4v_5 \in E(P_6)$ *incident* di titik $v_4 \in V(P_6)$.

$e_4 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_5 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_4 = v_4v_5 \in E(P_6)$ dan sisi $e_5 = v_5v_6 \in E(P_6)$ *incident* di titik $v_5 \in V(P_6)$.

(ii) $v_1 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_1 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_1 \in V(P_6)$.

$v_2 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_1 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_2 \in V(P_6)$.

$v_2 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_2 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_2 = v_2v_3 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_2 \in V(P_6)$.

$v_3 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_2 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_2 = v_2v_3 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_3 \in V(P_6)$.

$v_3 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_3 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_3 = v_3v_4 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_3 \in V(P_6)$.

$v_4 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_3 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_3 = v_3v_4 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_4 \in V(P_6)$.

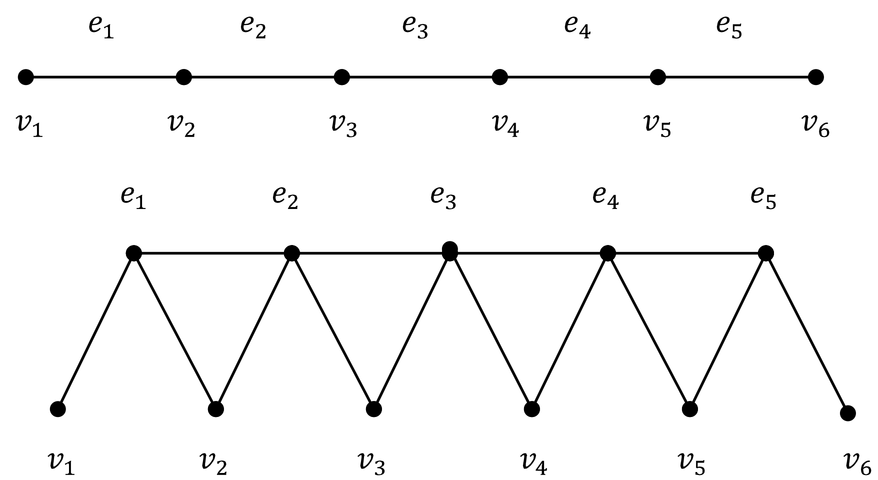
$v_4 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_4 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_4 = v_4v_5 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_4 \in V(P_6)$.

$v_5 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_4 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_4 = v_4\, v_5 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_5 \in V(P_6)$.

$v_5 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_5 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_5 = v_5v_6 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_5 \in V(P_6)$.

$v_6 \in V(M(P_6))$ *adjacent* dengan $e_5 \in V(M(P_6))$ karena sisi $e_5 = v_5v_6 \in E(P_6)$ *incident* dengan titik $v_6 \in V(P_6)$.

Berikut adalah pembentukan graf *middle* dari graf path P_6 yang ditunjukkan pada Gambar 4.21.

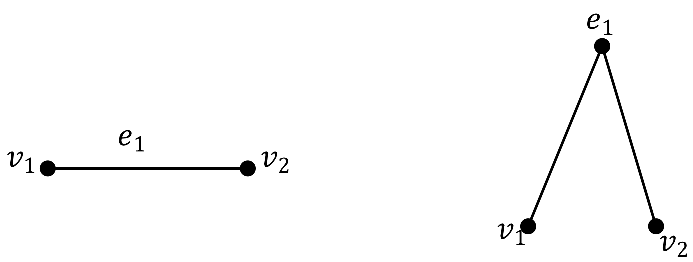


Gambar 4.21 Graf P_6 dan Graf $M(P_6)$

Pada gambar berikut ini akan diberikan contoh pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf middle yang dibentuk dari graf path berdasarkan definisi 4.3.1.

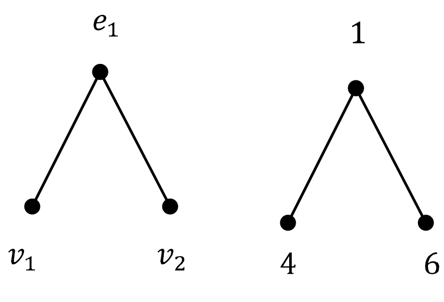
Contoh :

Misalkan, suatu graf path dengan titik $n = 2$ yang dinotasikan dengan P_2. Berikut adalah pembentukan graf *middle* dari graf path P_2 yang ditunjukkan pada Gambar 4.22.



Gambar 4.22 Graf P_2 dan Graf $M(P_2)$

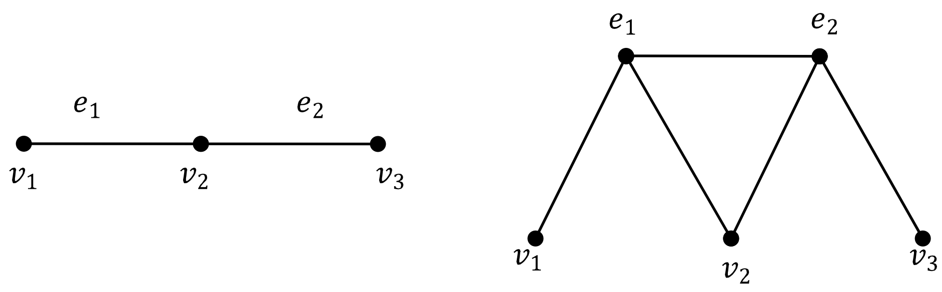
Pada Gambar 4.23 diberikan graf $M(P_2)$, ditunjukkan pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf $M(P_2)$ dan diperoleh $k\big(M(P_2)\big) = 6$.



Gambar 4.23 Graf $M(P_2)$ dan Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf $M(P_2)$

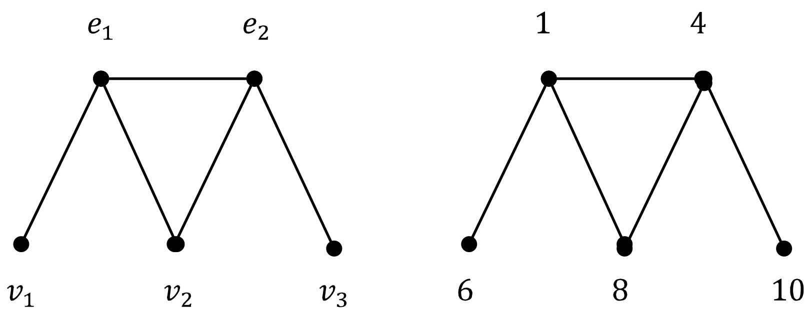
Contoh :

Misalkan, suatu graf path dengan titik $n = 3$ yang dinotasikan dengan P_3. Berikut adalah pembentukan graf *middle* dari graf path P_3 yang ditunjukkan pada Gambar 4.24.



Gambar 4.24 Graf P_3 dan Graf $M(P_3)$

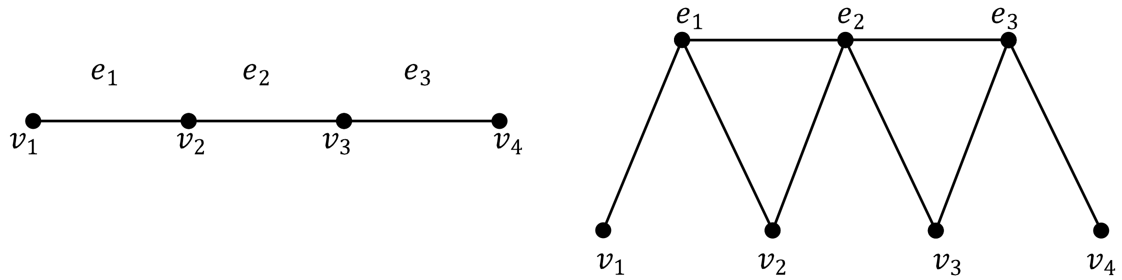
Pada Gambar 4.25 diberikan graf $M(P_3)$, ditunjukkan pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf $M(P_3)$ dan diperoleh $k\big(M(P_3)\big) = 10$.



Gambar 4.25 Graf $M(P_3)$ dan Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf $M(P_3)$

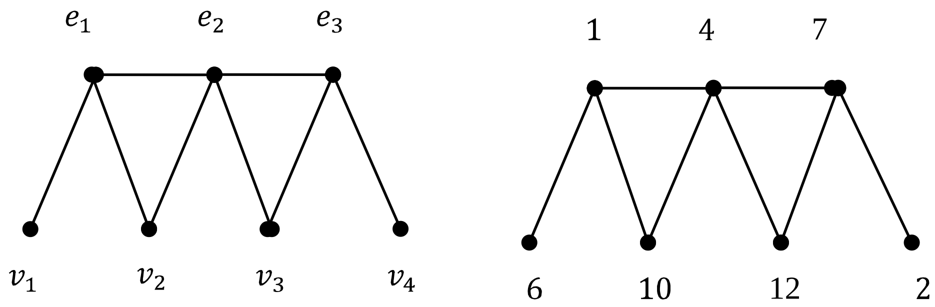
Contoh :

Misalkan, suatu graf path dengan titik $n = 4$ yang dinotasikan dengan P_4. Berikut adalah pembentukan graf *middle* dari graf path P_4 yang ditunjukkan pada Gambar 4.26.



Gambar 4.26 Graf P_4 dan Graf $M(P_4)$

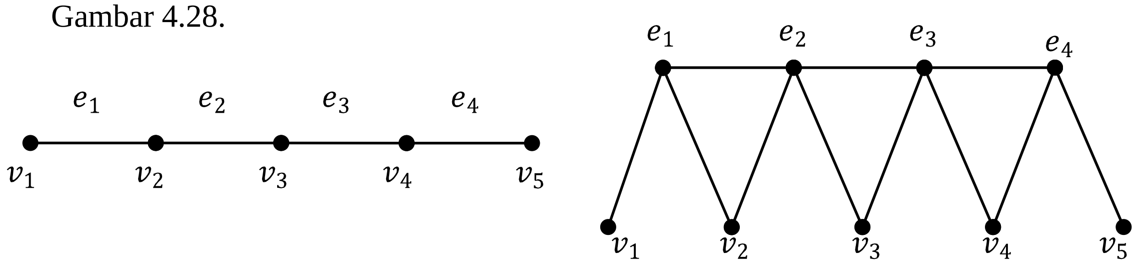
Pada Gambar 4.27 diberikan graf $M(P_4)$, ditunjukkan pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf $M(P_4)$ dan diperoleh $k\big(M(P_4)\big) = 12$.



Gambar 4.27 Graf $M(P_4)$ dan Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf $M(P_4)$

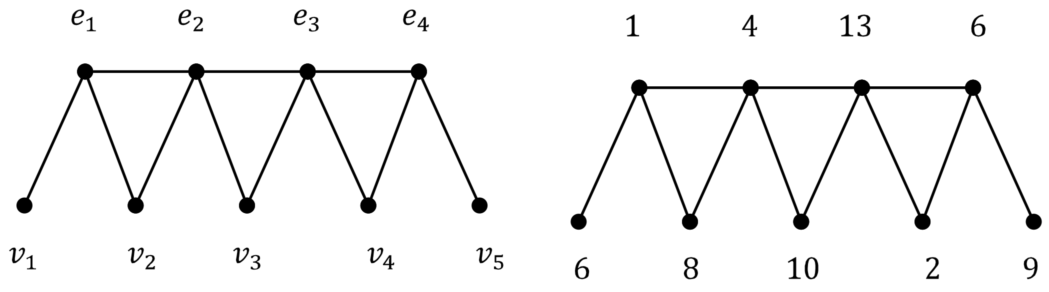
Contoh :

Misalkan, suatu graf path dengan titik $n = 5$ yang dinotasikan dengan P_5. Berikut adalah pembentukan graf *middle* dari graf path P_5 yang ditunjukkan pada Gambar 4.28.



Gambar 4.28 Graf P_5 dan Graf $M(P_5)$

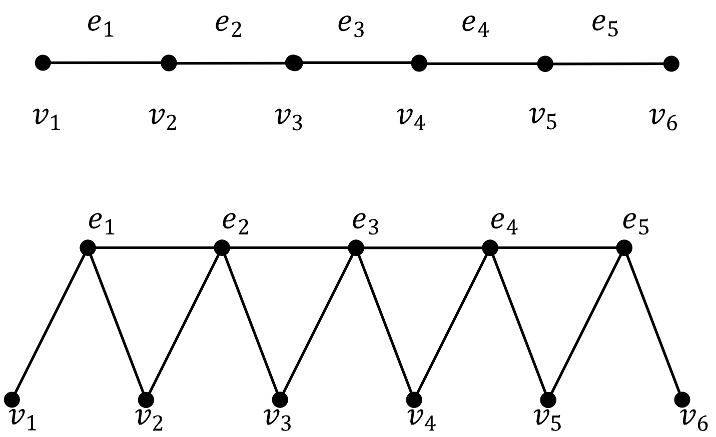
Pada Gambar 4.29 diberikan graf $M(P_5)$, ditunjukkan pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf $M(P_5)$ dan diperoleh $k(M(P_5)) = 13$.



Gambar 4.29 Graf $M(P_5)$ dan Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf $M(P_5)$

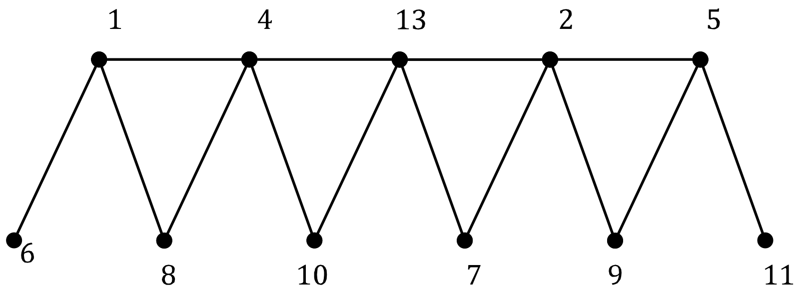
Contoh :

Misalkan, suatu graf path dengan titik $n = 6$ yang dinotasikan dengan P_6. Berikut adalah pembentukan graf *middle* dari graf path P_6 yang ditunjukkan pada Gambar 4.30.



Gambar 4.30 Graf P_6 dan Graf $M(P_6)$

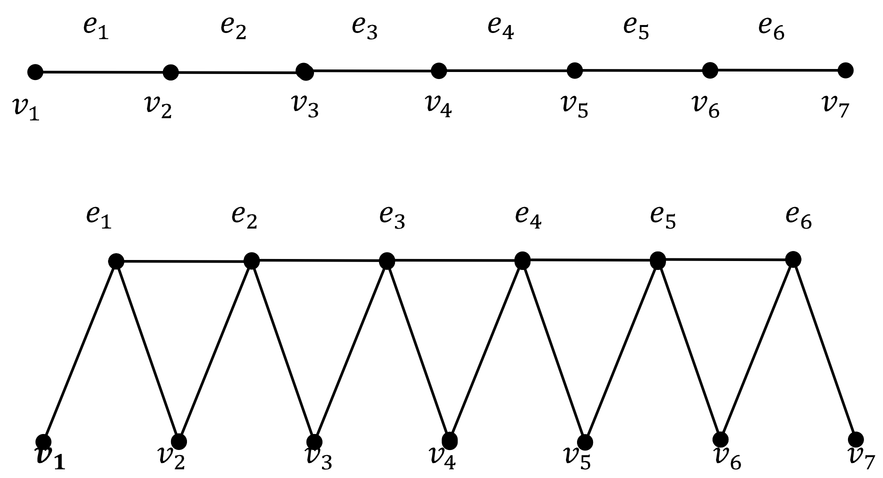
Selanjutnya pada Gambar 4.31 dijelaskan tentang pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf *middle* dari graf P_6 dan diperoleh $k\big(M(P_6)\big) = 13$. Pertama, beri label 1 pada suatu titik misalkan titik e_1. Karena titik e_1 dan e_2 berjarak satu maka harus diberikan label dengan selisih minimal tiga, misalkan titik e_2 diberi label 4. Sedangkan titik e_2 dan v_1 berjarak dua maka harus diberikan label dengan selisih minimal dua, misalkan titik v_1 diberi label 6. Karena titik v_1 dan v_2 berjarak dua maka titik v_2 diberi label 8. Karena titik v_2 dan v_3 berjarak dua maka titik v_3 diberi label 10. Karena titik v_3 dan e_3 berjarak satu maka titik e_3 diberi label 13. Sedangkan titik e_1 dan e_4 berjarak tiga maka harus diberikan label dengan selisih minimal satu, misalkan titik e_4 diberi label 2. Karena titik e_4 dan v_4 berjarak satu maka titik v_4 diberi label 7. Karena titik v_4 dan e_5 berjarak dua maka titik e_5 diberi label 5. Karena titik v_4 dan v_5 berjarak dua maka titik v_5 diberi label 9. Kemudian untuk titik v_6 diberi label 11 karena pada titik v_5 dan v_6 berjarak dua.



Gambar 4.31 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf $M(P_6)$

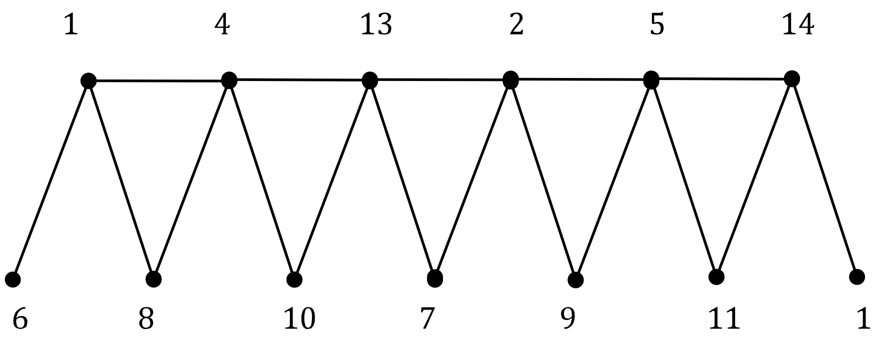
Contoh :

Misalkan, suatu graf path dengan titik $n = 7$ yang dinotasikan dengan P_7. Berikut adalah pembentukan graf *middle* dari graf path P_7 yang ditunjukkan pada Gambar 4.32.



Gambar 4.32 Graf P_7 dan Graf $M(P_7)$

Pada Gambar 4.33 ditunjukkan pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf $M(P_7)$ dan diperoleh $k(M(P_7) = 14$.



Gambar 4.33 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf $M(P_7)$

Pada pelabelan Gambar 4.33 di atas, label 1 digunakan dua kali dalam melabeli suatu titik sehingga pelabelan di atas bukan suatu fungsi (pemetaan) melainkan suatu fungsi surjektif. Sehingga pembentukan graf *middle* dari graf path hanya sampai P_6.

4.4.2 Graf *Middle* dari Graf Sikel C_n

Berikut akan diberikan contoh pembentukan graf *middle* dari graf sikel C_3.

Contoh:

Graf sikel C_3 mempunyai himpunan titik $V(C_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E(C_3) = \{e_1, e_2, e_3\}$. Graf *middle* dari graf C_3 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(C_3) \cup E(C_3)$, jadi himpunan titik $M(C_3)$ adalah $V\big(M(C_3)\big)$ $=\{v_1, v_2, v_3, e_1, e_2, e_3\}$. Dua titik adalah *adjacent* di $M(C_3)$ jika:

(i) $e_1 \in V\big(M(C_3)\big)$ *adjacent* dengan $e_2 \in V\big(M(C_3)\big)$ karena sisi $e_1 = v_1v_2 \in V(C_3)$ dan sisi $e_2 = v_2v_3 \in E(C_3)$ $incident$ di titik $v_2 \in V(C_3)$.

$e_2 \in V\big(M(C_3)\big)$ *adjacent* dengan $e_3 \in V(M(C_3))$ karena sisi $e_2 = v_2v_3 \in E(C_3)$ dan sisi $e_3 = v_3v_1 \in E(C_3)$ *incident* di titik $v_3 \in V(C_3)$.

$e_3 \in \big(M(C_3)\big)$ *adjacent* dengan $e_1 \in V\big(M(C_3)\big)$ karena sisi $e_3 = v_3v_1 \in E(C_3)$ dan sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(C_3)$ *incident* di titik $v_1 \in V(C_3)$.

(ii) $v_1 \in V\big(M(C_3)\big)$ *adjacent* dengan $e_1 \in V\big(M(C_3)\big)$ karena sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(C_3)$ *incident* dengan titik $v_1 \in V(C_3)$.

$v_1 \in V\big(M(C_3)\big)$ *adjacent* dengan $e_3 \in V\big(M(C_3)\big)$ karena sisi $e_3 = v_1v_3 \in E(C_3)$ *incident* dengan titik $v_1 \in V(C_3)$.

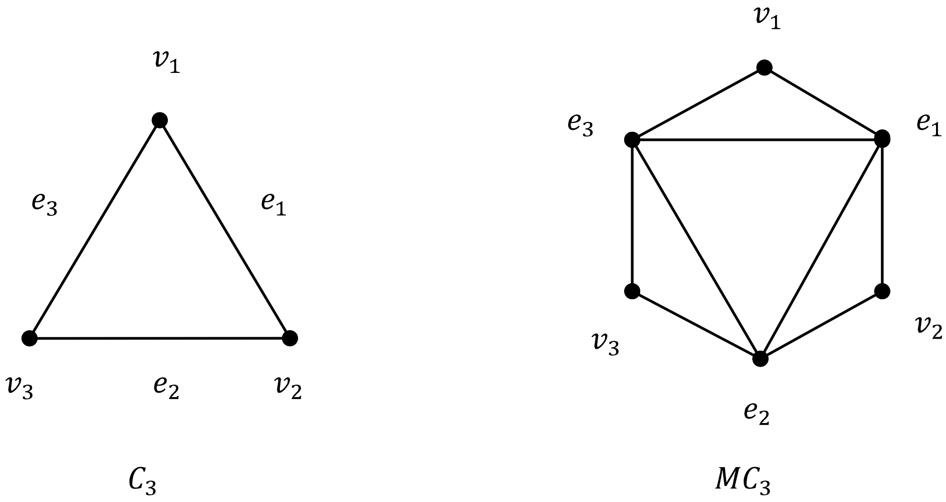
$v_2 \in V\big(M(C_3)\big)$ *adjacent* dengan $e_1 \in V\big(M(C_3)\big)$ karena sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(C_3)$ *incident* dengan titik $v_2 \in V(C_3)$.

$v_2 \in V\big(M(C_3)\big)$ *adjacent* dengan $e_2 \in V\big(M(C_3)\big)$ karena sisi $e_2 = v_2v_3 \in E(C_3)$ *incident* dengan titik $v_2 \in V(C_3)$.

$v_3 \in V\big(M(C_3)\big)$ *adjacent* dengan $e_2 \in V\big(M(C_3)\big)$ karena sisi $e_2 = v_2 v_3 \in E(C_3)$ *incident* dengan titik $v_3 \in V(C_3)$.

$v_3 \in V\big(M(C_3)\big)$ *adjacent* dengan $e_3 \in V\big(M(C_3)\big)$ karena sisi $e_3 = v_1 v_3 \in E(C_3)$ *incident* dengan titik $v_3 \in V(C_3)$.

Berikut adalah pembentukan graf *middle* dari graf sikel C_3 yang ditunjukkan pada Gambar 4.34.

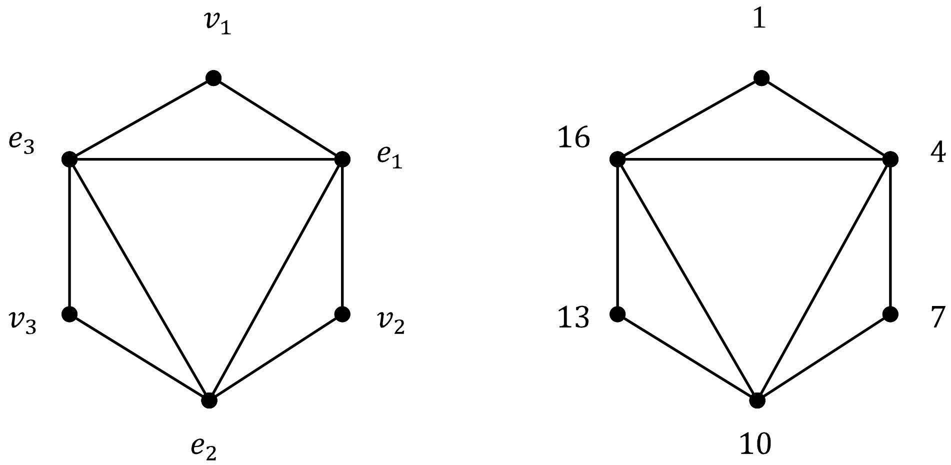


Gambar 4.34 Graf C_3 dan Graf $M(C_3)$

Pada gambar berikut ini akan diberikan contoh pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf *middle* yang dibentuk dari graf sikel berdasarkan definisi 4.3.1.

Contoh :

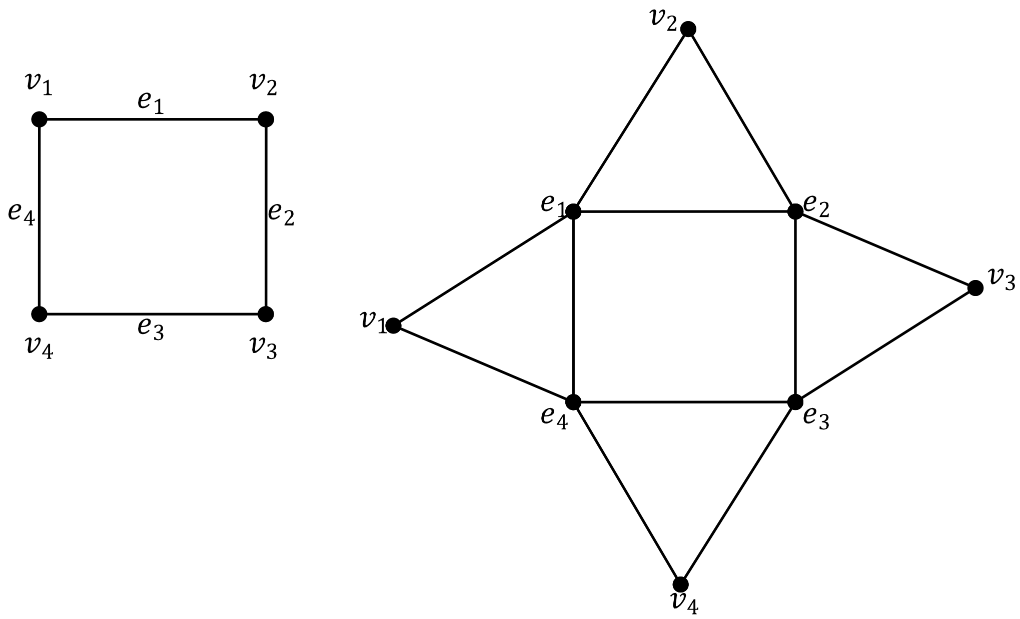
Misalkan, suatu graf sikel dengan titik $n = 3$ yang dinotasikan dengan C_3. Pada Gambar 4.35 diberikan graf $M(C_3)$, pelabelan $L(3, 2,1)$ pada graf $M(C_3)$ dan diperoleh $k\big(M(C_3)\big) = 16$.



Gambar 4.35 Graf $M(C_3)$ dan Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf $M(C_3)$

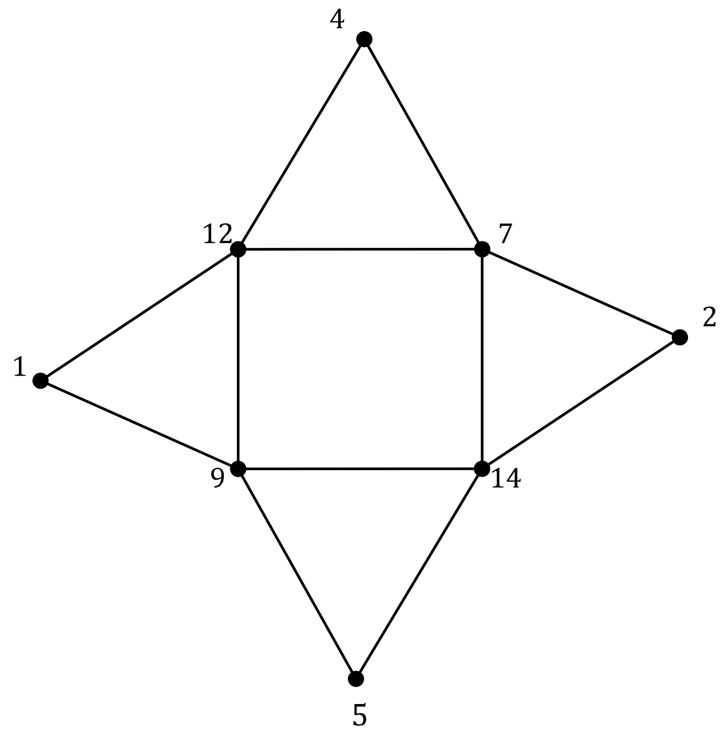
Contoh :

Misalkan, suatu graf sikel dengan titik $n = 4$ yang dinotasikan dengan C_4. Berikut adalah pembentukan graf *middle* dari graf path C_4 yang ditunjukkan pada Gambar 4.36.



Gambar 4.36 Graf C_4 dan Graf $M(C_4)$

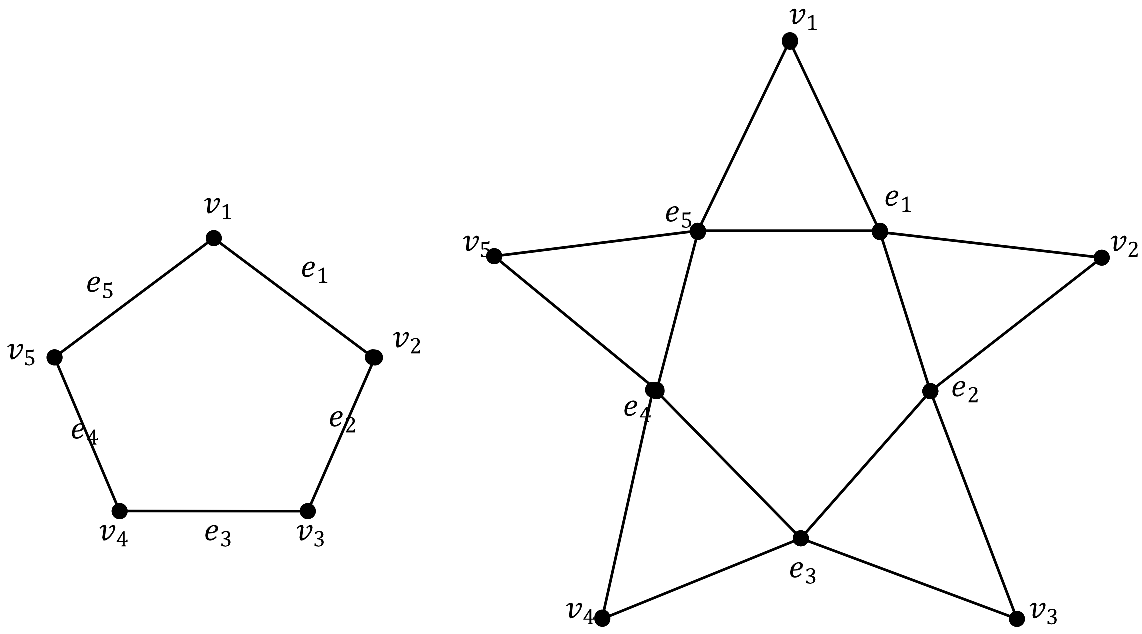
Pada Gambar 4.37 ditunjukkan pelabelan $L(3,2,1)$ pada $M(C_4)$ dan diperoleh $k\left(M(C_4)\right) = 14$.



Gambar 4.37 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf $M(C_4)$

Contoh :

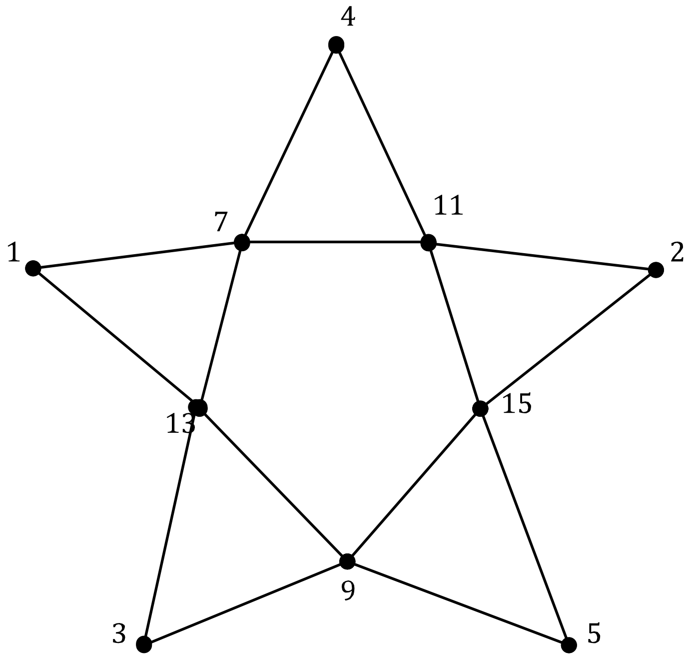
Misalkan, suatu graf sikel dengan titik $n = 5$ yang dinotasikan dengan C_5. Berikut adalah pembentukan graf *middle* dari graf sikel C_5 yang ditunjukkan pada Gambar 4.38.



Gambar 4.38 Graf C_5 dan Graf $M(C_5)$

Selanjutnya pada gambar 4.39 dijelaskan tentang pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf *middle* dari graf C_5 dan diperoleh $k\big(M(P_5)\big) = 15$. Pertama, beri label 1 pada suatu titik misalkan titik v_5. Karena titik v_5 dan v_2 berjarak tiga maka harus diberikan label dengan selisih minimal satu, misalkan titik v_2 diberi label 2. Karena titik v_2 dan v_4 berjarak tiga maka titik v_4 diberi label 3. Karena titik v_4 dan v_1 berjarak tiga maka titik v_1 diberi label 4. Karena titik v_1 dan v_3 berjarak tiga maka titik v_3 diberi label 5. Sedangkan titik v_1 dan e_5 berjarak satu maka harus diberikan label dengan selisih minimal tiga, misalkan titik e_5 diberi label 7. Karena titik e_5 dan e_1 berjarak satu maka titik e_1 diberi label 11. Sedangkan titik e_1 dan e_4 berjarak dua maka harus diberikan label dengan selisih minimal dua, misalkan titik e_4 diberi label 13. Karena titik e_1 dan e_3 berjarak dua maka titik e_3

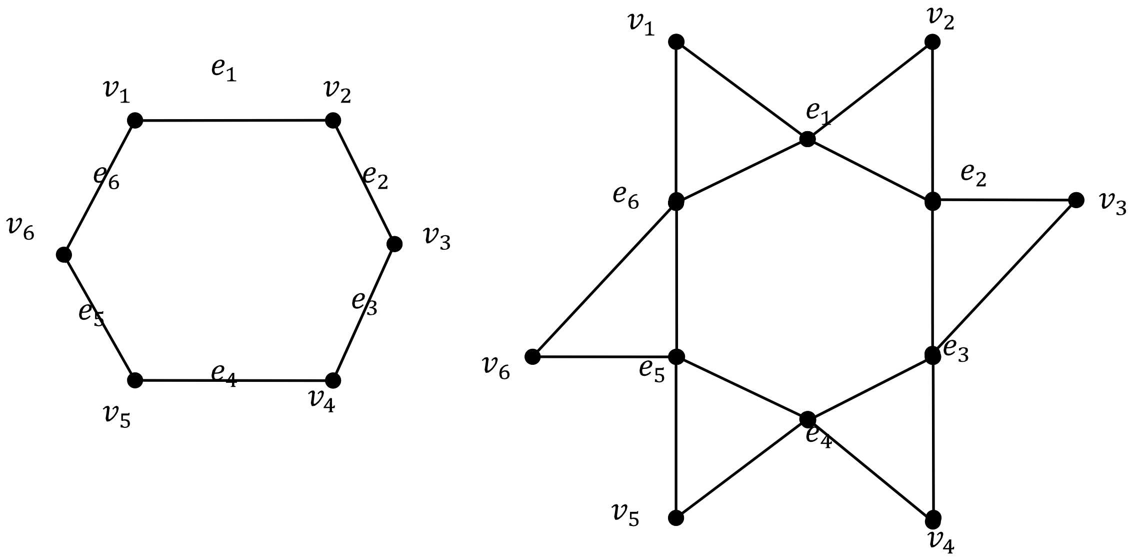
diberi label 9. Kemudian untuk titik e_2 diberi label 15 karena pada titik e_4 dan e_2 berjarak dua.



Gambar 4.39 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf $M(C_5)$

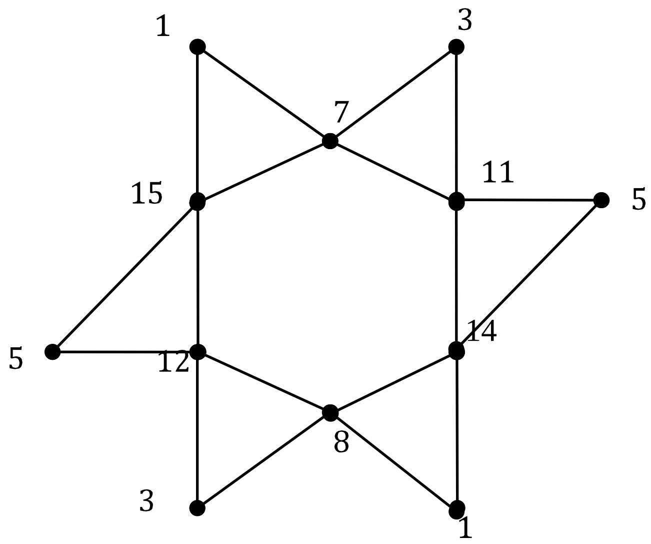
Contoh:

Misalkan, suatu graf sikel dengan titik $n = 6$ yang dinotasikan dengan C_6. Berikut adalah pembentukan graf *middle* dari graf sikel C_6 yang ditunjukkan pada Gambar 4.40.



Gambar 4.40 Graf C_6 dan Graf $M(C_6)$

Pada Gambar 4.41 ditunjukkan pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf $M(C_6)$ dan diperoleh $k(M(C_6) = 15$.



Gambar 4.41 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf $M(C_6)$

Pada pelabelan Gambar 4.41 di atas, label $1, 3,$ dan 5 digunakan dua kali dalam melabeli suatu titik sehingga pelabelan di atas bukan suatu fungsi (pemetaan) melainkan suatu fungsi surjektif. Sehingga pembentukan graf *middle* dari graf sikel hanya sampai C_5.

4.4.3 Graf *Middle* dari Graf Bintang $\mathbf{S_n}$

Berikut akan diberikan contoh pembentukan graf *middle* dari graf bintang. Karena graf bintang $K_{1,1}$ dan graf bintang $K_{1,2}$ sudah dijelaskan pada pembentukan graf path P_2 dan graf path P_3, maka contoh pembentukan graf *middle* dari graf bintang dimulai dari $K_{1,3}$.

Contoh :

Graf bintang $K_{1,3}$ mempunyai himpunan titik $V(K_{1,3}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(K_{1,3}) = \{e_1, e_2, e_3\}$. Graf *middle* dari graf $K_{1,3}$ adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(K_{1,3}) \cup E(K_{1,3})$, jadi himpunan titik $M(K_{1,3})$ adalah $V\left(M(K_{1,3})\right) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, e_1, e_2, e_3\}$. Dua titik adalah *adjacent* di $M(K_{1,3})$ jika:

(i) $e_1 \in V\left(M(K_{1,3})\right)$ *adjacent* dengan $e_2 \in V\left(M(K_{1,3})\right)$ karena sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(K_{1,3})$ dan sisi $e_2 = v_1v_3 \in E(K_{1,3})$ *incident* di titik $v_1 \in V(K_{1,3})$.

$e_2 \in V\left(M(K_{1,3})\right)$ *adjacent* dengan $e_3 \in V\left(M(K_{1,3})\right)$ karena sisi $e_2 = v_1v_3 \in E(K_{1,3})$ dan sisi $e_3 = v_1v_4 \in E(K_{1,3})$ *incident* di titik $v_1 \in V(K_{1,3})$.

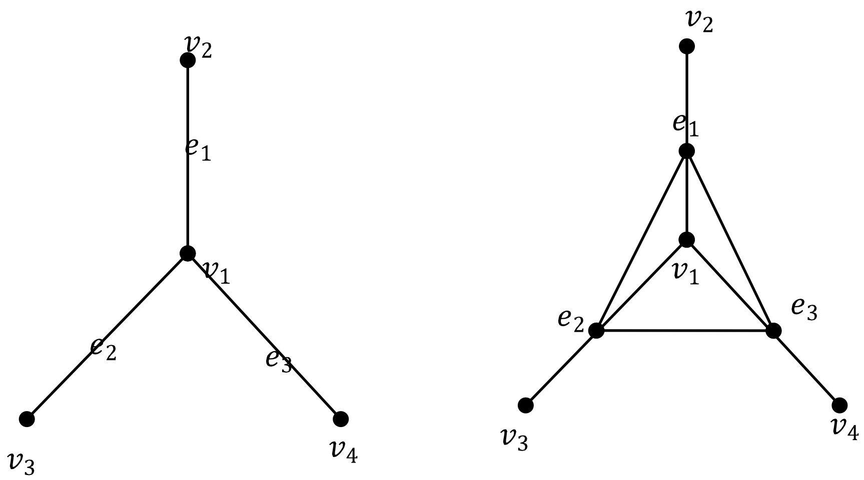
$e_3 \in V\left(M(K_{1,3})\right)$ *adjacent* dengan $e_1 \in V\left(M(K_{1,3})\right)$ karena sisi $e_3 = v_1v_4 \in E(K_{1,3})$ dan sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(K_{1,3})$ *incident* di titik $v_1 \in V(K_{1,3})$.

(ii) $v_1 \in V\left(M(K_{1,3})\right)$ *adjacent* dengan $e_1 \in V\left(M(K_{1,3})\right)$ karena sisi $e_1 = v_1v_2 \in E(K_{1,3})$ *incident* dengan titik $v_1 \in V(K_{1,3})$.

$v_1 \in V\left(M(K_{1,3})\right)$ *adjacent* dengan $e_2 \in V\left(M(K_{1,3})\right)$ karena sisi $e_2 = v_1v_3 \in E(K_{1,3})$ *incident* dengan titik $v_1 \in V(K_{1,3})$.

$v_1 \in V\left(M(K_{1,3})\right)$ *adjacent* dengan $e_3 \in V\left(M(K_{1,3})\right)$ karena sisi $e_3 = v_1v_4 \in E(K_{1,3})$ *incident* dengan titik $v_1 \in V(K_{1,3})$.

Berikut adalah pembentukan graf *middle* dari graf bintang $K_{1,3}$ yang ditunjukkan pada Gambar 4.42.

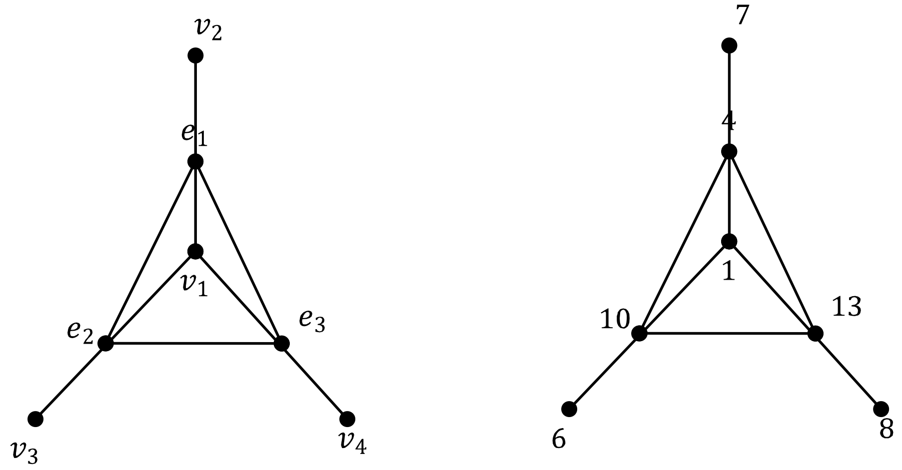


Gambar 4.42 Graf S_3 dan Graf $M(S_3)$

Pada gambar berikut ini akan diberikan contoh pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf *middle* yang dibentuk dari graf bintang berdasarkan definisi 4.3.1.

Contoh :

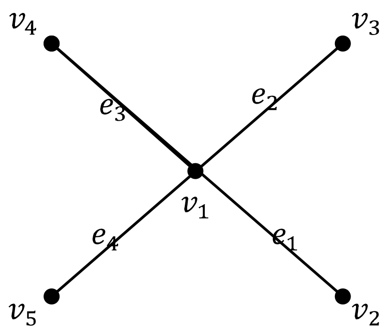
Misalkan, suatu graf bintang dengan titik $n = 3$ yang dinotasikan dengan S_3 dan diperoleh $k\big(M(S_3)\big) = 13$. Selanjutnya akan dijelaskan tentang pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf bintang S_3. Pertama, beri label 1 pada suatu titik misalkan titik v_1. Karena titik v_1 dan e_1 berjarak satu maka harus diberikan label dengan selisih minimal tiga, misalkan titik e_1 diberi label 4. Sedangkan titik e_1 dan v_3 berjarak dua maka harus diberikan label dengan selisih minimal dua, misalkan titik v_3 diberi label 6. Karena titik v_3 dan e_2 berjarak satu maka titik e_2 diberi label 10. Karena titik e_2 dan e_3 berjarak satu maka titik e_3 diberi label 13. Sedangkan titik v_3 dan v_2 berjarak tiga maka harus diberikan label dengan selisih minimal satu, misalkan titik v_2 diberi label 7. Kemudian titik v_4 diberi label 8 karena titik v_2 dan v_8 berjarak tiga.

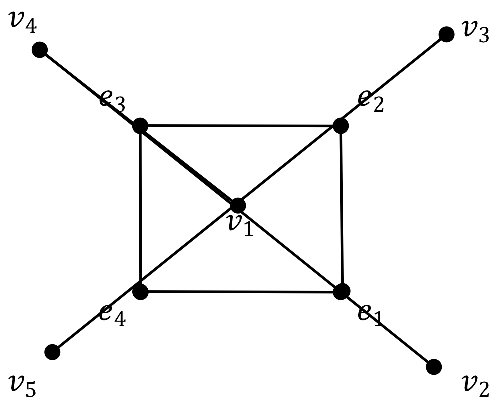


Gambar 4.43 Graf $M(S_3)$ dan Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf $M(S_3)$

Contoh:

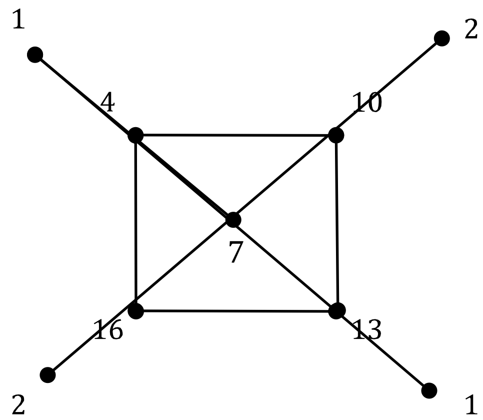
Misalkan, suatu graf bintang dengan titik $n = 4$ yang dinotasikan dengan S_4. Berikut adalah pembentukan graf middle dari graf bintang S_4 yang ditunjukkan pada 4.44.





Gambar 4.44 Graf S_4 dan Graf $M(S_4)$

Pada Gambar 4.45 ditunjukkan pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada $M(S_4)$ dan diperoleh $k\big(M(S_4)\big) = 16$.



Gambar 4.45 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf $M(S_4)$

Pada pelabelan Gambar 4.45 di atas, label 1 dan 2 digunakan dua kali dalam melabeli suatu titik sehingga pelabelan di atas bukan suatu fungsi (pemetaan) melainkan suatu fungsi surjektif. Sehingga pembentukan graf *middle* dari graf bintang hanya sampai S_3.

BAB V

PENUTUP

5.1 Simpulan

Berdasarkan pembahasan dari bab sebelumnya mengenai pelabelan $L(3, 2, 1)$ dan pembentukan graf *middle* pada beberapa graf khusus, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

5.1.1 Hasil pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n adalah sebagai berikut.

1. Pelabelan $L(3, 2,1)$ pada graf path P_n untuk $n = 2$ mempunyai $k(P_n) = 4$, $n = 3$ mempunyai $k(P_n) = 6$, $n = 4$ mempunyai $k(P_n) = 6$, $n = 5$ mempunyai $k(P_n) = 7$, $n = 6$ mempunyai $k(P_n) = 7$, $n = 7$ mempunyai $k(P_n) = 7$ dan $n \geq 8$ mempunyai $k(P_n) = 8$.
2. Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf sikel C_n untuk $n = 3$ mempunyai $k(C_n) = 7$, $n = 4$ mempunyai $k(C_n) = 8$, $n = 5$ mempunyai $k(C_n) = 9$, $n = 6$ mempunyai $k(C_n) = 8$, $n = 7$ mempunyai $k(C_n) = 10$, $n = 9$ mempunyai $k(C_n) = 9$.
3. Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf bintang S_n untuk $n = 5$ mempunyai $k(S_n) = 12$.

5.1.2 Hasil pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf *middle* dari graf path P_n, graf sikel C_n, graf bintang S_n adalah sebagai berikut.

1. Pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf *middle* dari graf path P_n untuk $n = 2$ mempunyai $k\big(M(P_n)\big) = 6$, $n = 3$ mempunyai $k\big(M(P_n)\big) = 10$, $n = 4$ mempunyai $k\big(M(P_n)\big) = 12$, $n = 5$ mempunyai $k\big(M(P_n)\big) = 13$ dan $n = 6$ mempunyai $k\big(M(P_n)\big) = 13$.
2. Pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf *middle* dari graf sikel C_n untuk $n = 3$ mempunyai $k\big(M(C_n)\big) = 16$, $n = 4$ mempunyai $k\big(M(C_n)\big) = 14$ dan $n = 5$ mempunyai $k\big(M(C_n)\big) = 15$.
3. Pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf *middle* dari graf bintang S_n untuk $n = 3$ mempunyai $k\big(M(S_n)\big) = 13$.

5.2 Saran

1. Dalam penelitian ini pembahasan mengenai pelabelan $L(3,2,1)$ dan pembentukan graf *middle* hanya meliputi graf path P_n, graf sikel C_n, dan graf bintang S_n. Penulis berharap penulis lain dapat menemukan pelabelan $L(3,2,1)$ dan pembentukan graf *middle* dari graf khusus lainnya.
2. Disarankan penulis lain dapat mengaplikasikan pelabelan $L(3,2,1)$ pada kehidupan nyata.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, I. K. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Budiasti, H. 2010. *Pelabelan Total Titik Tak Beraturan pada Graf Bipartisi Lengkap.* Skripsi. Semarang: FMIPA Universitas Negeri Semarang.

Chang, G. J. dkk. 2000. On $L(d, 1)$-labelings of Graphs. *Discrete Mathematics*, 220: 57–66.

Chia, Ma-Lia. 2011. $L(3, 2, 1)$-Labeling of Graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 15(6): 2439-2457.

Clipperton, J. dkk. 2005. $L(3, 2, 1)$ Labeling of Simpel Graphs. *REU Paper, Valparais Universit.* Tersedia di http://www.valpo.edu/mcs/pdf/zslabeling.pdf [diakses 12-01-2012].

Clipperton, J. 2008. $L(d, 2, 1)$ Labeling of Simple Graphs. *Rose-Hulman Institute of Tecnology Undergraduate Math Journal, volume 9.* Tersedia di http://www.rose-hulman.edu/mathjournal//archives/2008/vol9-n2/paper2/v9n2-2pd.pdf [diakses 12-01-2012].

Griggs, J. R. & R. K. Yeh. 1992. Labeling Graphs with a Condition at Distance 2. *SIAM J. DISC. MATH*.,5(4): 586-595.

Huda, N & Amri, Z. 2012. Pelabelan Graceful, Skolem Graceful dan Pelabelan ρ pada Graf H-Bintang dan A-Bintang. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, 6(1): 30-37.

Rossen, K. H. 2003. *Discrete Matematics and its Applications, fifth edition*. New York: VAGA.

Siang, J. J. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: ANDI Offset.

Sugiarto. 2006. *Pengantar Dasar Matematika*. Semarang.

Sutarno, H. dkk. 2003. *Matematika Diskrit*. Jakarta: JICA.

Vaidya, S. K. & D. D. Bantva, D. D. 2010. The L(2,1)-Labeling of Some Middle Graphs. *Journal of Applied Computer Science & Mathematics*, 9(4): 104-107.

Yeh, R. K. 2006. A survey on labeling graphs with a condition at distance two. *Discrete Mathematics*, 306: 1217-1231.

Lingscheit, M., K. Ruff & Ward, J. 2009. $L(d,j,s)$ Minimal and Surjective Graf Labeling. *Rose-Hulman Mathjournal*, *volume 10.* Tersedia di https://www.rose-hulman.edu/mathjournal/archives/2009/vol10-n1/paper12/v10n1-12pd.pdf. [diakses 12-01-2012].

Bartle, G. R & D. R. Sherbert. 1994. *Introduction to Real Analysis*. Singapore: Jhon Wiley & Sons, INC.